مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۱

سال هفتم ، تابستان ۱۳۷۶ شمارهٔ اول ، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری) ❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی

طراح و صفحه‌آرا: علی دانشور ـ حسین بابایی ❑ رسّام: علی خوش جام ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، تابستان ۱۳۷۶، شمارهٔ اوّل.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.**

■ **مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**

■ **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.**

■ **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهیدمحمودحقیقت‌طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

به یاد آن شقایقِ پرپر

السلامُ علیکِ یا فاطمةَ الزهرا(س)

سلام‌ودرود به‌سرور زنان دوعالم‌والگوی یکتای‌آفرینش از ازل تا ابد. سلام خداودرود پروردگار براسوهٔ صبرواستقامت‌وایمان، اوکه اولین شهیدهٔمظلومهٔ‌اسلام بود. سلام برپاره‌تن‌پیامبرخدا(ص)که‌تربیت‌یافتهٔ دامان پیامبر(ص) بود و آن‌چنان دلسوز و مهربان برای پدر که به او لقب «اُم ابیها» (مادر پدرش) داد. سلام بر مادر حسن(ع)، حسین(ع)، و زینب(س). سلام بر اُمُّ‌الائمه زهرای اطهر سلام‌الله علیها.

از هر زاویه‌ای که به زندگی حضرت زهرا(س) نگاه کنیم، جز زیبایی، ایمان، تقوی و وَرَع چیزی نمی‌یابیم. سراسر عمر کوتاه و پربرکت حضرت زهرا(س) به تعلیم و تعلّم، کمک به محرومین، مبارزه با کفر و نفاق، دفاع از حق و حقیقت و عبادت سپری شد. چه در جنگهای صدر اسلام که عهده‌دار کمک‌رسانی به رزمندگان در پشت جبهه بودند و چه در زمانی که پیامبر(ص) به شهادت رسیدند و چه در هنگامی‌که امام‌علی(ع) مأمور به سکوت بودند، حضرت فاطمه سلام‌الله علیها در خط مقدم جبهه برای احقاق حق غصب‌شدهٔ امامش علی‌علیه‌السلام و جلوگیری از انحراف در اسلام مبارزه کردند و سرانجام در این مبارزه به شهادت رسیدند.

بر حاشیهٔ برگ شقایق بنویسید   گل تاب فشار در و دیوار ندارد

عزیزان دانش‌آموز به ایّام فاطمیه نزدیک می‌شویم. آرزو می‌کنم در این ایّام از برکتِ وجود مقدسِ صدّیقه کبری حضرت فاطمهٔزهرا(س) فیض برده و با مطالعه سیره زندگی ایشان و احادیث وارده از آن بانوی بزرگوار، بتوانیم راه صحیح زندگی را بیابیم.

در آستانهٔ شروع سال تحصیلی هستیم و امیدواریم إن‌شاءا... با برنامه‌ریزی دقیق، پشتکار و توکل به خدا سالی پُربار را آغاز کرده و بتوانید در تمامی مراحل تحصیل علم و دانش رشد کرده و به موازات آن شناخت و معرفت خودتان را نسبت به جهان هستی و خالق یکتایِ آن ـ جَل جَلاله ـ تکمیل کرده و با تمسک به‌ریسمانِ‌محکمِ ولایتِ اهل بیت ـ علیهم‌السلام ـ این معرفت را ثابت و پایدار کنید. موفق باشید.

والسّلام ـ سردبیر



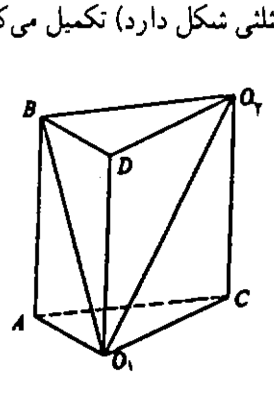
پرویز شهریاری

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۱)

اکنون برای مسالهٔ زیر (شبیه مسالهٔ ۸) تفسیری به یاری شکل پیدا کنید.

مسالهٔ ۱۰: دو کره، یکی به شعاع برابر ۱ و دیگری به شعاع برابر ۳ بر یکدیگر از بیرون مماس‌اند. از نقطهٔ M، که به فاصلهٔ ۳ از مرکز کرهٔ کوچکتر، دو خط راست گذرانده‌ایم که بر هر دو کره مماس باشند. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ بین دو مماس، به شرطی که بدانیم، یکی از آنها، با خط راستی که از مرکزهای دو دایره گذشته است، زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

مرکزهای دو دایره را O_1 و O_2 و نقطه‌های تماسِ مماسی را که با O_1O_2 زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد، با دو کره، A و B می‌نامیم. این ساختمان را تا پدیدآمدن منشور O_1ACDBO_2 (که قاعده‌هایی مثلثی شکل دارد) تکمیل می‌کنیم (شکل ۹)



شکل ۹

چون یال AB بر یالهای AO_1 و BO_2 عمود است، بنابراین با منشوری قائم سر و کار داریم.

در مستطیل O_1CO_2D، قطر O_1O_2 با یال O_1D، زاویهٔ ۴۵ـ درجه می‌سازد، پس این مستطیل، یک مربع‌است. برای قطر این مربع داریم: $|O_1O_2| = 4$، پس طول ضلع این مربع، برابر است با $2\sqrt{2}$. قاعده‌های این منشور، مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای با رأسهای زاویهٔ قائمهٔ D_1 و O هستند (زیرا $|AC|^2 - |AO_1|^2 = |O_1C|^2 = 9 - 1$). نقطهٔ M، بنابرشرط به‌فاصله ۳ از O_1 و روی‌ـ خط راست AB است. ولی $|O_1B| = 3$.

بنابراین، دو حالت ممکن است: ۱) M بر نقطهٔ B منطبق باشد؛ ۲) M قرینهٔ نقطه B نسبت به نقطهٔ A باشد.

سپس توجه می‌کنیم که مماس دوم عبارت است از قرینهٔ AB نسبت به صفحهٔ MO_1O_2. بنابراین، زاویه بین دو مماس برابر است با دو برابر زاویهٔ بین یکی از آنها با صفحهٔ MO_1O_2 (یا مکمل آن).

حالت اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم: M بر B منطبق است. باید زاویهٔ بین خط راست BA و صفحه BO_1O_2 را پیدا کنیم. این زاویه برابر است با زاویهٔ بین خط راست DO_1 با صفحهٔ BO_1O_2. هرم BDO_1O_2 را (که یک چهار وجهی

است). حجم این هرم برابر است با

$$\frac{1}{6}|BD||DO_2||DO_1| = \frac{4}{3}$$

مثلث BO_1O_2 را قاعدهٔ هرم می‌گیریم. داریم :

$$|BO_2| = 3,\ |BO_1| = 3,\ |O_1O_2| = 4$$

از این جا مساحت مثلث BO_1O_2 برابر $2\sqrt{5}$ می‌شود. اگر h را طول ارتفاعی بگیریم، که از D بر BO_1O_2 فرود آمده است، باید داشته باشیم :

$$\frac{2}{3}\sqrt{5}h = \frac{4}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

به این ترتیب، سینوس زاویهٔ بین DO_1 و صفحهٔ BO_1O_2، برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ می‌شود. پس

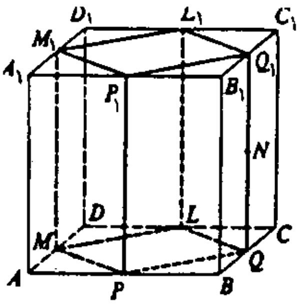
$$\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} \left(= 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$$

که در آن α همان زاویهٔ مجهول، یعنی زاویهٔ بین دو مماس است.

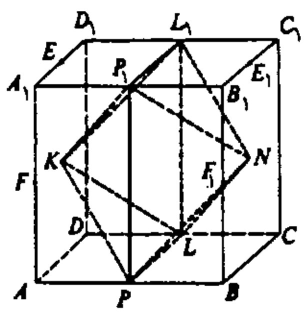
حالت دوم را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم. با وجود این، می‌توان پی‌برد که، پاسخ حالت دوم هم همان پاسخ حالت اول است. در واقع، AO_1، عمود مشترک AB و O_1O_2 است ؛ در ضمن، نقطهٔ M در حالت دوم، قرینهٔ نقطهٔ M در حالت اول نسبت به نقطهٔ A است. اشاره کنیم، شکلی را که در این جا مورد استفاده قرار دادیم، تنها ساختمانی نیست که بتواند ما را به نتیجه برساند می‌توان روشهای دیگری هم برای ملموس کردن مساله در جریان حل، پیدا کرد. به مسالهٔ دیگری توجه کنید :

مسالهٔ ۱۱. سه منشور منتظم با قاعده‌های چهارضلعی، در مکعبی با ضلع به طول واحد، به نحوی محاط شده‌اند که رأسهای هر منشور در وسط یالهای مکعب واقع شده‌اند. حجم بخش مشترک این سه منشور را پیدا کنید.

ساختمان شکل را به تدریج و گام به گام انجام می‌دهیم. در آغاز، مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را رسم می‌کنیم. (این گام نخست است، ولی ما برای صرفه‌جویی آن را به طور جداگانه نداده‌ایم). گام دوم رسم منشور $PQLMP_1Q_1L_1M_1$، محاط در آن است (مجموعهٔ این دو گام، در شکل ۱۰ نشان داده شده است). اکنون باید به سراغ منشوری برویم که قاعده‌های آن بر وجه‌های ABB_1A_1 و DCC_1D_1 واقع‌اند. روشن است که وجه جانبی این منشور که از نقطه‌های P و L و وسط پاره خط‌های راست BB_1 و CC_1 می‌گذرد، از منشور اول، «گوشه‌ای» به رأس Q جدا می‌کند، که عبارت است از چهاروجهی (هرم) PQLN، که در آن، N، نقطه وسط پاره‌خط راست QQ_1 است. به همین ترتیب، «گوشه‌هایی» در رأسهای M ،Q_1 و M_1 هم جدا می‌شوند. در نتیجه چند وجهی PLL_1P_1KN به دست می‌آید (شکل ۱۱). اکنون باید منشور سوم را رسم کرد (که قاعده‌های آن روی وجه‌های BCC_1B_1 و ADD_1A_1 است) و بخشی از چند وجهی را که در بیرون مرزهای این منشور قرار



شکل ۱۰



شکل ۱۱

دارد، از آن حذف کرد. اگر بخواهیم، این بخش مشترک سه منشور را روی شکل نشان دهیم، چنان درهم می‌رود که، عینی بودن خود را، به کلی از دست می‌دهد. به همین مناسبت، بهتر است، دنبالهٔ ساختمان را در ذهن خود مجسم کنیم. بخش مشترک دو منشور عبارت است از اجتماع دو هرم منتظم با قاعدهٔ مشترک PLL_1P_1. همین چند وجهی (که یک هشت وجهی است) می‌تواند به عنوان برخورد دو هرم (غیر منتظم) با قاعدهٔ مشترک PNL_1K در نظر گرفته شود. مرز منشور سوم، از نقطه‌های F ،E ،F_1 و E_1، وسط یالهای A_1D_1 ،AA_1، BB_1 و B_1C_1 از مکعب می‌گذرد و یالهای جانبی P_1K ،P_1P، P_1L_1 و P_1N از هرم PKL_1NP_1 را در نقطه‌های وسط آنها قطع می‌کند و بنابراین، این مرز $\frac{1}{8}$ حجم این هرم یا $\frac{1}{16}$ حجم هشت وجهی PKL_1NP_1L را می‌برد. همین استدلال را دربارهٔ هر یک از سه وجه جانبی دیگر منشور سوم می‌توان داشت.

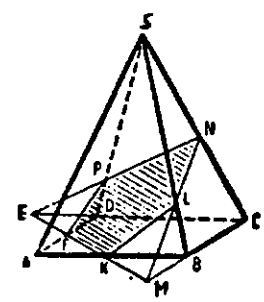
بنابراین، منشور سوم $\frac{1}{4}$ حجم هشت وجهی PLL_1P_1KN را از آن جدا می‌کند و بخش مشترک سه منشور حجمی برابر $\frac{3}{4}$ حجم آن دارد؛ یعنی حجم بخش مشترک برابر است با

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

III. دربارهٔ مقطع یک جسم، ضمن برخورد با یک صفحه. اغلب به مساله‌هایی برمی‌خوریم که در آنها صفحه‌ای یک چند وجهی (مکعب، هرم، منشور) را بریده است و می‌خواهیم بدانیم، این صفحه، حجم چند وجهی را به چه نسبتی قطع کرده است. برای حل چنین مساله‌هایی با دو گونه دشواری روبه‌رو می‌شویم: ۱) رسم مقطع و ۲) محاسبهٔ حجم هر یک از دو بخشی که بعد از برش چند وجهی به دست آمده است. ولی اگر برای حل مساله به ساختمان‌هایی بیرون از چند وجهی، تن در دهیم، می‌توانیم این دشواری‌ها را، تا حد زیادی کم کنیم. یکی از این مساله‌ها را دربارهٔ یک چند وجهی منتظم در نظر می‌گیریم (حل مساله، برای حالتهای کلی‌تر، یعنی چند وجهیهای دلخواه، تفاوت چندانی با این حالت ویژه ندارد).

مسالهٔ ۱۲. هرم منتظم SABCD به رأس S داده شده است. صفحه‌ای از نقطه‌های وسط یالهای AB، AD و CS گذرانده‌ایم. این صفحه، حجم هرم را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

K و F را، به ترتیب، وسط ضلع‌های AB و AD می‌گیریم (شکل ۱۲)؛ این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا امتداد ضلعهای CB و CD را به ترتیب، در M و E قطع



شکل ۱۲

کند. از مقایسهٔ مثلثهای BKM، AKF و DEF، به دست می‌آید:

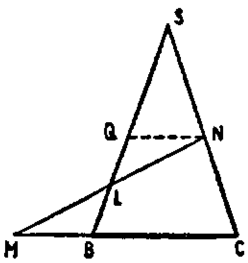
$$|MB|=\frac{1}{2}|BC| \quad (|MC|=\frac{3}{2}|BC|),$$

$$|ED|=\frac{1}{2}|DC| \quad (|EC|=\frac{3}{2}|DC|)$$

N را وسط یال CS می‌گیریم. نقطه‌های N و M، روی وجه SBC قرار دارند؛ بنابراین، خط راست MN، یال BS را در نقطه‌ای مانند L قطع می‌کند.

اکنون ببینیم، نقطهٔ L، یال BS را به چه نسبتی قطع می‌کند. برای این منظور، در مثلث CBS (شکل ۱۳)، خط راست NQ را ــ که وسط دو ضلع CS و BS را به هم وصل می‌کند ــ رسم می‌کنیم. مثلثهای NQL و LBM، که به این طریق به دست می‌آیند، با هم برابرند، زیرا:

$$|BM|=|NQ|=\frac{1}{2}|BC|, \quad L\hat{B}M=N\hat{Q}L, \quad B\hat{M}L=Q\hat{N}L$$



شکل ۱۳

از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود:

$$|BL|=|QL|$$

از این جا روشن می‌شود که نقطهٔ L، یال BS را به نسبت ۱ : ۳ بخش کرده است.

چون نقطه‌های E و N بر صفحه وجه SBC قرار دارند، خط راست EN، یال SD را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کند. به سادگی می‌توان ثابت کرد، این نقطه هم، یال DS را به نسبت ۱ : ۳ بخش می‌کند.

به این ترتیب توانستیم مقطع مورد نظر خود را بسازیم. صفحهٔ این مقطع، هرم را در پنج ضلعی LKFPN قطع و آن را به دو چند وجهی بخش می‌کند، که البته حجم آنها را نمی‌توان به سادگی پیدا کرد. برای محاسبهٔ دست کم یکی از این حجم‌ها باید ساختمانهای تازه‌ای اندیشید و چند هرم را مورد بررسی قرار داد.

اگر شکل را دقیقتر مورد مشاهده قرار دهیم، قانع می‌شویم که، حجم چند وجهی CDFKBLNP (که به وسیلهٔ مثلثهای DFP و KLB ، چهار ضلعیهای CNLB و CDPN، پنج ضلعیهای PFKLN و DFKBC احاطه شده است)، برابر است با حجم چهار وجهی NECM، به شرطی که حجمهای دو چهار وجهی LKBM و PEDF از آن کم شود.

حجم هر یک از این سه هرم را محاسبه می‌کنیم.

ارتفاع هرم مفروض SABCD را برابر h و طول ضلع قاعده آن را برابر a می‌گیریم ؛ در این صورت، حجم هرم SABCD ، چنین می‌شود.

$$V = \frac{1}{3}a^2h$$

چون نقطهٔ N وسط یال CS است، به سادگی می‌توان ثابت کرد، طول عمود وارد از این نقطه بر صفحهٔ ABCD، برابر است با نصف طول عمودی که از نقطهٔ S بر صفحهٔ ABCD فرود آید، یعنی طول این عمود برابر $\frac{1}{2}h$ می‌شود. به همین ترتیب روشن می‌شود، که طول هر یک از عمودهای وارد از نقطه‌های L و P بر صفحهٔ ABCD، برابر $\frac{1}{4}h$ است.

مساحت مثلث ECM برابر است با $\frac{9}{8}a^2$ و مساحت هر یک از مثلثهای DEF و BMK برابر است با $\frac{1}{8}a^2$ به این ترتیب، حجم هرم NECM چنین می‌شود :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h\times\frac{9}{8}a^2 = \frac{3}{16}ha^2 = \frac{9}{16}V$$

و حجم هر یک از هرمهای PEFD و LKBM برابر است با

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}h\times\frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{96}ha^2 = \frac{1}{32}V$$

بنابراین، برای حجم چند وجهی CDFKBLNP به دست می‌آید :

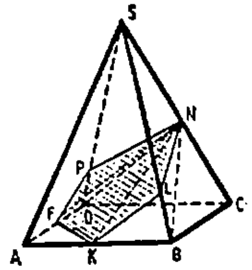
$$V_1 = \frac{9}{16}V - 2\times\frac{1}{32}V = \frac{1}{2}V$$

یعنی صفحهٔ مفروض، حجم هرم را به نسبت ۱ : ۱ تقسیم می‌کند.

توجه کنید : اگر برای محاسبهٔ حجم چند وجهی CDFKBLWP ، از این راه استفاده نمی‌کردیم، گرفتار محاسبه‌ای طولانی می‌شدیم. با وجود این، برای مقایسه، این راه طولانیتر را، که کمتر عینی و ملموس است، می‌آوریم.

دو صفحه، یکی از نقطه‌های K و B و N و دیگری از نقطه‌های N و D و F می‌گذرانیم (شکل ۱۴). این دو صفحه، ضمن برخورد، چند وجهی CDFKBLNP را به سه هرم بخش می‌کنند :

هرم NKBCDF (به رأس N و قاعده KBCDF)، هرم NKPL (به رأس N و قاعده KBL) و هرم NPDF (به رأس N و قاعده PDF).



شکل ۱۴

حجم این هرمها را محاسبه می‌کنیم.

چون نقطهٔ N یال CS را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند، طول عمودی که از نقطهٔ N بر صفحه ABCD فرود آید، برابر با نصف طول ارتفاع هرم مفروض، یعنی برابر $\frac{1}{2}h$ است.

مساحت پنج ضلعی KBCDF ، برابر است با مساحت مربع ABCD ، به شرطی که مساحت مثلث AKF از آن کم شود، یعنی

$$S_{KBCDF} = a^2 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}a^2 = \frac{7}{8}a^2$$

بنابراین حجم V_1 از هرم NKBCDF، چنین می‌شود :

$$V_1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h\times\frac{7}{8}a^2 = \frac{7}{48}ha^2 = \frac{7}{16}V$$

(V را حجم هرم SABCD گرفته‌ایم).

اکنون V_2 ، حجم هرم NKBL را پیدا می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم، V ، حجم هرم SABCD، دو برابر حجم هرم SABC است که، در آن، C رأس و ABS قاعده باشد. ارتفاع هرم اخیر را h_1 می‌گیریم ؛ در این صورت

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{3}h_1.S_{ABS} \Rightarrow V = \frac{2}{3}h_1.S_{ABS}$$

چون نقطهٔ N وسط یال CS است، عمود وارد از این نقطه بر

صفحهٔ ABS (یعنی ارتفاع هرم NKBL) برابر $\frac{1}{2}h_1$ می‌شود.
در ضمن $|BL|=\frac{1}{4}|BS|$ و $|KB|=\frac{1}{2}|AB|$ بنابراین

$$S_{KBL}=|BL|.\sin K\hat{B}L\times\frac{1}{2}|KB|=\frac{1}{8}S_{ABS}$$

و حجم V_2 را می‌توان به این ترتیب بیان کرد:

$$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h_1\times\frac{1}{8}S_{ABS}=\frac{1}{32}V$$

به همین ترتیب V_3 ، حجم هرم NPDF هم به‌دست می‌آید:

$$V_3=\frac{1}{32}V$$

اکنون دیگر حجم چند وجهی CDFKBLNP محاسبه می‌شود:

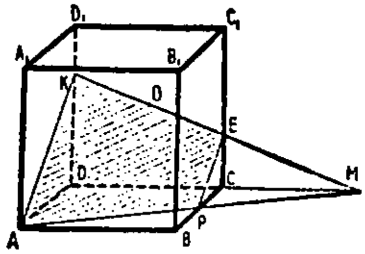
$$V_4=V_1+V_2+V_3=\frac{1}{2}V$$

یعنی هرم مفروض، به وسیلهٔ صفحهٔ قاطع، به نسبت ۱:۱ تقسیم شده است.

در مسأله‌ای که حل کردیم، کم و بیش روشن بود که در مقطع، یک پنج ضلعی به دست می‌آید. ولی اگر یکی از نقطه‌های مشخص کنندهٔ مقطع، در درون چند وجهی قرار می‌گرفت، دیگر نمی‌شد شکل مقطع را، خیلی زود تصور کرد. حل چنین مسأله‌هایی، اغلب طولانی و نیازمند ساختمانهای اضافی است. در این گونه موردها، می‌توان صفحه‌ای کمکی رسم کرد که از یک خط راستِ واقع بر مقطع مورد نظر و یک خط راستِ واقع بر یکی از وجه‌های چند وجهی گذشته باشد. بعد باید نقطهٔ برخورد این دو خط راست را پیدا کرد، یعنی یک نقطهٔ اضافی از مقطع که بر یکی از وجه‌های چند وجهی قرار دارد. دنبالهٔ کار، شبیه روشی است که برای حل مسألهٔ ۱۲ به کار گرفتیم.

مسألهٔ ۱۳. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، با یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 مفروض است. اگر صفحه‌ای، از نقطهٔ A و وسط یال BC و مرکز وجه DCC_1D_1 بگذرانیم، حجم مکعب به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

وسط یال BC را P می‌نامیم (شکل ۱۵) خط راستی که از نقطه‌های A و P بگذرد، امتداد یال DC را در نقطهٔ M قطع می‌کند؛ در ضمن داریم: $|CM|=|DC|$. مرکز وجه DCC_1D_1 را O می‌نامیم. در این صورت، خط راستی که از نقطه‌های O و M می‌گذرد، یالهای CC_1 و DD_1 را به ترتیب در E و K قطع می‌کند. در ضمن نقطهٔ E یال C_1C را به نسبت ۱ :۲ و نقطهٔ K،



شکل ۱۵

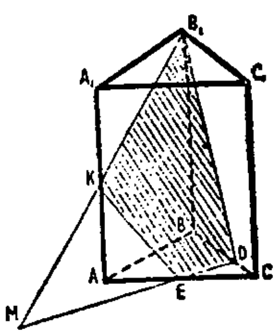
یال D_1D را به نسبت ۲ :۱ تقسیم می‌کند. حجم چند وجهی ABCDKE برابر است با تفاضل حجمهای دو چهار وجهی KAMD و EPMC. اگر حجم مکعب مفروض را V و حجم هرمهای KAMD و EPMC را به ترتیب V_1 و V_2 و حجم چند وجهی ABCDAE را V_3 بنامیم، به دست می‌آید (خودتان محاسبه کنید):

$$V_1=\frac{2}{9}V,\ \ V_2=\frac{1}{36}V,\ \ V_3=\frac{7}{36}V$$

یعنی صفحه‌ای که مکعب را بریده است، حجم آن را به نسبت ۲۹ :۷ تقسیم می‌کند.

مسألهٔ ۱۴. منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ ، با یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 داده شده است. از وسط یالهای AA_1 و AC و رأس B صفحه‌ای گذرانده‌ایم. این صفحه، حجم منشور را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

وسط یال AA_1 را K می‌نامیم (شکل ۱۶). خط راستی که از نقطه‌های B_1 و K می‌گذرد، امتداد یال BA را در نقطهٔ M قطع می‌کند. در ضمن $|MA|=|AB|$. نقطه‌های M و E را با یک خط راست به هم می‌پیوندیم (E، وسط یال AC است)؛ این خط راست، یال BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند؛ در ضمن پاره‌خط راست BC، در نقطهٔ D، به نسبت ۱: ۲ تقسیم می‌شود.



شکل ۱۶

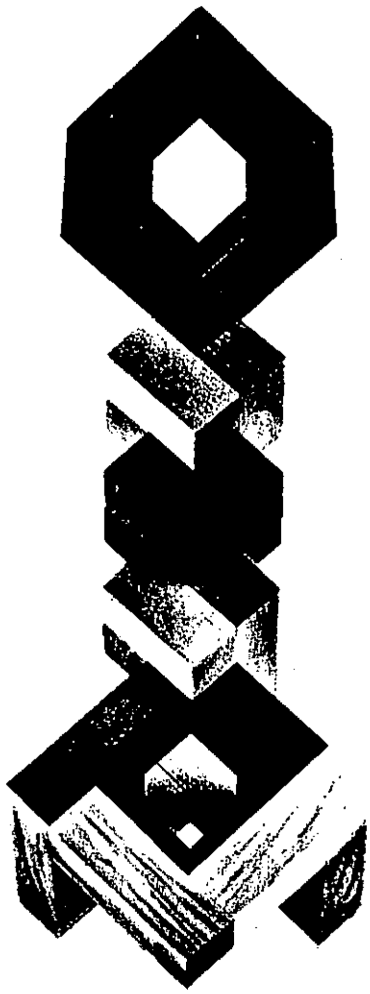
حجم جند وجهی $ABDEKB_1(V_3)$ برابر است با تفاوت حجمهای دو هرم B_1BDM و $KAEM(V_2, V_1)$ و داریم :

$$V_1 = \frac{4}{9}V, \quad V_2 = \frac{1}{12}V,$$

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{13}{36}V$$

که در آن V ، حجم منشور مفروض است. بنابراین، صفحهٔ مقطع، حجم منشور را به نسبت ۲۳ :۱۳ تقسیم می‌کند.

تابعد



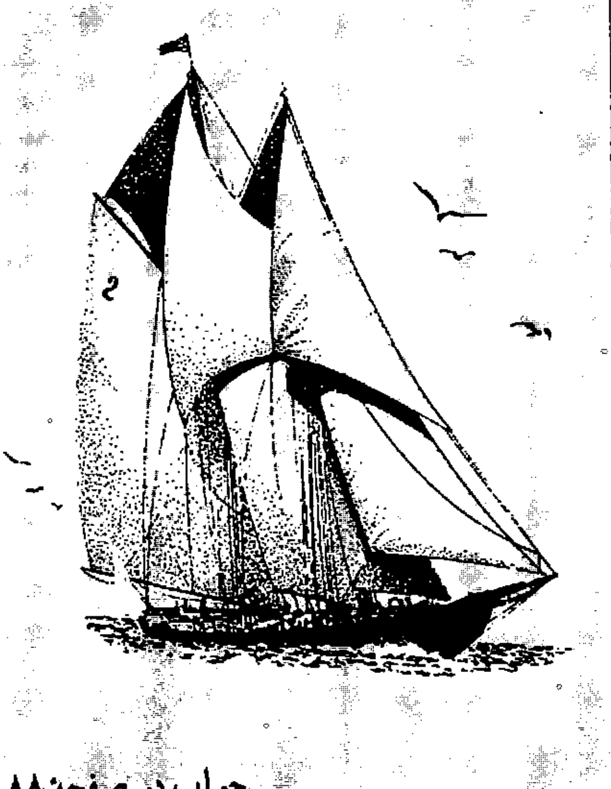


تفریح اندیشه ۱

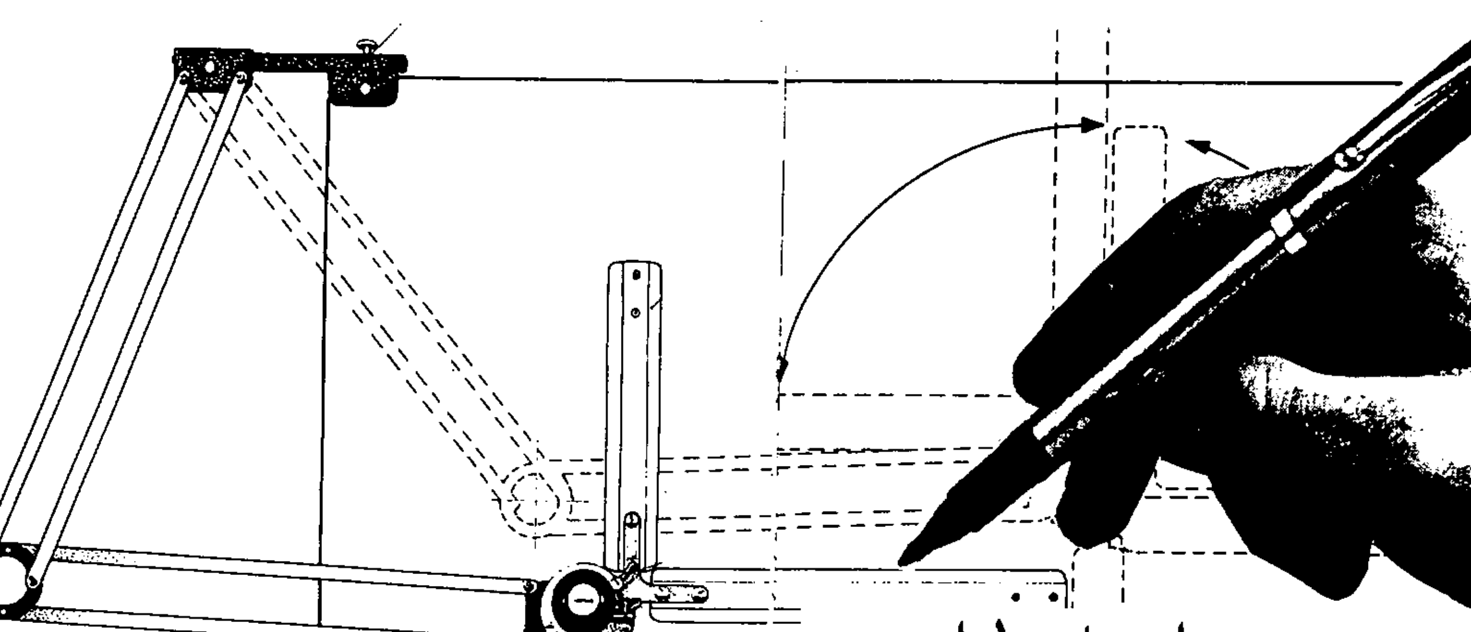
تعدادی جعبه

آقای اعتباری کارمند کشتیرانی با سفارش غیرمعمول بسته‌بندی ۱۰۰ جعبه روبرو شده بود. هر جعبه باید به شکل مکعب و ضلع هر مکعب یک اینچ طولانیتر از مکعب قبلی، و ضلع کوچکترین مکعب ۱ اینچ باشد.

می‌توانید راهی ساده برای یافتن سطح کل پارچهٔ لازم به او نشان دهید؟ و در ضمن حجم محصور توسط ۱۰۰ جعبهٔ مزبور را؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

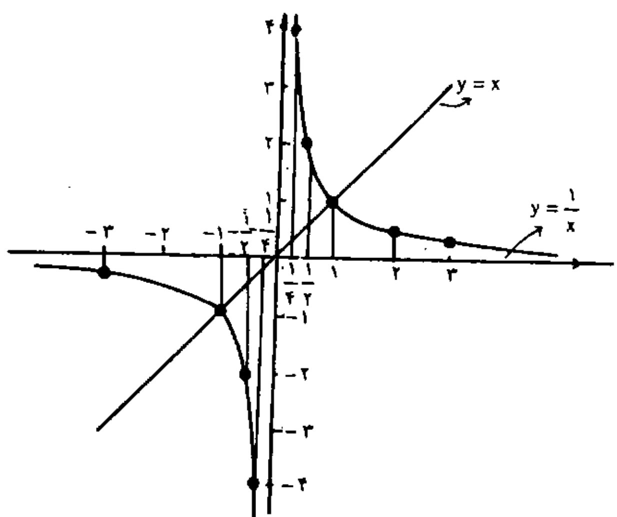


رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی نمودار تابع f

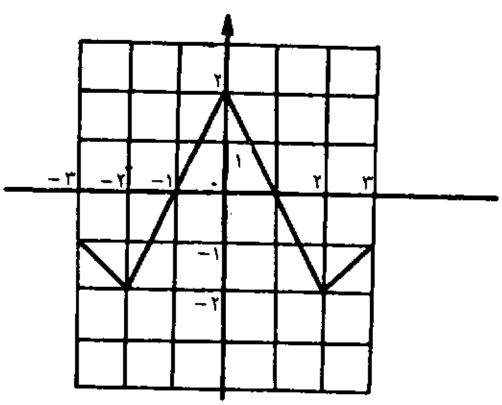
احمد قندهاری

۱ــ فرض کنیم تابع f به معادله $f(x) = x$ باشد. می‌خواهیم تابع به معادله $y = \frac{۱}{f(x)}$ یا $y = \frac{۱}{x}$ را رسم کنیم. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم. آن‌گاه به کمک مختصّات نقاط، نمودار تابع به معادله $y = \frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم.

x	-۳	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
$f(x)=x$	-۳	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
$y=\frac{۱}{x}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	-۴	تعریف نشده	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$



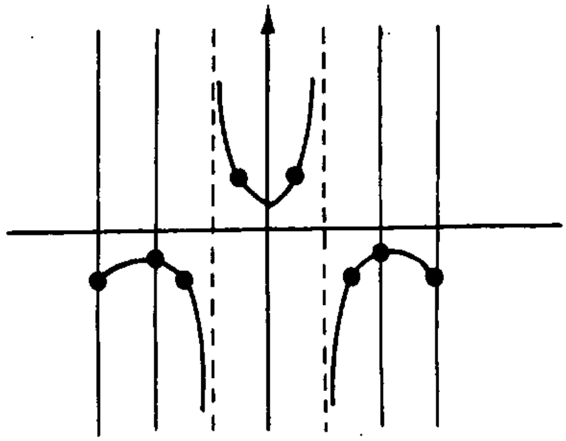
۲ــ فرض کنیم شکل زیر نمودار تابع f باشد. نمودار تابع $y = \frac{۱}{f}$ را رسم می‌کنیم.



نمودار تابع f

نتایج حاصل از نمودار را در جدول زیر تنظیم می‌کنیم.

x	-۳	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
$f(x)$	-۱	-۲	-۱	۰	۱	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۱
$y=\frac{۱}{f(x)}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	تعریف نشده	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	تعریف نشده	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	-۱



نمودار تابع $y=\frac{۱}{f}$

۳ــ توجه : در مورد دو تابع f و $\frac{۱}{f}$ نتایج زیر برقرار است . فرض می‌کنیم f تابعی پیوسته و $D_f \subset R$

الف : اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه تابع $\frac{۱}{f}$ ، اکیداً نزولی است.

ب : اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه، تابع $\frac{۱}{f}$ ، اکیداً صعودی است.

پ : اگر $f(x)>۰$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{f(x)}>۰$

ت : اگر $f(x)<۰$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{f(x)}<۰$

ث : اگر $f(x)=-۱$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{f(x)}=۱$

ج : اگر $f(x)=-۱$ ، آن‌گاه، $\frac{۱}{f(x)}=-۱$

چ : اگر $f(x)\to ۰^+$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{f(x)}\to +\infty$

ح : اگر $f(x)\to ۰^-$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{f(x)}\to -\infty$

خ : اگر $f(x)\to +\infty$ ، آن‌گاه $\frac{۱}{f(x)}\to ۰^+$ درنتیجه خط به معادله $y=۰$ مجانب افقی تابع $\frac{۱}{f}$ است.

د : اگر $f(x)\to -\infty$ ، آن‌گاه، $\frac{۱}{f(x)}\to ۰^-$ درنتیجه خط به معادله $y=۰$ مجانب افقی تابع $\frac{۱}{f}$ است.

ذ : اگر $b\neq ۰$ و $M\Big|_b^a$ نقطه ماکزیمم (می‌نیمم) نسبی تابع f باشد، آن‌گاه $M'\Big|_{\frac{۱}{b}}^a$ نقطه می‌نیمم (ماکزیمم) نسبی تابع $\frac{۱}{f}$ است.

ر : اگر $P\Big|_۰^a$ نقطه اکسترمم تابع f باشد، آن‌گاه خط به معادله $x=a$ انفصال مضاعف تابع $\frac{۱}{f}$ است.

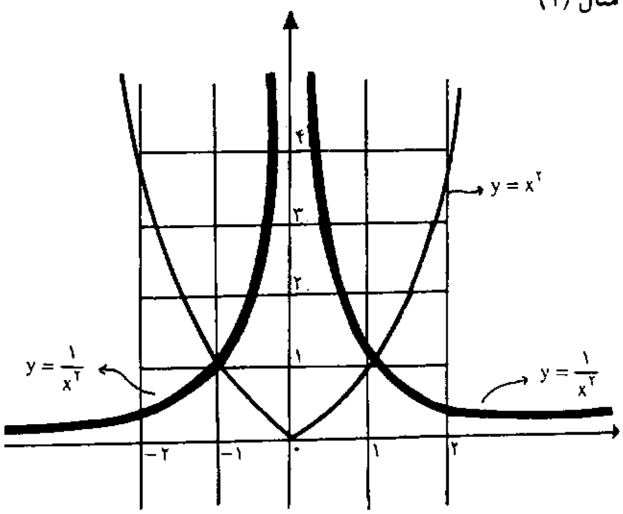
ز : اگر $K\Big|_۰^a$ نقطه عادی تابع f باشد، آن‌گاه خط به معادله $x=a$ ، انفصال ساده تابع $\frac{۱}{f}$ است.

س : صفرهای تابع f، معادلات مجانبهای قائم منحنی تابع $\frac{۱}{f}$ است.

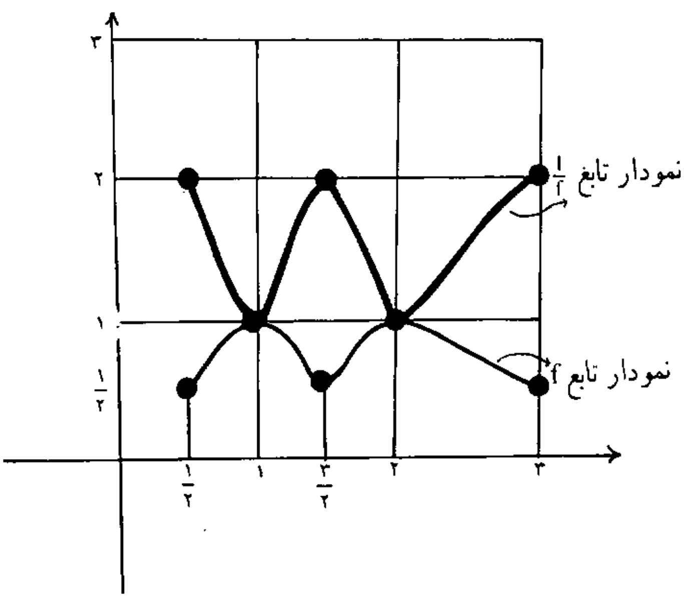
ش : اگر f تابع ثابت باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{f}$ هم تابع ثابت است.

با توجه به مطالب گفته شده نمودارهای چند تابع f و $\frac{۱}{f}$ را در یک صفحه محورهای مختصّات رسم می‌کنیم.

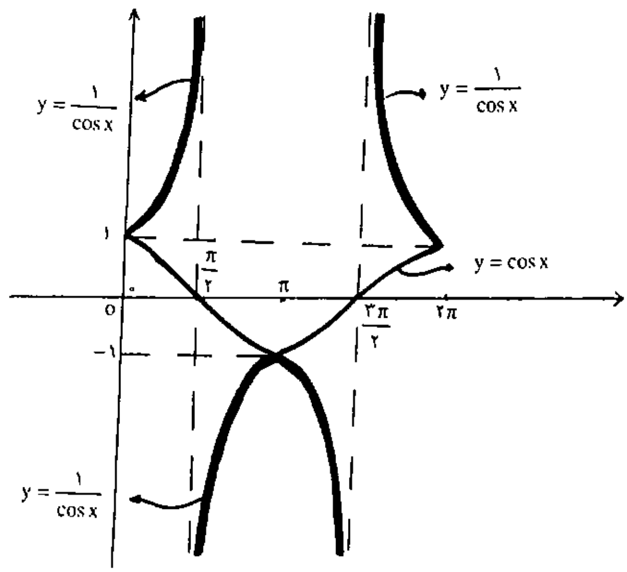
مثال (۱)



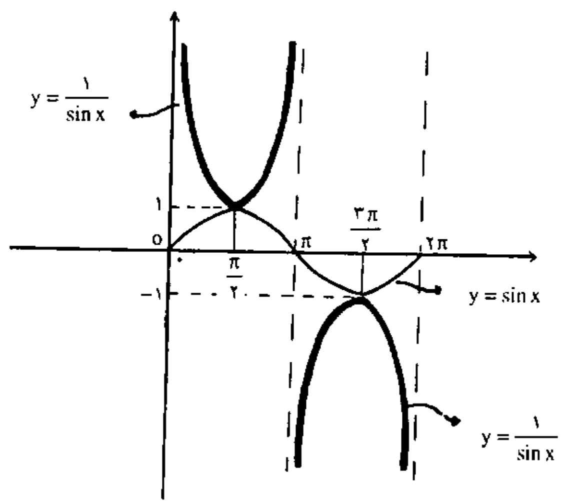
مثال (۲)



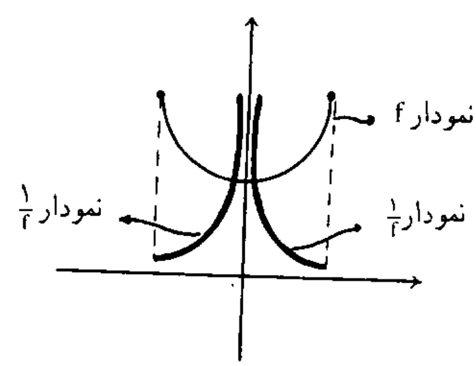
مثال (۳)



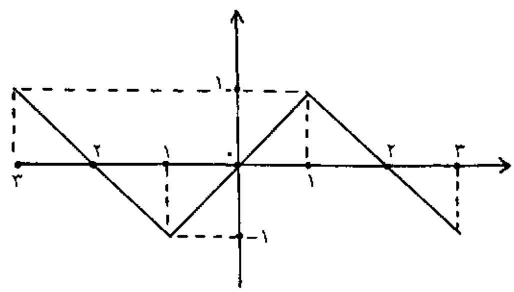
مثال (۴)

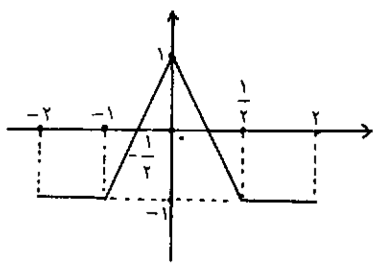


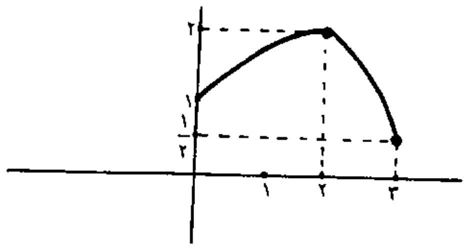
مثال (۵)

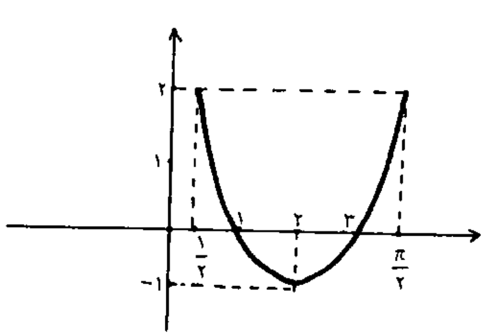


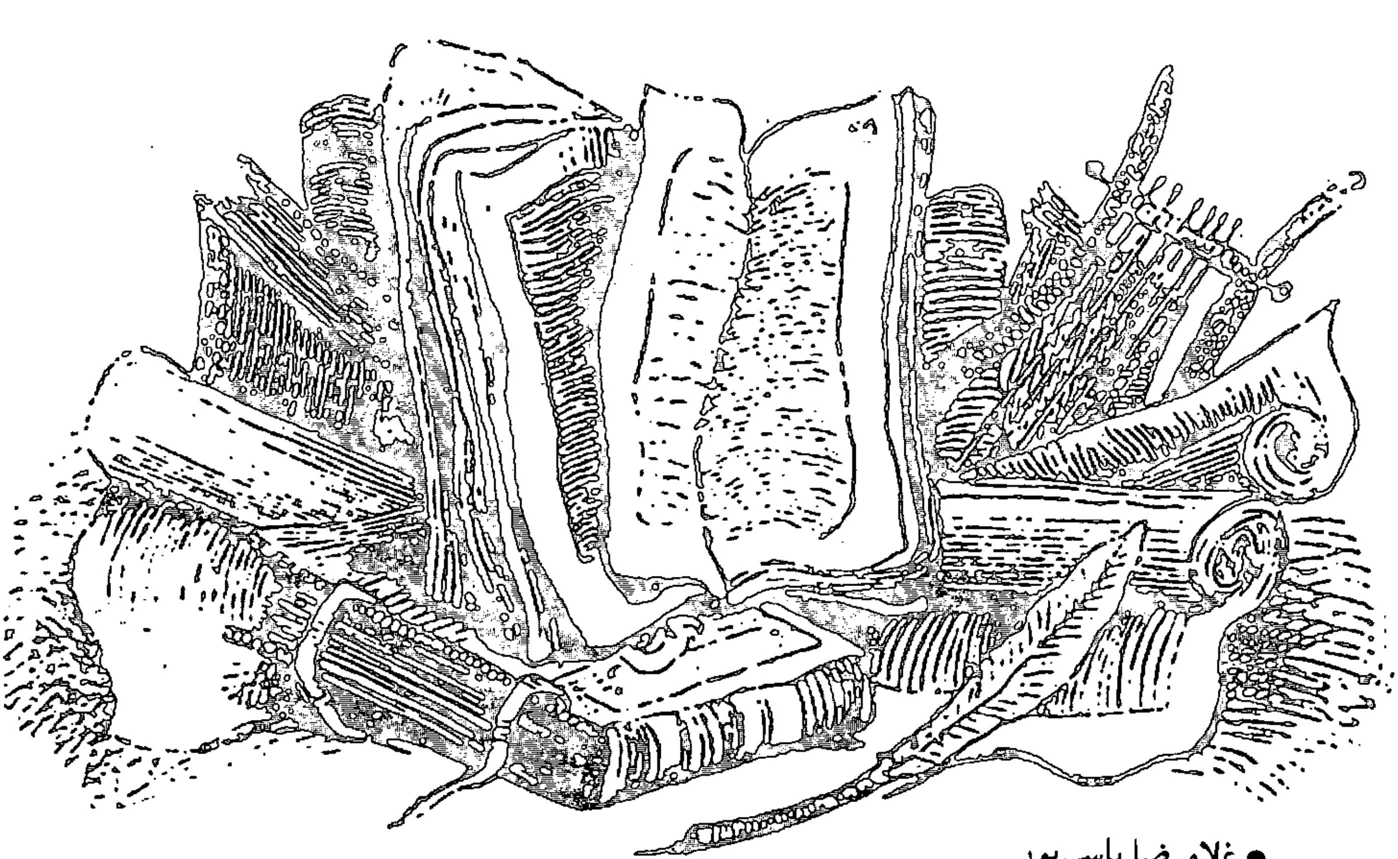
تمرین: نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع $\frac{۱}{f}$ را رسم کنید.











● غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۰)

در بررسی مجلات ریاضی ایران به شمارهٔ ۲۶ یکان رسیده‌ایم. دورهٔ جدید مجله با این شماره آغاز می‌شود. مجله تا این شماره بنا به گواهی عدد ۲۶، توفیق این را داشته است که ۲۶ شماره چاپ شود. علاوه بر این ۶ کتاب دیگر نیز از انتشارات این مجله تا این تاریخ، یعنی از خرداد ۱۳۴۵ است. این کتابها عبارت‌اند از: مجموعهٔ علمی یکان سال، یکان سال مخصوص، راهنمای ریاضیات متوسطه، معماهای ریاضی، مسائلی از حساب استدلالی، یکان سال ۱۳۴۴.

در این شمارهٔ مجله مصاحبه‌ای دارد با مرحوم پروفسور تقی فاطمی که از مطالب خواندنی آن است، از دیگر مطالب خواندنی مجله خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان به قلم دکتر محسن هشترودی است.

در این‌جا برای استفادهٔ بیشتر خوانندگان قسمتهایی از مصاحبه با استاد پروفسور تقی فاطمی را می‌آوریم.

ــ جناب استاد، اطلاع بر بیوگرافی جنابعالی، آرزوی همهٔ کسانی است که محضر درس شما را درک کرده‌اند. به علاوه، بیوگرافی حضرتعالی گوشه‌ای از تاریخ ریاضیات معاصر ایران خواهد بود. تقاضا دارد مختصری از شرح حال خود، سابقهٔ تحصیلات در ایران و در خارج، مقامات علمی که تاکنون عهده‌دار بوده‌اید، بیان فرمایید.

ــ قبل از تحصیلات عالیه، در یزد به عنوان «مفتش معارف» خدمت می‌کردم و ضمن آن در مدارس آن‌جا به تدریس اشتغال داشتم.

بعد که در اصفهان مدرسهٔ متوسطه دایر شد، به آن‌جا رفتم و دو سال آخر تحصیلات متوسطه را در مدرسهٔ صارمیه گذراندم. مدیر این مدرسه آقای ضیاءالدین جناب بودند، که هنوز هم مشغول به خدمت فرهنگ می‌باشند و اگر در کارخود توفیقی داشته‌ام، آن‌را مرهون تشویقهای ایشان می‌دانم. از جمله معلمان مرحوم مهندس علی ریاضی و مرحوم غلامحسین زیرک زاده بودند و دیگری استاد جلال همایی، که نه تنها حق تعلیم بر بسیاری از اشخاص را دارد، بلکه با تبحری که در بیشتر علوم و فنون دارد و با تحقیقات و تتبعاتی که در آثار گذشتگان از علمای ایرانی به عمل آورده است، فردی ممتاز می‌باشد.

در سال ۱۳۰۶ با اولین دستهٔ محصلین که از طرف وزارت



● استاد تقی فاطمی

جنگ به فرانسه اعزام می‌شد به این کشور رفتم. با وجود این‌که در امتحان مسابقهٔ اعزام رتبهٔ اول شده بودم و می‌توانستم رشتهٔ پزشکی را که آن موقع داوطلب زیاد داشت و از نظر مادی هم دورنمای خوبی داشت انتخاب کنم، اما به علت شوق باطنی، رشتهٔ معلمی را انتخاب کردم و داوطلب ورود به «دانشسرای عالی» Ecole Normale Supérieure پاریس شدم. در فرانسه هنوز دیپلم ایران را نمی‌شناختند. مرا در کلاس پایان تحصیلات متوسطه قبول کردند. اما بعد از یکی دو هفته که معلومات مرا سنجیدند به کلاس تهیهٔ «Mathématiques spe´ciales» دانشگاه منتقل شدم. به‌علاوه همین موضوع باعث شد که از آن تاریخ به بعد در فرانسه، دیپلم ایران را بشناسند. سه سال در کلاس تهیه ماندم و بعد در امتحان مسابقهٔ ورودی مدارس بزرگ شرکت کردم. در امتحان کتبی پذیرفته شدم، اما فقط در امتحان شفاهی «اکل نرمال سوپریور» شرکت کردم و پذیرفته شدم. طبق معمول در سال اول، دروس دورهٔ لیسانس ریاضی را تهیه کردم و گذراندم و در دو سال آخر دورهٔ مدرسه برای تعلیم و تدریس مهیا شدم و ضمناً یک دیپلم هندسهٔ عالی را گرفتم. بالاخره در آخرین مرحله، امتحان آگرگاسیون راگذراندم و قبول شدم. در این موقع، سال ۱۳۱۲، به ایران برگشتم. ابتدا دو سه ماهی منحصراً در مدارس نظام مشغول بودم. بعد، با اقداماتی که از طرف وزارت فرهنگ به عمل آمد به آن وزارت منتقل شدم و در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی به تدریس مشغول شدم، علاوه بر آن، در دانشکدهٔ فنی هم تدریس داشتم در ابتدای ورود، در چند رشته تدریس می‌کردم؛ علاوه بر مکانیک استدلالی که هنوز هم درس می دهم، مادامی که استاد به قدر کافی نبود، در دانشکدهٔ علوم، ریاضیات عمومی و آنالیز را نیزتدریس می‌کردم.

غیر از تدریس، فقط چند ماهی در وزارت فرهنگ به عنوان مدیر کل فنی خدمت کرده‌ام. بعد آن را کنار گذاشتم: شغل معلمی را به هر کار دیگر ترجیح می‌دهم.

ــ آیا جناب عالی تنها معلم ایرانی هستید که تحصیلات تخصصی خود را در دانشسرای عالی فرانسه گذرانده‌اید؟ و آیا این مدرسهٔ عالی هنوز هم از لحاظ تربیت معلم مقام اول را در دنیا دارد؟ دربارهٔ این مدرسهٔ عالی مختصری بیان فرمایید.

ــ در فرانسه چند مدرسهٔ عالی هست که به آنها مدارس بزرگ (Lesgrands Ecoles) می‌گویند. از معروفترین این مدارس یکی «پلی‌تکنیک» است که در زمان ناپلئون بزرگ تأسیس شده است. دیگری «اکل نرمال سوپریور» است که حدود صد سال از تأسیس آن می‌گذرد. هم امتحان مسابقهٔ ورودی و هم امتحان نهایی این مدرسه بسیار مشکل است. برای جواب دادن به بعضی از سؤالات امتحانی هفت یا هشت ساعت وقت می‌دهند. هرکس چه فرانسوی و چه غیر آن می‌تواند در امتحان

مسابقهٔ ورودی این مدرسه شرکت کند. تاکنون مردان بزرگی از این مدرسه بیرون آمده‌اند، مثل پوانکاره و رجال سیاسی یا علمی دیگر مانند ادوارد هریو، اغلب رؤسای دولتهای فرانسه فارغ‌التحصیلان این مدرسه هستند.

ــ آیا از ایرانیان فقط جناب عالی فارغ‌التحصیل آگرژهٔ این مدرسه هستید؟ آیا اشخاص دیگری هم هستند؟

ــ گمان می‌کنم تنها باشم.

ــ از زمان تأسیس مدارس به سبک جدید در ایران، چه استادان و معلمانی در تعلیم و اشاعهٔ ریاضیات تأثیر کلی داشته‌اند؟ و نحوهٔ تأثیر آنها چگونه بوده است؟

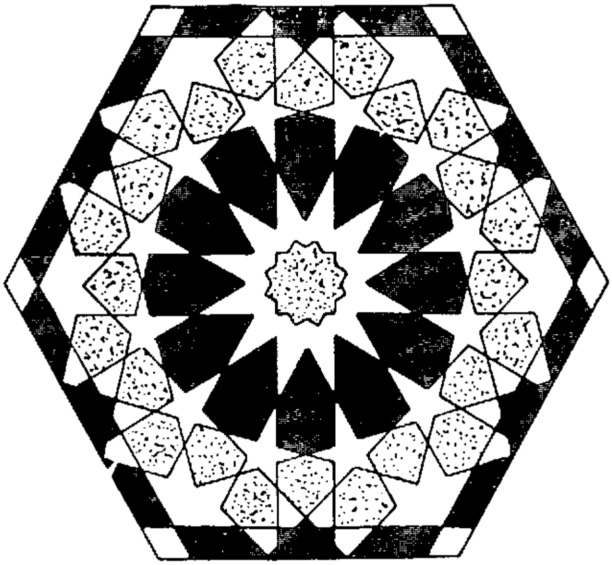
ــ سیر تکاملی دنیا تعلیم و پیشرفت ریاضیات را در ایران ایجاب کرده است. از معلمان قدیمی مرحوم غلامحسین رهنما، عشقی وافر به تدریس ریاضیات داشت و با وجود نداشتن تحصیلات منظم بیش از دیگران در پیشرفت ریاضیات ایران تأثیر داشته است. اشخاصی دیگر هم بوده‌اند که بیشتر تأثیر آنها از راه ترجمهٔ کتابهای ریاضی بوده است.

ــ از ابتدای تأسیس (مدارس ابتدایی، متوسطه و عالی) در ایران تاکنون چه تحولاتی در نحوهٔ تدریس ریاضیات انجام گرفته است؟ آیا این تحولات در جهت مطلوب آن انجام گرفته است یا در جهت عکس آن؟

ــ هیچ تغییر و تحولی حاصل نشده است. متأسفانه به همان سبک قدیمی، بدون تغییر برنامه، محفوظ مانده است. قریب چهل یا پنجاه سال است که برنامه‌ای از فرانسه ترجمه شده است و این برنامه تاکنون بدون هیچ تغییری اجرا شده است. چند مرتبه‌ای هم که تغییر برنامه عنوان شده است، فقط موادی از برنامهٔ سابق یا پیش و پس شده و یا حذف گردیده است، در حالی که در خود فرانسه، کل برنامه‌ها تغییر اساسی کرده است. طرز تدریس هم، با کمال تأسف، هیچ تغییر نکرده است.

ــ اقداماتی که تاکنون برای تربیت دبیران و معلمان ریاضی مدارس ایران انجام گرفته، تا چه حد موفقیت‌آمیز بوده است؟ به عقیدهٔ جناب عالی، آیا این اقدامات بر اساس صحیحی استوار بوده است؟

ــ تربیت معلم ریاضی از واجبات است، در این موضوع شکی نیست. آن‌چه هم که تاکنون دربارهٔ تربیت معلمان ریاضی ایران انجام گرفته لازم بوده اما به هیچ وجه کافی نبوده است. طرز تربیت ناقص است؛ از جهت کمیت، به قدر کافی دبیر و آموزگار تربیت نمی شود. از جهت کیفیت، وجود یک عده



معلمان علوم تربیتی برای تربیت معلم کافی نیست.

نکتهٔ مهم، انتخاب داوطلبان شغل معلمی است. باید با آنها مصاحبه شود و دقت شود که هم ذوق معلمی را داشته باشند و هم استعداد آن را و تنها به خاطر استخدام با رتبهٔ دبیری شرکت نکرده باشند. معلم باید دارای شرایط زیادی باشد، از جمله حاضرالذهن و حاضرالجواب باشد.

ــ نسبت به کمبود دبیر و آموزگار چه باید کرد؟ آیا کشورهای دیگر هم با این مسأله روبرو هستند؟

ــ در کشورهای دیگر هم این مسأله کاملاً حل نشده است. اما به نسبت زیادی از ما جلو هستند. حتی در آمریکا هم از این لحاظ در مضیقه هستند (اما در آنجا کسری دبیر را از دیپلمه‌ها تأمین نمی‌کنند). شاید در بعضی از کشورهای کاملاً پیشرفته مثل سوئد، این مساله حل شده باشد.

ــ دربارهٔ کتابهای درسی ریاضی که تاکنون در مدارس ایران مورد استفاده واقع شده است، نظر جناب عالی چیست؟ چه اقدام اساسی را برای بهبود وضع کتابهای درسی ضروری می‌دانید؟

ــ مؤلف کتاب باید در آن‌چه که می‌خواهد بنویسد، متبحر و به آن مسلط باشد. در قسمت ریاضی اشخاص زیادی نداشته‌ایم که در تعلیم ریاضیات متبحر و متخصص باشند، ناچار نمی‌توانسته‌اند مؤلف باشند. اما بعضی وقتها ترجمه‌های خوب شده است و این‌هم حداکثر کار خوبی بوده است که انجام گرفته است. بعضی هم که مترجم خوب نبوده‌اند و هر مطلبی را از گوشه‌ای فراهم آورده‌اند، کتاب آشفته‌ای تهیه کرده‌اند. تقریباً در ایران کتاب ریاضی خوب تألیف نشده است. آن‌چه انجام گرفته،

ترجمه بوده است، که اگر از کتابهای خوب ترجمه شده نتیجه خوب بوده است.

ــ راجع به تجدید نظری که اخیراً در مقاطع تحصیلی انجام گرفته و برنامه‌های آن در شرف تنظیم است، عقیدهٔ جناب عالی چیست؟

ــ اطلاعی ندارم.

ــ تدریس ریاضیات براساس نظریهٔ جدید را تا چه حد و از چه مرحله ای در مدارس ایران جایز می‌دانید؟

ــ به‌طورکلی ما هم باید با سایر کشورها همگام باشیم، نمی‌توانیم با روش قدیم درس بخوانیم، درحالی که اساس علوم و فنون تغییر کرده است. اما چگونه؟ باید سعی کنیم یاد بگیریم بسیاری از ایرانیان هستند که این رشته‌ها را تحصیل می‌کنند، آنها را بخواهیم، یا اینکه اشخاصی را برای این کار بفرستیم. برای معلمان شاغل هم باید کلاس کارآموزی ترتیب داد. کلاسی که واقعاً برای آنها آموزنده و قابل استفاده باشد، نه این‌که وقت آنها تلف شود و بالنتیجه بعدها هم از شرکت در چنین کلاسهایی خودداری کنند. علاوه بر آن، معلمان باید برای شرکت در کلاسهای کارآموزی یک نوع اجبار داشته باشند. قدرت مرکزی لازم است. باید راهنمایان تعلیماتی امین و وارد داشته باشیم تا گزارشهای دقیق و صحیحی بدهند و به گزارش ایشان هم ترتیب اثر داده شود.

بسیاری از قسمتهای برنامه هست که اصلاً اجرا نمی‌شود، مثلاً در کلاس پنجم ابتدایی طبق برنامه، تناسب باید از راه تحویل واحد انجام گیرد، اما تاکنون چنین نبوده است، با وجودی که راهنمایان تعلیماتی و بازرسان فنی هم داشته‌ایم. اصل آن است که معلمان علاقه‌مند باشند.

ــ برای پرورش خاص جوانان با استعداد چه روشی را پیشنهاد می‌فرمایید؟آیا تشکیل کلاسهای خاص را برای آنها جایز می‌دانید؟

ــ تشکیل کلاس مخصوصی برای آنها جایز نیست. جاهای دیگر هم چنین کلاسهایی نیست. باید تشویق شوند. در فرانسه به این‌گونه جوانان بورسهای تحصیلی می‌دهند و این کار از راه مسابقات انجام می‌گیرد.

ــ آیا جایز است که به محصلین با استعداد اجازه داده شود که بعضی از کلاسها را در تابستان بگذرانند. یعنی از یک کلاس به کلاس بالاتر جهش داشته باشند؟

ــ جهش از یک کلاس به کلاس بالاتر از لحاظ اطلاعات عمومی به محصل لطمه می‌زند، بهتر است که هرکس تمام کلاسها را ببیند.

ــ برای معلمان و دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی چه پیامی دارید که به وسیلهٔ مجلهٔ یکان به ایشان ابلاغ شود.

ــ معلمان به مقتضای شرایط سعی کنند، که همواره نسبت به تربیت فرزندان خود و ما، علاقهٔ خاص داشته باشند. موضوع اساسی آن است که مطالبی را که می‌خواهند بگویند، سعی داشته باشند برای مستمعین قابل فهم باشد. به عبارت ساده تر هیچ‌گاه در صدد اظهار فضل نباشند. فضل و امتیاز هر معلم در آن است که مطلبی را که می گوید، قابل استفاده باشد، نه آن‌که مسائلی را مطرح کند که شاید خودش هم برای حل آن احتیاج به مراجعهٔ به کتاب داشته باشد و این خود نکتهٔ مفید و مؤثری است.

غالباً دیده می‌شود که دانش‌آموزان از کتابهای علمی و حتی کتابهای درسی خود استفاده نمی‌کنند، و بیشتر اوقات، این مطلب بنابر توصیهٔ ضمنی معلمان انجام می‌گیرد. حال آنکه در مدرسه شاگرد باید طرز جدی خواندن کتاب و مطالعهٔ علمی را مثل یک مطلب درسی یاد بگیرد. محصل باید «محقق» بار آید و بتواند شخصاً دربارهٔ مطالب مورد علاقهٔ خویش به تحقیقات و مطالعات بپردازد. و با معلمین است که آنان را در این راه هدایت نمایند. خداوند همه را توفیق عنایت فرماید.



در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع
(قسمت سوّم)

• حمیدرضا امیری

اعمال جبری روی تابعها

اگر دو تابع f و g مفروض باشند، در این صورت مجموع $(f+g)$، تفاضل $(f-g)$، حاصل‌ضرب $(f.g)$ و خارج قسمت $(\frac{f}{g})$ این دو تابع تابعهایی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

ب) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ج) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

د) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

هـ) اگر $r\in\mathbb{R}$ و $(rf)(x)=rf(x)$

دامنهٔ تابعهای $(f+g)$، $(f-g)$ و $(f.g)$ دقیقاً اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنهٔ $\frac{f}{g}$ نیز به جز نقاطی که $g(x)=0$، اشتراک دامنه‌های f و g است. دامنه (rf) همان دامنهٔ f است.

برای درکِ بهتر و فهمِ عمیقتر به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2-1$، اولاً $(D_f\cap D_g)$ را مشخص کنید و ثانیاً حاصل $(f\pm g)$ و $(f.g)$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$$D_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f\cap D_g=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+x^2-1$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x^2+1$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$$

توجه: دامنهٔ تابعهای $(f\pm g)$ و $(f.g)$ همان $D_f\cap D_g$ است ولی دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ شامل ±1 نمی‌باشد یعنی،

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(\mathbb{R}^+\cup\{0\}\right)-\{-1,1\}$$

مثال ۲: اگر دو تابع $f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,5),(5,0)\}$ و $g=\{(1,4),(3,0),(5,2),(6,1),(7,3)\}$ مفروض باشند، تابعهای $(f\pm g)$ و $(f.g)$ و $\frac{f}{g}$ و $(4f)$ را مشخص کنید. قبل از هر چیز ابتدا $(D_f\cap D_g)$ را معین می‌کنیم،

$$D_f=\{1,2,3,4,5\} \; ,$$

$$D_g=\{1,3,5,6,7\}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{1,3,5\}$$

$\Rightarrow D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=\{۱,۳,۵\}$,

$D_{\frac{f}{g}}=\{۱,۳,۵\}-\{۳\}=\{۱,۵\}$

با توجه به $D_f \cap D_g$ واضح است که تابعهای $f+g$ ، $f-g$ ، و $f.g$ فقط می‌توانند روی ۱ و ۳ و ۵ اثر کنند و طبق تعریف داریم :

الف) $(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۴=۶$

$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۵+۰=۵$

$(f+g)(۵)=f(۵)+g(۵)=۰+۲=۲$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$f+g=\{(۱,۲+۴),(۳,۵+۰),(۵,۰+۲)\}$

ب) به همین ترتیب $(f-g)$ نیز معین می‌شود (بعهدهٔ خواننده)، و در مورد $f.g$ داریم،

ج) $(f.g)(۱)=f(۱)\times g(۱)=۲\times ۴=۸$

$(f.g)(۳)=f(۳)\times g(۳)=۵\times ۰=۰$

$(f.g)(۵)=f(۵)\times g(۵)=۰\times ۲=۰$

یا $\rightarrow f.g=\{(۱,۲\times ۴),(۳,۵\times ۰),(۵,۰\times ۲)\}$

د) $(\frac{f}{g})(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

$(\frac{f}{g})(۵)=\frac{f(۵)}{g(۵)}=\frac{۰}{۲}=۰$

یا $\rightarrow \frac{f}{g}=\left\{(۱,\frac{۲}{۴}),(۵,\frac{۰}{۲})\right\}=\left\{(۱,\frac{۱}{۲}),(۵,۰)\right\}$

هـ) $(۴f)(۱)=۴f(۱)=۴\times ۲=۸$

$(۴f)(۲)=۴f(۲)=۴\times ۳=۸$

$(۴f)(۳)=۴f(۳)=۴\times ۵=۲۰$

$(۴f)(۴)=۴f(۴)=۴\times ۵=۲۰$

$(۴f)(۵)=۴f(۵)=۴\times ۰=۰$

و یا $\rightarrow ۴f=\{(۱,۴\times ۲),(۲,۴\times ۳),(۳,۴\times ۵),(۴,۴\times ۵),(۵,۴\times ۰)\}$

مثال ۳: اگر

$g(x)=\begin{cases}-x+۱ & x\geq ۲\\ x-۲ & x<۲\end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\geq ۱\\ ۲x-۱ & x<۱\end{cases}$

مطلوب است محاسبهٔ $(f+g)$ و $f.g$

$D_g=D_f=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\cap D_g=\mathbb{R}$

اگر $x\geq ۲\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=(x^۲+۱)+(-x+۱)=x^۲-x+۲$

اگر $x<۲$:

I) $۱<x<۲\Rightarrow (f+g)(x)=(x^۲+۱)+(x-۲)=x^۲+x-۱$

II) $x<۱\Rightarrow (f+g)(x)=(۲x-۱)+(x-۲)=۳x-۳$

III) $x=۱\Rightarrow (f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+(-۱)=-۱$

محاسبهٔ $(f.g)$ مطابق مطالب فوق و در حالتهای ذکر شده به عهدهٔ خواننده، واگذار می‌شود.

مثال ۴: اگر، $f(x)=۲\sqrt{x}$ و $g(x)=۳\sqrt{x}$ تابع $(f.g)$ و دامنهٔ آن را مشخص کنید

$(f.g)(x)=f(x).g(x)=۲\sqrt{x}\times ۳\sqrt{n}=۶x$

در نگاه اول توقع داریم دامنهٔ $(f.g)$، $\mathbb{R}$ باشد زیرا $۶x$ برای هر عدد حقیقی معنی دارد امّا $D_f=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$ و $D_g=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$ و $D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$.

تذکر (قرارداد): برای نمایش $f.f$ از نماد $f^۲$ استفاده می‌شود و به همین ترتیب داریم :

$f^۳=f.f^۲$, $f^۴=f.f^۳$, ... , $f^n=f.f^{n-۱}$

ترکیب توابع

فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=(x+۱)$ موجود بوده و بخواهیم عددی حقیقی مانند k را ابتدا تحت تأثیر تابع f و سپس حاصل آن را تحت تأثیر تابع g قرار دهیم در این صورت خواهیم داشت :

$f(k)=k^۲$, $g(k^۲)=(k^۲+۱)$

حال اگر بخواهیم تابعی بسازیم که کار این دو تابع را یکجا برای ما انجام دهد و مستقیماً عدد حقیقی k را به $(k^۲+۱)$ تبدیل کند باید دو تابع f و g را با هم ترکیب کنیم، که در این صورت از نماد (gof) استفاده کرده و داریم :

$(gof)(x)=g(f(x))$

بنابراین با توجه به تابعهای f و g و تعریف فوق تابعی که

انتظارش را داشتیم به دست می‌آید،

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x)+1)=(x^2+1)$$
$$\Rightarrow (gof)(k)=k^2+1$$

در واقع برای محاسبهٔ $(gof)(x)$ یا $g(f(x))$ در تابع g به جای xها، $f(x)$ را قرار می‌دهیم و همین مطلب به راحتی می‌تواند دامنهٔ (gof) را نیز برای ما تعریف کند پس :

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \middle| f(x)\in D_g\right\}$$

یعنی دامنهٔ gof شامل همهٔ xهایی از دامنهٔ f است (زیرا اول f باید روی آنها اثر کند) که تأثیر f روی آنها و یا حاصل $f(x)$ در دامنهٔ g واقع باشد (تا بتواند g روی آنها اثر کند).

توجه دارید که fog نیز به طریق مشابه تعریف خواهد شد و بنابراین،

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \middle| g(x)\in D_f\right\}$$

مثال ۱: اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ مطلوب است محاسبهٔ (fog)، (gof)، (fof)، (gog) و دامنه‌های هر یک.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1=\frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$D_{fog}=\{x\in(\mathbb{R}-\{1\})|g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}=\frac{x^2}{x^2-2}$$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}|f(x)\in(\mathbb{R}-\{1\})\}=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|(x^2-1)\neq 1\right\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\neq\pm\sqrt{2}\right\}$$

$$(fof)(x)=f(f(x))=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$$

$$D_{fof}=\{x\in\mathbb{R}|f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(gog)(x)=g(g(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}\Rightarrow x\neq 1$$

$g(g(x))=\frac{2x}{2}=x$ (با شرط $x\neq 1$)

$$D_{gog}=\{x\in(\mathbb{R}-\{1\})|g(x)\in(\mathbb{R}-\{1\})\}$$
$$=\left\{x\in(\mathbb{R}-\{1\})\middle|\frac{x+1}{x-1}\neq 1\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

(زیرا برای هر عدد حقیقی مخالف یک همواره حاصل $\frac{x+9}{x-1}$ مخالف یک است).

مسائل حل شده

مسألهٔ ۱: تابع $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. برای محاسبهٔ $h(x)$ ابتدا می‌توان (x^2-1) را محاسبه کرده و سپس از آن ریشهٔ دوم بگیریم پس اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در این صورت :

$$g(f(x))=\sqrt{(x^2-1)}$$

مسألهٔ ۲: فرض کنید $g(x)=x^3-1$ و

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\le 1\\ 4 & 1<x<3\\ \sqrt[3]{x} & x>3\end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ (fog)

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}2(x^3-1) & g(x)\le 1\\ 4 & 1<g(x)<3\\ \sqrt[3]{(x^3-1)} & g(x)>3\end{cases}$$

$g(x)\le 1\Rightarrow x^3-1\le 1\Rightarrow x^3\le 2\Rightarrow x\le\sqrt[3]{2}$ از طرفی

$$1<g(x)<3\Rightarrow 1<x^3-1<3\Rightarrow 2<x^3<4$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}$$
$$g(x)>3\Rightarrow x^3-1>3\Rightarrow x^3>4\Rightarrow x>\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}2x^3-2 & x\le\sqrt[3]{2}\ 1\\ 4 & \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}\\ \sqrt[3]{x^3-1} & x>\sqrt[3]{4}\end{cases}$$

مسألهٔ ۳: اگر $f(x-1)=x^2-x+1$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

برای حل این نوع مسائل $x-1=z$ فرض کرده و سپس $f(z)$ را پیدا کرده و در نهایت $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم (به جای z ، x قرار می‌دهیم)

$$x-1=z\Rightarrow x=z+1\Rightarrow f(z)=(z+1)^2-(z+1)+1$$
$$\Rightarrow f(z)=z^2-3z+1\Rightarrow f(x)=x^2-3x+1$$

مسألهٔ ۴: اگر $f(4x)=\sqrt{\sin 4x-x}$ ، $f(x)$ را محاسبه کنید.

$$۴x = z \Rightarrow x = \frac{z}{۴}$$

$$\Rightarrow f(۴x) = f(z) = \sqrt{\sin(۴\frac{z}{۴}) - \frac{z}{۴}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sqrt{\sin z - \frac{z}{۴}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin x - \frac{x}{۴}}$$

مسألهٔ ۵: اگر $f = \{(۲,۳),(۴,۵),(۱,۲),(۳,۲)\}$ و $g = \{(۱,۱),(۲,۷),(۳,۵)\}$ مطلوب است محاسبهٔ fog و gof و fof و $f^{-۱}of$ و $fof^{-۱}$.

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

از طرفی می‌دانیم $D_f = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $D_g = \{۱,۲,۳\}$ پس داریم،

$D_{fog} = \{x \in \{۱,۲,۳\} | g(x) \in \{۱,۲,۳,۴\}\}$

$\Rightarrow D_{fog} = \{۱\}$

$D_{gof} = \{x \in \{۱,۲,۳,۴\} | f(x) \in \{۱,۲,۳\}\}$

$\Rightarrow D_{gof} = \{۲,۳\}$

$(fog)(x) = f(g(x)) \Rightarrow (fog)(۱) = f(g(۱)) = f(۱) = ۲$

$\Rightarrow fog = \{۱,۲\}$

(تابع g، ۱ را به ۱ و f، ۱ را به ۲ تبدیل می‌کند. پس در نهایت (fog)، ۱ را به ۲ تبدیل می‌کند)

$(gof)(x) = g(f(x)) \Rightarrow g(f(۲)) = g(۳) = ۵$

و $g(f(۳)) = g(۲) = ۷ \Rightarrow gof = \{(۲,۵),(۳,۷)\}$

به همین ترتیب $fof = \{(۲,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$

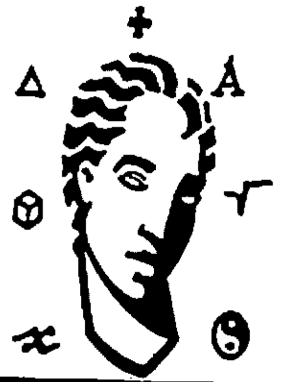
(تابع f، ۲ را به ۳ و سپس ۳ را به ۲ تبدیل می‌کند پس fof ۲ را در نهایت به ۲ تبدیل می‌کند و ۱ را به ۳ و ۳ را به ۳)

$f^{-۱} = \{(۳,۲),(۵,۴),(۲,۱),(۲,۳)\}$

$fof^{-۱} = \{(۳,۳),(۵,۵),(۲,۲)\}$,

$f^{-۱}of = \{(۲,۲),(۴,۴),(۱,۱),(۳,۳)\}$

آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای بیان $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ به دست آورید؟



تفریح اندیشه ۲

چه کسی بازی را آغاز می‌کند؟

یک روز بیشتر به مسابقهٔ سرنوشت‌ساز باقی نمانده است. مربی تیم تنها یکی از سه بازیکن رفعتی، پهلوان، یا علی‌آبادی را برای آغاز بازی انتخاب می‌کند رفعتی برای این که بداند چه کسی برای این کار انتخاب شده است در رختکن به مربی نزدیک می‌شود و می‌پرسد : آقای مربی، اگر پهلوان بازی را آغاز می‌کند، بگو که علی آبادی نمی‌کند. اگر من می‌کنم سکه‌ای بیانداز و اگر شیر آمد بگو پهلوان شروع نمی‌کند و اگر خط آمد بگو علی آبادی شروع نمی‌کند. شما که هیچ گاه رازتان را آشکار نمی‌کنید.

مربی درحالی که زیر دوش می‌رود می‌گوید : بعد از بیرون آمدن جوابت را می‌دهم.

ده دقیقه بعد بیرون می‌آید و درحالی که گلویش را صاف می‌کند می‌گوید : علی آبادی بازی نمی‌کند.

رفعتی فریاد می‌زند : گولت زدم! ده دقیقه قبل یک شانس از سه داشتم و اکنون شانس بین من و پهلوان است و به یک به دو افزایش یافته است.

مربی لبخندی زد و گفت : تو بازیکنی خنگ و ریاضیدانی خنگتر هستی. آن‌گاه بار دیگر زیر دوش رفت.

احتمال آغاز بازی برای هر بازیکن چقدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۹)

محاسبهٔ طول سهمی

تعیین *طول کمان سهمی*. راه‌حل ابتکاری زیرین در حل این مسأله از کتاب معروف «*Lectiones Geometrica*» اثر *اسحق بارو* «Isaac Barrow» (۱۶۷۷ ـ ۱۶۳۰) ریاضیدان انگلیسی است که در ۱۶۷۰ در لندن به چاپ رسید.

دستگاه مختصاتی را به سهمی نسبت می‌دهیم که محور xهای آن محور سهمی و محور yهای آن مماس به سهمی در رأس آن باشد. در این صورت، معادلهٔ سهمی به صورت $y^2 = 2px$ درمی‌آید. به این ترتیب، تنها به این نیاز داریم که طول *کمان رأسی* «apexarc» آن را حساب کنیم، یعنی کمانی از سهمی را که مبدأش رأس S سهمی است، زیرا هر کمان را می‌توان به صورت مجموع یا تفاضل دو کمان رأسی نمایش داد.

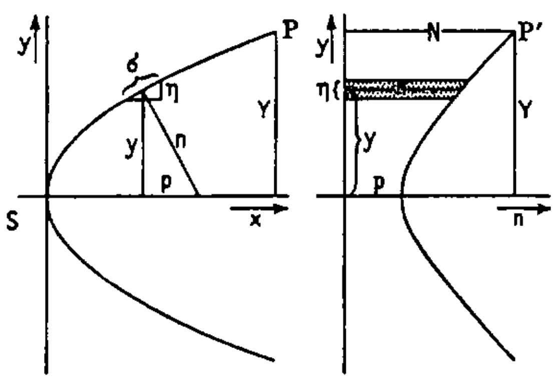
فرض می کنیم p، انتهای کمان رأسی SP دارای مختصات x و y، و طول کمان مورد نظر ما باشد.

از آن‌جا که تحت قائم سهمی برابر نصف پارامتر P است، بین y، عرض نقطه‌ای از سهمی، و n، قائم نظیر این نقطه، رابطه زیر برقرار است.

$$n^2 - y^2 = p^2$$

در این صورت اگر x|y، هر نقطهٔ سهمی از دستگاه مختصاتمان نقطهٔ n|y ی را در دستگاه مختصات جدید n|y تخصیص دهیم، در دستگاه جدیدمان هذلولی متساوی‌الساقینی با نیم محور p به دست می‌آوریم.

نشان می‌دهیم که PL، P′ برابر SP، طول کمان سهمی، از لحاظ عددی برابر F، مساحت ذوزنقهٔ هذلولی‌ای است که توسط این هذلولی، محورهای آن، و عمود N ی محصور شده است که از P′، نظیر نقطهٔ Pی هذلولی، بر محور اقصر آن فرود آمده است. (N هم طول P′، نقطهٔ هذلولی، هم قائم سهمی در نقطهٔ P از سهمی است.)



قطعهٔ $\delta = AB$ از کمان سهمی SP را در نظر می‌گیریم که آن‌قدر کوچک است که فاصله‌ای راست (موسوم به عنصر) در نظر گرفته شود و از دو انتهای آن AC را، موازی با محور سهمی و $BC = b$ را، موازی با مماس رأسی سهمی، رسم می‌کنیم. در ضمن عرض y و n، قائم نقطهٔ وسط AB را رسم می‌کنیم، که مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با اضلاع y، n، و p می‌دهند که مشابه مثلث ABC است. درنتیجهٔ این تشابه تناسب

$b:\delta = p:n$ را به دست می‌آوریم، و از آن معادلهٔ زیر را

$$p\delta = nb \qquad (۱)$$

از نقاط A' و B' نظیرهای نقاط A و B عمودهایی بر محور اقصر هذلولی وارد می‌کنیم، و ذوزنقهٔ هذلولی‌ای باریکی را به دست می‌آوریم که نظیر کمان $A'B'$ است. φ، مساحت این ذوزنقه، حاصلضرب b، ارتفاع آن و n، خط میانهٔ آن است (مورد اخیر به این علت n است که از مرکز ارتفاع مزبور می‌گذرد و بنابراین از نقطهٔ انتهایی y، عرض هذلولی، عبور می‌کند):

$$\varphi = nb \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) به دست می‌آوریم

$$p\delta = \varphi$$

اگر این معادله را در مورد هر عنصر کمان سهمی‌ای SP و ذوزنقهٔ هذلولی‌ای کوچک نظیر آن تشکیل دهیم، و اگر معادلات حاصل را با هم جمع کنیم، در سمت چپ p برابر طول کمان L و در سمت راست F، مساحت ذوزنقهٔ هذلولی‌ای موصوف در فوق، یعنی معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

$$PL = F$$

اکنون از رابطهٔ مربوط به مساحت F، یعنی

$$F = \frac{Ny}{۲} + \frac{P^۲}{۲} L \frac{N+y}{P}$$

طول کمان مطلوب را به دست می‌آوریم.

$$L = \frac{Ny}{۲P} + \frac{P}{۲} L \frac{N+y}{P}$$

که در آن y نمایشگر عرض، و N نمایشگر قائم نقطهٔ انتهایی کمان است.

اکنون معادلهٔ به دست آمده را اندکی تغییر می‌دهیم.

فرض می‌کنیم T قسمتی از مماس سهمی گذرنده از P، محصور با P و محور yها، و τ زاویهٔ شیب سهمی در نقطهٔ P، یعنی زاویهٔ حاصل از مماس مزبور با محور xها (و، در عین حال زاویهٔ حاصل از قائم N با محور yها) باشد. در این صورت

$$\frac{Ny}{۲P} = \frac{Xy}{۲P\cos\tau} = \frac{X}{\cos\tau} = T$$

و

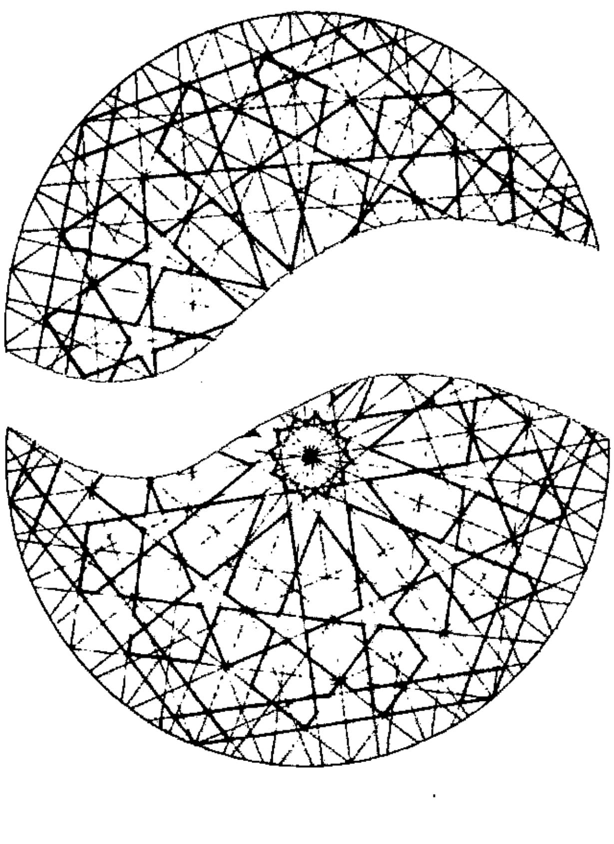
$$\frac{N+y}{P} = \frac{N+N\cos\tau}{N\sin\tau} = \frac{۱+\cos\tau}{\sin\tau} = \frac{۲\cos^۲\frac{\tau}{۲}}{۲\sin\frac{\tau}{۲}\cos\frac{\tau}{۲}}$$

$$= \cot g\frac{\tau}{۲}$$

در نتیجه

$$L = T + KL\cot g\frac{\tau}{۲}$$

که در آن به جای $\frac{۱}{۲}P$ کوتاهترین شعاع کانونی را قرارداده‌ایم.



رادیکال

(قسمت پنجم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

حل معادلات رادیکالی

در حل معادلات باید به نکات زیر توجه کرد :

۱) برای حل معادلات رادیکالی با فرجهٔ زوج ابتدا حوزهٔ تعریف معادله را مشخص می‌کنیم. (در بعضی مواقع خاص، به‌وسیلهٔ حوزهٔ تعریف می‌توان ریشه‌های معادله را مشخص کرد و یا تعیین کرد که معادله جواب حقیقی‌ندارد.)سپس با به توان رساندن معادله به معادله‌ای خواهیم رسید که اگر قابل حل باشد ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم، در این صورت ریشه‌هایی که در حوزهٔ تعریف معادلهٔ اولیه قرار داشته باشند، ریشه های معادلهٔ اصلی می‌باشند.

همچنین می‌توان بدون مشخص کردن حوزهٔ تعریف، معادله را به یک معادلهٔ قابل حل تبدیل کرد و پس از حل معادله، جوابهای آن را در معادلهٔ اولیه آزمایش کرد، هر کدام صدق کند ریشهٔ معادلهٔ اصلی می‌باشد.

۲) اگر برای دو معادله مانند :

$$A(x)=B(x) \quad (1) \qquad ; \quad C(x)=D(x) \quad (2)$$

هر ریشهٔ معادلهٔ اول، ریشه‌ای از معادلهٔ دوم باشد، آنگاه معادلهٔ دوم را نتیجهٔ معادلهٔ اول گویند و می‌نویسند :

$$A(x)=B(x) \Rightarrow C(x)=D(x)$$

اگر به جای معادلهٔ مفروض، نتیجهٔ آن را درنظر بگیریم، آنگاه مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دوم، شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ اول است، ولی در بین مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دوم، ممکن است عددهای دیگری هم وجود داشته باشد که آنها را، ریشه های خارجی (ریشه‌های بیگانه) معادلهٔ اصلی می‌نامند. بدیهی است با آزمایش ریشه‌ها می توان ریشه‌های خارجی معادله را از ریشه‌های حقیقی آن جدا کرد. برای مثال :

$$\sqrt[6]{x^4-1}=\sqrt[6]{x^2-1} \Rightarrow x^4-1=x^2-1$$

پس از حل معادلهٔ دوم، به‌دست می‌آید :

$$x_1=-1 \quad \text{و} \quad x_2=0 \quad \text{و} \quad x_3=1$$

که با آزمایش ریشه‌ها، نتیجه می شود که $x_2=0$ ، ریشهٔ معادلهٔ اصلی نیست و در واقع ریشهٔ خارجی معادلهٔ اصلی می‌باشد.

دو معادلهٔ (۱) و (۲) را هم‌ارز (معادل) گویند، هرگاه مجموعهٔ همهٔ جوابهای یکی بر مجموعهٔ همهٔ جوابهای دیگری منطبق باشد ؛ یا مجموعه جواب هر دو معادله تهی باشد.

از تعریف هم‌ارزی معادله‌ها نتیجه می‌شود که، به‌جای حل یک معادله، می‌توان معادلهٔ هم‌ارز با آن را حل کرد.

مثال ۱ :

معادلهٔ $\sqrt[3]{x}=1$ با معادلهٔ $x=1$ هم‌ارز است، زیرا عدد ۱ ریشهٔ هر یک از این معادله‌ها می‌باشد ؛ و هیچ‌کدام از این دو معادله، ریشهٔ حقیقی دیگری به‌جز ۱ ندارند.

مثال ۲ : معادلهٔ $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\sqrt{2-\frac{x}{2}}$ با معادلهٔ $\frac{x}{2}+1=2-\frac{x}{2}$ هم‌ارز است. زیرا با توجه به شرایط $\frac{x}{2}+1\geq 0$ و $2-\frac{x}{2}\geq 0$ ، اگر دو طرف معادلهٔ اصلی را مجذور کنیم :

$$\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\sqrt{2-\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2}+1=2-\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{2}=2-1$$

$$\Rightarrow x=1$$

درواقع عدد ۱، تنها ریشهٔ هر دو معادله است.

مثال ۳ : آیا دو معادلهٔ زیر هم‌ارزند :

$4x^2+2x-5=2x-1$ و $\sqrt[4]{4x^2+2x-5}=\sqrt[4]{2x-1}$

حل : مجموعهٔ همهٔ ریشه های معادلهٔ دوم، شامل دو عدد است :

$x_1=-1$ و $x_2=1$

آزمایش نشان می‌دهد که، عدد ۱-، به حوزهٔ تعریف معادلهٔ اول تعلق ندارد و در نتیجه نمی تواند ریشهٔ آن باشد، یعنی $x_1=-1$، ریشهٔ خارجی معادلهٔ اول است. به این ترتیب، این دو معادله، هم‌ارز نیستند.

۳) اگر معادله به‌صورت $x^2=a$ و $a\geq 0$، باشد ؛ جوابهای معادله $x=\sqrt{a}$ ، یا $x=-\sqrt{a}$ است.

۴) اگر معادله‌ای به‌صورت $x^2=a$ و $a<0$، باشد ؛ معادله دارای ریشهٔ حقیقی نیست، زیرا طرف اول تساوی عدد نامنفی و طرف دوم تساوی عددی همیشه منفی است.

۵) اگر معادله‌ای به‌صورت $A(x).B(x).C(x)=0$ ، باشد ؛ که در آن $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ عبارتهایی برحسب یک متغیر x باشند، در این صورت : $C(x)=0$ یا $B(x)=0$ یا $A(x)=0$ ، برای مثال از معادلهٔ $x\sqrt{x}\sqrt{x-1}=0$ نتیجه می‌شود :

$x=0$ یا $\sqrt{x}=0$ یا $\sqrt{x-1}=0$ و $x\geq 1$

۶) می‌دانیم اگر $A(x)=B(x)$ باشد، آنگاه :

$A^2(x)=B^2(x)$

اما عکس این مطلب درست نیست ؛ یعنی اگر $A^2(x)=B^2(x)$ باشد، آنگاه :

$A(x)=B(x)$ یا $A(x)=-B(x)$

برای مثال معادلهٔ $\sqrt{x}=\sqrt{2-x}$ را می‌توان به‌صورت $x=2-x$ یا $2x=2$ یا $x=1$ نوشت. از معادلهٔ $x^2=4$ نتیجه می‌شود :

$x=2$ یا $x=-2$

۷) اگر $A^2(x)=B^2(x)$ و $B(x)\geq 0$ و $A(x)\geq 0$ ($A(x)$ و $B(x)$ هم‌علامت باشند)، در این صورت می‌توان نوشت :

$A(x)=B(x)$

برای مثال معادلهٔ $(\sqrt{2x+1})^2=(\sqrt{2-2x})^2$ را می‌توان به‌صورت $2x+1=2-2x$ یا $4x=1$ یا $x=\frac{1}{4}$ نوشت.

مثال ۴ : معادلهٔ $7+\sqrt{x}=9$ را حل کنید.

حل : دامنهٔ متغیر x (حوزهٔ تعریف معادله) عبارت است از $x\geq 0$ ؛ بنابراین جواب معادله باید در شرط فوق صدق کند. داریم :

$$\sqrt{x}=9-7\Rightarrow\sqrt{x}=2$$

اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم، نتیجه می‌شود $x=4$ ، که در شرط $x\geq 0$ صدق می کند.

مثال ۵ : معادلهٔ $7\sqrt{4x-1}+5=19$ را حل کنید.

حل : متغیر x باید در شرط $4x-1\geq 0$ یا $x\geq\frac{1}{4}$ صدق کند و داریم :

$$7\sqrt{4x-1}+5=19\Rightarrow 7\sqrt{4x-1}=14\Rightarrow\sqrt{4x-1}=2$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم)}} 4x-1=4\Rightarrow 4x=5$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{5}{4}}$$

که در شرط $x\geq\frac{1}{4}$ صدق می کند.

مثال ۶ : معادلهٔ $3\sqrt{x-4}+14=5$ را حل کنید.

حل : دامنهٔ متغیر x عبارت است از : $x-4\geq 0$ یا $x\geq 4$ ؛ و داریم :

$$3\sqrt{x-4}+14=5\Rightarrow 3\sqrt{x-4}=-9\Rightarrow\sqrt{x-4}=-3$$

چون طرف اول تساوی همیشه نامنفی و طرف دوم تساوی یک عدد منفی است، معادله دارای جواب نیست. در صورتی که به این نکته توجه نکنیم، و طرفین رابطهٔ به‌دست آمده را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت :

$$x-4=9\Rightarrow x=13$$

با این که $x=13$ در شرط $x\geq 4$ صدق می کند، ولی با قرار دادن $x=13$ در معادله به تناقض خواهیم رسید :

$$x=13:\ 3\sqrt{13-4}+14=5\Rightarrow 23=5 \qquad \text{(تناقض)}$$

بنابراین قبل از به توان ۲ رساندن طرفین تساوی باید به هم علامت بودن دو طرف تساوی توجه کرد تا گرفتار تناقض نشویم.

پس با توجه به تناقض اخیر نتیجه می‌شود که معادله دارای جواب نیست و مجموعهٔ جواب معادله تهی می‌باشد.

مثال ۷ : معادلهٔ $۴+\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{۸a^۲}=۸(۱+\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۶۴}})$ را حل کنید.

حل : حوزهٔ تعریف معادله مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌باشد. و داریم :

$$۴+\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{۸a^۲}=۸(۱+\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۶۴}})$$

$$\Rightarrow ۴+\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{۲^۳a^۲}=۸+۸\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۴^۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{a^۲}+۲\sqrt[۳]{a^۲}=۴+۲\sqrt[۳]{a^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{a^۲}=۴ \xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} a^۲=۴^۳ \Rightarrow a^۲=۶۴$$

$$\Rightarrow a^۲=۸^۲ \Rightarrow a=-۸ \text{ یا } a=۸$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جوابهای معادله}=\{-۸,۸\}$$

مثال ۸ : معادلهٔ $x^۸-۳x^۴+۲=۰$ را حل کنید.

حل : با فرض $x^۴=t$ ، داریم :

$$x^۴=t:\ t^۲-۳t+۲=۰\Rightarrow(t-۱)(t-۲)=۰$$

$$\Rightarrow t=۱ \text{ یا } t=۲$$

بنابراین :

$$x^۴=۱ \text{ یا } x^۴=۲ \Rightarrow x=\pm۱ \text{ یا } x=\pm\sqrt[۴]{۲}$$

پس معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است :

$$\text{مجموعه جوابهای معادله}=\{-\sqrt[۴]{۲},-۱,۱,\sqrt[۴]{۲}\}$$

مثال ۹ : معادلهٔ $\sqrt{y}-y=-۲$ را حل کنید.

حل : معادله را می‌توان به‌صورت $\sqrt{y}=y-۲$ نوشت. با توجه به این معادله داریم :

$$y\geq۰ \text{ و } y-۲\geq۰ \text{ یا } y\geq۲$$

که درنتیجه دامنهٔ متغیر معادله عبارت است از : $y\geq۲$.

داریم :

$$\sqrt{y}-y=-۲\Rightarrow\sqrt{y}=y-۲$$

$$\xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} y=(y-۲)^۲\Rightarrow y=y^۲-۴y+۴$$

$$\Rightarrow y^۲-۵y+۴=۰\Rightarrow(y-۱)(y-۴)=۰$$

$$\Rightarrow y=۱ \text{ یا } \boxed{y=۴}$$

پس فقط جواب $y=۴$ قابل قبول است. زیرا در شرط $y\geq۲$ صدق می‌کند.

مثال ۱۰ : معادلهٔ $\sqrt{z^۲-۱۶}=۳$ را حل کنید :

حل : متغیر x باید در شرط $z^۲-۱۶\geq۰$ صدق کند، و داریم :

$$\sqrt{z^۲-۱۶}=۳ \xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} z^۲-۱۶=۹\Rightarrow z^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-۵} \text{ یا } \boxed{z=۵}$$

هر دو جواب قابل قبول است، زیرا در شرط $z^۲-۱۶\geq۰$ صدق می‌کنند.

مثال ۱۱ : معادلهٔ $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}=۱$ را حل کنید.

حل : متغیر x باید در شرایط $x-۲\geq۰$ و $x-۱\geq۰$ و یا $x\geq۲$ و $x\geq۱$ و درنتیجه در شرط $x\geq۲$ صدق کند و داریم :

$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}=۱\Rightarrow\sqrt{x-۲}=۱-\sqrt{x-۱}$$

$$\xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x-۲=۱+x-۱-۲\sqrt{x-۱}$$

$$\Rightarrow -۲\sqrt{x-۱}=-۲\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۱ \xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}}$$

$$x-۱=۱\Rightarrow \boxed{x=۲}$$

جواب $x=۲$ قابل قبول است، زیرا در شرط $x\geq۲$ صدق می‌کند.

مثال ۱۲ : معادلهٔ $\frac{۶}{\sqrt{۲m+۱}}=۲$ را حل کنید.

حل : متغیر m باید در شرط $۲m+۱>۰$ یا $m>-\frac{۱}{۲}$ صدق کند، و داریم :

$$\frac{۶}{\sqrt{۲m+۱}}=۲\Rightarrow۲\sqrt{۲m+۱}=۶\Rightarrow\sqrt{۲m+۱}=۳$$

$$\xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} ۲m+۱=۹$$

$$\Rightarrow ۲m=۸\Rightarrow \boxed{m=۴}$$

جواب $m=۴$ قابل قبول است، زیرا در شرط $m>-\frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند.

مثال ۱۳ : معادلهٔ $\sqrt{u-۱}=\frac{۷۴}{\sqrt{u-۱}}$ را حل کنید.

حل : متغیر u باید در شرط $u-۱>۰$ یا $u>۱$ صدق کند، و داریم :

$$\sqrt{u-۱}=\frac{۷۴}{\sqrt{u-۱}}\Rightarrow(\sqrt{u-۱})^۲=۷۴\Rightarrow u-۱=۷۴$$

$$\Rightarrow \boxed{u=۷۵}$$

جواب $u=۷۵$ قابل قبول است، زیرا در شرط $u>۱$ صدق می‌کند.

مثال ۱۴ : معادلهٔ $\sqrt{۴x}=-۲x$ را حل کنید.

حل : متغیر x باید در شرایط $۴x \ge ۰$ و $-۲x \ge ۰$ و یا $x \ge ۰$ و $x \le ۰$ و درنتیجه در شرط $x = ۰$ صدق کند. با قرار دادن $x = ۰$ در معادله داریم :

$$\sqrt{۴(۰)} = -۲(۰) \Rightarrow ۰ = ۰$$

پس $x = ۰$ جواب معادله است.

مثال ۱۵ : معادلهٔ $x\sqrt{۳} - \sqrt{۱۲} = \sqrt{۷۵} - \sqrt{۲۷x^۲}$ را حل کنید.

حل : دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است : $x \in \mathbb{R}$ ، و داریم :

$$x\sqrt{۳} - \sqrt{۴ \times ۳} = \sqrt{۲۵ \times ۳} - \sqrt{۹ \times ۳x^۲}$$
$$\Rightarrow x\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳} - ۳|x|\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow x\sqrt{۳} + ۳|x|\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۳}(x + ۳|x|) = ۷\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow x + ۳|x| = ۷$$

$$x \ge ۰ : x + ۳x = ۷ \Rightarrow ۴x = ۷ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۷}{۴}}$$

$$x < ۰ : x - ۳x = ۷ \Rightarrow -۲x = ۷ \Rightarrow \boxed{x = -\frac{۷}{۲}}$$

$\Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای معادله $= \left\{-\frac{۷}{۲}, \frac{۷}{۴}\right\}$

معادلات زیر را حل کنید :

۱) $\sqrt[۳]{۴x - ۳} + \sqrt[۳]{۲x - ۱} = ۲$

۲) $\sqrt{۲x + ۷}\sqrt{۶x - ۲} = ۶\sqrt{۳x - ۲}\sqrt{x}$

۳) $\dfrac{۶x - ۲}{\sqrt[۴]{(۴x - ۱)^۳}} = \sqrt[۴]{۴x - ۱}$

۴) $\sqrt[۳]{x + ۲} = \sqrt{۲x + ۳}$

۵) $\dfrac{\sqrt{۲x + ۲} + \sqrt{۲ - ۲x}}{\sqrt{۲x + ۲} - \sqrt{۲ - ۲x}} = \dfrac{۱}{x}$

۶) $\sqrt[۳]{x - ۱} + \sqrt[۳]{x - ۲} = \sqrt[۳]{۲x - ۳}$

۷) $\sqrt{۲ + \sqrt{x^۴ + ۲}} = x$

۸) $\sqrt{۲۲x + ۳} + \sqrt{۲x - ۲} - \sqrt{۱۸x + ۷} = \sqrt{۲ - ۲x}$

۹) $\sqrt{۲x + ۲\sqrt{۲x - ۱}} + \sqrt{۲x - ۲\sqrt{۲x - ۱}} = ۲$

۱۰) $\sqrt[۳]{x^۵ + ۳۲} + \sqrt[۶]{x^۵ + ۳۲} = ۲$

۱۱) $(x^۲ - ۱)^{۷۴} + |x^{۷۵} + ۱| + \sqrt[۷۶]{x^۲ + ۳x + ۲} = ۰$

۱۲) $\sqrt[۵]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{۶۴x}}} = ۲$

۱۳) $\sqrt{۲ - x + x^۲} + \sqrt{۱ - x + x^۲} = ۳$

۱۴) $(\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}})^x + (\sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}})^x = ۲$

۱۵) $\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{۱ - ۲x} + \sqrt[۳]{x - ۱} = ۰$

حل : ۱) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$ ؛ و با مکعب کردن دو طرف معادله به‌دست می‌آید :

$$۴x - ۳ + ۲x - ۱ + ۳\sqrt[۳]{۴x - ۳}\sqrt[۳]{۲x - ۱}(\sqrt[۳]{۴x - ۳} + \sqrt[۳]{۲x - ۱}) = ۸$$

بنابر شرط، عبارت $\sqrt[۳]{۴x - ۳} + \sqrt[۳]{۲x - ۱}$ برابر ۲ است، بنابراین خواهیم داشت :

$$۶\sqrt[۳]{(۴x - ۳)(۲x - ۱)} = ۱۲ - ۶x \qquad (۱)$$

پس از مکعب کردن دو طرف معادله (۱)، و اختصار لازم خواهیم داشت :

$$(۴x - ۳)(۲x - ۱) = (۲ - x)^۳ \quad ;$$
$$۸x^۲ - ۱۰x + ۳ = ۸ - ۱۲x + ۶x^۲ - x^۳ \quad ;$$
$$x^۳ + ۲x^۲ + ۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x^۲ + ۳x + ۵) = ۰$$
$$\Rightarrow x - ۱ = ۰ \text{ یا } x^۲ + ۳x + ۵ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

جواب $x = ۱$ در معادله صدق می‌کند. و معادلهٔ $x^۲ + ۳x + ۵ = ۰$ ریشه حقیقی ندارد. بنابراین معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد.

۲) با حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} ۲x + ۷ \ge ۰ \Rightarrow x \ge -\frac{۷}{۲} \\ ۶x - ۲ \ge ۰ \Rightarrow x \ge \frac{۱}{۳} \\ ۳x - ۲ \ge ۰ \Rightarrow x \ge \frac{۲}{۳} \\ x \ge ۰ \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید : $x \geq \frac{2}{3}$

با مجذور کردن دو طرف معادله، داریم :

$$(2x+7)(6x-2)=36(3x-2)x \quad ;$$
$$12x^2+38x-14=108x^2-72x \quad ;$$
$$96x^2-110x+14=0 \Rightarrow (x-1)(96x-14)=0$$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $96x-14=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ یا $x=\frac{7}{48}$ (قابل قبول نیست)

فقط جواب $x=1$ در شرط $x \geq \frac{2}{3}$، و همچنین در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۳) دامنهٔ متغیر x از حل نامعادلهٔ $4x-1>0$، به‌دست می‌آید :

$x > \frac{1}{4}$

اگر دو طرف معادله را در $\sqrt[4]{(4x-1)^3}$ ضرب کنیم :

$$\frac{6x-2}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}}=\sqrt[4]{4x-1} \Rightarrow 6x-2=\sqrt[4]{(4x-1)^4}$$

$$\Rightarrow 6x-2=4x-1$$

$$\Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

جواب $x=\frac{1}{2}$ در شرط $x>\frac{1}{4}$، و همچنین در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند.

۴) دامنهٔ متغیر x عبارت است از : $2x+3\geq 0$ یا $x \geq -\frac{3}{2}$، و داریم :

$$\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{2x+3} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۶)}} (x+2)^2=(2x+3)^3$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4=8x^3+36x^2+54x+27$$
$$\Rightarrow 8x^3+35x^2+50x+23=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(8x^2+27x+23)=0$$

$\Rightarrow x+1=0$ یا $8x^2+27x+23=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

جواب $x=-1$ در شرط $x \geq -\frac{3}{2}$، و همچنین در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. و معادلهٔ $8x^2+27x+23=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۵) از حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -1 \\ 2-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1 \\ x\neq 0 \\ \sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}\neq 0 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید : $-1\leq x<0$ و $0<x\leq 1$.

دو طرف معادله را در $x(\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x})$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{2-2x}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{2x+2}+\sqrt{2-2x})=\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}$$

$$\Rightarrow (x-1)\sqrt{2x+2}+(x+1)\sqrt{2-2x}=0$$

دو طرف معادلهٔ اخیر را بر $-\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنیم :

$$(1-x)\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{1-x}=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{x+1}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})=0$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x}=0$ یا $\sqrt{x+1}=0$ یا $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ یا $\boxed{x=-1}$ یا $x=0$ (قابل قبول نیست)

جواب $x=0$ به دامنهٔ متغیر تعلق ندارد، ولی آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که دو عدد ۱ و ۱- ریشه‌های معادلهٔ اصلی می‌باشند.

۶) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x\in\mathbb{R})$ ؛ و با مکعب کردن دو طرف معادله به‌دست می‌آید :

$$x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})$$
$$=2x-3$$

بنابر شرط، عبارت $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}$ برابر $\sqrt[3]{2x-3}$ است ؛ بنابراین خواهیم داشت :

$$3\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}\,\sqrt[3]{2x-3}=0$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=0$ یا $\sqrt[3]{x-2}$ یا $\sqrt[3]{2x-3}=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ یا $\boxed{x=2}$ یا $\boxed{x=\frac{3}{2}}$

هر سه جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند ؛ بنابراین :

مجموعه جوابهای معادله $=\left\{1,\frac{3}{2},2\right\}$

۷) دامنهٔ متغیر x از حل دستگاه نامعادلات : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 + 2 \geq 0 \end{cases}$
به‌دست می‌آید : $x \geq 0$
و داریم :

$$\sqrt{2+\sqrt{x^4+2}} = x \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} 2+\sqrt{x^4+2} = x^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^4+2} = x^2 - 2$$

از $x \geq 0$ و معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$
$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^4 + 2 = (x^2-2)^2$$
$$\Rightarrow x^4 + 2 = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$\Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریشه‌های به‌دست آمده در شرط $x \geq \sqrt{2}$ ، صدق نمی کنند.
بنابراین مجموعهٔ جواب معادله، مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) است.

۸) با حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 22x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{22} \\ 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 18x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-7}{18} \\ 2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید : $x = 1$
و با قرار دادن $x = 1$ در معادله، خواهیم داشت :

$$x = 1 : \sqrt{22x+3} + \sqrt{2x-2} - \sqrt{18x+7} = \sqrt{2-2x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0$$

بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد : $\boxed{x = 1}$

۹) حوزه تعریف معادله از حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 2\sqrt{2x-1} \geq 0 \\ 2x + 2\sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases}$$

به‌دست می‌آید : $x \geq \frac{1}{2}$ ؛ و داریم :

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} = 2$$

دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم :

$$2x + 2\sqrt{2x-1} + 2x - 2\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{4x^2 - 4(2x-1)}$$
$$= 4$$

پس از ساده کردن معادله خواهیم داشت :

$$4x + 4|x-1| = 4 \Rightarrow x + |x-1| = 1$$
$$x \geq 1 :\ x + x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$
$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 :\ x - (x-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{x \middle| \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

بنابراین هر عدد که در شرط $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ صدق کند، جواب معادله است، یعنی معادله بی‌شمار جواب دارد.

۱۰) دامنهٔ متغیر x عبارت است از : $x^5 + 32 \geq 0$ یا $x \geq -2$ و با انتخاب $\sqrt[6]{x^5+32} = t$ ، داریم :

$$t^2 + t = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2) = 0$$
$$\Rightarrow t = 1 \quad \text{یا} \quad t = -2$$

چون $t \geq 0$ است، پس فقط جواب $t = 1$ قابل قبول می‌باشد :

$$\sqrt[6]{x^5+32} = 1 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۶)}} x^5 + 32 = 1 \Rightarrow x^5 = -31$$
$$\Rightarrow \boxed{x = -\sqrt[5]{31}}$$

جواب $x = -\sqrt[5]{31}$ در شرط $x \geq -2$ صدق می کند.
بنابراین ریشهٔ معادله اصلی می‌باشد.

۱۱) متغیر x باید در شرط $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ ، صدق کند.
با توجه به این که عبارتهای $(x^2-1)^{74}$ و $|x^{75}+1|$ و $\sqrt[76]{x^2+3x+2}$ ، همیشه نامنفی می‌باشند، نتیجه می‌شود که طرف اول معادله همیشه نامنفی است و بنابراین معادله وقتی جواب دارد که هر سه عبارت با هم صفر شوند :

$$(x^2-1)^{74} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$|x^{75}+1| = 0 \Rightarrow x^{75} + 1 = 0 \Rightarrow x^{75} = -1 \Rightarrow x = -1$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{یا}$$
$$x = -2$$

جواب $x = -1$ در شرط $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ صدق می کند و همچنین ریشهٔ هر سه عبارت می‌باشد ؛ بنابراین معادله تنها یک ریشه دارد : $\boxed{x = -1}$

۱۲) متغیر x باید در شرط $64x \geq 0$ یا $x \geq 0$ ، صدق کند ؛ و داریم :

$$\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{64x}}} = 2 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۵)}} x\sqrt[3]{x\sqrt{64x}} = 2^5$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} x^3 . x\sqrt{64x} = 2^{15}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^8(64x) = 2^{30}$$

$$\Rightarrow 2^6x^9 = 2^{30} \Rightarrow x^9 = 2^{24}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[9]{2^{24}} = \sqrt[9]{2^{18}\times 2^6} = 4\sqrt[9]{2^6} = 4\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4\sqrt[3]{4}}$$

جواب $x = 4\sqrt[3]{4}$ در شرط $x \geq 0$ و در معادله اصلی صدق می‌کند. پس معادله تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۳) متغیر x باید در شرایط $x^2 - x + 2 \geq 0$ و $x^2 - x + 1 \geq 0$ و یا $(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$ و $(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0$ صدق کند: $x \in \mathbb{R}$. و با انتخاب $x^2 - x + 1 = t$، داریم:

$$\sqrt{t+1} + \sqrt{t} = 3 \Rightarrow \sqrt{t+1} = 3 - \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow t + 1 = 9 - 6\sqrt{t} + t \Rightarrow 6\sqrt{t} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} t = \frac{16}{9}$$

بنابراین:

$$x^2 - x + 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow x^2 - x - \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{333}}{18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+\sqrt{333}}{18} \simeq 1/514 \\ \text{یا} \\ x_2 = \dfrac{9-\sqrt{333}}{18} \simeq 0/514 \end{cases}$$

بنابراین معادله، دارای دو ریشه حقیقی x_1 و x_2 می‌باشد.

۱۴) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است. $(x \in \mathbb{R})$، و داریم:

$$(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$$

بنابراین:

$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 2$$

و با انتخاب $y = (\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x$، داریم:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 + 1 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} \qquad \text{(جواب معادله)}$$

۱۵) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است. $(x \in \mathbb{R})$، و با توجه به این نکته که اگر $u + v + t = 0$ باشد، آنگاه:

$$u^3 + v^3 + t^3 = 3uvt$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 - 2x + x - 1 = 3\sqrt[3]{x(1-2x)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x(1-2x)(x-1)} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } 1 - 2x = 0 \text{ یا } x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ یا } \boxed{x = \frac{1}{2}} \text{ یا } \boxed{x = 1}$$

پس، معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی است:

$$\text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها

● محسن صدیقی مشکنانی

دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده:

ملاحظه می‌شود که هر چه از دبستان به سمت مقاطع بالاتر تحصیلی پیش می‌رویم، ارتباط مطالب دروس ریاضی با کاربردهای عملی آنها کمتر در آموزشها مطرح می‌شود. این در حالی است که محتوای دروس ریاضی در مقاطع مختلف دارای کاربردهای متعدد در شاخه‌های مختلف علوم و تکنولوژی است.

در این مقاله مزایا و معایب آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها مورد بررسی قرار گرفته و ضرورت پیگیری آن نتیجه‌گیری شده است. ملزومات و روشهای اجرایی در پیاده کردن این دیدگاه (برای دانش‌آموزان و دانشجویان ریاضی و غیرریاضی) نیز مطرح شده است.

● منظور از آموزش ریاضی با تأکید برکاربرد

منظورم از آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد این است که در هنگام تدریس بخشهای مختلف دروس ریاضی، مدرس حتی‌المقدور به گونه‌ای عمل کند که مخاطب به طور **صریح** و **ملموس** با (نمونه‌هایی از)کاربردهای آن بخش از درس، در **زمینه‌های غیرریاضی** آشنا گردد. به عبارت دیگر در آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد نکات زیر مورد توجه قرار گرفته است :

● اینکه صراحتاً به مخاطب گفته شود که این مطلب یک کاربرد ریاضی است. چرا که گرچه ممکن است بعضی از مخاطبان خود به این نکته توجه کرده باشند ولی تجربه شخصی من می‌گوید، بدون ذکر صریح کاربرد، تعداد کسانی که متوجه کاربرد شده‌اند بسیار کمتر از کسانی است که متوجه نشده‌اند. البته ذکر صریح می‌تواند با کلام، نوشتن عنوان و یا حتی با یک علامت (icon) باشد.

● اینکه برای مخاطب ملموس و مشخص باشد، لذا ذکر اینکه مثلاً فلان مطلب در امور نظامی کاربرد دارد کفایت نمی‌کند.

● کاربرد در زمینه‌های غیرریاضی باشد. مثلاً ذکر کاربرد مشتق در محاسبه ضریب زاویه کافی نیست.

● کاربرد در خلال درس و همراه مطالب درس مطرح گردد. لذا توضیحات کلی در مورد کاربردهای ریاضی در ابتدای درس یا کتاب، گرچه ضروری و مفید است ولی به هیچ‌وجه جوابگو نیست.

برداشت من این است که تمام مطالبی که در دروس مختلف ریاضی در سطوح مختلف آموزشی کشور (از دبستان تا دانشگاه)، ارائه می‌گردد به دلیل نیازی است که در جای دیگری به آن محتوا بوده است (در غیر این صورت اصولاً تدریس آن بخش از درس زاید است. فرض می‌کنیم در نظام آموزشی

کشور محتوای زاید به دانش‌آموز یا دانشجو ارائه نمی‌گردد). طرح هر یک از مطالب دروس ریاضی به خاطر یک یا چند مورد از دلایل اصلی زیر است:

● نیاز مخاطب به استفاده از مفاهیم و روشهای مورد بحث کلاس در اجتماع، مثل مفهوم خط و چگونگی محاسبه مساحت یک مستطیل.

● ضرورت آشنایی مخاطب با روشهای حل مسأله، مثل تفکیک مسأله به مسأله‌های کوچکتر و استقرا.

● نیاز به مطلب مورد بحث در بخشهای دیگر همان درس و یا سایر دروس ریاضی، مثل موضوع حد و پیوستگی برای موضوع انتگرال.

● نیاز به مطلب مورد بحث برای پاسخگویی به نیازهای مطرح در دروس و یا رشته‌های غیرریاضی، مثل کاربرد منطق در نمایش دانش در علوم کامپیوتر.

به عبارت دیگر همین حالا هم آموزش ریاضی با توجه به کاربردهای آن تدوین شده است، اما این کاربردها برای مخاطبین آنها مورد تأکید قرار نمی‌گیرد.

● مزایا

● **کمک به انتقال سریع‌تر محتوا:** برای تمام کسانی که کار آموزشی کرده‌اند نقش مثال برای انتقال بهتر مطالب به مخاطب کاملاً واضح است. بیان کاربرد، در عمل بیان یک مثال واقعی در ارتباط با محتوای درس است.

● **کمک به ماندگاری محتوا در ذهن مخاطب:** فراری مطالب درس از مشکلات اصلی در فرآیند یادگیری است. استفاده از تداعی به ماندگاری مطلب در ذهن مخاطب کمک می‌کند. بیان کاربرد، در عمل ایجاد عامل مهمی برای تداعی و ماندگاری محتوا در ذهن مخاطب است.

● **ایجاد انگیزه برای فراگیری:** یکی از مهمترین عوامل در ارتقای کیفیت روند یادگیری، وجود انگیزه است. بیان کاربرد، یک عامل اصلی در ایجاد انگیزه است. به دفعات شاهد بوده‌ام که دانشجو به دلیل عدم اطلاع از کاربرد درس، آن را زاید دانسته و تلاشی برای یادگیری نداشته و یا در نهایت تنها برای گرفتن نمره مربوطه تلاش می‌کرده است. به گونه‌ای که پس از مدت کوتاهی چیزی از آن درس را به خاطر نداشته است.

● **کمک به ارتقای کیفی آموزش:** سه مطلب فوق به طور طبیعی بهبود کیفیت آموزش را به دنبال دارد.

● **رفع نیاز:** هنگامی که مخاطب در جای دیگری به محل به‌کارگیری عملی آن بخش از درس ریاضی می‌رسد، همین بیان صریح کاربرد، به او کمک می‌کند، که سریعتر و طبیعی‌تر با مطلب ریاضی مورد نیاز خود ارتباط برقرار کند. به عبارت دیگر، نیازی که به آن بخش از ریاضی داشته به نحو مطلوب‌تری (نسبت به روش جاری) برطرف می‌گردد. اهمیت این مطلب در مواقعی که بین زمان ارایه درس ریاضی و زمان مطرح شدن کاربرد آن، فاصله زیادی (چه بسا چند مسأله) وجود دارد، بسیار محسوس‌تر است.

● **تذکر جایگاه کارشناسان ریاضی به دیگران:** بیان کاربردها به دانشجوی امروز و کارگزاران آینده سایر رشته‌ها یادآوری می‌کند که بسیاری از اقدامات در رشته آنها دقیقاً براساس مطالب ریاضی و به کمک کارشناسان ریاضی صورت گرفته و یا باید صورت بگیرد. (متأسفانه برای بسیاری از متخصصین کشور، به خصوص کارشناسان و حتی کارشناسان ارشد رشته‌های دیگر ضرورت به کارگیری نظرات کارشناسان ریاضی ملموس و مطرح نیست!).

● **تذکر جایگاه کارشناسان ریاضی به خودشان:** بیان کاربردها در عین حال به دانشجویان ریاضی نشان می‌دهد که محتوای کار، و به عبارت دیگر خود آنها چه نقشی در فعالیتهای تخصصی اجتماع می‌توانند داشته باشند.

● **رفع خودناباوری:** به نظر من نکته فوق در این که دانشجویان ریاضی خود را باور داشته باشند بسیار مؤثر است. یکی از مسائلی که در بین دانشجویان ریاضی (و در کل علوم)، به خصوص در مقایسه با دانشجویان مهندسی و پزشکی، کاملاً محسوس هست، این نکته می‌باشد که دانشجوی کارشناسی ریاضی مشخص‌ترین جایگاه خود در اجتماع را تدریس می‌بیند. و علیرغم اینکه برای شأن معلم صحبتهای بسیاری مطرح می‌شود، در عمل یک مهندس یا پزشک از جایگاه اجتماعی

بالاتری برخوردار است. این موضوع تا آنجا پیش می‌رود که چه بسا دانشجوی ریاضی خود را از مرتبه پایین‌تری نسبت به دانشجوی مهندسی و پزشکی احساس می‌کند. به نظر من این که دانشجو بداند چه جایگاهی در شاخه‌های مختلف علوم و تکنولوژی می‌تواند داشته باشد در خود باوری او کاملاً مؤثر است.

● **استقبال بیشتر از رشته ریاضی:** مشاهده می‌شود اکثر قریب به اتفاق دانش‌آموزان نخبه‌ای که آزمون ورودی دانشگاه را پشت‌سر می‌گذارند به رشته‌های دیگر، به خصوص به رشته‌های مختلف مهندسی روی می‌آورند. به نظر من نکاتی که در مورد رفع خودناباوری و جایگاه متخصصین ریاضی در بالا گفته شد، موجب استقبال بیشتر داوطلبان نخبه به رشته ریاضی خواهد شد. شاید استقبال از شاخه ریاضی کاربردی (کامپیوتر) که در سالهای اخیر مطرح شده است مؤید این نظر باشد.

● **کمک به مطرح شدن کاربردهای جدید:** بسیاری از کاربردهای ریاضی، توسط متخصصین رشته‌های دیگر (با آگاهی محدودی که از ریاضی دارند) شکل می‌گیرد. با پیگیری آموزش ریاضی با تأکید بر کاربردها، چه بسا نطفه کاربردهای جدیدی در ذهن متخصصان ریاضی یا متخصصان رشته‌های دیگر شکل گیرد یا اینکه روشهای موجود بهتر شود.

● معایب

● **صرف وقت:** مهمترین عیبی که برای آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد مطرح است، صرف وقت برای بیان کاربردها و در نتیجه کاهش زمان برای بیان مباحث متداول درس ریاضی است. گرچه احتمال کمبود وقت برای بعضی مباحث درسی را نفی نمی‌کنم، ولی براساس دلایلی که در زیر مطرح می‌گردد، این کمبود خیلی جدی نیست و حداقل اینکه قابل جبران است.

۱. کاربرد می‌تواند محمل بیان مطلب اصلی باشد. کما اینکه آموزش سالهای اولیه دبستان عملاً این‌گونه است. «بخش تناسب و کمیتهای متناسب» از ریاضی سال اول دوره راهنمایی {۱}، یک مثال بسیار جالب است. تک تک مطالب درس، مثالها و حتی تمرینها با تکیه بر کاربردهای عملی نگاشته شده است (صفحات ۴۶ تا ۵۵). برخلاف مبحث زاویه از همین کتاب که ارتباطی با کاربرد زاویه در اجتماع ندارد (صفحات ۶۷ تا ۷۳)!

۲. بیان کاربرد، درک مطلب را سرعت می‌بخشد. در قسمت مزایای آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد دیدیم که همین بیان کاربردها می‌تواند موجب درک سریعتر و ماندگارتر مطلب اصلی گردد. به عبارت دیگر گرچه در قسمتی از بحث برای بیان کاربرد وقت صرف می‌کنیم. اما در مقابل برای جای دیگری از بحث، در وقت صرفه‌جویی می‌کنیم.

۳. زمانبندی ارائه درس می‌تواند با دیدگاه تأکید بر کاربردها صورت گیرد. اگر ایده آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد مورد قبول همکاران قرار گیرد، در آن صورت زمانبندی ارائه درس با این دیدگاه انجام خواهد شد و به خصوص با توجه به دو نکته قبل، این مشکل به صورت حاد نمی‌تواند مطرح باشد.

● **کم‌رنگی ریاضیات محض:** ممکن است مطرح شود که آموزش ریاضی با تأکید بر کاربرد نفی‌کننده ریاضیات محض است. ولی اینطور نیست. گرچه به جنبه‌های کاربردی ریاضی تأکید دارد، ولی نفی‌کننده فعالیتهای علاقمندان ریاضیات محض نیست. بخصوص که ریاضی محض بیشتر در سطوح بالای آموزش عالی و در جنبه‌های پژوهشی برای ریاضی‌دانان بسیار علاقمند مطرح است. بد نیست این حقیقت را مد نظر داشته باشیم که این افراد بخش بزرگی از مخاطبان آموزش ریاضی را تشکیل نمی‌دهند. در عین حال تلاش این گروه در کشف حقایق جدید ریاضی، کاربرد آن را در زمانی نزدیک یا دور به دنبال خواهد داشت.

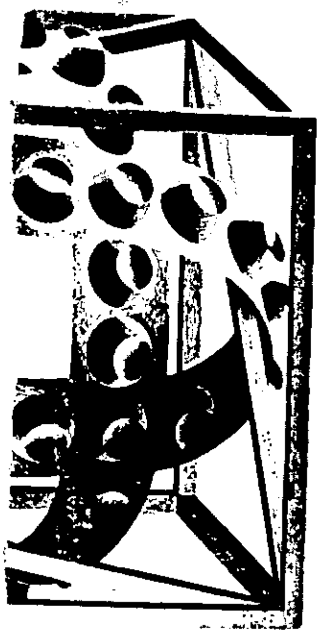


ریاضیات گسسته

RALPH P. GRIMALDI

قسمت ششم

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



مثال بعد نشان می‌دهد که ممکن است که گزاره‌های منطقاً هم‌ارز به وضعیات متفاوتی در کاربرد دانش کامپیوتری منجر شوند.

مثال ۲. ۱۴

جدول ۲. ۱۲ آشکار می‌کند که گزاره‌های مرکب $(p\wedge q)\to r$ و $p\to(q\to r)$ منطقاً هم‌ارزند.

در قطعه برنامه‌های پاسکال نشان داده شده در شکل ۲. ۱، x، y، z، و i متغیرهایی صحیح‌اند. قسمت (a)ی شکل از ساختاری تصمیم‌گیری **مقایسه‌پذیر** با گزاره‌ای به صورت $(p\wedge q)\to r$ استفاده می‌کنند. در این جا نیز در قسمت (b) داریم $p: x > ۰$، $q: y > ۰$، که چون به متغیرهای x، y مقادیر i − ۴ (در مورد x) و ۳*i + ۴ (در مورد y) را نسبت دهیم، به گزاره تبدیل می‌شوند. اما باید مواظب بود! حرف r حکم **Writeln** را نمایش می‌دهد، «حکم اجراپذیر»ی که در واقع به مفهوم متعارف جمله‌ای خبری، که بتواند برچسب راست یا دروغ بخورد، گزاره **نیست**.

در قطعهٔ نشان داده شده در قسمت (a)، تعداد کل مقایساتی، (x > ۰) و (y > ۰)، که طی اجرای برنامه‌مان انجام گرفته‌اند:

۱۰(برای x > ۰)+۱۰ (برای y > ۰) = ۲۰

است. از طرف دیگر، قطعهٔ نشان داده شده در قسمت (b) صورتی گزاره‌ای **مقایسه‌پذیر** با استلزامهای تودرتوی $p\to(q\to r)$ است. در این حالت مقایسهٔ (y > ۰)، جز این که مقایسهٔ (x > ۰) اجرا و به عنوان راست محاسبه شود، اجرا نمی‌شود، نتیجتاً، در این مورد، تعداد کل مقایسه‌ها:

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$	$q\to r$	$p\to(q\to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱۲.۲

چون به i، ۱ و ۲ و ۳ را تخصیص دهیم) ۳+ (برای $x > 0$) ۱۰
۱۳ = (برای $y > 0$)،
است. درنتیجه، برحسب تعداد کل مقایسه‌های انجام گرفته در هر یک از دو حالت فوق، قطعه برنامهٔ نشان داده شده در قسمت (b) به کفایت‌تر از قطعه برنامه‌ای است که در قسمت (a) نشان داده‌ایم. □

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If (x > 0) and (y > 0) then
      Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
(a)
```

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If x > 0 then
      If y > 0 then
        Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
(b)
```

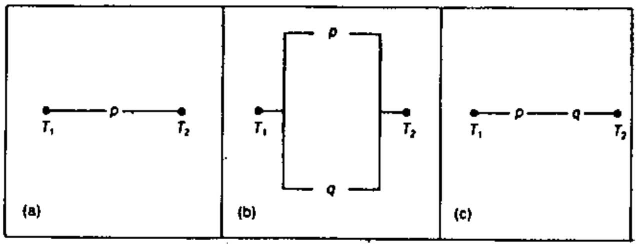
شکل ۱.۲

این بخش را با کاربردی در ساده کردن مدارهای سوییچی به پایان می‌بریم. در این مرحله قوانین منطق بسیار کارگشایند.

مدار سوییچی از سیمها و سوییچهایی تشکیل شده‌اند، که دو پایانهٔ T_1 و T_2 را به هم وصل می‌کنند. در هر چنین شبکه‌ای، هر سوییچ یا باز است (۰)، که در این صورت جریانی از آن نمی‌گذرد، یا بسته است (۱) که در این حال جریان از آن عبور می‌کند.

در شکل ۲.۲ در قسمت (a) شبکه‌ای با یک سوییچ داریم. هر یک از قسمتهای (b) و (c) دارای دو سوییچ (مستقل) اند.

در شبکهٔ قسمت (b)، جریان از T_1 به T_2 عبور می‌کند اگر یکی از سوییچهای p، q بسته باشند. این شبکه را شبکه **موازی** می‌نامیم و با $p \vee q$ نمایش می‌دهیم. از شبکه قسمت (c)، برای این که جریان از T_1 به T_2 بگذرد، ضروری است که هر دو سوییچ p، q بسته باشند. در این حالت سوییچها به صورت **سری** اند و شبکه با $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود.

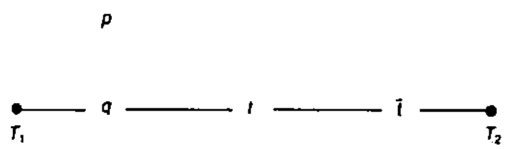


شکل ۲.۲

مثال ۲. ۱۵

سوییچهای شبکه‌ای نیاز به عملکرد مستقل از یکدیگر ندارند. شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۳.۲ را در نظر بگیرید. در این مورد سوییچهای با برچسب t و $\bar{t}$ مستقل نیستند. این دو سوییچ را چنان هموند کرده‌ایم که t باز (بسته) است، اگر و تنها اگر $\bar{t}$ به‌طور همزمان بسته (باز) باشد. این مطالب برای سوییچهای q، $\bar{q}$ نیز صادق است. (نیز، مثلاً، سه سوییچ با برچسب p مستقل نیستند:)

این شبکه با



شکل ۳.۲

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{t} \vee r)$$

نمایش داده می‌شود. با استفاده از قوانین منطق، گزارهٔ فوق را، که شبکهٔ مورد بحث را نمایش می‌دهد، به طریق زیر ساده می‌کنیم. (در این مورد، به خاطر سادگی کار، کاربردهای قواعد جانشینی را متذکر نمی‌شویم، اما قوانین مهم منطق به کار رفته را فهرست می‌کنیم.)

دلیل

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{t} \vee r)$$

$$\Leftrightarrow p \vee [(q \vee r) \wedge (t \vee \bar{q}) \wedge (\bar{t} \vee r)]$$

قانون توزیع‌پذیری $\vee$ بر $\wedge$

$$\Leftrightarrow p \vee [(\{(q \vee r) \wedge t\} \vee [(q \vee r) \wedge \bar{q}]) \wedge (\bar{t} \vee r)]$$

قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ بر $\vee$

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big([(q\vee r)\wedge t]\vee[(q\wedge\bar q)\vee(r\wedge\bar q)]\wedge(\bar t\vee r)\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ بر $\vee$

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big([(q\vee r)\wedge t]\vee(r\wedge\bar q)\big)\wedge(\bar t\vee r)\Big] \qquad q\wedge\bar q\Leftrightarrow F.$$

همانی برای $\vee$

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big([(q\vee r)\wedge t]\wedge(\bar t\vee r)\big)\vee\big((r\wedge\bar q)\wedge(\bar t\vee r)\big)\Big]$$

چرا؟

چرا؟

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[[(q\vee r)\wedge(t\wedge(\bar t\vee r))]\vee [(r\wedge\bar q\wedge\bar t)\wedge(r\wedge\bar q\wedge r)]\Big]$$

چرا؟

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[[(q\vee r)\wedge(t\wedge r)]\vee[(r\wedge\bar q\wedge\bar t)\vee(r\wedge\bar q)]\Big]$$

قانون جذب

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[[(q\vee r)\wedge(t\wedge r)]\vee(r\wedge\bar q)\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ بر $\vee$

$$\Leftrightarrow p\vee[(q\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge\bar q)]$$

قانون خودنمایی

$$\Leftrightarrow p\vee\big[((q\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge t))\vee(r\wedge\bar q)\big]$$

قانون جذب

$$\Leftrightarrow p\vee[(r\wedge t)\vee(r\wedge\bar q)]$$

قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ بر $\vee$

در نتیجه،

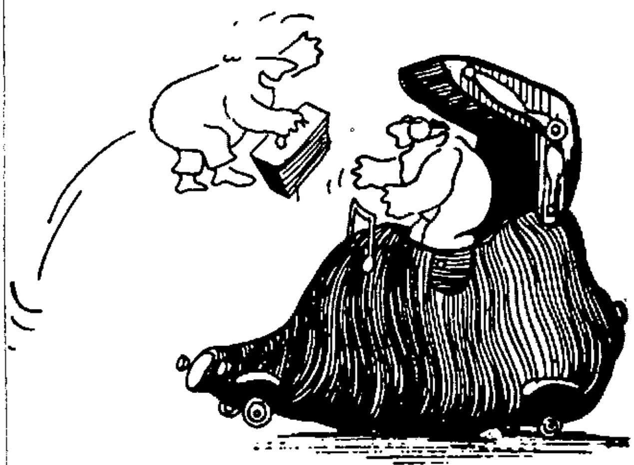
$$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee t\vee\bar q)\wedge(p\vee\bar t\vee r)\Leftrightarrow p\vee[r\wedge(t\vee\bar q)]$$

و شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۳.۲ (b) به این مفهوم— هم‌ارز شبکهٔ اصلی است، که جریان از T_1 به T_2 در شبکهٔ (a) دقیقاً زمانی عبور می‌کند، که در شبکهٔ (b) چنین باشد. اما شبکهٔ (b) تنها چهار سوییچ، یعنی پنج سوییچ کمتر از شبکهٔ (a)، دارد. □



تفریح اندیشه ۳

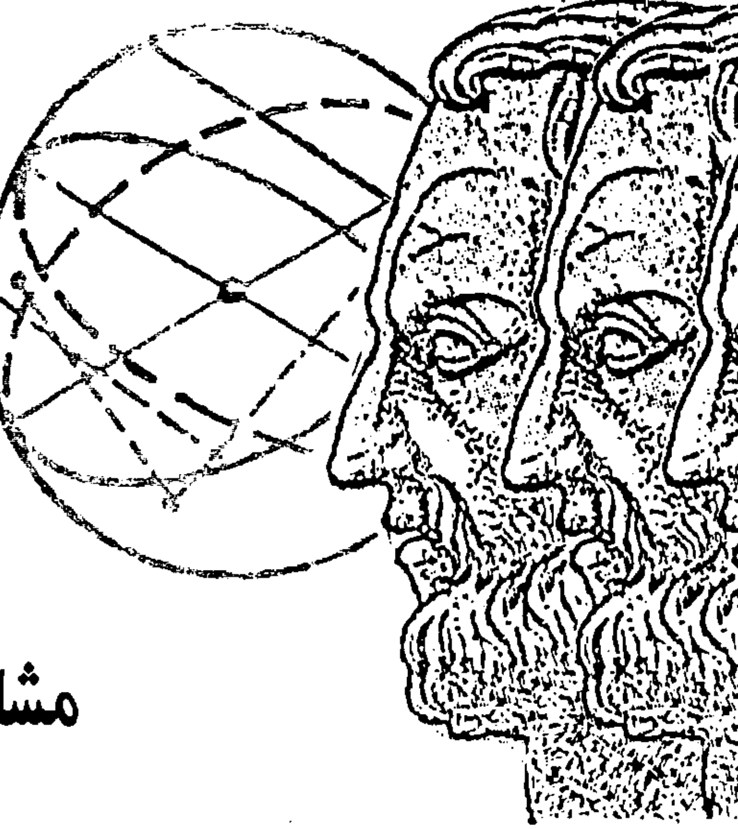
مهرداد اتومبیلی را برای مسافرت به شهری که در ۱۰۰ کیلومتری محل اقامت او بود کرایه کرد. در نیمهٔ راه دوست خود را سوار کرد و با او ۵۰ کیلومتر آخر راه را پیمود تا به مقصد رسیدند. شب، هنگام مراجعت به شهر خودشان، مهرداد مجدداً دوستش را سوار اتومبیل کرد و در همان نقطه‌ای که او را سوار کرده بود پیاده کرد و به راه خود ادامه داد تا به شهرش رسید. در آنجا ۲۴ تومان بابت کرایه پرداخت. درصورتی که مهرداد و دوستش بخواهند کرایه اتومبیل را منصفانه به نسبت راهی که پیموده بودند بپردازند، سهم هرکدام چقدر است.



جواب در صفحهٔ ۸۸

برگرفته از: فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



مشاهیر ریاضی جهان

مک‌لورن ـ کولین[1] (۱۶۹۸ ـ ۱۷۴۶). مک‌لورن یکی از ریاضیدانهای قابل توجه اسکاتلندی است که در دانشگاههای آبردین[2] و ادین‌بورو[3] به کار اشتغال داشت. کارهای مهم بسیاری در حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد، بنابراین استهزاآمیز است، که بیشتر معروفیت مک‌لورن به خاطر **سری‌مک‌لورن**[4] است، که تنها حالت خاصی از سری‌ای است که اکنون به **سری‌تیلور**[5] معروف او توسط جیمز گریگوری[6] و دیگران ابداع شده است. البته این مورد از موارد سرقت مطالب ادبی و علمی نیست، زیرا مک‌لورن این سری را در کتابی معروف آورده و نام خود را همراه آن کرده است.



اسحق نیوتن

نیوتن، ایزاک[7] (۱۶۴۲ ـ ۱۷۲۷). نیوتن به عنوان پسر کشاورزی در **لینکلن شایر**[8] تولد و رشد یافت، تا بر ریاضیات و فیزیک قرن هفدهم حکومت کند و در آنها انقلابی به وجود آورد. اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریهٔ مکانیک، قانون جاذبه، نظریهٔ حرکت سیاره‌ای، نظریهٔ رنگها، **سری دوجمله‌ای**[9] و نتایج مهم بسیاری در نظریهٔ معادلات را به او مدیونیم. کار آنالیز عددی بدون **روش نیوتن**[10] لنگ می‌ماند. اظهارات در خور شایستگیهای نسبی ریاضیدانهایی با این درجه استعداد همواره بحث‌انگیز بوده است، اما در مورد نیوتن، از آن‌جا که به نظر می‌رسد که هم گاوس هم اینشتین مقام برتر را به نیوتن داده‌اند، نیاز به مجادله نیست. تنفری بیمارگونه از انتقاد، نیوتن را از نشر بسیاری از آثارش بازداشت. در ۱۶۸۴، **ادموند هالی**[11] که ستارهٔ دنباله‌داری به نام اوست، به نیوتن پیشنهاد کرد که در مورد قانون جاذبه‌ای که قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر را به دست می‌دهد، تحقیق کند. نیوتن، که قبلاً در مورد این موضوع کار کرده بود، بلافاصله پاسخ داد که قانون مربع معکوس است. هالی که از این واقعه تقریباً تکان خورده

بود، بر آن شد که نیوتن را وادار به چاپ نتایجش بکند. و نیوتن سرانجام این کار را در صورت **اصول**[۱۲] اش، قدرتمندترین کار فرید در تاریخ طولانی ریاضیات، انجام داد. نیز متعصبانه در تاریخ شماری کتاب مقدس و کیمیا به کار پرداخت. نیوتن هنگام تصدی امور ضرابخانه مدیر بسیار قابلی بود و اصلاحات عمیقی در پول رایج بریتانیا انجام داد. مقبره و بنای یادبودش در کلیسای وست‌مینستر[۱۳] واقع است: ولتر در مورد نیوتن چنین گفت: «مدفون چونان سلطانی».

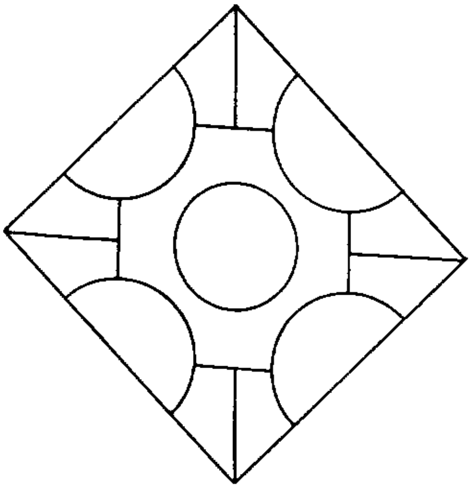
پاسکال، بلز[۱۴] (۱۶۲۳ ــ ۱۶۶۲). پاسکال در دنیا بیشتر به عنوان مؤلف **تفکرات**[۱۵] و متفکر مذهبی شناخته می‌شود، اما، به همان اندازه به عنوان ریاضیدان و فیزیکدان فعال بود. کارهای مهمی در هیدرواستاتیک (که در نتیجهٔ آنها واحد فشار پاسکال نامیده می‌شود) انجام داد، و بحثهایش با فرما در مورد مسألهٔ دومره[۱۶] نظریهٔ احتمال را بنیاد نهاد. **مثلث پاسکال**[۱۷]، نمودار ضرایب دوجمله‌ای، از آن او نبود، اما او آن را در محاسبات احتمال‌اش به کار برد. پاسکال در کار مربوط به یافتن مساحات اشکال منحنی‌الخط، کاری که به زودی منجر به حساب دیفرانسیل و انتگرال شد، نیز شرکت داشت. سهم اساسی پاسکال در این مورد، یافتن مساحت قوس سیکلوییدی است. این کار را برای منحرف کردن فکرش از درد دندان انجام داد. ممکن است دانشجویان هندسه با «شش ضلعی عرفانی» پاسکال آشنا باشند.

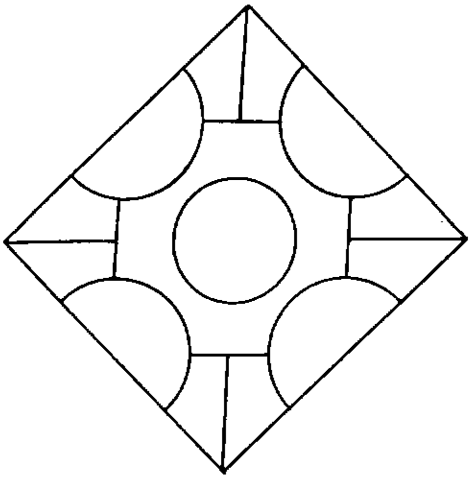


پئانو، گاسیپ[۱۸] (۱۸۵۸ ــ ۱۹۳۲). پئانو به خاطر آکسیومی‌سازی اعداد صحیحش که توسعهٔ مهمی در تحلیل صوری حساب «معمولی» بود مشهور است. نیز اولین شخصی بود که مثالهایی از خمهای معروف به فضا پرکن به دست داد.

❑ یادداشتها

1- Maclaurin-Colin
2- Aberdeen
3- Edinburgh
4- Maclaurin series
5- Taylor series
6- James Gregory
7- Newton, Isaac
8- Lincolnshire
9- binomial series
10- Newton's method
11- Edmond Halley
12- Principia
13- Westminster Abbey
14- Pascal, Blaise
15- Pensées
16- de Méré
17- Pascal's triangle
18- Peano, Guiseppe





نامساویها در احتمال

$P_{(A)} \le ?$

• سیامک جعفری

اهمیت حساب احتمالات بر کسی پوشیده نیست. حتی عامه مردم به کثرت از این کلمه «احتمال» در زندگی روزانه استفاده می‌کنند. احتمال، زبان همهٔ پدیده‌های طبیعی است.

این نظریه مانند بیشتر بخشهای ریاضیات دچار تغییرات اساسی شده است، که با ارائه نظریه‌های ریاضیدانان روسی براساس اصول متعارف شروع شده است و امروزه با نظریه مجموعه‌ها و توابع گره‌خورده است.

اگر U مجموعه یا فضای حوادث باشد و F یک مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های U باشد، عناصر F را حوادث تصادفی و F را میدان حوادث یا جبر می‌نامند. حادثه تصادفی U را حادثه یقینی و حادثه تصادفی $\overline{U}$ را حادثه غیرممکن خواهیم نامید. A و $\overline{A}$ حوادث معکوس هستند.

تعریف: با هر حادثه‌ای تصادفی از میدان حوادث F، عدد غیر منفی P(A) را در تناظر گذاشته، که احتمال حادثه A نامیده می‌شود. آشکار است که : $P(U)=1$.

اگر دو حادثه A_1 و A_2 ناسازگار باشند داریم :

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

این اصل در مورد حوادثی که دوبدو ناسازگار هستند قابل تعمیم است و بدون اثبات می‌پذیریم که با اصل زیر هم‌ارز است.

اگر حوادث A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n طوری باشند، که وقوع هر یک باعث وقوع دیگری شود، یعنی $\ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$ و حاصلضرب تمامی حوادث یک حادثه غیرممکن باشد، آنگاه :

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow P(A_n) \longrightarrow 0$$

که به نام اصل پیوستگی است.

در تعریف احتمال باید مجموعه حوادث ساده U ، مجموعه حوادث F و تابع P که روی مجموعه F تعریف شدد است، معین و معرف باشند. این مجموعه P و F و U را که یک سه‌تایی مرتب (U ،F ،P) است، فضای احتمال می‌نامند.

نتایج:

I) $0 \le P(A) \le 1$

احتمال حادثه یقین $P(U)=1$ است و حادثه غیرممکن $P(\varnothing)=0$ ، زیرا

$U.U\varnothing = U$ یا $U+0=u$

بنابراین :

$$P(U \cup \varnothing) = P(U+0) = P(U) + P(0) = P(U)$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود :

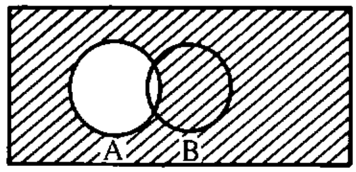
$P(\varnothing)=0$ یا $P(0)=0$

II) اگر $A \subset B$ باشد، یعنی احتمال وقوع B منوط به وقوع

A باشد :

$P(A) \le P(B)$

از روی شکل معلوم است که A و $\bar{A}B$ (یعنی $A'\cap B$) ناسازگارند. داریم :



$A+\bar{A}B = A\cup(A'\cap B) = (A\cup A')\cap(A\cup B) =$
$M\cap(A\cup B) = A\cup B = B$

تساوی اخیر به دلیل $A \subset B$ به دست می‌آید. بنابراین :

$A+\bar{A}B = B \Rightarrow P(A+\bar{A}B) = P(B)$

$P(A)+P(\bar{A}B) = P(B)$

از آن جا $P(\bar{A}B) \ge 0$ پس :

$P(A) \le P(B)$

III) به کمک مطلب قبل می‌توان نشان داد :

$A\cap B \subset A \Rightarrow P(A\cap B) \le P(A)$

$A \subset A\cup B \Rightarrow P(A) \le P(A\cup B)$

$A-B \subset A \Rightarrow P(A-B) \le P(A)$

مثلاً برای اثبات رابطه اخیر حادثه A را بصورت تجزیه دو حادثه ناسازگار می‌توان نوشت $A-B$ و AB (یا $A\cap B$).

یعنی :

$A = (A-B)+AB$

$P(A) = P[(A-B)+AB] = P(A-B)+P(AB)$

از آنجا که $P(AB) \ge 0$ نتیجه می‌شود :

$P(A-B) \le P(A)$

در ضمن نتیجه مفید روبرو نیز به دست می‌آید :

$P(A-B) = P(A)-P(AB)$ IV

نشان دهید که :

$P(A+B) \le P(A)+P(B)$

برای اثبات $A+B$ را به دو حادثه ناسازگار $A-B$ و B تجزیه می‌کنیم :

$A+B = (A-B)+B$

$P(A+B) = P[(A-B)+B] = P(A-B)+P(B)$

به کمک IV

$P(A+B) = P(A)-P(AB)+P(B)$

یا تساوی مهم

$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$

که از آنجا که $P(AB) \ge 0$، نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

مطلب اخیر قابل تعمیم است.

اگر حادثه B باعث وقوع حادثه C شود، آنگاه احتمال شرطی حادثه B از احتمال شرطی حادثی C تجاوز نخواهد کرد.

$P(B|A) \le P(C|A)$

با توجه به صورت مسأله خواهیم داشت :

$B \subset C$

$B \subset C \Rightarrow B\cap A \subset C\cap C$

$\Rightarrow P(BA) \le P(CA)$

و $P(A) \ge 0$

بنابراین اگر A اتفاق بیفتد یعنی $P(A) \ge 0$ داریم :

$$\Rightarrow \frac{P(BA)}{P(A)} \le \frac{P(CA)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(B|A) \le P(C|A)$$

مسائل حل شده

۱) ثابت کنید اگر $P(A\cap B) \le P(A).P(B)$ آنگاه

$P(A'\cap B') \le P(A').P(B')$

حل:

می‌دانیم :

$P(A'\cap B') = P(A\cup B)' = 1-P(A\cup B)$

ولی :

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

بنابراین :

$P(A'\cap B') = 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

از آنجا که :

$P(A\cap B) \le P(A).P(B)$

می‌توان نتیجه گرفت :

$$P(A'\cap B')\leq ۱-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$

یا :

$$P(A'\cap B')\leq [۱-P(A)]\,[۱-P(B)]$$

که خواهد شد :

$$P(A'\cap B')\leq P(A').P(B')$$

۲) اگر $AB\subset C$ باشد ثابت کنید :

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq ۱$$

(درباره تعمیم قضیه بحث کنید)

حل: بنا به قضیه

بنا به قضیه خوانده شده :

$$P(AB)\leq P(C)$$

می‌دانیم :

$$P(A)=P(AB)+P(AB')$$

$$P(B)=P(AB)+P(A'B)$$

اکنون :

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq [P(AB)+P(AB')]+[P(AB)+P(A'B)]-P(AB)$$

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq P(AB)+P(AB')+P(A'B)$$

از آنجا که :

$$P(AB)+P(AB')=P(A)$$

و همچنین :

$$P(A'B)=P(B)-P(AB)$$

پس :

$$P(A)+P(B)-P(C)\leq P(A)+P(B)-P(AB)$$

برهان تمام است امّا :

$$\leq P(A+B)\leq ۱$$

$$\leq ۱-P(A+B)'$$

$$\leq ۱-P(A'B')\leq ۱$$

۳) ثابت کنید اگر $AB=\circ\{\ \}$ آنگاه $P(A)\leq P(\overline{B})$

$$AB=\varnothing \Rightarrow A\cap B=\varnothing$$

$\Rightarrow A\ ,\ B$ جدا از هم

$$\Rightarrow A\subset B'$$

$$\Rightarrow P(A)\leq P(\overline{B})$$

مسایل

۱) اگر $ABC\subset D$ ثابت کنید :

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\leq ۲$$

۲) اتحاد زیر و تعمیم آن را ثابت کنید.

$$P(A\cap B)\geq ۱-P(\overline{A})-P(\overline{B})$$

۳) تعمیم مسئله اجتماع حوادث را ثابت کنید.

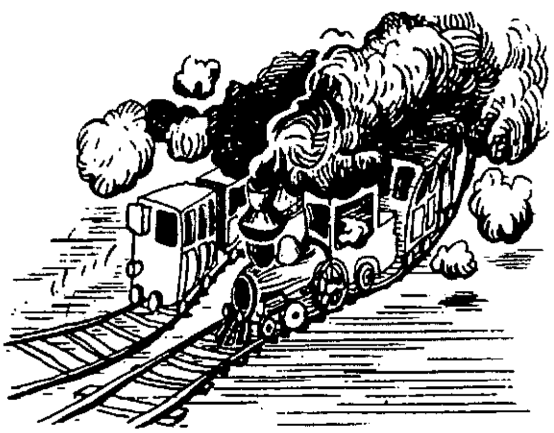
$$P\left(\bigcup_n A_n\right)\leq \sum_n P(A_n)$$



تفریح اندیشه ۴

دو شهر به وسیلهٔ راه‌آهن به هم وصل شده‌اند و رأس هر ساعت یک ترن از هریک از این دو شهر، به طرف شهر مقابل حرکت می‌کند.

سرعت تمام ترنها یکسان و زمان پیمودن فاصله بین دو شهر ۵ ساعت است. هر ترن از شروع حرکت خود تا رسیدن به شهر مقابل با چند ترن مواجه می‌شود؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

اثر جورج سامرز
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

منطق خود را بیازمایید

کوچکترین حاصل جمع

(سه)	(دو)	(یک)
NEAL	ELSA	GALE
+ELSA	+GALE	+NEAL
GALE	NEAL	ELSA

در هریک از سه جمع بالا، هر حرف نمایشگر یک رقم متفاوت است. با وجود این، هر حرف در یک جمع با حرف همانند آن در جمع دیگر لزوماً یکی نیست.

به نظر شما حاصل جمع کدام یک از جمعهای (یک)، (دو) و (سه) کوچکترین است؟

(**رهنمود**: برای دستیابی آسان به حل معما، توجه کنید که در هر جمع، فقط یک حرف هست که در ارتباط با یک رقم خاص کارکرد مشخّصی دارد. این رقم را بیابید و سپس دو رقم دیگر مرتبط با آن را، در هر جمع، مشخص کنید. به‌عبارت دقیقتر، نخستین و سوّمین ستون از سمت راست هر جمع را با هم مقایسه کنید تا به راه حل دست یابید.)

* * *

پاسخ معمای منطقی

E در جمع (یک)، A در جمع (دو) و L در جمع (سه) هر سه کارکرد یکسانی دارند.

در جمع (سه) یا	در جمع (دو) یا	در جمع (یک) یا
$L+A=E$ ؛ $L+E=۱۰+A$	$A+E=L$ ؛ $A+L=۱۰+E$	$E+L=A$ ؛ $E+A=۱۰+L$
یا	یا	یا
$L+E=A$ ؛ $L+A=۱۰+E$	$A+L=E$ ؛ $A+E=۱۰+L$	$E+A=L$ ؛ $E+L=۱۰+A$

با توجه به روابط بالا، می‌توان دریافت که فقط رقم ۵ در هر سه جمع کارکرد یکسانی دارد. برای مثال:

$۵+۴=۹$ $۵+۳=۸$

$۵+۹=۱۰+۴$ $۵+۸=۱۰+۳$

بنابراین داریم:

(یک)	(دو)	(سه)
GAL۵	ELS۵	NEA۵
+N۵AL	+G۵LE	+E۵SA
۵ LSA	NE۵L	GA۵E

چنانچه به جای حروف L در جمع (یک)، E در جمع (دو) و A در جمع (سه) رقم بگذاریم، به ترتیب مقدارهای A، L و E در جمع مربوط به هرکدام به دست می‌آید. با روش آزمون و خطا و حذف مواردی که در آنها از ستون دوم به سوم انتقالِ ۱ داریم، می‌توانَ صورتهای متفاوت هر جمع را چنین نوشت:

(یک)

(الف)	(ب)	(پ)
G۶۱۵	G۷۲۵	G۱۶۵
+N۵۶۱	+N۵۷۲	+N۵۱۶
۵۱۷۶	۵۲۹۷	۵۶۸۱

(دو)

(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
۶۱S۵	۷۲S۵	۸۳S۵	۹۴S۵
+G۵۱۶	+G۵۲۷	+G۵۳۸	+G۵۴۹
N۶۵۱	N۷۵۲	N۸۵۳	N۹۵۴

(سه)

(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
N۶۱۵	N۷۲۵	N۸۳۵	N۹۴۵
+۶۵S۱	+۷۵S۲	+۸۵S۳	+۹۵S۴
G۱۵۶	G۲۵۷	G۳۵۸	G۴۵۹

با بررسی جمعهای ناتمامِ بالا، آشکار می‌شود که جمعِ (یک) **دارای کوچکترین حاصل جمع است.** برای کامل کردن جمعها باید به یادداشت که نخستین حرفِ هیچ یک از اعداد عوامل جمع نباید صفر باشد. همچنین توجه کنید که مقدارهای حروف باقیمانده باید با مقدارهای مشخص شده در هر جمع متفاوت باشد. بنابراین، جمعِ (یک) دارای چهار صورت ممکن، جمع (دو) فقط یک صورت و جمع (سه) دوصورت ممکن است:

(یک)

(ب)	(ب)	(پ)	(پ)
۱۷۲۵	۳۷۲۵	۲۱۶۵	۳۱۶۵
+۳۵۷۲	+۱۵۷۲	+۳۵۱۶	+۲۵۱۶
۵۲۹۷	۵۲۹۷	۵۶۸۱	۵۶۸۱

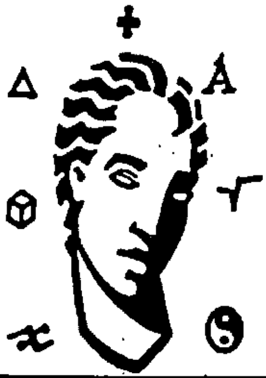
(دو)

(الف)
۶۱۳۵
+۲۵۱۶
۸۶۵۱

(سه)

(الف)	(ب)
۲۶۱۵	۱۷۲۵
+۶۵۴۱	+۷۵۳۲
۹۱۵۶	۹۲۵۷

منبع ترجمه: Summers, George J. *Test your Logic*. Dover Publications, Inc. New york.



تفریح اندیشه ۵

شنهای زمان

مریم خانم میانسال برای پختن یک کیک دچار مشکل شده است. دستورالعمل پختن کیک این است که دقیقاً نه دقیقهٔ متوالی پخته شود، اما تنها چیزی که وی برای اندازه‌گیری زمان دارد دو ساعت شنی است. اولی گذشت چهار دقیقه و دومی گذشت هفت دقیقه را مشخص می‌کند.

درصورتی که روی‌ساعتها درجه‌بندی نشده باشد و نتوانیم شنهای آنها را منتقل کنیم، سریعترین راه مشخص کردن نه دقیقه با استفاده از این دو ساعت چیست؟ (ساعت را می‌توان با به پهلو قراردادن متوقف کرد.)

جواب در صفحهٔ ۸۸

کاربرد ریاضیات در شیمی

پیمان بلقاری سال چهارم ریاضی

تعریف هیبریداسیون: هرگاه چند اُربیتال اتمی متفاوت با هم ادغام و آمیخته شوند و از اختلاط آنان به همان تعداد اُربیتال کاملاً یکسان (از نظر شکل و سطح انرژی) تشکیل شود، این طرح یا مدل را هیبریداسیون می‌نامند و اُربیتالهای حاصل، اُربیتالهای هیبریدی نامیده می‌شوند که این اُربیتالها تنها از نظر جهت‌یابی در سطح یا فضا با یکدیگر تفاوت دارند. انواع هیبریداسیون : Sp و $Sp^۲$ و $Sp^۳$ و $Sp^۳d$ و...

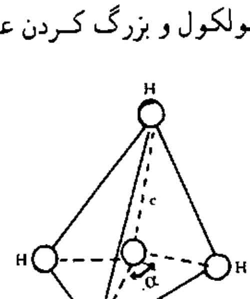
بحث در مورد هیبریداسیون $Sp^۳$

در این نوع هیبریداسیون یک اُربیتال S با سه اُربیتال p هیبرید شده و ۴ اُربیتال هیبرید یکسان $Sp^۳$ به وجود می‌آورند که هر اُربیتال $Sp^۳$، $\frac{۱}{۴}$ خصلت اُربیتال S و $\frac{۳}{۴}$ خصلت اُربیتال p را دارند و گسترش طولی این نوع اُربیتالها را طبق قرار داد ۲ در نظر گرفته‌اند.

شکل مولکولهایی که اتم مرکزی آنان از هیبریداسیون $Sp^۳$ استفاده می‌کنند، به صورت چهار وجهی می‌باشد، در حالی که زاویه پیوندی این نوع مولکولها $۱۰۹°, ۲۸'$ است، مانند مولکول متان

زاویهٔ پیوندی $= \alpha = ۱۰۹°, ۲۸' = ۱۰۹/۵°$

این زاویه را از طریق تجربی با نقره اندود کردن زاویه و عکسبرداری از مولکول و بزرگ کردن عکس و از طریق



مقیاسهای مناسب به دست می‌آورند. اما از اثبات منطقی و ریاضی آن غافل‌اند. حال به اثبات ریاضی آن به طور مثال در مورد مولکول متان می‌پردازیم.

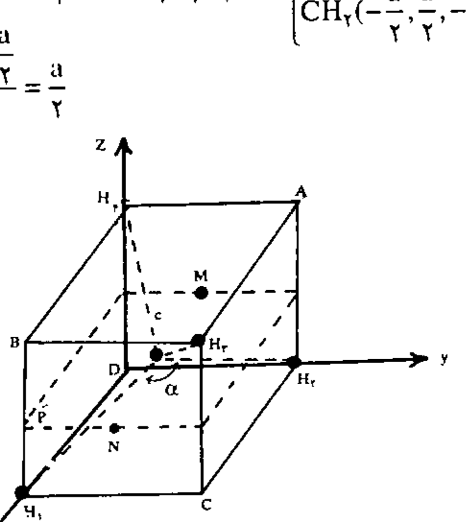
اثبات: ابتدا اوساط دو صفحهٔ ($AH_۲DH_۳$) و ($BH_۱CH_۳$) را با دو نقطهٔ M و N مشخص می‌کنیم حال ضلع مکعب را برابر مقدار a در نظر می‌گیریم. از هر سه نقطه مانند M و N و C فقط یک صفحه عبور می‌کند. آن صفحه را P می‌نامیم حال داریم :

$M(۰, \frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}) \quad H_۱(a, ۰, ۰)$

$N(a, \frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}) \quad H_۲(۰, a, ۰)$

M و N و C در یک صفحه واقع‌اند.

$$\begin{cases} x_c = \frac{۰+a}{۲} = \frac{a}{۲} \\ y_c = \frac{\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}}{۲} = \frac{a}{۲} \\ z_c = \frac{\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}}{۲} = \frac{a}{۲} \end{cases} \rightarrow C(\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}) \rightarrow \begin{cases} \vec{CH_۱}(\frac{a}{۲}, -\frac{a}{۲}, -\frac{a}{۲}) \\ \vec{CH_۲}(-\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}, -\frac{a}{۲}) \end{cases}$$



زاویهٔ بین دو بردار $\vec{CH_1}$ و $\vec{CH_2}$ همان زاویهٔ پیوندی مولکول متان می‌باشد. پس داریم.

$$\boxed{\sin(۱۹,۳۰') = ۰/۳۳۳۸}$$

$$\cos\alpha = \cos(H_1\hat{C}H_2) = \frac{\vec{CH_1}\cdot\vec{CH_2}}{|\vec{CH_1}||\vec{CH_2}|} = \frac{-\frac{a^۲}{۴}-\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}}{\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}}\times\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}}}$$

$$= \frac{-\frac{a^۲}{۴}}{\sqrt{۳}(\frac{a}{۲})\times\sqrt{۳}(\frac{a}{۲})} = -\frac{۱}{۳} = -۰/۳۳۳۳$$

$$\to \cos\alpha = -\sin(۱۹,۳۰') = -\sin(۱۹/۵^\circ)$$

$= \cos(۹۰^\circ+۱۹/۵^\circ) \to \alpha = ۱۰۹/۵^\circ$ یا $\boxed{\alpha = ۱۰۹,۳۰'}$

لازم به ذکر است که در بالا از $\sin(۱۹,۳۰')$ که برابر ۰/۳۳۳۸ است استفاده شده در حالی که اگر ′۲ از زاویه کم شود سینوس آن تقریباً ۰/۳۳۳۳ خواهد شد.

برای محاسبهٔ زاویهٔ مولکولهایی از قبیل مولکول متان، تتراکلرید کربن ... روش دیگری که به مراتب از روش اول کاملتر است توسط آقای علیرضا مظفری ارائه شده که شرح آن به صورت زیر می‌باشد.

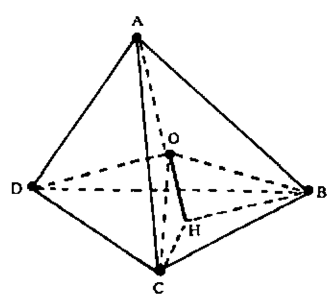
۱ــ اگر AO را ادامه دهیم بر صفحهٔ مثلث BCD عمود می‌شود چون شکل مزبور چهار وجهی منظم می‌باشد.

$\Delta OHB: y^۲ = ۴ - x^۲$ رابطهٔ (I)

رابطهٔ (II)

$\Delta ABH: y^۲ = a^۲ - (۲+x)^۲ \to y^۲ = a^۲ - ۴ - x^۲ - ۴x$

$\Delta CHB: a^۲ = y^۲ + y^۲ - ۲y^۲\cos۱۲۰$ رابطهٔ (III)



رابطهٔ I را در رابطه II جایگزین می‌کنیم.

$OA = OB = ۲$ طول پیوند

$۴ - x^۲ = a^۲ - (۲+x)^۲ = a^۲ - ۴ - x^۲ - ۴x$

رابطهٔ III را در رابطهٔ بدست آمده جایگزین می‌کنیم.

$BH = HC = y \ , \ OH = x$

$۴ - x^۲ = ۲y^۲ - ۲y^۲(-\frac{۱}{۲}) - ۴ - x^۲ - ۴x$

$AB = BC = a$

$y^۲ = ۴ - x^۲, ۴ - x^۲ = ۳(۴ - x^۲) - ۴ - x^۲ - ۴x$

$\to ۴ - \cancel{x^۲} = ۱۲ - ۳x^۲ - ۴ - \cancel{x^۲} - ۴x$

(زیرا اندازهٔ پاره خط منفی نمی‌شود)

$$\to -۳x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \to \begin{cases} x' = \frac{۲+۴}{-۳} = \frac{-۶}{۳} = -۲ \\ x = \frac{۲-۴}{-۳} = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

رابطهٔ I و II $\Rightarrow ۴ - \cancel{x^۲} = a^۲ - ۴ - \cancel{x^۲} - ۴x$

$\to a^۲ = ۴x + ۸ = \frac{۸}{۳} + ۸ = \frac{۳۲}{۳} \to \boxed{a^۲ = ۱۰/۶۶۶۶}$

$\Delta AOB: a^۲ = ۴ + ۴ - ۸\cos c \to ۱۰/۶۶۶۶$

$= ۸ - ۸\cos c \to \cos c = \frac{۲/۶۶۶۶}{-۸} = -۰/۳۳۳۳$

$۰/۳۲۵۶ < ۰/۳۳۳۳ < ۰/۳۴۲۰$

$۷۰ < x < ۷۱$

کم می‌شود به مقدار کسینوس اضافه می‌شود — چون مقدار کسینوس منفی بود زاویه را از ۱۸۰ کم می‌کنیم

۰/۰۱۶۴	۱°
۰/۰۰۷۷	$x = ۰/۴۶۹۵$

$\to ۱۸۰ - c = ۷۰/۵۳۰۴$

$\to c = ۱۰۹/۴۶۹$

۱°	۶۰′
۴۶۹۶	$x = ۱۸'$

$\to \boxed{c = ۱۰۹^\circ,۲۸'}$

آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (قسمت اول)

محمد رحیم
دبیر دبیرستان نمونهٔ دولتی امام صادق (ع)

مقدمه

از آن‌جا که زبان پاسکال هم به‌لحاظ آموزش و هم به‌لحاظ فراگیری آسان بوده و نیز علاوه بر آن دارای قابلیتهای بالایی است، سلسله مباحثی تحت عنوان آموزش زبان پاسکال ارائه می‌شود. سادگی ساختار زبان پاسکال باعث شده که طرفداران زیادی پیدا کند و درحال حاضر بسیاری از برنامه‌های کاربردی با این زبان نوشته می‌شوند. بنابر تجربه‌ای که نگارنده در امر تدریس و نیز برنامه‌نویسی به زبانهای ++C، Pascal، Assembly و غیره دارد، این نکته تأکید می‌گردد که هر زبان برنامه‌نویسی ویژگیهای خاص خود را دارد و باید هر زبان برنامه‌نویسی را همان‌گونه که هست یاد گرفت. نکته مهم دیگر این است که برای یادگیری هر زبان برنامه‌نویسی باید زیاد تمرین کرد تا اصول حاکم بر آن زبان به‌طورکامل درک شود و زبان پاسکال نیز از این امر جدا نیست.

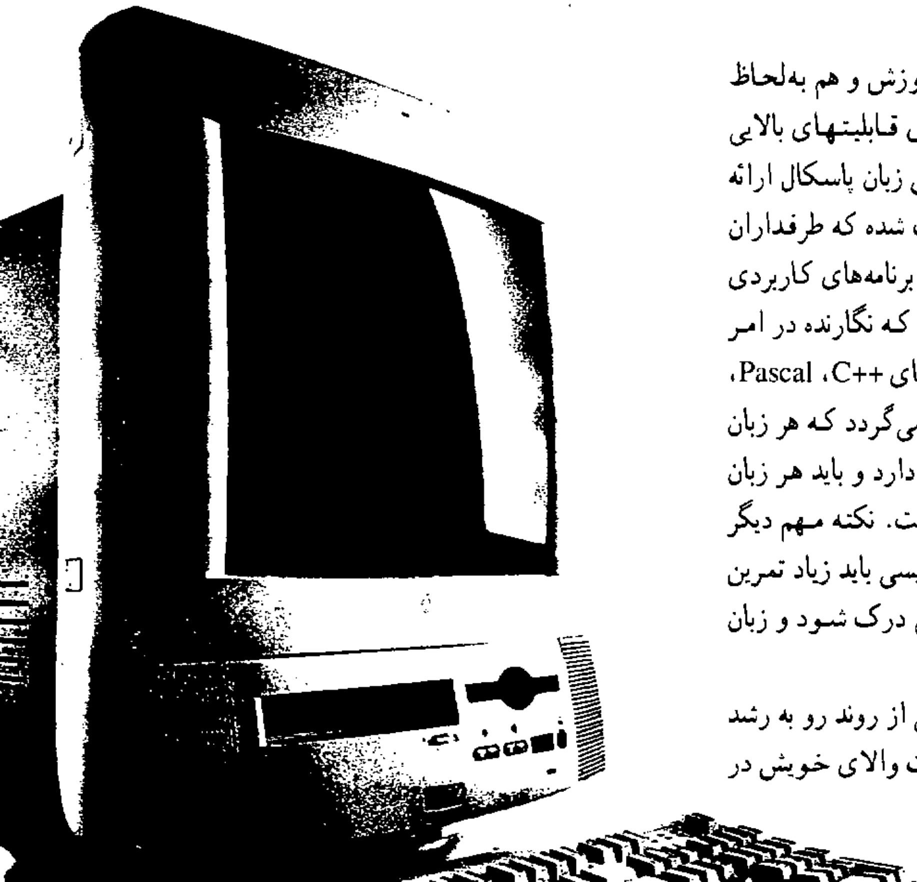
امید است که آینده‌سازان مملکت اسلامی از روند رو به رشد و سریع علم کامپیوتر عقب نمانده و با همت والای خویش در جهت غنای علمی و فرهنگی گام بردارند.

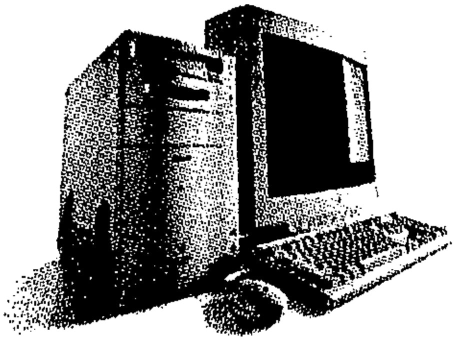
تاریخچه

زبان پاسکال اولین بار در سال ۱۹۷۰ میلادی توسط یک دانشمند علوم کامپیوتر به‌نام Niklaus Wirth در شهر زوریخ سویس طراحی شد و به افتخار ریاضیدان فرانسوی Bliase Pascal که اولین محاسبه‌گر مکانیکی را اختراع کرد، PASCAL نامگذاری گردید. زبان پاسکال جزو زبانهای نسل سوم (۱۹۷۰ـ ۱۹۶۲) است که برگرفته از زبان ALGOL 60 می‌باشد. زبان پاسکال سپس خود مبنایی برای طراحی زبانهایی چون Ada و Modula - 2 قرار گرفت. درسال ۱۹۸۳ مؤسسهٔ استاندارد ANSI و نیز مؤسسهٔ IEEE استاندارد زبان پاسکال را تدوین کردند. درحال حاضر مترجم[1] پاسکال نسبت به پاسکال استاندارد از سوی شرکتهای معتبر کامپیوتری توسعه یافته و نسخه‌های جدید آن در دسترس عموم قرار گرفته است.

طبقه‌بندی زبانها

توضیح این مطلب ضروری است که پردازندهٔ سیستم (CPU) فقط 0 و 1 را می‌فهمد، ولی برنامه‌هایی را که برای ما قابل فهم





است، نمی‌فهمد. از این‌رو باید یک رابط و یا واسطه‌ای وجود داشته باشد، تا برنامه‌هایی را که برای ما قابل فهم است، به کدهای قابل فهم برای سیستم (0 و 1) تبدیل کند که مترجم (Compiler) این‌کار را انجام می‌دهد. حال بسته به این‌که برنامه‌های نوشته شده به چه میزان به کدهای سیستم (0 و 1) نزدیک باشند، سطوح مختلفی را قائل می‌شویم. چون کدهایی که به زبان Assembly نوشته می‌شوند، به کدهای سیستم نزدیک هستند لذا به آن، زبان سطح پایین می‌گوییم. زبانهایی همچون Basic، Fortran، Pascal، Lisp، Prolog، Ada و... به این دلیل زبان سطح بالا نامیده می‌شوند که کاربر[۲] نیازی به دانستن جزئیات سخت‌افزار نداشته و می‌تواند دستورات لازم را به‌گونه‌ای بنویسد، که برای خودش نیز قابل فهم باشد. برای مثال در زبان Basic دستور Print x که مقدار x را در خروجی چاپ می‌کند، دستور با مسمّایی بوده و کاربر درک معینی از آن دارد، ولی از طرفی کامپیوتر این دستور را نمی‌فهمد و این وظیفهٔ مترجم است که با 0 و 1 این دستور را به کامپیوتر بشناساند. در بیشتر مواقع، یک دستور در یک زبان سطح بالا معادل چندین دستور در یک زبان سطح پایین نظیر Assembly است. از طرفی در یک زبان سطح پایین باید با ثبّاتها[۳] و وقفه‌ها[۴] به طور کامل آشنا بود. شایان ذکر است که درحال حاضر بیش از ۲۰۰۰ زبان برنامه‌نویسی سطح بالا وجود دارد!، و این خود حکایت از ساده‌تر بودن برنامه‌نویسی به زبانهای سطح بالا دارد. به زبانهایی نظیر زبان C و forth که هم قابلیتهای یک زبان سطح بالا را دارند و علاوه بر آن به سخت‌افزار سیستم هم نزدیک هستند، زبان سطح متوسط یا میانه می‌گویند.

یادآور می‌شویم که کامپیوتر حتی 0 و 1 را هم نمی‌فهمد، بلکه آن را از طریق برقراری و عدم برقراری جریان و ایجاد اختلاف ولتاژ در مدارات cpu درک می‌کند.

امّا چرا پاسکال؟

علاوه بر مواردی که در مقدمه ذکر شد، ویژگیهایی که در زیر به آن اشاره می‌شود، تصویر قدرتمندانه‌ای را از مترجمهای جدید زبان پاسکال ارائه می‌دهد و ما را بر آن می‌دارد که از پاسکال به‌عنوان یک زبان همه‌منظوره استفاده کنیم. این ویژگیها عبارتند از :

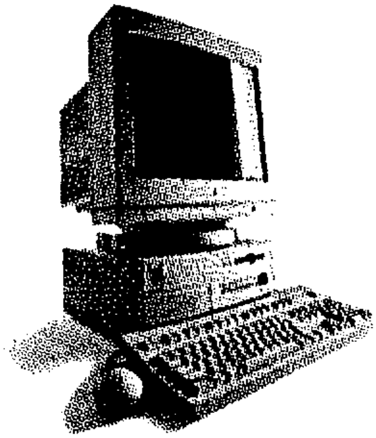
(۱) ساخت یافته بودن[۵] (۲) انعطاف‌پذیری که به‌دلیل وجود توابع کتابخانه‌ای بسیار متنوع حاصل شده است (۳) توانایی پشتیبانی برنامه‌های بزرگ (۴) داشتن قابلیتهای گرافیکی خیلی خوب (۵) استفاده از دستورات زبان Assembly به‌عنوان بخشی از برنامه که باعث سرعت بخشیدن به برنامه می‌شود (۶) توانایی ارتباط با زبان C که خود یک زبان بسیار پیشرفته می‌باشد (۷) قابلیت برنامه‌نویسی OOP[۶] که نگرشی جدید به شیوهٔ برنامه‌نویسی است (۸) قابلیت برنامه‌نویسی تحت Windows حتی به‌صورت OOP (۹) دسترسی به سیستم و در نتیجه توانایی برنامه‌نویسی سیستم[۷].

ذکر این مطلب ضروری است که در آموزش زبان پاسکال قصد نداریم به ویژگیهای بالا بپردازیم، چرا که بحث آنها خارج از محدودهٔ آموزش ما می‌باشد و علاقه‌مندان در آینده می‌توانند جزئیات مربوط به هر یک از آنها را مورد مطالعه قرار دهند.

ساختار زبان پاسکال

ـ در زبان پاسکال حساسیت نسبت به حروف کوچک و بزرگ (Case sensitive) وجود ندارد و دستورات برنامه را می‌توان با حروف کوچک و یا بزرگ نوشت.

ـ در زبان پاسکال کلیه متغیرهای مورد استفاده در برنامه باید از پیش معرفی شده باشند.

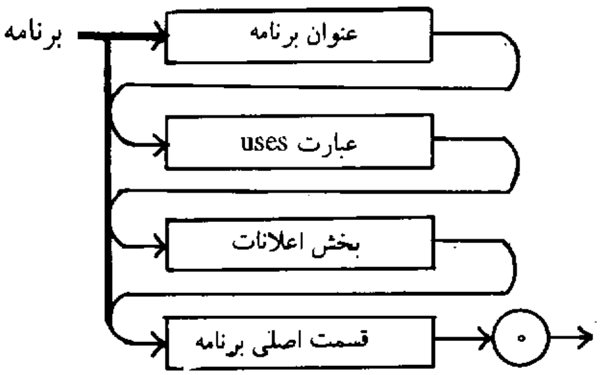


– در پایان هر دستور باید علامت ; گذاشته شود.

– تمامی دستورات برنامه در داخل بلوک (Block) قرار می‌گیرند.

– محدودیتی از نظر سطر و ستون وجود ندارد و می‌توان دستورات را پشت سر هم و یا زیر هم نوشت.

شکل ۱ ساختار کلی زبان پاسکال را نشان می‌دهد.



شکل ۱

توضیح هر یک از قسمتهای این ساختار به‌شرح زیر است :

عنوان برنامه (Program heading) : خط اول برنامه است و به این صورت می‌آید :

Program عنوان ;

در این‌جا «عنوان» نامی است که از قاعدهٔ شناسه‌ها که پس از این ذکر می‌شود، پیروی می‌کند. به‌طور معمول برای عنوان برنامه از اسمی استفاده می‌شود که عملکرد برنامه، الگوریتمهای خاصی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، خلاصه‌ای از صورت مسأله، فرضیات و یا غیره را بیان کند. برای مثال اگر می‌خواهیم یک برنامهٔ معدل‌گیری بنویسیم، خوب است که عنوان برنامه چنین باشد و Program Average. متذکر می‌گردد که این خط از برنامه اختیاری بوده و مطابق شکل ۱، یک برنامه می‌تواند این قسمت را نداشته باشد.

عبارت Uses : در مورد کاربرد این خط از برنامه پس از این توضیح داده خواهد شد.

بخش اعلانات (Declaration) : کلیهٔ ثابتها، متغیرها، برچسبها (Label) و نیز نوعهای (Type) جدید در این قسمت از برنامه معرفی می‌شوند. نحوهٔ معرفی پس از این توضیح داده خواهد شد. مطابق شکل ۱، یک برنامه می‌تواند بخش اعلانات نداشته باشد.

قسمت اصلی برنامه (Main program) : کلیهٔ دستوراتی که بین BEGIN و END. قرار گرفته و عملکرد کلی برنامه را مشخص می‌کنند. برای مثال، برنامهٔ زیر که فقط دارای عنوان و قسمت اصلی برنامه است، در خروجی BORHAN را چاپ می‌کند :

```
Program first - Program ;
BEGIN
   Write ( 'BORHAN');
END.
```

توضیح چند اصطلاح

(۱) کلمات رزرو شده یا کلمات کلیدی (Keyword) : به کلمات از پیش تعریف شده‌ای گفته می‌شود که مترجم پاسکال از آنها فقط یک مفهوم مشخص را درک می‌کند و ما نمی‌توانیم از آنها به‌جز در جایی که برای آنها درنظر گرفته شده است، استفاده کنیم مانند begin، End، program و write . فهرست کلمات

کلیدی در انتهای این نوشتار آمده است.

(۲) شناسه (Identifier) : هر کلمه‌ای که جزو کلمات کلیدی نباشد، از شناسه‌ها برای نامگذاری ثابتها، متغیرها، نوعها، عنوان برنامه، توابع[۸] و روالها[۹] استفاده می‌شود. اولین کارکتر[۱۰] شناسه باید یا حروف الفبا (کوچک یا بزرگ) یا خط فاصلهٔ زیر[۱۱] (_) باشد و به‌دنبال آن باید حروف الفبا، اعداد و یا خط فاصلهٔ زیر بیاید. طول شناسه حداکثر ۶۳ کارکتر است. برای مثال شناسه‌های borhan - 21 و Roshd - صحیح هستند، ولی استفاده از شناسه‌های 21-borhan و Roshd ! صحیح نمی‌باشد.

(۳) دستور یا جمله (statement) : هر عبارتی که برای مترجم پاسکال دارای مفهوم بوده و از کامپیوتر بخواهد که عملی را انجام دهد، برای مثال ('BORHAN') Write.

(۴) ثابت (Constant) : به قسمتی از حافظه گفته می‌شود که مقدار آن در طول اجرای برنامه تغییر نمی‌کند.

(۵) متغیر (Variable) : به قسمتی از حافظه گفته می‌شود که نامی به آن داده شده و مقدار آن در طول اجرای برنامه تغییر می‌کند.

(۶) رشته (String) : مجموعه‌ای از کارکترها که بین دو علامت ' ' قرار گیرند مانند : 'borhan'

(۷) بلوک (Block) : کلیهٔ دستوراتی که بین Begin و End قرار می‌گیرند.

(۸) فرمت (Format) : به چگونگی ظاهر شدن خروجی می‌گوییم.

(۹) توضیحات (Comment) : درصورت لزوم می‌توان توضیحاتی را به برنامه اضافه کرد. این توضیحات فقط برای خوانایی برنامه آورده می‌شوند و بین دو آکولاد { } و یا بین (* *) قرار می‌گیرند و مترجم پاسکال در هنگام ترجمه به آنها توجهی نمی‌کند. به توضیحاتی که در برنامهٔ زیر آمده توجه کنید :

```
Program Second - program ;
BEGIN {beginning of program}
Write ('pascal programming language');
END. (* End of program*)
```

کلمات کلیدی زبان پاسکال

کلمات رزرو شده

AND	END	NIL	SHR
ARRAY	FILE	NOT	STRING
ASM	FOR	OBJECT	THEN
BEGIN	FUNCTION	OF	TO
CASE	GOTO	OR	TYPE
CONST	IF	PACKED	UNIT
CONSTRUCTOR	IMPLEMENTATION	PROCEDURE	UNTIL
DESTRUCTOR	IN	PROGRAM	USES
DIV	INLINE	RECORD	VAR
DO	INTERFACE	REPEAT	WHILE
DOWNTO	LABEL	SET	WITH
ELSE	MOD	SHL	XOR

شناسه‌های استاندارد

ثابتهای از پیش تعریف شده

false	maxint	maxlongint	true

نوعهای از پیش تعریف شده

boolean	double	longint	single
byte	extended	real	text
char	integer	shortint	word
comp			

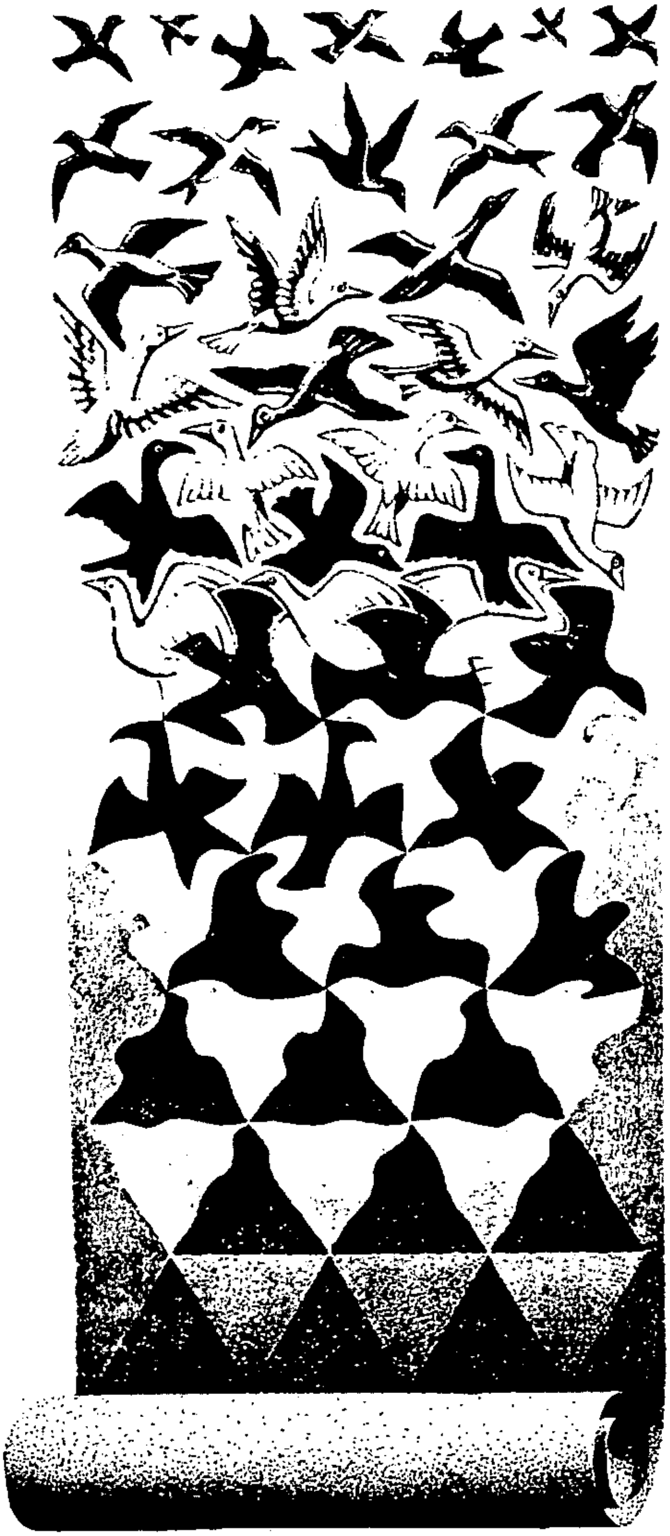
واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱. Compiler
۲. User
۳. register
۴. interrupt
۵. structured
۶. object oriented programming
۷. system programming
۸. function
۹. procedure
۱۰. character
۱۱. underscore

ترکیبات

قابل استفاده دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی

● ترجمه و جمع‌آوری: سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی اراک



ترکیبیات شاخه‌ای بسیار قدیمی از ریاضیات است، که بیشتر هنگام مطالعهٔ جایگشتها و ترکیبها با آن آشنا شده‌ایم. در سالهای اخیر، هم به دلیل آن که کامپیوترها امکان محاسبات ترکیباتی را که پیش از این ممکن نبود، فراهم ساخته‌اند و هم به این دلیل که بسیاری از مسائل ریاضی که در تحقیقات علوم کامپیوتری مطرح شده‌اند، نیاز به روشهای ترکیبیاتی دارند، رشدی انفجارآمیز در این زمینه به‌وجود آمده است.

این مقاله شامل دو بخش می‌باشد : بخش اول : اصل طرد و شمول و کاربردهایی از آن

بخش دوم : تعیین تعداد روابط روی یک مجموعه n عضوی تحت شرایط خاص که هردو از مفاهیم ترکیبیات به‌شمار می‌روند.

اصل طرد و شمول و کاربردهایی از آن

هدف اصلی در این بخش، بیان اصل طرد و شمول و کاربرد آن می‌باشد. به همین منظور ابتدا خلاصه‌ای از جایگشتها و ترکیبها ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که هنگام پرداختن به این ۲ بحث، ۴ مورد با علامت ** مشخص شده‌اند، که به نظریه اشغال معروف می‌باشند و تنها جهت پاسخگویی به سؤالات احتمالی که ممکن است در بخش بعد (روابط و افرازها) برای شما مطرح شدند، بیان شده‌اند.

جایگشتها

۱ ــ ترتیب بدون تکرار : در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عدد صحیحی باشد که $1 \le r \le n$، طبق اصل ضرب، تعداد جایگشتهای (انتخابهای مرتب) r اندازه‌ای n شیء مزبور عبارت است از: $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ (البته به شرطی که مجاز به تکرار نباشیم).

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره متمایز را در n جعبه قرار داد، طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد، برابر است با $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$.

۲ ــ ترتیب با تکرار: تحت شرایط ذکر شده در بالا، منتهی در صورت مجاز بودن تکرار، بنابه اصل ضرب n^r ترتیب ممکن با $r \ge 0$ موجود است.

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره متمایز را در n جعبه قرار داد، به شرطی که قرار گرفتن بیش از یک مهره در جعبه‌ها بلامانع باشد، n^r می‌باشد (مهره اول را در n جعبه می‌توان قرار داد و مهره دوم را نیز در n جعبه و ... مهره r ام را در n جعبه).

۳ ــ جایگشت اشیایی که شامل r نوع مختلفند . می‌دانیم تعداد جایگشتهای متمایز n شیء متمایز برابر است با !n. حال اگر n شیء متمایز نباشند، چه‌طور؟ این موضوع را با یک مثال روشن می‌کنیم. برای مثال می‌خواهیم ببینیم با حروف کلمه «شیمی» چند جایگشت می‌توان ساخت؟

اگر به‌طور موقتی برای تمایز دو حرف «ی» در کلمه شیمی این ۲ حرف را با $ی_1$ و $ی_2$ نشان دهیم، !۴ جایگشت مختلف از حروف ش، $ی_1$، م ، $ی_2$ وجود دارد. اما اگر زیرنویسها را حذف کنیم، آن‌گاه به عنوان نمونه دو جایگشت «م $ی_1$ ش $ی_2$» و «م $ی_2$ ش $ی_1$» هر دو «م ی ش ی» را نتیجه می‌دهند و بنابراین هر !۲ جایگشتهای با زیرنویس، فقط یک آرایش بدون زیرنویس را به‌دست می‌دهند و تعداد کل آرایشهای حروف کلمه «شیمی» برابر است با $\frac{4!}{2!}=12$.

به‌طور کلی اگر n شیء با n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم و ... و n_r شیء از نوع r ام با $n_1+...+n_r=n$ موجود باشند. در این صورت $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ ترتیب از n شیء داده شده وجود دارد. (اشیاء با هم نوع تمایز ناپذیرند).

مسأله۱ : با حروف کلمه pepper چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ حل: $\frac{6!}{3!2!1!}=60$

ترکیبها

۱ ــ ترکیب بدون تکرار : اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عدد صحیحی باشد که $0 \le r \le n$ تعداد ترکیبهای (انتخابهای نامرتب) r عضوی از این n شیء برابر است با $C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. به شرطی که مجاز به تکرار نباشیم. به جای نماد $C(n;r)$ می‌توان از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده کرد. توجه داشته باشیم که $\binom{n}{0}=1$.

توجه: $\binom{0}{0}=1$ و $\binom{n}{r}=0$ هرگاه $r>n$.

** تعداد روشهایی که می‌توان r مهره غیرمتمایز را در n جعبه قرار داد، طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد، برابر است با $\binom{n}{r}$.

مساله۲ : یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد، هرگاه او مجبور باشد از ۵ سؤال اول به ۳ سؤال و از ۵ سؤال آخر به ۴ سؤال پاسخ دهد؟

حل: تعداد روشهای انتخاب ۳ سؤال از ۵ سؤال اول $\binom{5}{3}$ می‌باشد و تعداد روشهای انتخاب ۴ سؤال از ۵ سؤال دوم $\binom{5}{4}$

می‌باشد. لذا طبق اصل ضرب $50=\binom{5}{4}\binom{5}{3}$ روش برای پاسخگویی موجود است.

۲ ــ قضیه : تعداد راههای افراز مجموعه‌ای از n شیء متمایز به r زیرمجموعه با n_1 شیء در اولین زیرمجموعه و ... و n_r شیء در r مین زیرمجموعه برابر است با

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

(اثبات به عهده خواننده است).

مسأله۳ : به چند طریق می‌توان ۷ دانشمند را در یک اتاق سه‌تخته و دو اتاق دوتخته هتلی جای داد؟

حل: $$\binom{7}{3,2,2}\left[=\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\right]=\frac{7!}{3!.2!.2!}$$

۳ ــ ترکیب با تکرار : نماد $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبهای n شیء مختلف را نشان می‌دهد که هربار r تای آنها را انتخاب کنیم. اکنون فرض کنیم از هریک از n شیء چند نمونه همانند، مانند ترکیبهای یکسان کتابها در یک کتابفروشی وجود داشته باشد، بنابراین می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که برای n رستهٔ متمایز از اشیا، که از هریک از آنها حداقل r نمونه موجود است، چند ترکیب مختلف از r شیء وجود دارد (هر ترکیب ممکن است شامل چند شیء نامتمایز از اشیای یک رسته باشد.) برای روشن شدن این موضوع از یک مثال استفاده می‌کنیم.

مهره‌های یک بازی به ۴ رنگ قرمز، سفید، آبی، زرد هستند. به چند طریق می‌توان ۷ مهره را از بین آنها انتخاب کرد، هرگاه مجاز به تکرار انتخاب باشیم (یا هرگاه از هر رنگ مهره حداقل ۷ مهره داشته باشیم).

حل: ممکن است ۷ مهره انتخاب شده همرنگ باشند برای مثال قرمز، و یا ممکن است از رنگهای مختلف باشند.

چون تصمیم داریم ۷ مهره انتخاب کنیم، ۷ علامت «×» درنظر گرفته و با توجه به این که مهره‌ها ۴ نوعند، ۳ = ۱ ــ ۴ علامت «|» در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم هر آرایشی که با ۷ علامت «×» و ۳ علامت «|» تشکیل می‌شود، یک جواب مسأله است. برای مثال برای تعیین تعداد مهره‌های قرمز جای اولین «|» را تعیین کرد. و تعداد «×» هایی را که در سمت چپ آن است می‌شماریم. برای تعیین تعداد مهره‌های سفید، تعداد «×» که بین اولین و دومین «|» است می‌شماریم. به همین ترتیب، تعداد مهره‌های آبی و زرد را به ترتیب مساوی تعداد «×» های بین دومین و سومین «|»، و تعداد «×» های سمت راست سومین «|» قرار می‌دهیم. برعکس، اگر تعداد مهره‌های قرمز و سفید و آبی و زرد انتخاب شده به ترتیب ۲ و ۰ و ۱ و ۴ باشد، متناظر با این جواب می‌توان آرایش ×××× | × || ×× را درنظر گرفت. لذا تعداد راههای انتخاب با تکرار ۷ مهره از بین ۴ مهره متمایز، برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان ۷ «×» و ۳ «|» را کنار هم قرار داد و این نیز طبق فرمول ۳ جایگشتها برابر است با $\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!3!}$

بنابراین تعداد انتخابهای با تکرار r شیء از n شیء متمایز برابر است با تعداد ترتیب‌های r تا «×» و ۱− n تا «|» و این نیز برابر است با $\binom{n+r-1}{r}=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$، که آن را با نماد $a(n,r)$ نمایش می‌دهند.

البته این فرمول را می‌توان با نوشتن رابطه بازگشتی مناسب و حل آن از طریق تابع مولد نیز به‌دست آورد.

نکته : عبارات زیر هم‌ارز هستند: ۱ ــ تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_n=r$ ، $x_i\ge 0$ ، $1\le i\le n$

۲ ــ تعداد انتخابهای **با تکرار** r شیء از n شیء متمایز.

۳ ــ تعداد راههای توزیع r شیء مشابه در n ظرف متمایز، با فرض این که در هر ظرف، **بیش از یک شیء بتواند قرار گیرد**. و در هر ۳ مورد تعداد جوابها برابر است

با $\binom{n+r-1}{n-1}=(n+r-1)$ رابطهٔ

مثال۱ : ۲۰ کتاب مختلف درنظر بگیرید، که از هرکدام تعداد نامحدودی در دسترس است. تعداد حالاتی که می‌توان ۱۰ کتاب ازبین آنها انتخاب کرد، به شرطی که الف) تکرار مجاز باشد، برابر است با $\binom{20+10-1}{10}=\binom{29}{10}$، چون موضوع انتخاب با تکرار ۱۰ شیء از ۲۰ شیء متفاوت است. ب) تکرار

مجاز نباشد (۱۰ کتاب منتخب متفاوت باشند)، برابر است با $\binom{20}{10}$.

مسأله۴ : به چند روش می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد، طوری که هر نفر حداقل یک سیب دریافت کند؟

حل: برای توزیع سیب‌ها، ابتدا به هر نفر یک سیب داده و سپس ۳ سیب باقیمانده را بین ۴ نفر توزیع می‌کنیم، لذا این توزیع به $20=\binom{4+3-1}{3}$ روش می‌تواند انجام شود، سپس ۶ پرتقال را به $84=\binom{9}{6}=\binom{4+6-1}{6}$ روش بین ۴ نفر توزیع می‌کنیم (برای مثال می‌توانیم ۶ پرتقال را به یک نفر بدهیم و به ۳ نفر دیگر پرتقال ندهیم). لذا طبق اصل ضرب $20\times 84=1680$ راه برای توزیع میوه‌ها تحت شرایط مذکور وجود دارد.

معادلات خطی با ضرایب واحد

توجه: x عدد صحیح و غیرمنفی است را به صورت $x\geq 0$ و x عدد صحیح و مثبت است را به صورت $x\geq 1$ یا $x>0$ (که x عدد صحیح است) نمایش می‌دهیم.

مثال ۲ : تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ با توجه به فرمول * برابر است با $120=\binom{10}{7}=\binom{4+7-1}{7}$ توجه داریم به این که $(x_1=3,\ x_2=3,\ x_3=0,\ x_4=1)$ و $(x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=3,\ x_4=3)$ را جوابهای متفاوت گوییم.

به‌طور کلی تنها جوابهایی را یکسان درنظر می‌گیریم، که مقادیر x_1 ها و x_2 ها و x_3 ها و x_4 های آن به‌طور همزمان برابر باشند.

(در وضعیتی که ۱۲ جواب این چنینی درست مانند یک جواب رفتار کنند، جوابها تحت عنوان افرازهای عدد ۷ می‌آیند، که در بخش بعد توضیح داده خواهد شد).

مثال ۳ : برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله① $x_1+x_2+x_3+x_4=32$ ابتدا هریک از متغیرها عدد یک را نسبت می‌دهیم. لذا هر جواب صحیح و مثبت معادله فوق با یک جواب صحیح و غیرمنفی معادله② $x_1+x_2+x_3+x_4=28$ متناظر است. برای مثال جواب $x_1=1,\ x_2=7,\ x_3=9,\ x_4=15$ از معادله ① با جواب $x_1=0,\ x_2=6,\ x_3=8,\ x_4=14$ از معادلهٔ ② متناظر است (کافی است برای پیدا کردن مقدار جوابهای معادله ①، به جوابهای به‌دست آمده از معادله ② یک را اضافه کنیم). لذا تعداد جوابهای هر دو معادله باهم برابر است که با توجه به فرمول* $\binom{31}{3}$ یا $\binom{31}{28}=\binom{4+28-1}{28}$ خواهد بود.

نتیجه ۱ : به‌طور کلی تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=m$ برابر است با $\binom{m-1}{k-1}$ (اگر $k>m$ آن گاه $\binom{m-1}{k-1}=0$).

مثال ۴ : برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=32$ ، $x_1,x_2\geq 5$ و $x_3,x_4\geq 7$. ابتدا به متغیرهای x_1 و x_2 عدد ۵ و به x_3 و x_4 عدد ۷ را نسبت می‌دهیم. لذا تعداد جوابهای معادله مذکور با شرایط فوق برابر است با تعداد جوابهای صحیح و غیرمنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ و این نیز برابر است با $\binom{11}{3}$ یا $\binom{11}{8}=\binom{4+8-1}{8}$.

نتیجه ۲ : به‌طور کلی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=m$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی با شرط $x_1\geq c_1, x_2\geq c_2,\dots x_k\geq c_k$ برابر است با $\binom{m-c_1-c_2-\dots-c_k+k-1}{k-1}$.

مثال۵ : برای پیداکردن تعداد جوابهای صحیح $x_4>8$ ، $x_1+x_2+x_3+x_4=48$ و $x_1>5$ ، $x_2>6$ ، $x_3>7$ ابتدا به هریک از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 و x_4 به ترتیب اعداد ۶ و ۷ و ۸ و ۹ را نسبت می‌دهیم. بنابراین تعداد جوابهای معادله فوق با شرایط مذکور با تعداد جوابهای صحیح $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ ، $x_i\geq 0$ ، $1\leq i\leq 4$ برابر است و تعداد جوابهای این معادله نیز $\binom{21}{3}=\binom{21}{18}=\binom{4+18-1}{18}$

می‌باشد.

نتیجه ۳ : به طور کلی تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1+x_2+...+x_k=m$ درشرایط $x_1>c_1, x_2>c_2, ..., x_k>c_k$ برابر است با $\binom{m-c_1-c_2-...-c_k-1}{k-1}$.

تذکر : گرچه در مثالهایی که به کار بردیم، اعداد صحیح $c_1, c_2, ..., c_k$ همگی مثبت انتخاب شده بودند. ولی این نتایج برای اعداد صحیح منفی و صفر نیز قابل استفاده هستند.

مسأله ۵ : **تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت** با شرط الف) $x_1>6$. ب) $x_1, x_2>6$. پ) $x_1, x_2, x_3>6$ به دست آورید.

حل: الف)

روش اول: $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $\overset{\text{طبق نتیجه۳}}{x_1>6,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0 \Rightarrow} = \binom{20-6-1}{3} = \binom{13}{3}$

روش دوم: $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $\overset{\text{طبق نتیجه۲}}{x_1\geq 7,\ x_2\geq 1,\ x_3\geq 1,\ x_4\geq 1 \Rightarrow} = \binom{20-7-1-1-1+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$

ب) $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $\overset{\text{طبق نتیجه۲}}{x_1\geq 7,\ x_2\geq 7,\ x_3\geq 1,\ x_4\geq 1 \Rightarrow} = \binom{20-7-7-1-1+4-1}{4-1} = \binom{7}{3}$

پ) $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ ،

تعداد جوابها $\overset{\text{طبق نتیجه۳}}{x_1, x_2, x_3>6\ ,\ x_4>0 \Rightarrow} = \binom{20-6-6-6-1}{4-1} = \binom{1}{3} = 0$

قضیه (اصل طرد و شمول)

فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد که $|S|=N$ و $c_i\ (1\leq i\leq t)$ شرط یا خاصیتی باشد، که برای بعضی یا تمام اعضای S برقرار باشد و $\overline{N}$ یا $N(\overline{c}_1\overline{c}_2...\overline{c}_t)$ تعداد اعضایی از S باشد که هیچکدام از خواص فوق را نداشته باشد، آن گاه:

$$\overline{N}=N-\left[N(c_1)+N(c_2)+N(c_t)\right]+$$
$$\left[N(c_1c_2)+...+N(c_1c_t)+N(c_2c_3)+...+\right.$$
$$\left.N(c_2c_t)+...+N(c_{t-1}c_t)\right]$$
$$-\left[N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+...+N(c_1c_2t)+\right.$$
$$N(c_1c_3c_4)+N(c_1c_3c_5)+...+N(c_1c_3c_t)+...+$$
$$\left.N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)\right]+...+(-1)^t N(c_1c_2...c_t).$$

یا $\overline{N}=N(\overline{c}_1\overline{c}_2...\overline{c}_t)=N-\sum_{1\leq i\leq t}N(c_i)+\sum_{1\leq i<j\leq t}N(c_ic_j)-$
$$\sum_{1\leq i<j<k\leq t}N(c_ic_jc_k)+...+(-1)^t N(c_1c_2...c_t)$$

برای $1\leq i\leq t$ ، $N(c_i)$ تعداد اعضایی ازSاست که در شرط c_i صدق می‌کند. اگر $i\neq j$ ، $N(c_ic_j)$ تعداد عناصری از s است که هردو خاصیت c_i و c_j برای آنها برقرار است. اگر $1\leq i,j,k\leq t$ سه عدد باشند که دوبدو مساوی نباشند، $N(c_ic_jc_k)$ تعداد اعضایی از S است که در هر سه خاصیت c_i و c_j و c_k صدق می‌کند.

نتیجه : اگر $N(c_1 or c_2 or ... c_t)$ تعداد اعضایی از S باشد که حداقل یکی از خواص را داشته باشد، آن‌گاه

$N(c_1$ یا c_2 یا ... یا $c_t) =$

$$N-\overline{N}=\sum_{1\leq i\leq t}N(c_i)-\sum_{1\leq i<j\leq t}N(c_ic_j)+...+(-1)^{t-1}N(c_i...c_t)$$

(با حالت خاص این نتیجه در کتاب «جبر و احتمال» آشنا شده‌اید).

مثال ۶ : برای پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ با شرط $0\leq x_i\leq 7$ برای $1\leq i\leq 4$ ، S را مجموعه جواب معادلهٔ $x_i\geq 0$ ، $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ قرار می‌دهیم لذا

$$|S| = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18} = 1330$$

گوییم یک‌جواب x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 در شرط c_i صدق می‌کنند هرگاه برای $1 \le i \le 4$ ، $x_i > 7$ (یا $x_i \ge 8$) باشد. بنابراین برای حل مسأله باید $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)$ (یعنی تعداد عناصری از S که در شروط $c_1,\dots,c_4$ صدق نمی‌کند) را محاسبه کنیم.

$N(c_1)$ یعنی تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 \ge 8,\ x_2, x_3, x_4 \ge 0$ ، $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ ،

لذا طبق نتیجه ۲ خواهیم داشت :

$$N(c_1) = \binom{18-8+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} \text{ یا } \binom{13}{10}$$

و به همین ترتیب $N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = \binom{13}{10}$.

$N(c_1c_2)$ یعنی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_3, x_4 \ge 0$ ، $x_1, x_2 \ge 8$ ، $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ ، لذا طبق نتیجه ۲ خواهیم داشت :

$$N(c_1c_2) = \binom{18-8-8+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} \text{ یا } \binom{5}{2}$$

و به همین ترتیب

$$N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = \binom{5}{2}$$

$N(c_1c_2c_3)$

یعنی تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1, x_2, x_3 \ge 8,\ x_4 \ge 0$ ، $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ و چنین معادله‌ای جواب ندارد. لذا $N(c_1c_2c_3) = 0$ و به همین ترتیب $\underset{1 \le i<j<k \le 4}{N(c_ic_jc_k)} = 0$ و نیز $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$ ، لذا

$$\bar{N} = N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = |S| - \sum_{1 \le i \le 4} N(c_i) + \sum_{1 \le i<j \le 4} N(c_ic_j) - \sum_{1 \le i<j<k \le 4} N(c_ic_jc_k) + \sum_{1 \le i<j<k<t \le 4} N(c_ic_jc_kc_t) =$$

$$\binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - \binom{4}{3} \times 0 + \binom{4}{4} \times 0 = 246$$

مسأله ۶ : با ۲۶ حرف انگلیسی چند جایگشت می‌توان نوشت که شامل کلمات، car، dog، pun، byte نباشد؟

حل: فرض می‌کنیم S مجموعهٔ تمام جایگشتهای متمایز ۲۶ حرف انگلیسی باشد. پس $|S| = N = 26!$. حال ci را با توجه به صورت مسأله تعریف می‌کنیم. گوییم یک جایگشت موجود در S در شرط c_1 صدق می‌کند، هرگاه آن جایگشت شامل کلمهٔ «car» باشد. لذا $N(c_1)$ یعنی تعداد جایگشتهایی که با ۲۶ حرف انگلیسی می‌توان نوشت، هرگاه آن جایگشت شامل کلمهٔ «car» باشد. به این منظور ۳ حرف موجود در این کلمه را یک حرف درنظر گرفته، با ۲۳ حرف باقیمانده تشکیل ۲۴ حرف خواهند داد، لذا $N(c_1) = 24!$ به همین ترتیب گوییم یک جایگشت در S در شروط c_2 ، c_3 و c_4 صدق می‌کند، هرگاه آن جایگشت به ترتیب شامل کلمات شماره ۲ و ۳ و ۴ باشد. لذا $N(c_2) = N(c_3) = 24!$ و $N(c_4) = 23!$. بنابراین برای یافتن جواب مسأله باید $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)$ را محاسبه کنیم. $N(c_1c_2)$ ، یعنی تعداد جایگشتهای ۲۶ حرف انگلیسی که هم شامل «car» و هم شامل «dog» باشد و برای محاسبهٔ آن ۳ حرف موجود در «car» را یک حرف و ۳ حرف موجود در «dog» را نیز یک حرف درنظر گیریم. لذا $N(c_1c_2)$ برابراست با تعداد جایگشتهای این ۲ حرف و $26 - 6 = 20$ حرف باقیمانده یعنی $N(c_1c_2) = 22!$. با روش مشابه خواهیم داشت

$$N(c_1c_3) = N(c_2c_3) = 22!$$

$$N(c_1c_4) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = 21!$$

$$N(c_1c_2c_3) = 20!$$

$$N(c_1c_2c_4) = N(c_2c_3c_4) = N(c_1c_3c_4) = 19!$$

$$N(c_1c_2c_3c_4) = 17!$$

$$\bar{N} = N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = 26! - (3 \times 24! + 23!) + (3 \times 22! + 3 \times 21!) - (20! + 3 \times 19!) + 17!$$

مسأله ۷ : تعداد اعداد صحیح مثبت x را به طوری که $x \le 9{,}999{,}999$ و جمع ارقام x ، ۳۱ شود را محاسبه کنید.

حل: با احتساب صفر به عنوان یک رقم هر عدد صحیح بین ۱ تا ۹۹۹۹۹۹۹ را به صورت عددی که ۷ رقم دارد تعبیر می‌کنیم. به طور مثال عدد صحیح ۸۲۰۰ را می‌توان به صورت ۰۰۰۸۲۰۰ نوشت. اگر ۷ رقم را $x_7,\dots,x_1$ درنظر بگیریم،

می‌توانیم مسأله را به صورت تعیین تعداد جوابهای صحیح معادله $x_۱+x_۲+x_۳+...+x_۷=۳۱$ ، $۰\le x_i\le ۹$ ، $۱\le i\le ۷$ تعبیر کنیم.

S را مجموعه جواب معادلهٔ $۱\le i\le ۷$ ، $x_i\ge ۰$ ، $x_۱+x_۲+...+x_۷=۳۱$ را درنظر می گیریم، از

$$|S|=\binom{۷+۳۱-۱}{۳۱}=\binom{۳۷}{۳۱}.$$

برای $۱\le i\le ۷$ ، c_i را شرط $x_i\ge ۱۰$ درنظر می‌گیریم.
لذا باید $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲...\bar{c}_۷)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$c_۱: x_۱+x_۲+...+x_۷=۳۱ ،\ x_۱\ge ۱۰,\ \ x_۲,x_۳,...,x_۷\ge ۰ \leftrightarrow$$

$$x_۱+x_۲+...+x_۷=۲۱\quad \underset{۱\le i\le ۷}{x_i\ge ۰} \Rightarrow N(c_۱)=\binom{۲۷}{۲۱}$$

برای $۱\le i\le ۷$ داریم: $N(c_i)=\binom{۲۷}{۲۱}$

$$c_۱c_۲: x_۱+x_۲+...+x_۷=۳۱ ،\ x_۱,x_۲\ge ۱۰ ،$$

$$x_۳,x_۴,...,x_۷\ge ۰\leftrightarrow$$

$$x_۱+x_۲+...+x_۷=۱۱ ،\ \underset{۱\le i\le ۷}{x_i\ge ۰}\Rightarrow N(c_۱c_۲)=\binom{۱۷}{۱۱}$$

لذابرای $۱\le i<j\le ۷$ داریم: $N(c_ic_j)=\binom{۷}{۱۱}$ (که تعدادشان، به‌طور کلی $\binom{۷}{۲}$ می‌باشد).

$$c_۱c_۲c_۳: x_۱+x_۲+....+x_۷=۳۱$$

$$x_۱,x_۲,x_۳\ge ۱۰, x_۴,...,x_۷\ge ۰\leftrightarrow$$

$$x_۱+x_۲+...+x_۷=۱$$

$$\underset{۱\le i\le ۷}{x_i\ge ۰}\Rightarrow N(c_۱c_۲c_۳)=\binom{۷}{۱}$$

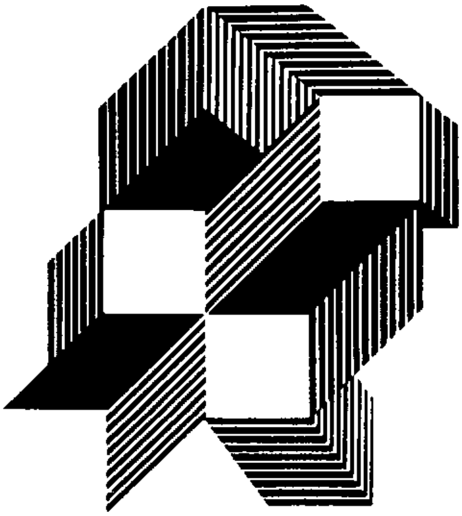
لذا برای $۱\le i<j<k\le ۷$ داریم: $N(C_iC_jC_k)=\binom{۷}{۱}$

(که تعدادشان $\binom{۷}{۳}$ می‌باشد.)

تعداد جوابهای معادله با داشتن ۴ شرط و بیشتر نیز صفر می‌باشد، لذا:

$$\bar{N}=N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲...\bar{c}_۷)=|S|-\sum_{۱\le i\le ۷}N(c_i)+\sum_{۱\le i<j\le ۷}N(c_ic_j)$$
$$-...+(-۱)^۷\sum_{۱\le i<j<...<t\le ۷}N(c_ic_j...c_t)=$$
$$\binom{۳۷}{۳۱}-\binom{۷}{۱}\binom{۲۷}{۲۱}+\binom{۷}{۲}\binom{۱۷}{۱۱}-\binom{۷}{۳}\binom{۷}{۱}$$
$$+۰-۰+۰-۰=\binom{۳۷}{۳۱}-\binom{۷}{۱}\binom{۲۷}{۲۱}+$$
$$\binom{۷}{۲}\binom{۱۷}{۱۱}-\binom{۷}{۳}\binom{۷}{۱}$$

در این مسأله، برای تعیین(N)به ویژه از فرمولهای بدست آمده در نتایج استفاده نشده، تا چگونگی محاسبات به خوبی درک شود.



مسأله ۸ : تعداد جوابهای صحیح معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۹$ را با شرط $۳\le x_۴\le ۸$ ، $۳\le x_۳\le ۷$ ، $۰\le x_۲\le ۶$ ، $۰\le x_۱\le ۵$ محاسبه کنید.

حل:

$$S: x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۹ ،$$

$$x_۱\ge ۰,\ x_۲\ge ۰,\ x_۳\ge ۳,\ x_۴\ge ۳\overset{\text{طبق نتیجه}}{\Rightarrow}$$

$$N=\binom{۱۹-۳-۳+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۶}{۳}$$

c_i را با توجه به S و شرایط مسأله انتخاب می‌کنیم.

$$c_۱(x_۱\ge ۶):\ x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۹ ،$$

$x_1 \geq 6,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 3 \Rightarrow$

$$N(c_1)=\binom{19-6-3-3+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$$

$c_2(x_2 \geq 7):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 7,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 3 \Rightarrow$

$$N(c_2)=\binom{19-7-3-3+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$$

$c_3(x_3 \geq 8):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 8,\ x_4 \geq 3 \Rightarrow$

$$N(c_3)=\binom{19-8-3+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}$$

$c_4(x_4 \geq 9):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 9 \Rightarrow$

$$N(c_4)=\binom{19-3-9+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}$$

$c_1c_2(x_1 \geq 6, x_2 \geq 7):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \geq 6,\ x_2 \geq 7,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 3 \Rightarrow$

$$N(c_1c_2)=\binom{19-6-7-6+3}{3}=1$$

$c_1c_3(x_1 \geq 6, x_3 \geq 8):\ x_1+x_2+x_3+x_4=19,$

$x_1 \geq 6,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 8,\ x_4 \geq 3 \Rightarrow$

$$N(c_1c_3)=\binom{5}{3}$$

با روش مشابه خواهیم داشت :

$$N(c_1c_4)=N(c_2c_3)=4, N(c_2c_4)=\binom{5}{2},$$

$$N(c_3c_4)=1$$

و نیز تعداد جوابهای معادله با داشتن ۳ شرط از شروط c_i و بیشتر صفر می‌باشد، لذا

$$\text{تعداد جواب مسأله} = N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4)$$

$$=\binom{16}{3}-\left[2\binom{10}{3}+\binom{9}{3}+\binom{11}{3}\right]+\left[2\binom{5}{2}+10\right]$$

مسأله ۹ : تعداد جوابهای معادله $x_1+x_2+\dots+x_6=34$ را در مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج بیشتر از ۱۰ محاسبه کنید :

حل: قرار می‌دهیم $x_i=2y_i$ (برای $1 \leq i \leq 6$). لذا برای حل معادله مذکور باید معادلهٔ $y_1+y_2+\dots+y_6=17$ ، $1 \leq y_i \leq 5$ $(1 \leq i \leq 6)$ را حل کنیم. S را مجموعه جواب معادلهٔ $y_1+y_2+\dots+y_6=17$ ، $\underset{(1\leq i\leq 6)}{y_i \geq 1}$ و c_i را شرط $y_i \geq 6$ برای $1 \leq i \leq 6$ درنظر می‌گیریم. نتیجه خواهیم گرفت.

$$\text{تعدادجوابهای معادله} = N(\bar{c}_1\dots\bar{c}_6)$$

$$=\binom{16}{5}-\binom{6}{1}\binom{11}{5}+\binom{6}{2}\binom{6}{5}$$

مسأله ۱۰ : اگر یک تاس ۱۲ بار پرتاب شود، احتمال این که جمع اعداد ظاهر شده ۳۰ باشد، چیست؟

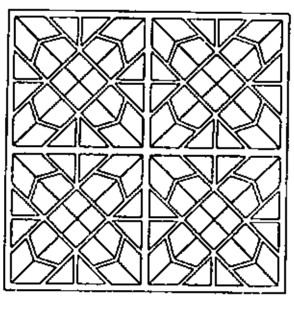
حل : S را مجموعه جواب معادلهٔ $1 \leq i \leq 12$ ، $1 \leq x_i \leq 6$ ، $x_1+x_2+\dots+x_{12}=30$ و c_i را شرط $x_i \geq 7$ برای $1 \leq i \leq 12$ درنظر می‌گیریم. نتیجه خواهیم گرفت :

$$\overline{N}=\binom{29}{18}-\binom{12}{1}\binom{23}{12}+\binom{12}{2}\binom{17}{6}-\binom{12}{3}$$

لذا

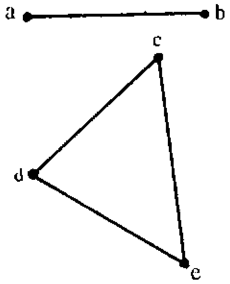
$$P=\frac{\overline{N}}{6^{12}}=\frac{\binom{29}{18}-\dots-\binom{12}{3}}{6^{12}}$$

البته چنین معادلاتی با استفاده ازتابع مولد نیز قابل حل هستند : که در بخش مربوط به آن توضیح داده خواهند شد.

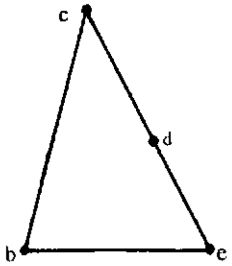


مسأله ۱۱ : تعداد جاده‌های دوطرفه بین ۵ روستا را، طوری که هیچ یک از آنها از بقیه روستاها جدا نباشند، محاسبه کنید :

حل: روستاها را با a و b و c و d و e نامگذاری می‌کنیم. بنابراین باید تعداد گرافهای بی‌جهت روی ۵ رأس را که هیچ رأسی در آن تنها (ایزوله، منفرد) نیست، پیدا کنیم (هدف شمردن جاده‌هایی مثل شکل (۱) است نه شکل (۲)).



شکل ۱



شکل ۲

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ گرافهای بی‌جهت روی $V=\{a,b,c,d,e\}$ باشد. با توجه به این که تعداد جاده‌های دوطرفه ممکن بین این ۵ روستا $\binom{5}{2}=10$ می‌باشد و برای هر جاده ۲ انتخاب وجود دارد (می‌تواند عضو S باشد یا نباشد)، لذا $N=|S|=2^{10}$ برای $1\le i\le 5$ ، c_i را شرط این که روستای iام از بقیه جدا باشد درنظر می‌گیریم. پس $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5)$ مجهول است. $N(c_1)$ یعنی تعداد گرافهای بی‌جهت روی v طوری که روستای a از بقیه روستاها جدا باشد. تعداد جاده‌های ۲ طرفه بین ۴ روستای دیگر $\binom{4}{2}=6$ می باشد، لذا $N(c_1)=2^6$ و به همین‌ترتیب برای $1\le i\le 5$، $N(c_i)=2^6$.

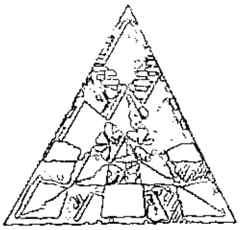
$N(c_1c_2)$ یعنی تعداد گرافهای بی‌جهت روی V طوری که روستاهای a و b با هیچ روستایی ارتباط نداشته باشند. تعداد جاده‌های دوطرفه بین ۳ روستای باقیمانده $\binom{3}{2}=3$ می‌باشد لذا $N(c_1c_2)=2^3$. به‌این‌ترتیب (برای $1\le i<j\le 5$) $N(c_ic_j)=2^3$ با روش مشابه نتیجه خواهد شد (برای $1\le i<j<k\le 5$)، $N(c_ic_jc_k)=2^1$ و نیز $N(c_ic_jc_kc_l)=2^0$ (برای $1\le i<j<k<l\le 5$) و

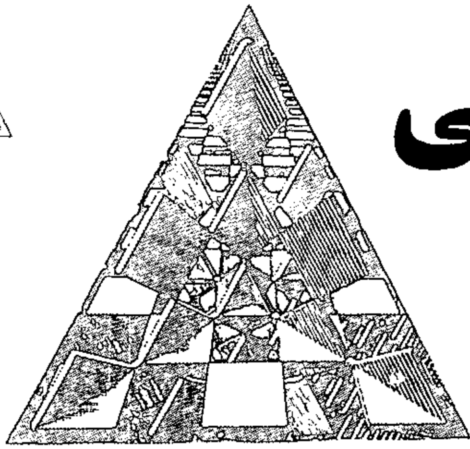
$$\overline{N}=|S|-\sum_{1\le i\le 5}N(c_i)+\sum_{1\le i<j\le 5}N(c_ic_j)-\sum_{1\le i<j<k\le 5}N(c_ic_jc_k)+\sum_{1\le i<j<k<l\le 5}N(c_ic_jc_kc_l)-N(c_1c_2c_3c_4c_5)$$

و $(1\le i\le j\le k\le l\le 5)\,N(c_1c_2c_3c_4c_5)=2^0$ و

$$\overline{N}=2^{10}-\binom{5}{1}2^6+\binom{5}{2}2^3-\binom{5}{3}2^1+\binom{5}{4}2^0-2^0=768$$





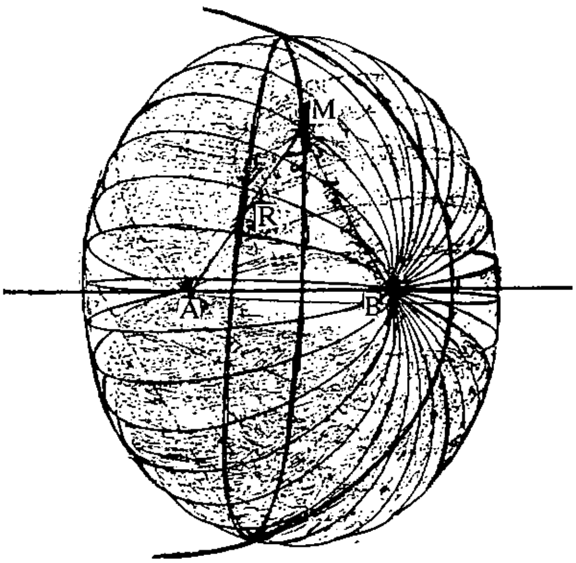


مکان هندسی

(قسمت یازدهم)

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

● محمد هاشم رستمی



مثال ۳ــ سه نقطهٔ A و B و C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ A برابر مقدار معلوم R باشد و از آن نقطه پاره‌خط BC به زاویهٔ α دیده شود.

حل ــ صفحهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A و B و C را P می‌نامیم و $\overset{\frown}{AMB}$ کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. از دوران این کمان درخور حول خط AB، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویه α دیده می‌شود، به‌وجود می‌آید. حال کرهٔ به مرکز A و به شعاع R را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با مکان هندسی بالا (در صورت وجود)، جواب مسأله است.

مثال ۴ــ دو نقطهٔ $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۰,۱,۳)$ داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۴۵° دیده می‌شود، تعیین کنید.

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، خواهیم داشت:

$$A(-۱,۲,۰)\ ،\ B(۰,۱,۳)\ ،\ M(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM}(x+۱, y-۲, z) \text{ و } \overrightarrow{BM}(x, y-۱, z-۳)$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{(x+۱)x + (y-۲)(y-۱) + z(z-۳)}{\sqrt{(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ + z^۲}\sqrt{x^۲ + (y-۱)^۲ + (z-۳)^۲}} \Rightarrow$$

$$2\left[(x^2+x)+(y^2-3y+2)+(z^2-3z)\right]^2 = \left[(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\right]\times\left[x^2+(y-1)^2+(z-3)^2\right]\Rightarrow$$

$$x^4+y^4+z^4+2x^3-6y^3-6z^3-5x^2+3y^2+11z^2+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-6x^2y+2xy^2-6x^2z+2xz^2-6z^2y-6zy^2-8xy+12yz+26y-12x+6z-42=0$$

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2(x^3-3y^3-3z^3-3x^2y-3x^2z+y^2x-3y^2z+z^2x-3z^2y)-5x^2+3y^2+11z^2-8xy+12yz-12x+26y+6z-42=0$$

معادلهٔ بالا یک رویهٔ درجهٔ چهارم را که مکان هندسی نقطهٔ موردنظر است، مشخص می‌کند.

مثال ۵ ــ دو نقطهٔ $A(3,0,0)$ و $B(0,0,3)$ و خط $D: \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ مفروض‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده شود.

حل ــ نقطه برخورد مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شود، با خط D جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، داریم:

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\quad A\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}0\\0\\3\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix}x-3\\y\\z\end{vmatrix}\quad \vec{BM}\begin{vmatrix}x\\y\\z-3\end{vmatrix}$$

$$\hat{AMB}=60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x(x-3)+y^2+z(z-3)}{\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}}$$

$$\Rightarrow 4(x^2-3x+y^2+z^2-3z)^2=\left[(x-3)^2+y^2+z^2\right]\left[x^2+y^2+(z-3)^2\right]$$

معادلهٔ مکان هندسی

$$\begin{cases}4(x^2-3x+y^2+z^2-3z)^2=\left[(x-3)^2+y^2+z^2\right]\left[x^2+y^2+(z-3)^2\right]\\ \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}=t\Rightarrow x=2t,y=-t,z=2t\Rightarrow\end{cases}$$

$$4(4t^2-6t+t^2+4t^2-6t)^2=\left[(2t-3)^2+t^2+4t^2\right]\left[(4t^2+1)t^2+(2t-3)^2\right]\Rightarrow 4(9t^2-12t)^2=(9t^2-12t+9)^2\Rightarrow 9t^2-12t=A\Rightarrow 4A^2=(A+9)^2\Rightarrow 2A=\pm(A+9)\Rightarrow A=9 \text{ و } A=-3\Rightarrow 9t^2-12t+3=0$$

$$\Rightarrow 3t^2-4t+1=0\quad t=1 \text{ و } t=\frac{1}{3} \text{ و } 9t^2-12t=9\Rightarrow$$

$$3t^2-4t-3=0\Rightarrow t_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3} \text{ و } t_4=\frac{2-\sqrt{13}}{3}$$

$$\Rightarrow M_1(2,-1,2), M_2(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}),$$

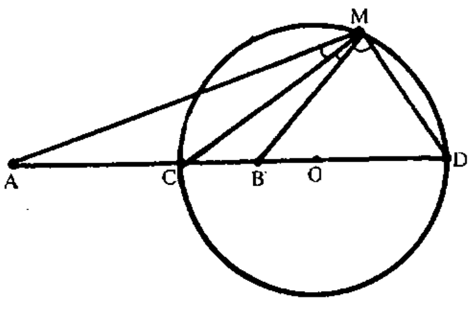
$$M_3(\frac{4+2\sqrt{13}}{3},-\frac{2+\sqrt{13}}{3},\frac{4+2\sqrt{13}}{3}),$$

$$M_4(\frac{4-2\sqrt{13}}{3},-\frac{2-\sqrt{13}}{3},\frac{4-2\sqrt{13}}{3})$$

دو نقطه برخورد مربوط به کمان در خور زاویهٔ 60° وابسته به پاره‌خط AB است و دو نقطهٔ برخورد وابسته به کمان در خور زاویهٔ 120° وابسته به این پاره‌خط می‌باشد.

۷ــ دایرهٔ آپولونیوس ــ مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k ($K\neq 0$ و $K\neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی ــ دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست AB رارسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند، یعنی، $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=K$ (۱) باشد. دایرهٔ به قطر CD مکان هندسی موردنظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است. زیرا :



اولاً ــ هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=k$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A و B و C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$، اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به‌ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند، که چون این دو نیمساز برهم عمودند، پس $C\hat{M}D=90°$ و در نتیجهٔ نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

ثانیاً ــ هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A و B و C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است ؛ پس دستگاه M − ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD برهم عمود می‌باشند (زاویه $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر $90°$ است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم که نیمسازهای هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم : $\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=k$.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.

اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم ؛ خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت k باشد، با فرض AB = a داریم :

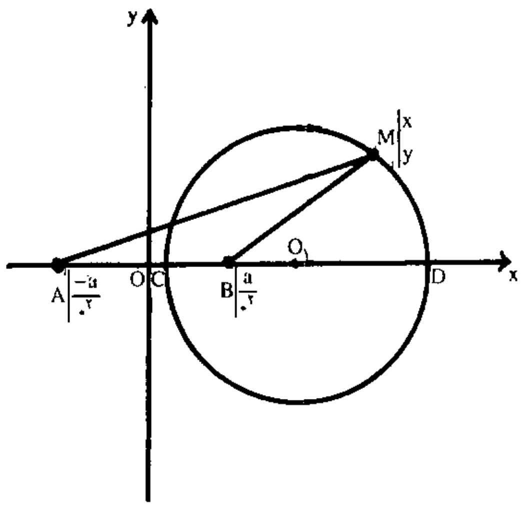
$$A(-\frac{a}{2},0),\ B(\frac{a}{2},0)\ ,M(x,y)\Rightarrow MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}\ ,\ \frac{MA}{MB}=K\Rightarrow\frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}$$

$$=k\Rightarrow(x+\frac{a}{2})^2+y^2=k^2(x-\frac{a}{2})^2+k^2y^2\Rightarrow$$

$$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-a(k^2+1)x+(k^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$



معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}$ و $0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$ است. به عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است. قطر CD از این دایره پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، زیرا داریم :

$$O_1A=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right| \text{ و } O_1B=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right| \text{ و}$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|\Rightarrow\overline{O_1C}^2=\overline{O_1D}^2=\overline{O_1A}.\overline{O_1B}$$

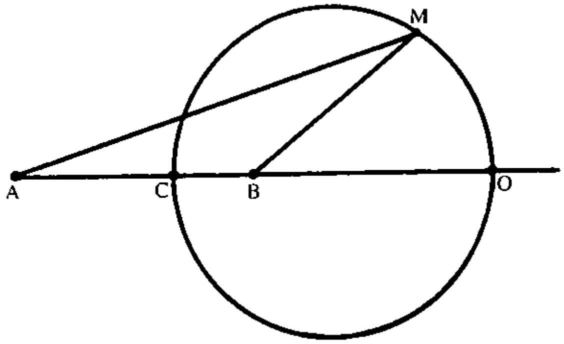
$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right|$$

$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}-1)\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

بنابراین : مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

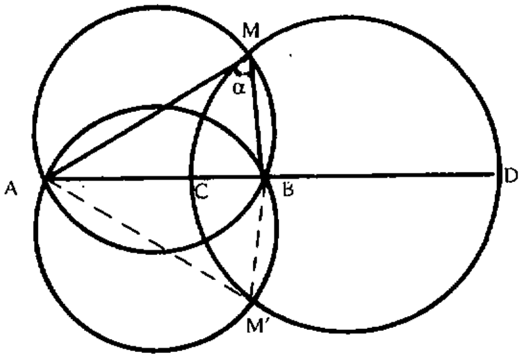
مثال ۱ ـــ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه رابیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل ـــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم، که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند. یعنی $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=۲$ باشد. در این صورت $CA=۸$ و $CB=۴$ و $DA=۲۴$ و $DB=۱۲$ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی موردنظر است.

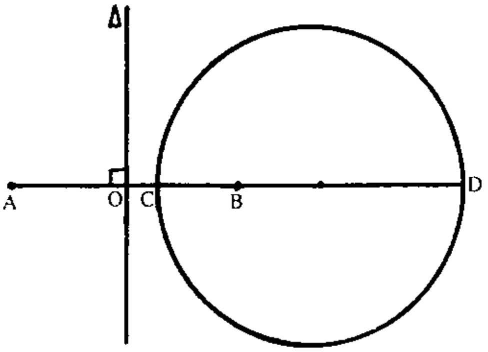


مثال ۲ ـــ دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه راتعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

حل ـــ کمان در خور زاویه α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، رسم می‌نماییم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله‌اند ؛ و مسأله همواره دو جواب دارد.



مثال ۳ ـــ دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت k باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

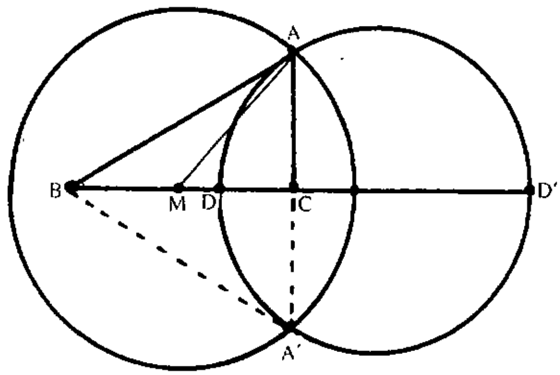


حل ـــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، سپس دایرهٔ به قطر CD رارسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است O می‌نامیم. امّا می‌دانیم بنابه رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند، لذا مسأله دارای جواب نیست.

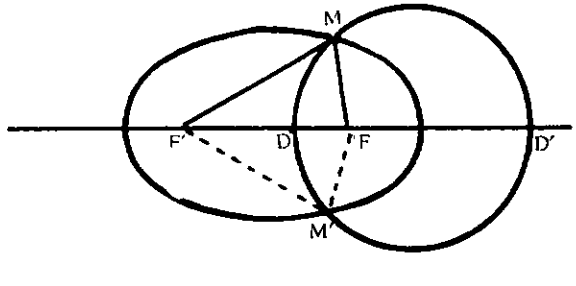
مثال ۴ ـــ از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC=a$ و $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}$ و طول میانهٔ رأس A(m_a) معلوم است. مثلث را رسم کنید.

حل ـــ ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم. چون $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}=k$ است، پس یک مکان هندسی رأس A دایره‌ای

است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند. با مشخص کردن نقطه‌های D و D′ که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{b}{c}=k$ تقسیم می‌کنند، دایرهٔ به قطر DD′ را رسم می‌کنیم. از طرفی $AM=m_a$ معلوم است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به مرکز نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC و به شعاع m_a است؛ این دایره رانیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود. در صورت متقاطع بودن دو دایرهٔ مکان هندسی، مسأله دارای دو جواب متساوی است.



مثال ۵ ــ بیضی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a درصفحه P مفروض است. نقطه‌ای از این بیضی را تعیین کنید، که نسبت فاصله‌اش از دو کانون F و F′ برابر ۲a باشد.



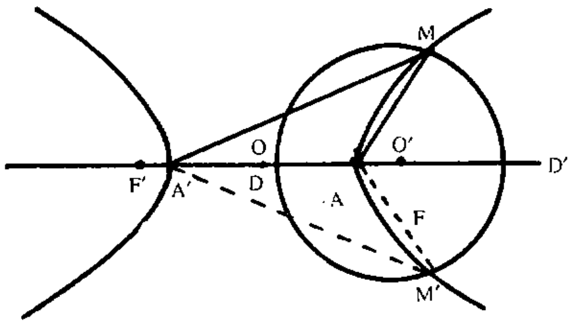
حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F′ برابر مقدارثابت ۲a است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط FF′ را به نسبت ۲a تقسیم می‌کند. این دایره (دایرهٔ به قطر DD′) را رسم می‌کنیم.

نقطه‌های برخورد این دایره با بیضی داده شده، جواب مسأله‌اند.

($\frac{\overline{DF'}}{\overline{DF}} = -\frac{\overline{D'F'}}{D'F} = 2a$ است).

مثال ۶ ــ هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a مفروض است. نقطه‌ای از این هذلولی را تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو رأس کانونی این هذلولی (A و A′) برابر مقدار ثابت K باشد.

حل ــ دو نقطهٔ D و D′ را روی محور کانونی هذلولی چنان تعیین می‌کنیم که پاره‌خط AA′ را به نسبت K تقسیم کنند. سپس دایرهٔ به قطر DD′، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A′ برابر K است رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با هذلولی جواب مسأله است.



مثال ۷ ــ دو نقطه $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ دردستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ است، دراین صورت داریم:

$$A\Big|_{2}^{-1},\ B\Big|_{0}^{3},\ M\Big|_{y}^{x} \Rightarrow MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$ و

$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4(x+1)^2$$

$$+4(y-2)^2=(x-3)^2+y^2\Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-16y$$

$$+۱۱=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+\frac{۱۴}{۳}x-\frac{۱۶}{۳}y+\frac{۱۱}{۳}=۰$$

معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس.

مثال ۸ــ خط $D: y-۴x+۴=۰$ و دو نقطهٔ $A(-۴,۰)$ و $B(۰,۳)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳ باشد.

حل ــ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس یعنی دایره‌ای که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند می‌نویسیم، و نقطهٔ برخورد آن با خط D را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، خواهیم داشت:

$$A(-۴,۰) \text{ و } B(۰,۳), M(x,y) \Rightarrow MA=\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲} \text{ و}$$

$$MB=\sqrt{x^۲+(y-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}=۳ \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+(y-۳)^۲}}=۳ \Rightarrow ۹x^۲+۹(y-۳)^۲$$

$$=(x+۴)^۲+y^۲$$

$$\Rightarrow ۸x^۲+۸y^۲-۸x-۵۴y+۶۵=۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس $x^۲+y^۲-x-\frac{۲۷}{۴}y+\frac{۶۵}{۸}=۰$

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-x-\frac{۲۷}{۴}y+\frac{۶۵}{۸}=۰ \\ y=۴x-۴ \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^۲+(۴x-۴)^۲-x-\frac{۲۷}{۴}(۴x-۴)+\frac{۶۵}{۸}=۰$$

$$\Rightarrow ۱۷x^۲-۶۰x+\frac{۴۰۹}{۸}=۰ \Rightarrow x_۱,x_۲=\frac{+۳۰\pm\sqrt{۲۴۷}}{۱۷}$$

$$\Rightarrow y_۱,y_۲=\frac{۱۲۰\pm ۴\sqrt{۲۴۷}}{۱۷}-۴$$

$$M_۱\left(\frac{۳۰+\sqrt{۲۴۷}}{۱۷},\frac{۵۲+۴\sqrt{۲۴۷}}{۱۷}\right) \text{ و}$$

نقطه‌های جواب مسأله $M_۲\left(\frac{۳۰-\sqrt{۲۴۷}}{۱۷},\frac{۵۲-۴\sqrt{۲۴۷}}{۱۷}\right)$

مثال ۹ ــ سه نقطهٔ $A(۲,-۱)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(-۴,۰)$ در دستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. نقطه‌ای در این صفحهٔ مختصات تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر $\sqrt{۲}$ باشد.

حل ــ نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB، با دایرهٔ آپولونیوسی که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت $\sqrt{۲}$ تقسیم می‌کند، جواب مسأله است. بنابراین معادلهٔ این دو مکان هندسی را می‌نویسیم و نقطهٔ برخوردشان را تعیین می‌کنیم.

$$A(۲,-۱), B(-۲,۳) \Rightarrow AB \text{ وسط } M(۰,۱),$$

$$m/AB=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \Rightarrow m/AB=\frac{۳+۱}{-۲-۲}=-۱$$

$$\Rightarrow AB \text{ عمودمنصف } m=+۱$$

$$\Rightarrow y-۱=۱(x-۰)$$

$$\Rightarrow y=x+۱ \text{ . معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط } AB$$

$$B(-۲,۳), C(-۴,۰), M(x,y), K=\sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$MB=\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$MC=\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}, \frac{MB}{MC}=\sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}}{\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}}=\sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$۲(x+۴)^۲+۲y^۲=(x+۲)^۲+(y-۳)^۲$$

معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس $\Rightarrow x^۲+y^۲+۱۲x+۶y+۱۹=۰$

$$\begin{cases} y=x+۱ \\ x^۲+y^۲+۱۲x+۶y+۱۹=۰ \end{cases}$$

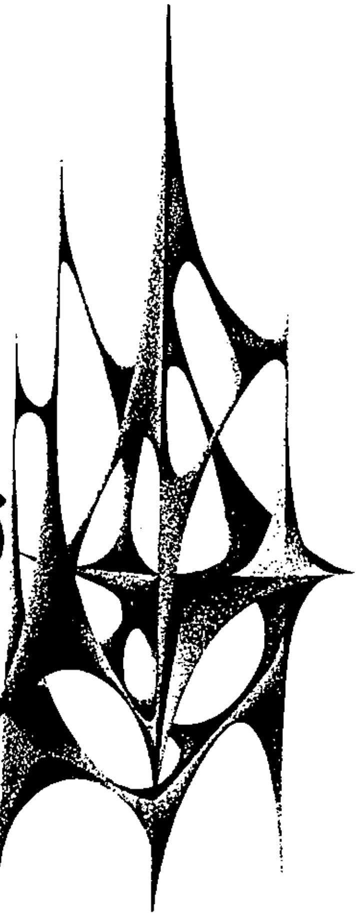
$$\Rightarrow x^۲+(x+۱)^۲+۱۲x+۶(x+۱)+۱۹=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲۰x+۲۶=۰ \Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۳=۰$$

$$\Rightarrow x_۱,x_۲=-۵\pm ۲\sqrt{۳} \Rightarrow y_۱,y_۲=-۴\pm ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow M_۱(-۵+۲\sqrt{۳},-۴+۲\sqrt{۳}) \text{ و}$$

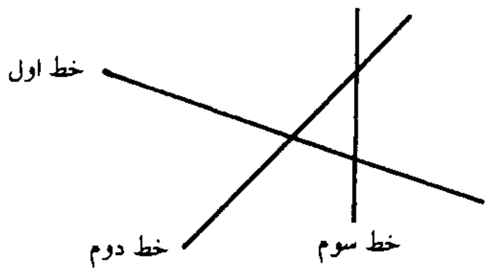
نقطه‌های جواب مسأله $M_۲(-۵-۲\sqrt{۳},-۴-۲\sqrt{۳})$



تقسیم فضا به وسیلهٔ صفحات ...

● نهان علی اف ــ محمّد جهانشاهی

واضح است که n نقطه مختلف واقع در امتداد یک خط، این خط را به n + ۱ قسمت تقسیم می‌کند. صفحه را یک خط به دو قسمت و دو خط دارای وضعیت عمومی این صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کند. خط سومی که دو خط مذکور را قطع کند خود به سه قسمت تقسیم خواهد شد (توجه شود که خط سوم نیز باید نسبت به دو خط مذکور دارای وضعیت عمومی باشد). بنابراین خط فوق ۳ قسمت از ۴ قسمت بالا را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند.



بنابراین ۳ خط فوق صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کند چهارمین خط با ۳ خط فوق خودش به چهار قسمت تقسیم می‌شود، لذا از ۷ قسمت بالا هر یک از ۴ قسمت آن را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند، لذا چهار خط فوق صفحه را به ۴ + ۷ یعنی به ۱۱ قسمت تقسیم می‌کند. به این ترتیب n خط مستقیم صفحه را به

$$2+2+3+4+....+n = 1+(1+2+3+...+n) = 1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 1+\frac{n[(n+1)+2]}{2} = 1+\frac{n(n-1)}{2}+n = 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!} = \sum_{k=0}^{2}\frac{\overset{k}{n}}{k!}$$

که در آن

$$\overset{k}{n} = n(n-1)(n-2).....[n-(k-1)]$$

می‌باشد.

فضا را یک صفحه به ۲ قسمت و ۲ صفحه آن را به ۴ قسمت و ۳ صفحه آن را به ۸ قسمت تقسیم می‌کند (توجه شود که صفحه‌ها دارای وضعیت عمومی هستند). چهارمین صفحه با هر کدام از ۳ صفحه فوق در ۳ خط متمایز همدیگر را قطع خواهند کرد (با هر صفحه یک خط فصل مشترک خواهد داشت).

مطابق توضیحات بالا، از این که ۳ خط صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کند، چهارمین صفحه از ۸ قسمت فوق با ۷ قسمت آن تلاقی خواهد داشت و در نتیجه هر کدام از ۷ قسمت فوق را به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. در نتیجه ۴ صفحه فضا را به ۸ + ۷ قسمت یعنی به ۱۵ قسمت تقسیم خواهد کرد. و پنجمین صفحه با چهار صفحه فوق در چهار خط متمایز تلاقی خواهد داشت، در نتیجه از این که چهار خط، صفحه را به ۱۱ قسمت تقسیم می‌کند، نتیجه می‌شود که پنجمین صفحه، از ۱۵ قسمت بالا، هر یک از ۱۱ قسمت آن را به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد و در نتیجه این صفحه همراه با چهار صفحه فوق فضا را به ۱۱ + ۱۵ = ۲۶ قسمت تقسیم خواهد کرد. اکنون با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم n صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{n^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند:

درستی فرمول فوق برای n = ۱,۲,۳,۴,۵ در بالا نشان داده شد. برای مثال برای n = ۵ ملاحظه می‌کنیم.

$n = 5,$

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{5^{k}}{k!}=1+\frac{5}{1}+\frac{20}{2!}+\frac{60}{3!}=1+5+10+10=26$$

فرض استقرا: فرض کنیم m صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{m^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند. ثابت می‌کنیم حکم استقرای m + ۱ صفحه فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{(m+1)^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند.

اثبات: m + ۱ امین صفحه با m صفحه قبلی در m خط متمایز تلاقی خواهد کرد دیدیم که m خط صفحه را به $\sum_{k=0}^{2}\frac{m^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم می‌کند. این m+۱ امین صفحه، از $\sum_{k=0}^{3}\frac{m^{k}}{k!}$



قسمت، تعداد $\sum_{k=0}^{2}\frac{k\,1}{k!}$ آن را، هر کدام را به ۲ قسمت تقسیم می‌کند. بنابراین با m + ۱ صفحهٔ فضا به

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{m^{k}}{k!}+\sum_{k=0}^{2}\frac{m^{k}}{k!}=$$

$$1+m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}+1+m+$$

$$\frac{m(m-1)}{2}=1+(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}$$

$$+\frac{m(m-1)[m-2+3]}{6}=\sum_{k=0}^{3}\frac{(m+1)^{k}}{k!}$$

تقسیم می‌شود.

به این ترتیب n صفحه که دارای وضعیت عمومی هستند فضا را به $\sum_{k=0}^{3}\frac{n^{k}}{k!}$ قسمت تقسیم خواهد کرد. نهایتاً کره را یک خط به ۲ قسمت و ۲ خط آن را به ۴ قسمت و ۳ خط آن را به ۸ قسمت تقسیم می‌کند (خط در کره دایره عظیمه روی کره است). خط چهارم با هر کدام از ۳ خط قبلی در دو نقطه تلاقی دارد و در نتیجه با ۶ نقطه تلاقی، به ۶ قسمت تقسیم می‌شود بنابراین با توجه به این، از ۸ قسمت اول، ۶ قسمت آن هر کدام به ۲ قسمت تقسیم خواهد شد در نتیجه ۴ خط، سطح کره را به ۲×۷ = ۶ + ۸ = ۱۴ قسمت تقسیم خواهد کرد و به همین ترتیب پنجمین خط با ۴ خط قبلی، در ۸ نقطه تلاقی خواهد داشت لذا از ۱۴ قسمت سطح کره، ۸ قسمت آن را هر کدام به ۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. بنابراین ۵ خط سطح کره را به ۲×۱۱ = ۸ + ۱۴ = ۲۲ قسمت تقسیم خواهد کرد. در مقایسه با حالت مستوی نتیجه می‌شود که n خط، سطح کره را به:

$$2\sum_{k=0}^{2}\frac{(m-1)^{k}}{k!}$$

قسمت تقسیم می‌کند.

در باغ تجربه‌ها

پای صحبت استاد احمد بیرشک



نشستی داشتیم با استاد ارجمند جناب آقای احمد بیرشک، استاد را همه می‌شناسیم و از تأثیرشان در ریاضیات ایران آگاهیم. سؤالهایی داشتیم دربارهٔ ریاضیات و کتابهای درسی و نقش ریاضیات از استاد که استاد با توجه خاص به آنها پاسخ دادند. با تشکر از استاد ارجمند آنها را با هم می‌خوانیم

▲ استاد بیرشک لطفاً نقش ریاضیات را در علوم پایه و کامپیوتر توضیح بدهید.

□ ریاضیات در همهٔ علوم تأثیر دارد. حتی در زیست‌شناسی و حقوق هم تأثیر دارد. علوم پایه بدون ریاضیات کاری نمی‌توانند انجام بدهند. اگر ریاضیات نبود دسترسی به فضا به این کیفیت میسر نمی‌شد و اگر ریاضیات نبود شیمی این‌قدر پیشرفت نمی‌کرد. ولی همین‌طور که خدمتتان عرض کردم در علوم غیرعلمی هم مثل حقوق و زیست‌شناسی تأثیر شایانی دارد.

کامپیوتر بر یک قسمتی از ریاضیات متکی است که به مبنای ۲ اجرا می‌شود ریاضیات معمولی به مبنای ده می‌باشد، ولی کامپیوتر به مبنای ۲ است. اگر این ریاضیات نبود ممکن نبود این همه علوم را به‌صورت ساده درآورد، البته وقتی با مبنای ۲ حساب می‌کنیم، مفصلتر است، اما چون جوابش دو عدد ۰ است و ۱، دو عدد هستند، یکی از آنها یعنی قطع، دیگری یعنی وصل، بنابراین چون با برق کار می‌کند، قطع و وصل می‌شوند. پس ریاضیات به مبنای ۲ اساس کار کامپیوتر است.

▲ اطلاع دارید که هزارهٔ سوم را «هزارهٔ ریاضیات» نامگذاری کرده‌اند. لطفاً در رابطه با ریاضیات در هزارهٔ سوم برایمان صحبت کنید.

□ به عقیدهٔ من مطلقاً قابل پیش‌بینی نیست. به دلیل این‌که سرعت علم روزافزون نیست، دم‌افزون است. یعنی هر دم ترقی بیشتری می‌کند. بنابراین کسی نمی‌تواند پیش‌بینی کند درسال ۲۰۰۰ به بعد چقدر در این مورد پیشرفت خواهد داشت. به همین جهت سال ۲۰۰۰ را اسمش را گذاشته‌اند سال جهانی ریاضی و در آن‌جا در تمام کشورهای جهان تا این سال دربارهٔ ریاضیات بحث می‌کنند. در ایران هم دانشگاههایمان شروع کرده‌اند به تکیه دادن به گروههایی که کار انجام می‌دهند. اما برای این‌که در آینده چه خواهند کرد، آدم فکر می‌کند که رسیدیم به مقصد، اما تازه می‌بینیم یک چیز تازه‌تری هست. اگر بخواهیم درنظر بگیریم پیشرفت ریاضیات را در قرن نوزدهم و بیستم و بخواهیم حساب کنیم، باید بگوییم ریاضیات در قرن بیست و یکم دست‌کم چهار برابر قرن بیستم ترقی خواهد کرد.

▲ وضعیت آموزش ریاضی در ایران را چگونه می‌بینید و پیشنهادهای جنابعالی در این مورد چیست؟

□ آموزش ریاضی مدتها به جد گرفته نشده بود و سالهای متمادی بود که از تماس با علم روز محروم بودیم، ولی اخیراً شروع شد به انجام کارهایی و نوید خوبی می‌دهد به ما، مشروط به این‌که کمی جدی باشیم، ما در دانشگاههایمان تا به‌حال دربارهٔ ریاضیات جدی نبودیم. شاید بتوانم عرض کنم دربارهٔ هیچ‌یک از علوممان به اندازهٔ کافی جدی نبوده‌ایم، ولی فعلاً نهضتی شروع شده است و امیدواریم به جایی برسد.

▲ جناب استاد، به نظر جنابعالی کتابهای کمک درسی مفیدند؟ و به‌طورکلی شرایط یک کتاب کمک درسی خوب چه مواردی هستند؟

□ آن وقتی که من درس می‌خواندم، تعداد موادی که تدریس می‌شد از حالا کمتر بود، ولی مقداری که در هر ماده تدریس می‌شد از حالا بیشتر بود، یعنی عمق مدارس متوسطه در قدیم خیلی بیشتر از حالا بود. حالا آن‌قدر هست که فقط باید مقدار مختصری گفت و گذشت، پس کتابهای درسی مطلقاً کافی نیست. کتاب کمک درسی آن‌چه را که در کلاس نمی‌توان آموخت، به آدم می‌آموزد. به‌نظر من کتابهای کمک درسی اگر خوب تهیه شوند، بهترین کاری خواهد بود برای دانش‌آموزان و حتی دانشجویان.

▲ جناب بیرشک درحال حاضر وضع مقالات ریاضی ایران چگونه است؟

□ خوب است! عرض کنم به حضورتان در حدی که انجام می‌شود کمتر از آن‌چه که در دانشگاههاست نیست. نسبت‌اش خوب است و روز به روز هم بیشتر می‌شود. توجه به مقالات علمی خیلی زیاد شده است. الآن ما مجلاتی که کاملاً علمی هستند، یعنی صرفاً [علمی] هستند، متعدد داریم درنهایت توسط یک عده کوشش می‌شود که نقصها جبران شوند. خوب است.

▲ جناب استاد بیرشک بفرمایید به‌نظر شما تفاوت ریاضیات محض و کاربردی و نقش آنها در ابعاد مختلف چگونه است؟

□ توجه بفرمایید که خود متن سؤال می‌تواند مقدار قابل

ملاحظه‌ای از اختلافشان را توضیح دهد. ریاضیات کاربردی یعنی آنهایی که عملاً مورد استفاده هستند. طبعاً فایده‌شان برای جامعه زیادتر است، اما ثباتشان بر مقالات صرفاً ریاضی است. ما در مقالات صرفاً ریاضی مستقلاً کاری نکردیم و کاری نمی‌کنیم. الآن معدودی هستند از استادان ریاضی ما که مقالات صرفاً ریاضی مجلات خارجی را هم می‌خوانند.

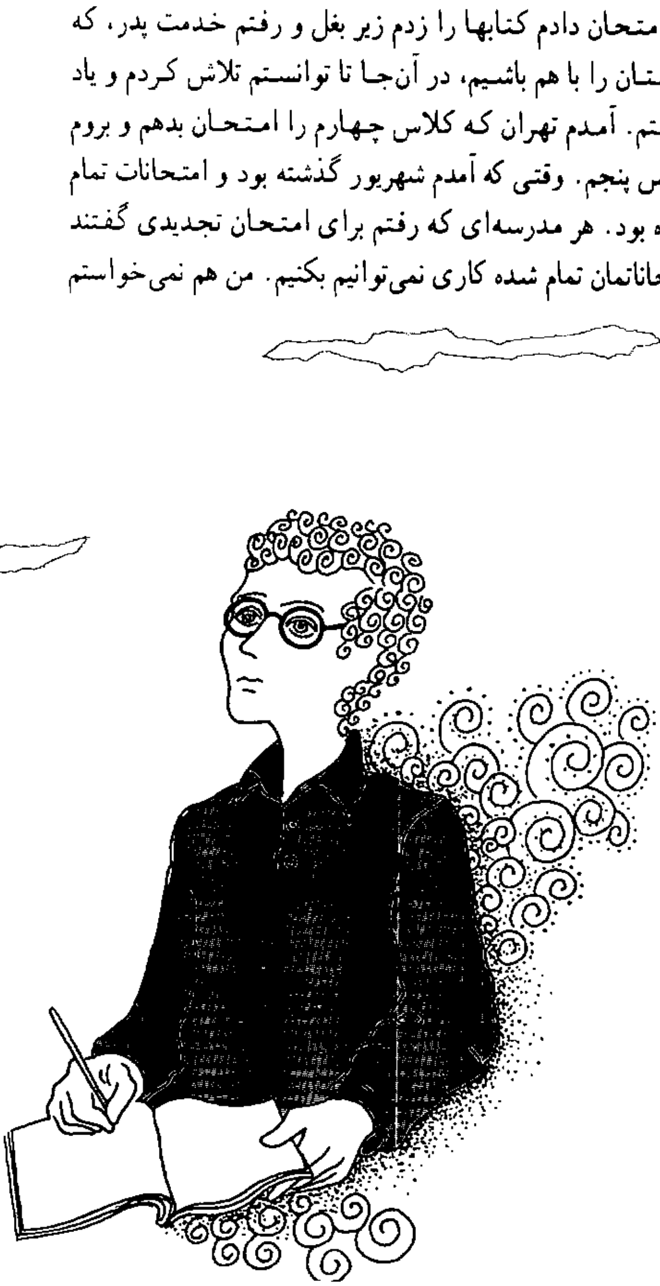
▲ استاد به‌نظر شما فلسفهٔ ریاضیات چیست؟ آیا فلسفهٔ ریاضی بخشی از ریاضیات است یا بخشی از فلسفه؟

□ تعداد رشته‌های ریاضی درحال حاضر آن‌قدر زیادند که هیچ‌کس نمی‌تواند در همهٔ رشته‌های ریاضی تخصص داشته باشد. حتی در بعضی از رشته‌ها یک عمر لازم است که آدم تخصص پیدا کند. فلسفهٔ ریاضی به معنی فلسفه نیست، بلکه روشهایی را که برای آسان کردن درک ریاضی و ثمربخش بودن آن است، مجموعاً فلسفهٔ ریاضی را تشکیل می‌دهد. کتابهای فلسفهٔ ریاضی مرتب روی روشهای مختلف ریاضی بحث می‌کند.

▲ در این مرحله خوشحال می‌شویم از خاطرات خودتان برایمان بازگو کنید.

□ من دربارهٔ خاطراتم نمی‌توانم زیاد صحبت کنم، به‌دلیل این‌که عمرم دراز بوده و سراسر خاطره است. انتخاب کردن و گلچین کردن هم مشکل است، دیگر این‌که خاطرات افراد خیلی به درد دیگران نمی‌خورد. بنابراین من فقط می‌توانم دربارهٔ یک خاطرهٔ ریاضی که به قول یکی از دوستان به داستان می‌ماند صحبت کنم : من تحصیلاتم بسیار نامرتب بوده، برای این‌که در خدمت پدر بودم. پدر عضو گمرک بود و مجبور بود در مرزها خدمت کند. آن‌وقتها هم که من نوجوان بودم در مرزهایمان هیچ وسیلهٔ تحصیل نبود. درنتیجه مقدمات را پیش پدر آموختم و بعد هم خودم شروع کردم پیش خودم کار کردن. بنابراین خیلی جنبهٔ خودآموخته دارم. چیزهایی که یاد گرفتم خودم یاد گرفتم. باری در دورهٔ ابتدایی فقط شش ماه مدرسه رفتم، در دورهٔ متوسطه شش سال را در دو سال طی کردم. یعنی سالهای اول و دوم متوسطه را تابستان پیش خودم خواندم، پیش یک معلمی خواندم، سال سوم را در مدرسه خواندم سال چهارم را پیش خودم خواندم سال پنجم را در مدرسه خواندم سال ششم را پیش خودم خواندم تا دورهٔ متوسطه تمام شد.

خاطره‌ای که دارم دربارهٔ سال چهارم است. من سال سوم را که امتحان دادم کتابها را زدم زیر بغل و رفتم خدمت پدر، که تابستان را با هم باشیم، در آن‌جا تا توانستم تلاش کردم و یاد گرفتم. آمدم تهران که کلاس چهارم را امتحان بدهم و بروم کلاس پنجم. وقتی که آمدم شهریور گذشته بود و امتحانات تمام شده بود. هر مدرسه‌ای که رفتم برای امتحان تجدیدی گفتند امتحاناتمان تمام شده کاری نمی‌توانیم بکنیم. من هم نمی‌خواستم



یکسال عمرم تلف بشود. بعد از این‌که از همه‌جا ناامید شدم به من خبر دادند که در خیابان امیریه، خیابان منیریه، مدرسه‌ای هست به‌نام «**شرف مظفری**». آخرین امید بود. رفتم به مدرسه، مدیر مدرسه مردی بود خیلی جدی و با هیبت و وسط اتاق ایستاده بود. سلامی کردم و گفتم ماجرا این است، می‌خواهم امتحان بدهم. گفت: «امتحاناتمان تمام شده نمی‌توانیم امتحان بگیریم، پسر برو.» اصرار کردم، به‌دلیل این‌که آخرین امید بود، گفت: «بهت می‌گویم نمی‌توانیم. پسر اسمت چیست؟» گفتم: «اسمم احمد بیرشک است.» گفت: «احمد بیرشک تویی!؟» گفتم: «بله» گفت: «خوب برو به آن آقای ناظم که کنار استخر راه می‌روند بگو برایت یک فکری بکنند.» من با خوشحالی رفتم سراغ آقای ناظم. سلام کردم. آقای ناظم همان کسی بود که بعدها در وزارت آموزش و پرورش به وزارت رسید. دکتر *مهران*، آن‌وقت اسمش *صادقی* بود، رفتم سلام کردم و مطلبم را گفتم. ایشان خیلی مؤدب، نه این‌که بگویند پسر برو، گفت: «خیلی معذرت می‌خواهم، خیلی دلم می‌خواست کاری انجام بدهم ولی امتحاناتمان تمام شده و کاری نمی‌توانیم بکنیم.» گفتم که آقای ناظم! آقای مدیر به من گفتند که بیایم خدمت شما برایم کاری انجام بدهید، نه‌این‌که بگویید نمی‌شود. گفت: «آقای مدیر فرمودند؟» گفتم: «بله». گفت: «خوب، اسم شما چیست؟» گفتم: «اسم بنده احمد بیرشک است.» گفت: «آقای احمد خان بیرشک جنابعالی هستید؟!» گفتم: «بله بنده هستم.» گفت: «خوب فردا صبح بیایید امتحان بدهید.» روز بعد رفتم امتحان دادم و بالاخره رفتم کلاس پنجم.

این مطلب برای من معما شده بود که آدمی که تهران را بلد نیست، دو تا آدم بزرگ مثل رئیس و ناظم یک مدرسه چه‌طور با اسمش آشنا هستند که اسمش مشکل‌گشا می‌شود؟! تحقیق کردم. بعد معلوم شد همان مدرسه که مدرسهٔ «**شرف**» بود شاگردی داشت در کلاس سوم، همکلاس من، می‌خواست امتحان بدهد، اینها دنبال این بودند که شاگرد اول ایران را بیرون بدهند، *عبدالرسول دبیر* شاگردشان بود، دنبالش بودند. امتحانات را داده بود بعد رفته بودند نتیجه را بگیرند دیده بودند عبدالرسول دبیر با معدل ۱۵/۸۷ شده شاگرد اول ایران. اما دو نفر معدل ۱۵/۸۷ دارند یکی عبدالرسول دبیر است و یکی به اسم احمد بیرشک، به‌خاطرشان مانده بود. پس وقتی من آمدم به ایشان گفتم اسمم احمدبیرشک است دیدند این همان کسی است که با شاگرد اولشان هم‌نمره است.

▲ با تشکر از استاد احمد بیرشک.



※ این نوشته با استفاده از مصاحبه‌ای انجام شده که درسه برنامه‌در ۷۵/۹/۲۷ و ۷۵/۱۰/۴ و ۷۵/۱۰/۱۱ از برنامهٔ در جهان ریاضی شبکهٔ ۲ سراسری رادیو پخش شده است. مصاحبه‌کننده همکارمان آقای غلامرضا یاسی‌پور بوده‌اند. این برنامه را می‌توانید سه‌شنبه شبها از ساعت ۹ تا ۹/۵۰ از همین شبکه بشنوید.

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۷)



حمیدرضا امیری

دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

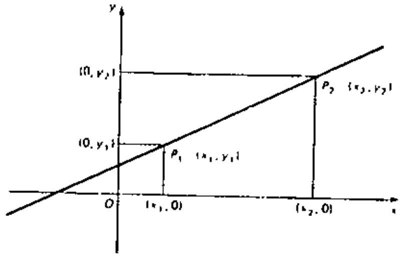
1.1 Elementary results in coordinate geometry
If $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ and $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, we obtain the following results directly from Fig. 1.1.

Distance P_1P_2 $$\sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \quad (1.1)$$

Gradient of P_1P_2 $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1.2)$$

Mid-point of P_1P_2 $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad (1.3)$$

Equation of P_1P_2 $$y - y_1 = m(x - x_1). \quad (1.4)$$
$$\equiv y = mx + c,$$
where $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, and $c = y_1 - mx_1$.



شکل ۱.۱

۱.۱ نتایج مقدماتی در هندسهٔ تحلیلی

اگر $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ و $P_2 \equiv (x_2, y_2)$، ما نتایج زیر را مستقیماً از شکل ۱.۱ به‌دست می‌آوریم.

فاصلهٔ P_1P_2 $$(۱.۱)\ \sqrt{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]}$$

ضریب زاویهٔ P_1P_2 $$(۱.۲)\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نقطهٔ وسط (میانی) P_1P_2 $$(۱.۳)\ \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

معادلهٔ P_1P_2 $$(۱.۴)\ y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\equiv y = mx + c$$

که $$c = y_1 - mx_1, m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Other important results
Straight lines with gradients m_1, m_2 are perpendicular
$$\Leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1. \quad (1.5)$$
Perpendicular distance of (x_1, y_1) from $ax + by + c = 0$ is
$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}. \quad (1.6)$$

(The expression $ax_1 + by_1 + c$ is positive or negative depending on whether (x_1, y_1) is on one side of the line or the other; e.g., the points $(-2, 3)$ and $(1, 1)$ are on opposite sides of the line $5x - 2y + 1 = 0$ since $5.(-2) - 2.3 + 1 < 0$ and $5.1 - 2.1 + 1 > 0$.)

نتایج مهم دیگر

دو خط با ضریب زاویه‌های m_1 و m_2 بر یکدیگر عمودند $\Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$ (۱.۵) فاصلهٔ عمودیِ نقطهٔ (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ عبارت است از،

$$(۱.۶)\ \frac{^*ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

(عبارت $ax_1 + by_1 + c$ یا مثبت است و یا منفی، بستگی به این که (x_1, y_1) در یک طرف خط یا در طرفِ دیگر خط واقع باشد. به‌عنوان مثال، نقاط (۳ و ۲-) و (۱ و ۱) در دو طرفِ مقابل از خط $5x - 2y + 1 = 0$ قرار دارند، به‌طوری‌که $5 \times (-2) - 2 \times 3 + 1 < 0$, $5 \times 1 - 2 \times 1 + 1 > 0$

Example 1 Find an equation of that line through the meet of the lines $3x + y - 5 = 0$, $8x - 3y - 19 = 0$ which is perpendicular to the line

$$9x + 7y - 4 = 0.$$

Method (i): Solving $3x + y - 5 = 0$, $8x - 3y - 19 = 0$ we have $x = 2$, $y = -1$. Gradient of $9x + 7y - 4 = 0$ is $-9/7$; hence the gradient of a perpendicular line is $7/9$.
An equation of the required line is

$$y + 1 = \tfrac{7}{9}(x - 2)$$
$$\equiv 7x - 9y = 23.$$

مثال ۱: معادلهٔ خطی را بیابید که از محل تلاقی دو خط $۳x + y - ۵ = ۰$ و $۸x - ۳y - ۱۹ = ۰$ عبور کرده و برخط $۹x + ۷y - ۴ = ۰$ عمود باشد.

روش اول: با حل $۳x + y - ۵ = ۰$ و $۸x - ۳y - ۱۹ = ۰$ (در یک دستگاه) داریم، $x = ۲$ و $y = -۱$. ضریب زاویهٔ خط $۹x + ۷y - ۴ = ۰$، $\frac{-۹}{۷}$ است، بنابراین ضریب زاویهٔ خط عمود بر آن $\frac{۷}{۹}$ خواهد بود.

معادلهٔ خط خواسته شده عبارت است از

$$y + ۱ = \frac{۷}{۹}(x - ۲)$$
$$\equiv ۷x - ۹y = ۲۳$$

Method (ii): We use an important idea in coordinate geometry. The equation

$$(3x + y - 5) + \lambda(8x - 3y - 19) = 0,$$

where λ is any non-zero constant, is that of a straight line through the meet of $3x + y - 5 = 0$ and $8x - 3y - 19 = 0$, since the coordinates of this point clearly satisfy the equation for any value of λ. The gradient of this line is $(3 + 8\lambda)/(3\lambda - 1)$. Hence the line is perpendicular to $9x + 7y - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + 8\lambda}{3\lambda - 1} = \frac{7}{9}$$
$$\Leftrightarrow 9(3 + 8\lambda) = 7(3\lambda - 1)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -\tfrac{2}{3}.$$

Hence the required line is

$$3x + y - 5 - \tfrac{2}{3}(8x - 3y - 19) = 0$$
$$\equiv 7x - 9y = 23.$$

روش دوم: از یک ایدهٔ مهم در هندسهٔ مختصاتی استفاده می‌کنیم. معادلهٔ $(۳x + y - ۵) + \lambda(۸x - ۳y - ۱۹) = ۰$ که در آن λ یک مقدار ثابت ناصفر می‌باشد، معادلهٔ یک خط مستقیم است که از محل تلاقی $۳x + y - ۵ = ۰$ و $۸x - ۳y - ۱۹ = ۰$ عبور می‌کند، و واضح است که مختصات این نقطه (محل تلاقی) به‌ازای هر مقدار λ در معادله صدق می‌کند. ضریب زاویهٔ این خط $\frac{(۳ + ۸\lambda)}{(۳\lambda - ۱)}$ است. از آن‌جا که خط بر $۹x + ۷y - ۴ = ۰$ عمود است.

$$\Leftrightarrow \frac{۳ + ۸\lambda}{۳\lambda - ۱} = \frac{۷}{۹}$$
$$\Leftrightarrow ۹(۳ + ۸\lambda) = ۷(۳\lambda - ۱) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{۲}{۳}$$

بنابراین خط خواسته شده عبارت است از

$$۳x + y - ۵ - \frac{۲}{۳}(۸x - ۳y - ۱۹) = ۰$$
$$\equiv ۷x - ۹y = ۲۳$$

Exercise 1.1

1 Find an equation of the straight line which passes through the intersection of the lines

$$5x - 7y + 1 = 0, \quad 3x + 9y - 5 = 0$$

and which passes through the origin.

2 The points A and B have coordinates $(3, 0)$ and $(0, -3)$. Given that the area of the triangle ABP is $4\frac{1}{2}$ units², find the equations of the two lines on which P can lie.

3 Show that the equation

$$(4x + 3y - 6) + \lambda(2x - 5y - 16) = 0$$

represents a straight line for any value of λ.
Find the value of λ when the line
(a) passes through the origin,
(b) is parallel to the line $5x - 6y - 11 = 0$,
(c) is perpendicular to the line $x + 4y = 0$.

4 The points A, B, C and D have coordinates $(3, 8)$, $(2, 1)$, $(12, -4)$ and $(10, 12)$ respectively. The mid-point of CD is P.
(a) Find an equation of the line BP.
(b) The lines AC and BP meet at Q. Find the coordinates of Q.
(c) The line through B, perpendicular to AC, meets AC at R. Find the coordinates of R and the distance BR.
(d) Hence, or otherwise, calculate the area of the triangle ABQ.

تمرین ۱.۱

۱ــ معادلهٔ خطی را بیابید که از محل تقاطع دو خط $۵x - ۷y + ۱ = ۰$ و $۳x + ۹y - ۵ = ۰$ عبور کند و همچنین از مبدأ مختصات بگذرد.

۲ــ نقاط A و B دارای مختصات (۳،۰) و (۰،-۳) می‌باشند. فرض کنیم مساحت مثلث ABP، $۴\frac{۱}{۲}$ واحد مربع است، معادلهٔ دو خطی را بیابید که نقطه P می‌تواند روی آنها واقع باشد.

۳ــ نشان دهید معادلهٔ

$(۴x + ۳y - ۶) + \lambda(۲x - ۵y - ۱۶) = ۰$ برای هر مقدار λ یک خط مستقیم را نمایش می‌دهد. مقدار λ را بیابید، وقتی که خط

(الف) از مبدأ مختصات عبور می‌کند،

(ب) با خط $۵x - ۶y - ۱۱ = ۰$ موازی است،

(پ) برخط $x + ۴y = ۰$ عمود است.

۴ــ نقاط A، B، C و D به ترتیب دارای مختصات (۳,۸)، (۲,۱)، (۱۲,-۴) و (۱۰,۱۲) می‌باشند. نقطهٔ وسط CD، P است.

(الف) معادلهٔ خط BP را بیابید.

(ب) خطهای AC و BP در Q تلاقی می‌کنند. مختصات نقطهٔ

Q را بیابید.

(پ) خطی از B عبور کرده، بر AC عمود است، AC را در R تلاقی می‌کند. مختصات R و فاصلهٔ BR را بیابید.

(ت) سپس، یا از طرف دیگر، مساحت مثلث ABQ را محاسبه کنید.

5 The parallelogram $OABC$ lies in the first quadrant. The angle OAC is 90° and $OA = 15$. The equation of the straight line through O and A is $4y - 3x = 0$ and the equation of the straight line through O and C is $3y - 4x = 0$. Find
(a) the coordinates of A,
(b) an equation of the straight line through A and C,
(c) the coordinates of C,
(d) the coordinates of B.

6 The points (6, 13), (0, 3) and (5, 0) are the three vertices A, B and C, respectively, of a parallelogram $ABCD$.
(a) Calculate the coordinates of D.
(b) Prove that $ABCD$ is a rectangle.
(c) Calculate the ratio of the length of AB to the length of BC.
(d) The point P lies on CD and the area of the triangle PBC is one quarter of the area of the rectangle $ABCD$. Find the coordinates of P and an equation of the line BP.

7 The points A, B, C have coordinates (0, 2), (1, 4) and (3, −1) respectively. Given that $ABFC$ is a trapezium with CF parallel to AB and $CF = 2AB$, find
(a) the coordinates of F,
(b) an equation of the line BC,
(c) the coordinates of the point where AC cuts the x-axis,
(d) an equation of the line through B perpendicular to FC.

۵ــ متوازی‌الاضلاع OABC در ربع اول قرار دارد. زاویهٔ OAC، °۹۰ است و ۱۵ = OA. معادلهٔ خط مستقیمی که از O و A عبور می‌کند ۰ = ۴y − ۳x و معادلهٔ خط مستقیمی که از O و C عبور می‌کند ۰ = ۳y − ۴x است. پیدا کنید،

(الف) مختصات A را،

(ب) معادلهٔ خطی را که از A و C عبور می‌کند،

(پ) مختصات C را،

(ت) مختصات B را.

۶ــ نقطه‌های (۶,۱۳)، (۰,۳) و (۵,۰) به‌ترتیب سه رأس A، B و C از متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند.

(الف) مختصات D را محاسبه کنید.

(ب) ثابت کنید ABCD یک مستطیل است.

(پ) نسبت طولِ AB به طولِ BC را محاسبه کنید.

(ت) نقطهٔ P روی CD واقع است و مساحتِ مثلث PBC یک چهارم مساحت مستطیل ABCD است. مختصاتِ P و معادلهٔ خط BP را بیابید.

۷ــ نقاط A، B و C به‌ترتیب دارای مختصات (۰,۲)، (۱,۴) و (۱−,۳) می‌باشند. فرض کنیم ABFC ذوزنقه‌ای است که در آن CF موازی AB و CF = ۲AB می‌باشد، پیدا کنید:

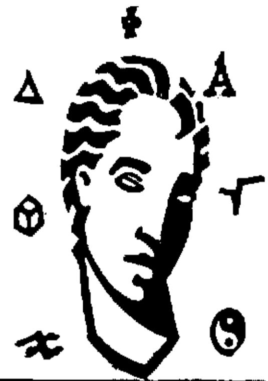
(الف) مختصات F را،

(ب) معادلهٔ خط BC را،

(پ) مختصاتِ محل تلاقیِ خط AC با محور Xها

(ت) معادلهٔ خطی که از B عبور کرده و بر FC عمود باشد.

* چون عدد حاصل از کسر فوق نشان‌دهندهٔ فاصله است و فاصله نمی‌تواند منفی باشد باید همواره قدرمطلقِ عدد حاصل را در نظر بگیریم.



تفریح اندیشه ۶

موتورسواری مسیری را می‌پیماید که از چهارقسمت به طولهای مساوی تشکیل شده است.

در اولین قسمت، جاده صاف و هموار است و سرعت او ۱۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد. قسمت دوم تپه‌ای است که سرعتش در این مسیر به ۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. در قسمت سوم که سراشیبی است سرعت موتورسوار ۳۰ کیلومتر در ساعت است.

در آخرین بخش، جاده صاف و هموار است و باد هم از پشت سر می‌وزد که در نتیجه او به ۱۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. سرعت متوسط این موتورسوار دراین مسیر چقدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۸)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

قسمت چهارم

یک ذهن ریاضی حیرت‌انگیز

کارل فردریش گاوس در ۱۷۷۷ در برونسویک[۱]، که اکنون در آلمان غربی است، متولد شد. پدرش بنّا بود و امید داشت که پسرش بتواند در کارها به او کمک کند. هنگامی که گاوس در سه سالگی توانست محاسبات پرداخت حقوق پدرش را تصحیح کند، چنین معلوم شد که شغل اخیر شغلی است که گاوس کوچک بسیار مناسب آن است. خوشبختانه از لحاظ آیندهٔ ریاضیات (اگر از فیزیک و نجوم چیزی نگوییم) درک حاکم آن ناحیه از نبوغ کودک خردسال آگاه شد و تعلیم مرتب او را برقرار ساخت.

گاوس در سن پانزده سالگی، در حالی که بسیار جلوتر از تواناییهای معلمان خود بود، به کالج *کارولین*[۲] رفت. طی سه سال استادان این کالج مجبور به پذیرفتن این مطلب شدند که آنها را نیز پشت سر نهاده است.

گاوس در ۱۷۹۶، هنگامی که دانشجوی کالج بود، مطلب قابل توجه خود را در ارتباط با هندسهٔ یونانی و اعداد فرما مطرح کرد. این نتیجه در بخش هفتم و آخرین اثر عظیمش[۳] ــ در چاپ امروزی کتابی ــ آمده است که در ۱۸۰۱ زمانی که گاوس هنوز تنها بیست و چهار سال داشت ظاهر شد، و مبنای اغلب نظریهٔ اعداد امروزه (شاخه‌ای از ریاضیات که با ویژگیهای اعداد طبیعی سر و کار دارد، و مطالب این فصل جزئی کوچک از آن است) قرار گرفت.

یکی از مسایل مورد علاقهٔ ریاضیدانهای یونان باستان ترسیم شکلهای مسطح (دایره‌ها، مثلثها، متوازی الاضلاعها، و غیره) تنها با استفاده از خط کش (نامدرج، و بنابراین تنها مناسب برای رسم خطوط مستقیم) و پرگار (تنها برای رسم کمانهای دایره‌ها، و انتقال یک طول با حرکت دادن آن در عرض صفحه) بود. با بهره‌گرفتن از ابتکارهایی غالباً جالب می‌توان تعداد بسیاری از شکلهای هندسی را تنها با استفاده از این دو وسیلهٔ ابتدائی رسم کرد. (چنین ترسیماتی پیش از اواسط دههٔ ۱۹۶۰ بخش مهمی از ریاضیات شاگردان دبیرستان را تشکیل می‌داد.) یونانیان خود چگونگی ترسیم n ضلعیهای منتظم را به ازای

$n = ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۱۶$

می‌دانستند. (چندضلعی منتظم[۴] است اگر جمیع اضلاعش دارای یک طول و جمیع زاویه‌های داخلیش برابر باشند.)

آنچه که *گاوس* نوزده ساله اثبات کرد این بود که یک چندضلعی منتظم با n ضلع را می‌توان تنها با استفاده از خط کش و پرگار رسم کرد اگر و تنها اگر، $n = 2^k$ به ازای عدد k ای یا

$$n = 2^k p_1 \; p_2 \; \dots \; p_r \qquad \text{(به‌ازای k ای)}$$

که در آن P_1 ، P_2 ، ...، P_r اولهای فرمای متمایزند. در حالت خاص، به ازای هر اول فرمای P می‌توانیم چندضلعی منتظمی با P ضلع رسم کنیم. به‌ازای اولین اول فرما، $F_0 = 3$ ، مثلث متساوی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم، که رسمش آسان است، و به ازای بعدی، $F_1 = 5$ پنج ضلعی منتظم را حاصل می‌کنیم. از آنجا که $F_2 = 17$ نیز اول فرماست، دستاورد گاوس نشان می‌دهد که ۱۷ضلعی منتظم را نیز می‌توان با استفاده از خط کش و پرگار رسم کرد. این دستاورد اولین (و تنها) پیشرفت در مورد رسم چندضلعیهای منتظم از زمان خود یونانیها بود، و گاوس از کشفش بقدری سرافراز گردید که بر این شد که بر سنگ قبرش یک ۱۷ ضلعی منتظم نقشه کنند. گرچه این تقاضا هیچگاه به انجام نرسید، اما چنین چندضلعی‌ای بر گوشه‌ای از یادمانی که به یاد وی در مولدش، برونسویک، بنا شد، نقش شده است.

اعداد تام

عدد ۶، همان‌گونه که فیثاغورسیان (پیروان فیثاغورس[۵]، ریاضیدان قرن ششم ق. م.) توجه کرده بودند، ویژگی نسبتاً مخصوصی دارد. این عدد برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های خود (غیر از خودش) است:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

عدد بعد از ۶، دارای این ویژگی، ۲۸ است. تنها اعداد شمارندهٔ ۲۸ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴، و خود ۲۸، و

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

فیثاغورسیان این عددها را *اعداد تام*[۶] می‌نامیدند.

نیکوماخوس[۷] ریاضیدان یونانی در Introduction Arithmeticae خود در قرن اول میلادی فهرست چهار عدد تام شناخته شده (بعد از ۶ و ۲۸) را به صورت ۴۹۶، و بعد از آن ۸۱۲۸ آورده است. پس از این سند دو حدس زیر زده شد: n امین عدد تام دارای n رقم است، و اعداد تام متناوباً به ۶ و ۸ ختم می‌شوند. اما هر دو حدس غلط بودند. مثلاً اعداد تام پنج رقمی وجود ندارند، و گذشته از این، گرچه پنجمین عدد تام یعنی، ۳۳۵۵۰۳۳۶، به ۶ ختم می‌شود، ششمین عدد تام که ۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶ است، نیز چنین است. (اما این مطلب که هر عدد تام به ۶ یا ۸ ختم می‌شود راست است. این موضوع می‌تواند مستقیماً به اثبات رسد، و به این مطلب که در واقع کدام اعداد تام‌اند بستگی ندارد.)

اقلیدس در کتاب XI *مقدمات*[۸]اش ، در حدود ۳۵۰ ـ ۳۰۰ ق.م. ثابت کرد اگر $2^n - 1$ اول باشد، عدد $2^{n-1}(2^n - 1)$ تام است. دو هزار سال بعد، *اویلر* نشان داد هر عدد تام زوج از این نوع است، و به این ترتیب رابطه‌ای نزدیک بین اولهای مرسن و اعداد تام مشخص شد، که بلافاصله دلالت بر این می‌کند که در حال حاضر دقیقاً سی عدد تام زوج شناخته شده موجودند. در واقع اعداد تام فردی شناخته نشده‌اند، و حدس زده‌اند که جمیع عددهای تام ضرورتاً زوج‌اند. اگر این حدس به اثبات نرسیده مدارکی چند به سود آن جمع آورده شده است. مشخص شده است هر عدد تام فرد، در صورت وجود، باید بزرگتر از 10^{100} و دست کم ۱۱ عامل اول متمایز داشته باشد. از طرف دیگر، شخص، در صورتی که تاریخ را در این مورد راهنما به حساب آوریم، باید در مورد حدس زدن دربارهٔ اعداد تام محتاط باشد. *پیتر بارلو*[۹] در ۱۸۱۱ در کتاب *Theory of Numbers* اش از $2^{30}(2^{31} - 1)$ ، هشتمین عدد تام، عددی ۱۹ رقمی، که در ۱۷۷۲ توسط *اویلر* کشف شده بود چنین نوشت: «[این عدد] بزرگترین عددی است که در زمانه کشف خواهد شد؛ زیرا از آنجا که این اعداد بی‌آنکه سودمند باشند صرفاً شگفت‌انگیزند، احتمال نمی‌رود کسی دیگر سعی در یافتن عددی بعد از آن بکند.»

هر چند به نظر می‌رسد *بارلو* در مورد صرفاً شگفت‌انگیز بودن اعداد تام حق داشته باشد، وی آشکارا جذابیت شگفتیها

را، آن‌گونه که بخش اول این فصل به کفایت توضیح می‌دهد، دست‌کم گرفته است. و شک نیست که اعداد تام بسیار شگفت‌انگیزند. به عنوان نمونه، هر عدد تام (زوج) مثلثی[10] است؛ که بدین معنی است که آن را می‌توان توسط تعدادی مهره نمایش داد که برای ساختن مثلثی متساوی‌الاضلاع مرتب شده‌اند (که هم‌ارز به صورت $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ بودن، به‌ازای عدد n ی، است). واقعیت دیگر: اگر عدد تام غیر از ۶ ی را در نظر گرفته تمام ارقامش را با هم جمع کنیم، عددی که به دست می‌آوریم یکی بیش از مضربی از ۹ خواهد بود. مرتبط با این مطلب این دستاورد است که ریشهٔ رقمی[11] هر عدد تام ۱ است. (برای به دست آوردن ریشهٔ رقمی یک عدد جمیع ارقام آن عدد را جمع کرده، سپس جمیع ارقام عدد حاصل را جمع می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا به یک عدد تک رقمی برسیم.)

باز هم، هر عدد تام مجموع مکعبات فرد متوالی است. به عنوان نمونه:

$$۲۸ = ۱^۳ + ۳^۳$$

$$۴۹۶ = ۱^۳ + ۳^۳ + ۵^۳ + ۷^۳$$

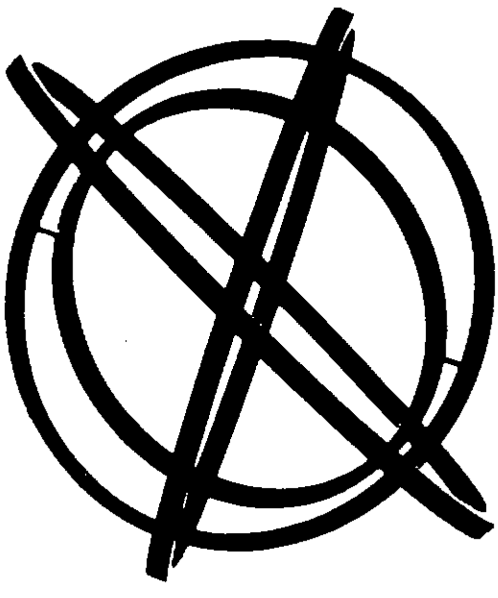
باز هم: اگر n تام باشد، مجموع معکوسهای جمیع مقسوم‌علیه‌های n همواره برابر ۲ است. به عنوان نمونه، ۶ دارای مقسوم‌علیه‌های ۱، ۲، ۳، ۶ است، و

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۲$$

در واقع، در جستجوی این اعداد «شگفت» که، علی‌رغم ادعای *بارلو* در مورد بی‌فایده بودنشان، محاسبهٔ آنها شأن قضاوت در مورد اندازه گرفتن توان کامپیوترها را به دست آورده، کوشش بسیار به کار رفته است. به عنوان نمونه، عدد مرسن $M_{۸۱۹۱}$، اولین عدد در گسستن زنجیرهٔ اولهای مرسن منجر شونده به اولهای مرسن، را در نظر می‌گیریم (پیشین را ملاحظه کنید). با استفاده از آزمون *لوکاس ـ لمر* اثبات این که این عدد ۲۴۶۶ رقمی اول نیست (و در نتیجه عددی تام را به دست نمی‌دهد)، زمانی که اولین بار بر کامپیوتر ILLIAC – I در ۱۹۵۳ انجام شد، ۱۰۰ ساعت زمان گرفت. طی سالیان زمان محاسبهٔ آن به گونهٔ چشمگیری کم شد: ۵۰۲ ساعت بر IBM ۷۰۹۰، ۴۹ دقیقه بر ILLIAC – II، ۳۰۱ دقیقه بر IBM ۳۶۰–۹۱، و ۱۰ ثانیه بر CRAY – ۱ . .

❑ یادداشتها

1– Brunswick
2 – Caroline College
3– Disquisitiones Arithmeticae
4 – regular
5 – Pythagoras
6 – Perfect numbers
7 – Nicomachus
8 – Elements
9 – Peter Barlow
10– triangular
11– digital root



(حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۹)

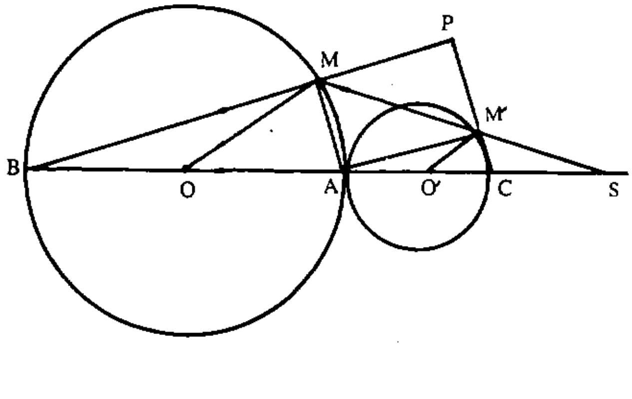
حل از آقای محمد امین سرایداری دانش‌آموز سال سوم دبیرستان شاهد سنندج

۱. چون $O'M' \parallel OM$ است، دو مثلث SOM و SO'M' متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{SO - OO'}{SO} = \frac{۱}{۲}\ ,\ OO' = R + R' = ۴ + ۲ = ۶ \Rightarrow$$

$$\frac{SO - ۶}{SO} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow SO = ۱۲cm$$



چون $\frac{SO'}{SO} = \frac{۱}{۲}$ و دو نقطهٔ O و O' ثابتند، پس S نقطهٔ ثابتی است که پاره خط OO' را به نسبت نقصانی $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کند.

۲. چهار ضلعی AMPM' مستطیل است. زیرا متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند.

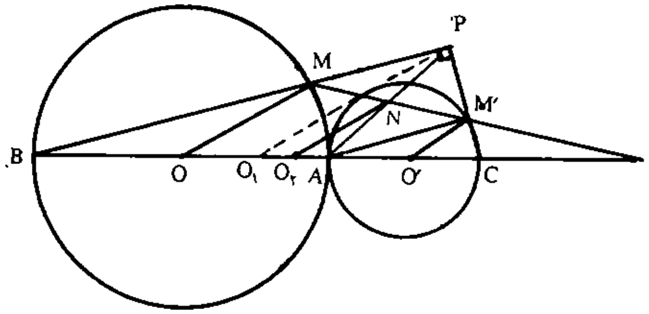
$$A\hat{O}M = C\hat{O'}M' \Rightarrow M\hat{A}O = M'\hat{C}O'\ ,$$

$$O\hat{M}B = O'\hat{M'}A \Rightarrow AM \parallel M'P\ ,\ AM' \parallel MP\ ,$$

$$A\hat{M}B = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}P = ۹۰^\circ$$

۳. چون $B\hat{P}C = ۹۰^\circ$ و $BC = ۱۲cm$ پاره خط ثابتی است، پس مکان هندسی نقطه P دایره‌ای به قطر BC است. مرکز این دایره نقطه $O_۱$ وسط پاره خط BC و شعاع آن $R = ۶cm$ است. برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ N از N خطی موازی شعاعهای OM و O'M' رسم می‌کنیم تا OO' را در نقطهٔ $O_۲$ قطع کند. در ذوزنقه OMM'O'، پاره خط میانه‌ای $NO_۲$ برابر است با:

$$NO_۲ = \frac{MO + M'O'}{۲} = \frac{۴ + ۲}{۲} = ۳cm$$



و چون $O_۲$ وسط پاره خط OO' نقطهٔ ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ N دایره‌ای به مرکز نقطهٔ $O_۲$ و به شعاع ۳ سانتی‌متر است.

۴. اگر $A\hat{O}M = ۶۰^\circ$ باشد، مثلث AOM متساوی‌الاضلاع و از آن جا؛ $AM = C_۶ = R = ۴$ و در مثلث متساوی‌الساقین $AO'M'$، $A\hat{O'}M' = ۱۲۰^\circ$ است. بنابراین بنا به ویژگی مثلثی که زاویهٔ ۱۲۰° دارد، خواهیم داشت:

$$AM'^۲ = O'A^۲ + O'M'^۲ + O'A.O'M' \Rightarrow$$
$$AM'^۲ = ۴ + ۴ + ۲\times۲ = ۱۲ \Rightarrow AM' = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین اندازهٔ قطر مستطیل برابر است با:

$$AP = MM' = \sqrt{AM^۲ + AM'^۲} = \sqrt{۱۶+۱۲} = \sqrt{۲۸}$$
$$\Rightarrow MM' = ۲\sqrt{۷}$$

و مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{AMPM'} = AM.AM' = ۴\times۲\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}cm^۲$$

اسامی کسانی که حل کامل یا حل درست بخشی از مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۹ را فرستاده‌اند:

۱. خانم صدیقهٔ رضایی دانشجوی رشتهٔ زیست‌شناسی دانشگاه تبریز.

۲. خانم معصومهٔ خلخالی دانش‌آموز دوم دبیرستان فرزانگان کرج

۳. خانم سیده حبیبهٔ تابعی از استهبان

۴. خانم فتانه مرشد سلوک از اراک.

۵. خانم اعظم حقیقی دانش‌آموز سوم دبیرستان از مبارکهٔ اصفهان

۶. آقای هومن عرفانیان مزین دانش‌آموز ترم ۴ نظام جدید از منطقه ۱۰ تهران.

۷. آقای رضا سعدآبادی از نیشابور

۸. آقای محسن اجوری دانش‌آموز سوم ریاضی فیزیک از تهران.

۹. آقای محمد نجم‌زاده دانش‌آموز سال دوم دبیرستان علامه حلی اراک

۱۰. آقای سیروس نارنجی دانش‌آموز دوم دبیرستان شهید مصطفی خمینی از تبریز.

۱۱. آقای فرید نورآبادی دانش‌آموز دوم دبیرستان از مرند.

۱۲. آقای نعمت الله بسقر دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از آق قلا، گرگان.

۱۳. آقای امیرامیدوار دانش‌آموز دبیرستان نمونهٔ دکتر حسابی از آباده.

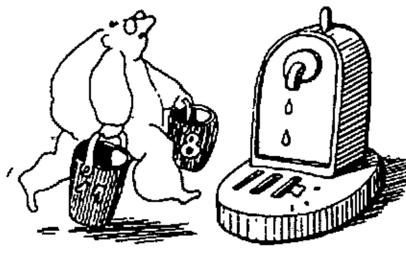
۱۴. آقای البرز فراهانی از اراک.

۱۵. آقای نیما حجازی الحسینی دانش‌آموز سوم دبیرستان علامهٔ حلی تهران

۱۶ ـ پوریا ولی، سال سوم ریاضی فیزیک (دبیرستان سازمان انرژی اتمی ایران)

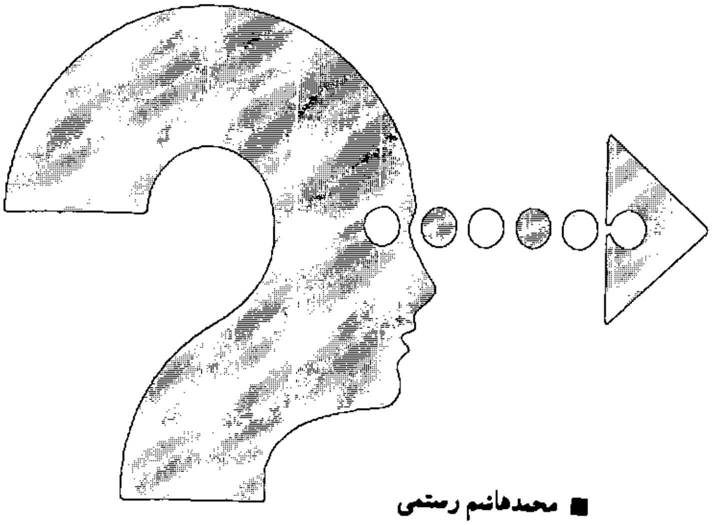


تفریح اندیشه ۷



در نزدیکی شیر آب مهرداد دو سطل خالی دارد که گنجایش یکی ۸ لیتر و گنجایش دیگری ۱۱ لیتر است. او می‌خواهد کاری کند که مقدار آب داخل یکی از سطلها، دو برابر آب سطل دیگر باشد. بهترین روش برای انجام این کار کدام است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



مسائل برای حل

■ محمدهاشم رستمی
■ احمد قندهاری
■ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
■ حمیدرضا امیری
■ حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

مسأله‌های ریاضیات ۱

۱ ــ با توجه به تعریف مجموعه‌های A و B و C، حاصل $(A\cup B)\cap C$ را بنویسید.

$$= \{x | x \in \mathbb{Z}\ ,\ -1 \le x < 6\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}\ ,\ x \ge 1\}$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{R}\ ,\ x \le 5\}$$

۲ ــ اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+2)$ عضوی ۹۶ واحد بیش از همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی باشد، k را بیابید.

۳ ــ حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بیابید.

۱) $(a^3-2)(a^3+2)(a^{12}+4a^6+16)$

۲) $(2x-y)^3(y^2+4x^2)^3(2x+y)^3$

۴ ــ عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

۱) $(a+b)^4+16$

۲) $x^2+5y+x-25y^2$

۵ ــ q و p را چنان تعیین کنید که باقیماندهٔ x^4+px^2+qx+2 بر x^2-2x+2 برابر $7x+4$ باشد.

۶ ــ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $x^{45}+1$ و $x^{15}+1$ را تعیین کنید.

۷ ــ حاصل عبارت

$$\frac{p-a}{(p-q)(p-r)}+\frac{q-a}{(q-r)(q-p)}+\frac{r-a}{(r-p)(r-q)}$$

را بیابید.

مسأله‌های ریاضیات ۳

۱ ــ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x^3-4x^2+5x}{(x^2+1)(x-1)} \ge 0$ را بیابید.

۲ ــ عبارت $p(x)=\frac{1}{x-4}+\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف شده است.

۳ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{4x-1}{2x+1}-\frac{2x-1}{2x-2}=\frac{2x+3}{4x^2-2x-2}$$

۴ ــ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 4^{3x-2y}=32 \\ 9^{3x+2y}=243 \end{cases}$$

۵ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-3}-1$$

۶ ــ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x \ge 2 \\ x+3 & x<2 \end{cases}$ و $g(x)=x+4$، $g(f(-1))$ و $f(g(0))$ را حساب کنید.

۷ ــ اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $f(x)=x^2-3x$ ، حاصل $f(-A)+f(A)$ را حساب کنید.

۸ ــ آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^5+1}{x^5-1}$ معکوس‌پذیر است؟ درصورتی که f معکوس‌پذیر است، ضابطهٔ تابع معکوس (f^{-1}) را بیابید.

۹ ــ در صورتی که $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=2x$ ، ضابطهٔ تابع g را بیابید.

۱۰ ــ هرگاه مبدأ مختصات به نقطهٔ $(-3,4)$ انتقال یابد، معادلهٔ جدید خط $2x-y=5$ را بنویسید.

مسأله‌های جبر و احتمال
سال سوم ریاضی

۱ ــ ثابت کنید، هرگاه اعداد مجموعهٔ $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{n+1}\}$ (a_iها اعداد صحیح هستند) را بر n تقسیم کنیم، لااقل دو عدد از این مجموعه باقی‌مانده‌های یکسان خواهند داشت.

۲ ــ ثابت کنید، اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ آنگاه $X=\varnothing$ و اگر $A\subseteq x$ و $A\subseteq X'$ آنگاه $X=U$.

۳ ــ ثابت کنید، برای هر چهار مجموعهٔ دلخواه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$

۴ ــ رابطهٔ R روی R^2 به صورت $(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2$ تعریف شده است، آیا این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است؟ در این صورت شکل کلاسهای هم‌ارزی این رابطه به چه صورتی است؟

۵ ــ بهزاد و ۸ نفر دیگر به‌طور تصادفی در یک ردیف می‌نشینند، احتمال آنکه بهزاد در مکان وسط نشسته باشد چقدر است؟

۶ ــ یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر روشدنِ هر عدد فرد است. اگر این تاس را بیاندازیم احتمال آنکه عدد حاصل کوچکتر از ۵ باشد، چقدر است؟

۷ ــ دو تاس را با هم می‌ریزیم و این عمل را ۶ بار تکرار می‌کنیم، احتمال آنکه دقیقاً ۴ بار مجموعِ دو تاس ۵ باشد چقدر است؟

۸ ــ نقطه‌ای را به تصادف از داخلِ سطح مربع $[0,2]\times[0,2]$ انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه مختصات این نقطه در رابطه‌های $x>\frac{1}{2}$ و $y\geq\frac{1}{4}$ صدق کند، چقدر است؟

۹ ــ اگر $z=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ در این صورت حاصل Z^{1376} را محاسبه کنید.

مسأله‌های هندسهٔ تحلیلی
پیش‌دانشگاهی

۱ ــ الف. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از مبدأ مختصات به فاصلهٔ $\sqrt{6}$ واقع است.

ب. مقدار a را چنان تعیین کنید که نقطه $A(a\ ,2a-1\ ,\ a+1)$ روی مکان هندسی فوق باشد.

۲ ــ اگر $a=i+2j-k$ و $b=-3i+j+2k$ باشد، $|3a-2b|$ را تعیین کنید.

۳ ــ اگر $a=(2,3,-1)$ و $b=2i-3k$ باشد، اندازهٔ جبری تصویر بردار b روی بردار a را به‌دست آورید.

۴ ــ مقدار m را چنان بیابید که زاویهٔ بین دو خط $D:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{m}=\frac{z+1}{2}$ و $D':\begin{cases}x=t+1\\ y=-t\\ z=2t+3\end{cases}$ برابر 60° باشد.

۵ ــ معادله های متقارن قرینه خط $D:2x+1=y-2=-3z+1$ نسبت به محور xها را به‌دست آورید.

۶ ــ فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,0,2)$ را از خط Δ که از نقطهٔ $N(1,2,1)$ به موازات بردار $L=(3,2,1)$ رسم می‌شود، به‌دست آورید.

۷ ــ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که در نقطه‌ای به طول ۲ برخط $D:\begin{cases}x=t-1\\ y=2t+1\\ z=-t+2\end{cases}$ عمود است.

مسأله‌های جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱ ــ در فضای برداری چندجمله‌ایهای نابیشتر از درجهٔ ۳ ثابت کنید بردارهای $(x^۳+x+۱)$ و $(x^۲+۲x-۱)$ و $(x+۲)$ و (x) مستقل خطی هستند.

۲ ــ اگر $V=\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ باشد، ثابت کنید هر عضو $\mathbb{R}^۳$ را می‌توان به‌صورت **منحصر بفردی** برحسب ترکیب خطیِ اعضای V نوشت.

۳ ــ هسته و بُعد تصویر نگاشت خطی f با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را مشخص کرده و بررسی کنید، این نگاشت یک‌به‌یک یاپوشا است یا خیر.

۴ ــ اگر f یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۲$ و $f(۱,۰)=(۲,-۱)$ و $f(۰,۱)=(۱,۲)$ در این صورت حاصلِ $f(۳,۴)$ را به دست آورید.

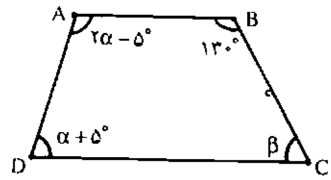
۵ ــ با استفاده از ویژگیهای دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} bc & ۱ & a \\ ac & ۱ & b \\ ab & ۱ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix}$$

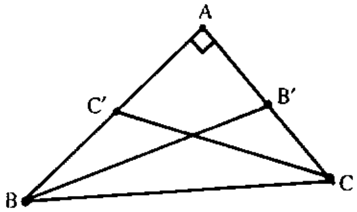
۶ ــ مقادیر ویژه و امتدادهای ویژهٔ نگاشت f با ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

مسأله‌های هندسهٔ ۱

۱ ــ با توجه به ذوزنقه ABCD (شکل بالا)، اندازهٔ α و β و زاویه‌های این ذوزنقه را تعیین کنید.

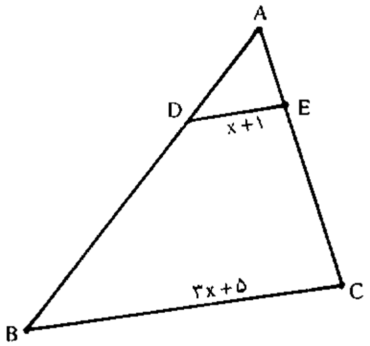


۲ ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=۹۰°)$ اندازهٔ میانه‌های نظیر دو ضلع زاویهٔ قائمه $BB'=۲\sqrt{۷۳}$ و $CC'=۴\sqrt{۱۳}$ است. اندازهٔ وتر این مثلث را تعیین کنید.



۳ ــ مساحت شش ضلعی منتظمی برابر $۹۶\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی را که معادل این شش ضلعی منتظم است تعیین کنید.

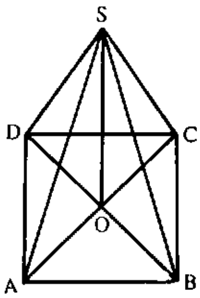
۴ ــ در مثلث ABC، DE∥BC و $۵AD=۲DB$ است. اگر $DE=x+۱$ و $BC=۳x+۵$ باشد، اندازهٔ ضلع BC را بیابید.



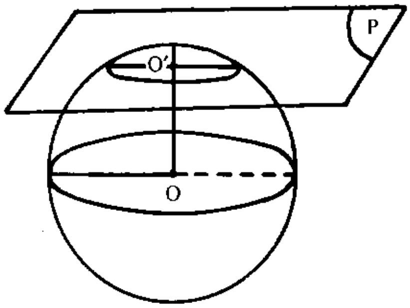
۵ ــ مساحت یک پنج ضلعی منتظم ۱۶ برابر مساحت پنج ضلعی منتظم دیگر است. نسبت ضلعهای این دو پنج ضلعی منتظم را تعیین کنید.

۶ ــ قاعدهٔ متوازی‌السطوح مایلی مربعی به ضلع $۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ است و دو وجه جانبی آن نیز مربع می‌باشند. اگر یالهای این متوازی‌السطوح با صفحهٔ قاعده زاویهٔ °۷۵ بسازند، اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۷ ــ هرم منتظم مربع‌القاعدهٔ SABCD داده شده است. اندازهٔ قطر قاعدهٔ این هرم برابر ۱۲ و اندازهٔ هر یال آن مساوی ۱۰ است. اندازهٔ حجم این هرم را تعیین کنید.



۸ ــ فصل مشترک یک صفحه با یک کره، دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است. اگر فاصلهٔ مرکز کره از این صفحه برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ حجم کره را به دست آورید.



مسأله‌های ریاضی ۵

۱ ــ اگر $A=\{x|x\le 3\}$ ، $B=\{x|-4\le x\le 6\}$ ، $C=\{x|x\ge 1\}$ و $D=\{x|x\le 1\}$ باشد، فاصله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(A\cap C)\cup(B\cup D)$

ب) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$

۲ ــ اگر $f(x)=ax+b$ و $g(x)=x^2+2x+4$ باشد، مقدارهای a و b را چنان بیابید که $(fog)(x)+(gof)(x)=-6x+4$ باشد.

۳ ــ تابع $f(x)=\begin{cases}2x^3+ax\ , & x>1\\ bx+c\ , & x<1\\ \dfrac{ax+c}{bx+2}\ , & x=1\end{cases}$ مفروض است.

مقدارهای a، b و c را چنان تعیین کنید که $\lim_{x\to 1^+} f(x)=5$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$ و $f(1)=1$ باشد.

۴ ــ هر یک از حدهای زیر را تعیین کنید :

الف) $\lim_{x\to 7}\dfrac{x-2-\sqrt{2x+11}}{\sqrt{x+2}-3}$

ب) $\lim_{x\to \frac{-\pi}{8}}\dfrac{\sin(4x+\frac{\pi}{2})}{\frac{x}{2}+\frac{\pi}{16}}$

۵ ــ مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۶ ــ مشتق هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2)^2}{x+\sqrt{x}}$

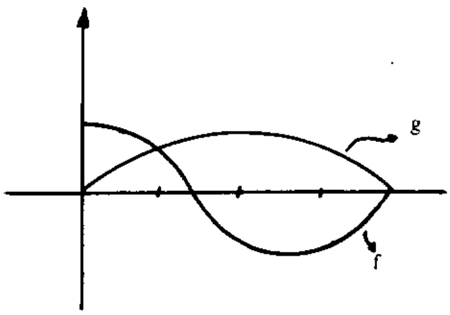
ب) $f(x)=\dfrac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}$

۷ ــ تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. ضریبهای a، b و c را چنان بیابید که نمودار تغییرات تابع محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند و در ازای $x=1$ دارای ماکزیمم یا می‌نیممی برابر ۴- باشد.

مسأله‌های حسابان ۱

مسأله (۱): تابع f با ضابطه $y=x-\sqrt{x-2}$ با شرط $x\ge 2$ مفروض است. برد تابع را به سه روش بیابید.

مسأله (۲): اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورتهای زیر باشد آن‌گاه نمودار تابعهای $f+g$ و $f-g$ را رسم کنید.



مسأله (۳): به دو روش معادله درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشه آن $(5-2\sqrt{3})$ باشد.

مسأله (۴) اگر $x \geq 0$ و $f(x)=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$ آن‌گاه معادله تابع معکوس f را بیابید.

مسأله (۵): در تابع به معادله $f(x)=4x-1$ اگر $x \longrightarrow 1$ آن‌گاه $f(x) \longrightarrow 3$، چنانچه $|f(x)-3|<\frac{1}{100}$، آن‌گاه x در چه حدودی تغییر می‌کند.

مسأله (۶): در تابع به معادله $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، $c \neq 0$ اگر $O'\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی تابع باشد و منحنی تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱-) قطع کند، معادله تابع را مشخص کنید. سپس نمودار تابع را رسم کنید و معادلات خط مماس و خط قائم بر منحنی تابع را در نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها بنویسید.

مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

مسأله (۱): اولاً ثابت کنید (n^2-2n) وقتی $n \to +\infty$، حد متناهی ندارد. ثانیاً ثابت کنید.

$$n \in N\left\{\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)=+\infty\right.$$

مسأله (۲): نشان دهید سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1-4k^2}$ همگرا است.

مسأله (۳): با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\left\{\lim_{n\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-4x+5}=1\right.$$

مسأله (۴): اگر $-\infty<t<\infty$ و

$$M\left|\begin{matrix}x=\frac{t-2}{t(t-1)}\\ y=\frac{t+2}{t(t+1)}\end{matrix}\right.$$

همه مجانبهای منحنی مکان نقطه M را بیابید.

مسأله (۵): تابع f به معادله $y=f(x)=x^3+x$ مفروض است. معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} (معکوسِ تابع f) را در نقطه‌ای به طول (۱۰) واقع بر منحنی تابع f^{-1} بنویسید.

مسأله (۶): فرض کنید هزینه چاپ x کارت ویزیت $C(x)=2000+1/2x+30\sqrt[3]{x^2}$ تومان باشد. هزینه متوسط و هزینه نهایی برای ۳۳۷۵ کارت ویزیت چقدر است؟

مسأله (۷): معادله $\sin x - tgx = 0$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟



روشِ اصلِ موضوعی در ریاضیات امروز گسترش و توفیق زیادی پیدا کرده است.

سرچشمهٔ این روش را باید در کشف هندسهٔ نااقلیدسی لُباچفسکی دانست.

این روش، در تماس و برخوردی که با دیگر اندیشه‌ها داشته است، نه تنها روشهای تازه‌ای را به وجود آورده است، بلکه ضمناً موجب پیدایش شاخه‌های تازه‌ای در اندیشهٔ فیزیکی و ریاضی شده است، یکی از نمونه‌های حاصل از این روش، فضای هیلبرتی است که در مکانیک کوانتایی مورد استفاده قرار گرفته است.

پیشرفت روش اصل موضوعی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد:

مرحلهٔ نخست از لُباچفسکی آغاز می‌شود و با کوششهای هیلبرت دربارهٔ اصل موضوعی کردن ریاضیات پایان می‌یابد و مرحلهٔ دوم از زمان هیلبرت تا امروز ادامه دارد. این مرحله عبارت است از تلفیق مضامین هندسی با آموزشی که همراه با آن تکامل یافته است و به منطق صوری یا منطق ریاضی مشهور شده است.

+ + +

*از کتاب: هندسه در گذشته و حال

حل مسایل برهان شماره ۲۰

حل مسایل امتحانی ریاضی (۱) پایان ترم

۱ـ $M=\{1,3,5,7,9,12\}$

الف) $\{1,3,5,7,9\}$ ب) $\{12\}$ ج) $\{3,9,12\}$

۲ـ الف) $A-\varnothing=A$ ب) $A-A=\varnothing$

۳ـ الف) $0/00005=5\times10^{-5}$

ب) $0/0007942=7/942\times10^{-4}$

۴ـ الف) $(14)^{2r+5}=14^{25}\Rightarrow$

$27+5=25\Rightarrow 2r=20\Rightarrow \boxed{r=10}$

ب) $x^{10}.x^{18}=x^{32+r}\Rightarrow$

$x^{28}=x^{32+r}\Rightarrow 28=32+r$

$\Rightarrow r=28-32=-4\Rightarrow \boxed{r=-4}$

۵ ـ الف) $(3x^2y^2)(-7xy)+(xy)(-5x^2y^2)$

$=-21x^3y^3-5x^3y^3$

$=-26x^3y^3$

ب)

$(x^2-3x+5)+(2x^2+5x-4)-(3x^2-2x-1)$

$=x^2-3x+5+2x^2+5x-4-3x^2+2x+1$

$=4x+2$

۶ـ $x=0/6\overline{54}\ ,\ 10x=6/\overline{54}\ ,$

$1000x=654/\overline{54}\ ;\ 1000x-10x=654-6$

$\Rightarrow 990x=648\Rightarrow x=\frac{648}{990}=\frac{324}{495}$

۷ـ الف) $9x^2-4ax+\frac{4a^2}{9}$

ب) $4x^2+4ax+a^2$

۸ ـ $x^4+3x^3-7x^2+2x+1=x^4-4x^2+2x+1$

$$\begin{array}{l|l} x^4-4x^2+2x+1 & x-1 \\ \underline{-x^4\mp x^3} & x^3+x^2-3x-1 \\ x^3-4x^2+2x+1 & \\ \underline{-x^3\mp x^2} & \\ -3x^2+2x+1 & \\ \underline{\mp3x^2\pm3x} & \\ -x+1 & \\ \underline{\mp x\pm1} & \\ 0 & \end{array}$$

۹ـ $x+y=p\ ,\ xy=q\ :$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$x^3+y^3=p^3-3qp$

۱۰ـ با فرض $c(a-c)(a+c)\neq0$ خواهیم داشت:

$$\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\frac{2c}{c^2-a^2}-\frac{3}{a+c}=$$

$$\frac{a(a+c)}{c(a-c)(a+c)}-\frac{(a-c)(a+c)}{c(a+c)^2}+$$

$$+\frac{2c}{(c-a)(c+a)}-\frac{3}{a+c}=$$

$$\overset{\text{(با توجه به فرض)}}{=\!=}\frac{a}{c(a-c)}-\frac{a-c}{c(a+c)}-$$

$$\frac{2c}{(a-c)(a+c)}-\frac{3}{a+c}$$

$$=\frac{a(a+c)-(a-c)^2-2c^2-3c(a-c)}{c(a-c)(a+c)}$$

$$=\frac{a^2+ac-a^2+2ac-c^2-2c^2-3ac+3c^2}{c(a-c)(a+c)}$$

$$=\frac{0}{c(a^2-c^2)}=0$$

۱۱ـ

الف)

$(a^n-b^3)(a^n+b^3)=(a^n)^2-(b^3)^2=a^{2n}-b^6$

ب) $(x^2y^3-2)^3=(x^2y^3)^3-6(x^2y^3)^2$

$+12(x^2y^3)-8$

$=x^6y^9-6x^4y^6+12x^2y^3-8$

۱۲ـ حاصل عبارت را به A نشان می‌دهیم:

$A=(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{6561})$

دو طرف برابری بالا را در $(1+\frac{1}{3})$ ضرب می کنیم:

$(1+\frac{1}{3})A=(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{6561})$

$\frac{4}{3}A=(1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{6561})$

$=(1-\frac{1}{81})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{6561})$

$=(1-\frac{1}{6561})(1+\frac{1}{6561})$

$=1-\frac{1}{(6561)^2}\Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{(6561)^2})}$

۱۳ـ الف) $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$

ب) $x^4y^2-x^2y^4=x^2y^2(x^2-y^2)$

$=x^2y^2(x-y)(x+y)$

۱۴ـ $\begin{cases}A=3x-6y+9z=3(x-2y+3z)\\ B=-x+y+2z\\ C=2x+3y-z\end{cases}$

$\frac{A}{3}+2B-C=\frac{3(x-2y+3z)}{3}$

$+2(-x+y+2z)-(2x+3y-z)$

$=x-2y+3z-2x+2y+4z-2x-3y+z$

$=-3x-3y+8z$

۱۵ـ با شرط $a>1$ و گویا بودن عدد a، خواهیم داشت:

$1<\frac{2a}{a+1}<a\Rightarrow\begin{cases}\frac{2a}{a+1}>1\\ \frac{2a}{a+1}<a\end{cases}\overset{(a>1)}{\Longrightarrow}$

$\begin{cases}2a>a+1\\ 2a<a^2+a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>1\\ a<a^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a>1\\ a^2-a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>1\\ a(a-1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>1\\ a>0\end{cases}\Rightarrow a>1$

(برقرار است)

حل مسایل امتحانی ریاضی (۲) پایان ترم

۱ـ $A(-1,2)\ ,\ B(3,4)\ ,\ C(x,0)$

$AC=\sqrt{(x+1)^2+4}\ ;\ AC^2=(x+1)^2+4$

$BC=\sqrt{(x-3)^2+16}\ ;\ BC^2=(x-3)^2+16$

با توجه به فرض $AC=BC$، خواهیم داشت:

$AC^2=BC^2$

$(x+1)^2+4=(x-3)^2+16$

$\Rightarrow x^2+2x+1+4=x^2-6x+9+16$

$\Rightarrow 8x=20 \Rightarrow x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{x=2/5}$

$\Rightarrow C(2/5,0)$

۲ـ اگر نقاط $A\begin{vmatrix}a+b\\3a-mb\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}ma-4b\\b-2a\end{vmatrix}$ نسبت به نقطهٔ $M\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ قرینهٔ یکدیگر باشند:

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow -1=\frac{a+b+ma-4b}{2}$

$\Rightarrow (1+m)a-3b=-2$

$y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow 1=\frac{3a-mb+b-2a}{2}$

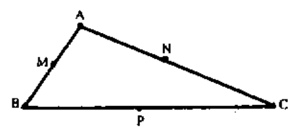
$\Rightarrow a-(m-1)b=2$

$\begin{cases}(m+1)a-3b=-2\\a-(m-1)b=2\end{cases} \quad \frac{m+1}{1}=\frac{-3}{-(m-1)} \Rightarrow m^2-1=3$

$\Rightarrow m^2=4 \Rightarrow \boxed{m=\pm 2}$

بنابراین به ازای $m=\pm 2$ دستگاه جواب ندارد و درنتیجه A و B نسبت به نقطهٔ M نمی‌توانند قرینهٔ یکدیگر باشند.

۳ـ نقاط $M\begin{vmatrix}-2\\2\end{vmatrix}$ ، $N\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ ، $P\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$ وسط ضلعهای مثلث ABC هستند، بنابراین:



$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=-2 \Rightarrow x_A+x_B=-4$

$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=2 \Rightarrow x_A+x_C=4$

$x_P=\frac{x_B+x_C}{2}=-1 \Rightarrow x_B+x_C=-2$

$\Rightarrow \begin{cases}x_A+x_B=-4\\x_A+x_C=4\\x_B+x_C=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_B-x_C=-8\\x_B+x_C=-2\end{cases} \Rightarrow 2x_B=-10$

$\Rightarrow x_B=-5\ ,\ x_C=3\ ,\ x_A=1$

به همین ترتیب:

$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2 \Rightarrow y_A+y_B=4$

$y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=-1 \Rightarrow y_A+y_C=-2$

$y_P=\frac{y_B+y_C}{2}=4 \Rightarrow y_B+y_C=8$

$\Rightarrow \begin{cases}y_A+y_B=4\\y_A+y_C=-2\\y_B+y_C=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_B-y_C=6\\y_B+y_C=8\end{cases} \Rightarrow 2y_B=14$

$\Rightarrow y_B=7\ ,\ y_C=1\ ,\ y_A=-3$

مختصات رأسهای مثلث ABC، عبارتند از:

$A(2,-3)\quad ,\quad B(-4,7)\quad ,\quad C(2,1)$

مختصات G مرکز ثقل مثلث ABC چنین است:

$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{2-4+2}{3}=0$

$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-3+7+1}{3}=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow G(0,\frac{5}{3})$

$AG=\sqrt{4+\frac{196}{9}}=\frac{\sqrt{232}}{3}=\frac{2\sqrt{58}}{3}$

$BG=\sqrt{16+\frac{256}{9}}=4\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{20}{3}$

$CG=\sqrt{4+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{40}}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

بنابراین مجموع فاصله‌های مرکز ثقل مثلث (محل تلاقی میانه‌ها) از رأسهای مثلث چنین است:

$AG+BG+CG=\frac{2\sqrt{58}+20+2\sqrt{10}}{3}$

۴ـ الف) ریشهٔ معادله‌ای که ریشه‌هایش ۵ واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ است را به y نشان می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$y=x-5 \Rightarrow x=y+5$

$x=y+5\ :\ (y+5)^2-3(y+5)-2=0$

$\Rightarrow y^2+10y+25-3y-15-2=0 \Rightarrow \boxed{y^2+7y+8=0}$

ب) $y=\frac{-1}{x} \Rightarrow x=-\frac{1}{y}$

$x=-\frac{1}{y}\ :\ (-\frac{1}{y})^2-3(-\frac{1}{y})-2=0$

$\Rightarrow \frac{1}{y^2}+\frac{3}{y}-2=0 \Rightarrow -2y^2+3y+1=0$

$\Rightarrow \boxed{2y^2-3y-1=0}$

ج) $y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

$x=\pm\sqrt{y}\ :\ (\pm\sqrt{y})^2-3(\pm\sqrt{y})-2=0$

$\Rightarrow \pm 3\sqrt{y}=y-2 \Rightarrow 9y=y^2-4y+4$

$\Rightarrow \boxed{y^2-13y+4=0}$

۵ـ الف) با شرایط زیر عبارت

$P(x)=-x^2-(m+1)x+m$

به ازای جمیع مقادیر x منفی است:

$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2+4m<0\\a=-1<0\end{cases} \Rightarrow m^2+2m+1+4m<0$

$\Rightarrow m^2+6m+1<0$

$\Rightarrow -3-\sqrt{8}<m<-3+\sqrt{8}$

$\Rightarrow \boxed{-3-2\sqrt{2}<m<-3+2\sqrt{2}}$

ب) معادلهٔ $P(x)=0$ با شرط $\Delta\geq 0$، دارای ریشهٔ حقیقی است:

$\Delta=(m+1)^2+4m\geq 0 \Rightarrow m^2+6m+1\geq 0$

$\Rightarrow \boxed{m\geq -3+2\sqrt{2}\ \text{یا}\ m\leq -3-2\sqrt{2}}$

۶ـ دو طرف معادلهٔ $x^2+x+1=0$ را در عبارت $(x-1)$ که مخالف صفر فرض می‌شود؛ ضرب می‌کنیم:

$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1$

بنابراین:

$x_1^3=1\quad ,\quad x_2^3=1$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$A=\frac{x_1}{x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\frac{x_2}{x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\sqrt{\frac{x_1^3}{x_2^3}}+\sqrt{\frac{x_2^3}{x_1^3}}$

$\Rightarrow A=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2 \Rightarrow \boxed{A=2}$

$B=x_1^{3n+2}+x_2^{3n+2}+\frac{1}{x_1^{3n+2}}+\frac{1}{x_2^{3n+2}}$

$=x_1^{3n}.x_1^2+x_2^{3n}.x_2^2+\frac{1}{x_1^{3n}.x_1^2}+\frac{1}{x_2^{3n}.x_2^2}$

$=(x_1^3)^n.x_1^2+(x_2^3)^n.x_2^2+\frac{1}{(x_1^3)^n.x_1^2}+\frac{1}{(x_2^3)^n.x_2^2}$

$=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

$=(x_1^2+x_2^2)+\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=(x_1+x_2)^2$

$-2x_1x_2+\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

با توجه به $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=1$، خواهیم داشت:

$B=-1+\frac{-1}{1}=-2 \Rightarrow \boxed{B=-2}$

۷ـ عبارت $P(x)$ وقتی به ازای مقادیر مختلف x، عدد حقیقی است که داشته باشیم:

$\begin{cases}\frac{x^2-4}{x(x^2-1)}\geq 0\\ \frac{x^2+1}{-x^3}\geq 0\end{cases} \Rightarrow -2\leq x<-1$

۸ـ می‌دانیم محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ خط $x=\frac{-b}{2a}$ است. بنابراین:

$x=\frac{-P^{75}}{4}=\frac{1}{2^{76}} \Rightarrow P^{75}=-\frac{2}{2^{75}}$

$\Rightarrow \boxed{P=-\frac{\sqrt[75]{2}}{2}}$

۹ـ با توجه به برابریهای زیر:

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[4]{4}=\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[12]{64}=\sqrt{2}$

خواهیم داشت:

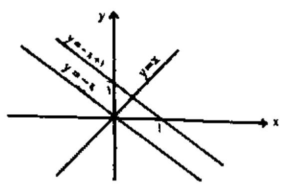
$\frac{1}{3\sqrt{8}+2\sqrt[4]{4}+2\sqrt[12]{64}+\sqrt[3]{2}-11\sqrt{2}}=$

$\frac{1}{6\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}-11\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-2}\times\frac{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}$

$=\frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})(2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}+4)}{-4}$

۱۰ـ الف) نمودار معادلهٔ $(x^2-y^2)(x+y-1)=0$ چنین است:



$x^2-y^2=0 \Rightarrow y=\pm x$

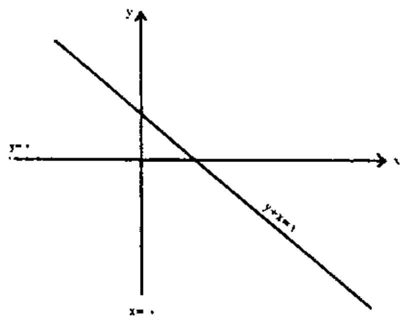
یا

$x+y-1=0 \Rightarrow y=-x+1$

ب) نمودار معادلهٔ $x^2y^2+x^3y-x^2y=0$ چنین است:

$x^2y(y+x-1)=0 \Rightarrow x^2=0$ یا $y=0$ یا $y+x-1=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $y=0$ یا $y+x=1$



۱۱ـ الف) $(\sin x+\cos x)(\tan x+\cot x)=$ طرف اول

$=(\sin x+\cos x)(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})$

$=(\sin x+\cos x)(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x})$

$=(\sin x+\cos x)(\frac{1}{\cos x\sin x})$

$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$

$=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=$ طرف دوم

ب) با توجه به برابریهای زیر:

$\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)=$

$\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$

$\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^\circ)=$

$\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cot 225^\circ=\cot(180^\circ+45^\circ)=\cot(45^\circ)=1$

$\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 450^\circ=\cos(360^\circ+90^\circ)=\cos 90^\circ=0$

$\cot 135^\circ=\cot(180^\circ-45^\circ)=$

$\cot(-45^\circ)=-\cot 45^\circ=-1$

$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

خواهیم داشت:

$$\frac{4\tan 135^\circ+2\sin 330^\circ+\cos 240^\circ+5\cot 225^\circ}{20\sin 210^\circ+\cos 450^\circ-\cot 135^\circ+10\tan 225^\circ}$$

$$=\frac{4(-1)+2(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})+5}{20(-\frac{1}{2})+0-(-1)+10}=\frac{-4-1-\frac{1}{2}+5}{-10+1+10}=-\frac{1}{2}$$

۱۲ـ با استفاده از اتحاد $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، می‌توان نوشت:

$\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (x\neq k\pi)$

بنابراین:

$(\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}+3(\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-3}$

$\Rightarrow 4(\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-3}$

$\Rightarrow (\frac{1+\cos x}{\sin x})^{2n-1}=(\frac{1}{2})^{2n-1}$

$\Rightarrow \frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos x=\frac{1}{2}\sin x-1}$

۱۳ـ با استفاده از اتحاد $\sin^2 x+\cos^2 x=1$، خواهیم داشت:

$x=2\sin t-1 \Rightarrow (\frac{x+1}{2})^2=\sin^2 t$

و

$y=4\cos^2 t+1 \Rightarrow \frac{y-1}{4}=\cos^2 t$

$\sin^2 t+\cos^2 t=(\frac{x+1}{2})^2+\frac{y-1}{4}=1$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y-1}{4}=1 \Rightarrow \boxed{y=5-(x+1)^2}$

۱۴ـ سه عدد متوالی را به‌صورت $x+1$ ، x ، $x-1$، درنظر می‌گیریم. بنابراین:

$(x-1)x(x+1)=5(x-1+x+x+1)$

$x(x^2-1)=5(3x) \Rightarrow x(x^2-1)-15x=0$

$\Rightarrow x(x^2-1-15)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x^2=16$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\boxed{x=\pm 4}$

مسأله دارای سه جواب است:

$(-1,0,1)$ یا $(3,4,5),(-5,-4,-3)$

۱۵ـ اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ اول یا چهارم باشد tanx و cotx هردو مثبت هستند. از طرفی برای هر دو عدد مثبت a و b همیشه داریم:

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

بنابراین با فرض $a=\tan x$ و $b=\cot x$ می‌توان نوشت:

$\frac{\tan x+\cot x}{2}\geq\sqrt{\tan x.\cot x}$

با توجه به اتحاد $\tan x.\cot x=1$، خواهیم داشت:

و درنتیجه: $\frac{\tan x+\cot x}{2}\geq\sqrt{1}$

$\tan x+\cot x\geq 2$

حل مسایل امتحانی ریاضی (۳) پایان ترم

۱ـ اگر M وسط AB باشد:

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2\beta+\beta+3}{2}=\frac{3\beta+3}{2}$

$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\beta+\beta-4}{2}=\frac{2\beta-4}{2}=\beta-2$

چون M روی خط $y=5$ است، پس:

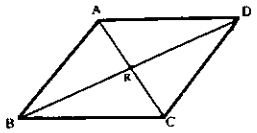
$y_M=\beta-2=5 \Rightarrow \boxed{\beta=7}$:

درنتیجه:

$A(14,7)$ ، $B(10,3)$

$M(12,5)$

۲ـ با توجه به شکل: $A(2,1)$ ، $B(-2,-1)$ ، $C(-1,-1)$ می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} x_R=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2} \\ y_R=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-1=-2+x_D \\ 1-1=-1+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D=3 \Rightarrow D(3,1) \\ y_D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_R=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2} \\ y_R=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1-1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow R(\frac{1}{2},0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=0 \end{cases}$$

$X_B=x_B-\alpha=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$,

$Y_B=y_B-\beta=-1-0=-1$

مختصات B در دستگاه جدید: $B(-\frac{5}{2},-1)$

۳ـ

$\frac{2y}{x+y}-\frac{(x+y)}{(x-y)}+\frac{2x}{x^2-y^2}=3$

$\frac{2y(x-y)-(x+y)^2+2x}{(x+y)(x-y)}=3$

$\Rightarrow \frac{2xy-2y^2-x^2-y^2-2xy+2x}{x^2-y^2}=3$

$\Rightarrow \frac{2x-3y^2-x^2}{x^2-y^2}=3$

$\Rightarrow 2x-3y^2-x^2=3x^2-3y^2$

$\Rightarrow 4x^2-2x=0 \Rightarrow 2x(2x-1)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ یا

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

۴ـ الف)

$\sqrt{3}(\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{3})=\sqrt{6}-3\sqrt{15}+2\sqrt{9}$

$=\sqrt{6}-3\sqrt{15}+6$

ب)

$\sqrt{75}+\sqrt{48}+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}$

$=5\sqrt{3}+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}+8\sqrt{2}$

$=9\sqrt{3}+12\sqrt{2}$

ج)

$\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۵ـ

$$(a-3)^2=(a-3)+4 \Rightarrow a^2-6a+9=a+1$$

$$\Rightarrow a^2-7a+8=0 \Rightarrow a_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2} ;$$

$$a_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

۶ـ

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}-6-6\sqrt{10}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-20}$$

$$=\frac{6\sqrt{10}+6-3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}+15} \times \frac{2\sqrt{6}-15}{2\sqrt{6}-15}$$

$$=\frac{(6\sqrt{10}+6-3\sqrt{6})(2\sqrt{6}-15)}{24-225}$$

$$=\frac{(15-2\sqrt{6})(6\sqrt{10}+6-3\sqrt{6})}{201}$$

۷

$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=x+\Delta x \end{cases} \Rightarrow x_2-x_1=\Delta x$$

$$\begin{cases} y_1=2x^2-3 \\ y_2=2(x+\Delta x)^2-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_2-y_1=2(x+\Delta x)^2-2x^2=\Delta y$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\left[x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2\right]-2x^2}{\Delta x}$$

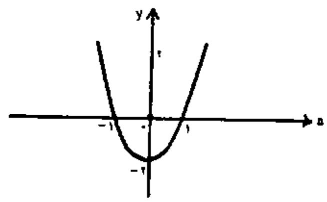
$$=\frac{\Delta x(4x+2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+2\Delta x}$$

۸ـ

$$y=4x^2-2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$	2	-2	2	14	$+\infty$



۹ـ

$$y=[3x+1]=[3x]+1 \ , \ x\in[-1,2]$$

$-1\le x<-\frac{2}{3}$: $-3\le 3x<-2 \Rightarrow y=-3+1=-2$

$-\frac{2}{3}\le x<-\frac{1}{3}$: $-2\le 3x<-1 \Rightarrow y=-2+1=-1$

$-\frac{1}{3}\le x\le 0$: $-1\le 3x<0 \Rightarrow y=-1+1=0$

$0\le x<\frac{1}{3}$: $0\le 3x<1 \Rightarrow y=0+1=1$

$\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}$: $1\le 3x<2 \Rightarrow y=1+1=2$

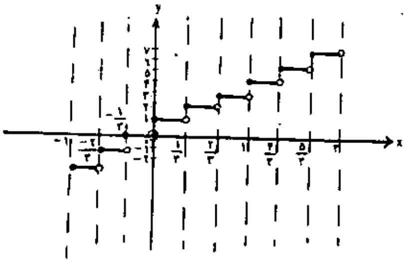
$\frac{2}{3}\le x<1$: $2\le 3x<3 \Rightarrow y=2+1=3$

$1\le x<\frac{4}{3}$: $3\le 3x<4 \Rightarrow y=3+1=4$

$\frac{4}{3}\le x<\frac{5}{3}$: $4\le 3x<5 \Rightarrow y=4+1=5$

$\frac{5}{3}\le x<2$: $5\le 3x<6 \Rightarrow y=5+1=6$

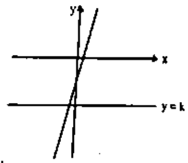
$x=2$: $y=7$



۱۰ـ

$$f(x)=4x-1$$

x	-1	0	1
f(x)	-5	-1	3



همیشه خط $y=k$ ، نمودار تابع f را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین f یک به یک است.

$$f(2)=4(2)-1=8-1=7 \ , \ g(f(2))=g(7)=\sqrt{7^2-4}$$

$$\Rightarrow g(7)=\sqrt{45} \Rightarrow \boxed{g(f(2))=\sqrt{45}}$$

۱۱ـ

$$2\log_2\sqrt{8}-4\log_3^{81}+\log_5^{25}=2\log_2^{2^3}-4\log_3^{3^4}+\log_5^{5^2}$$

$$=6\log_2^2-16\log_3^3+2\log_5^5$$

$$=6-16+2=-8$$

۱۲ـ

$$\log 2=a \ , \ \log 3=b$$

$$\log 12=\log 4\times 3=\log 2^2+\log 3$$

$$=2\log 2+\log 3=2a+b$$

۱۳ـ

$$a_1=m \ , \ a_5=3a_3$$

$$a_1+4d=3(a_1+2d) \Rightarrow 2a_1+2d=0 \Rightarrow d=-a_1$$

$$\Rightarrow \boxed{d=-m}$$

۱۴ـ

$$a_2=6 \Rightarrow a_1q=6 \quad (1)$$

$$a_8=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1q^7=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2q^{14}=\frac{1}{4} \quad (2)$$

از تقسیم رابطه‌های (۲) و (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{a_1^2q^{14}}{a_1q}=\frac{\frac{1}{4}}{6}=\frac{1}{24} \Rightarrow a_1q^{13}=\frac{1}{24} \Rightarrow \boxed{a_{14}=\frac{1}{24}}$$

حل مسایل امتحانی ریاضی (۴) پایان ترم

۱ـ الف) مُد = ۸، میانه = ۸، $9=\frac{81}{9}=\bar{x}$ = میانگین

x_i	f_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
۷	۲	-2	۴	۸
۸	۳	-1	۱	۳
۹	۱	۰	۰	۰
۱۱	۲	۲	۴	۸
۱۲	۱	۳	۹	۹

$$S=\sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{28}{9}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

۲ـ

$$\begin{cases} \Delta'=4^2-(m+1)^2<0 \\ a=m+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta'=16-(m+1)^2<0 \\ m<-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)^2>16 \\ m<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>3 \text{ یا } m<-5 \\ m<-1 \end{cases} \Rightarrow \ m<-1$$

بنابراین نامعادلهٔ $(m+1)x^2-8x+(m+1)<0$ به‌ازای $m<-1$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار است.

۳ـ

$$P=\frac{5x^2+4x+1}{(5-x)(-x-x^2+6)}<0$$

x	$-\infty$ … -3	-3 … 2	2 … 5	5 … $+\infty$
$5-x$	+	+	+	−
$5x^2+4x+1$	+	+	+	+
$-x^2-x+6$	−	+	−	−
$P<0$	− جواب	+	− جواب	+

$\{x \mid x<-3 \lor 2<x<5\}$ = مجموعهٔ جواب

۴ـ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{-1}{2} \ , \ \tan\alpha=3 :$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3+\tan\beta}{1-3\tan\beta}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\tan\beta=7}$$

۵ـ

$$\vec{OC}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} , \ \vec{OB}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} , \ \vec{OA}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{AX}=\vec{XB}+2\vec{AC} \Rightarrow$$

$$\vec{OX}-\vec{OA}=\vec{OB}-\vec{OX}+2(\vec{OC}-\vec{OA}) \Rightarrow$$

$$\vec{OX}+\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{OB}+2\vec{OC}-2\vec{OA} \Rightarrow$$

$$2\vec{OX}=\vec{OB}+2\vec{OC}-\vec{OA}$$

$$\Rightarrow 2\vec{OX}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-4+3\\-2+8-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OX}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{OX}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{bmatrix}}$$

۶ـ

$$\vec{u}=[2 \ \ -4] \ , \ \vec{v}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$$

یا $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j} \ , \ \vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$

$$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{i}-2\vec{j}=5\vec{i}-6\vec{j}$$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{5^2+(-6)^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$$

(طول بردار $\vec{u}+\vec{v}$)

$$\vec{u}.\vec{v}=[2 \ \ -4]\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=[6+8]=14$$

۷ـ

$$\begin{cases} mx-y=6 \\ -4x+my=2 \end{cases} \quad \frac{m}{-4}=\frac{-1}{m} \Rightarrow$$

$m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \pm 2}$

۸ ــ $f(x) = x^2 - x \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$f(A) = A^2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I_{2\times 2} \Rightarrow \boxed{f(A) = -2I_{2\times 2}}$

۹ ــ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \ , \ A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

$(A.B)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \ , \ B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1}.A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{9}{10} - \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\ -\frac{6}{10} - \frac{2}{5} & \frac{2}{10} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

بنابراین :

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

۱۰ــ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

الف) $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ (تعداد عددهای چهار رقمی طبیعی)

ب) $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ (تعداد عددهای چهار رقمی طبیعی با ارقام مختلف)

ج) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ (تعداد عددهای چهار رقمی طبیعی که همهٔ ارقام آنها فرد باشد.)

۱۱ــ الف) $C(11,2) = \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{11!}{2!9!} = 55$

$C(6,2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

(احتمال این که هردو مهره سیاه باشد) $\Rightarrow P$ (هردو سیاه) $= \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$

ب) $C(6,1) = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6$,

$C(5,1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$

$C(11,2) = \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{11!}{2!\ 9!} = 55$

(احتمال این که یک مهره سیاه و یک مهره سفید باشد) $\Rightarrow P$ (یکی سفید و یکی سیاه) $= \frac{6 \times 5}{55} = \frac{6}{11}$

حل مسأله‌های هندسهٔ ۱

نظام جدید آموزشی

● محمدهاشم رستمی

۱ ــ با توجه به ویژگی خطهای موازی و موربها داریم :

$x + 18^\circ = 48^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$,

$x + y = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 150^\circ$

۲ ــ هر زاویه از مثلث متساوی‌الاضلاع برابر 60° است. از آن‌جا :

$B\hat{A}E = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ \Rightarrow x + 60^\circ + 20^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow x = 100^\circ$

$y + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow y = 30^\circ$

۳ ــ ضلعهای متناظر متساوی $AB = AE$ و $BC = DE$ می‌باشند. پس :

$5y - 3 = 4y + 5 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow AB = AE = 37$

$5x = x + 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow BC = DE = 10$

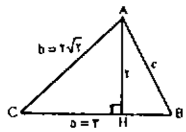
$\Rightarrow BE = 10 + 27 + 10 = 47$

محیط مثلث ABE $= AB + BE + EA = 37 + 47 + 37 = 121$

۴ ــ الف ــ با توجه به این که $S = \frac{1}{2}a.h_a$ است، خواهیم داشت :

$x^2 - 13 = \frac{1}{2}(x-1)(2x-6) \Rightarrow x^2 - 13 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow a = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h_a = 2$



ب ــ

$\Delta ACH: b^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = 4 + CH^2$

$\Rightarrow CH = 2 \Rightarrow BH = 1 \quad , \quad \Delta AHB:$

$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$

$\Rightarrow C = \sqrt{5}$

$a.h_a = b.h_b = c.h_c$

$3 \times 2 = 2\sqrt{2} \times h_b = \sqrt{5} \times h_c \Rightarrow h_b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

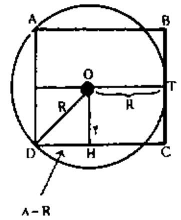
$h_c = \frac{6\sqrt{5}}{5}$,

۵ ــ حل از آنوشا علی اکبری از تهران. از نقطهٔ O مرکز دایره به نقطهٔ T، نقطهٔ تماس BC با دایره، همچنین به نقطهٔ D وصل می‌کنیم و عمود OH را بر CD فرود می‌آوریم. با فرض این که شعاع دایره R باشد، داریم :

$OH = TC = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad OD = R$,

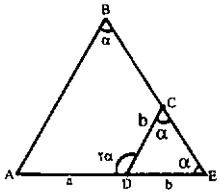
$DH = DC - HC = 8 - R$

$\Delta ODH: OD^2 = OH^2 + DH^2$



شعاع دایره $\Rightarrow R^2 = 16 + (8 - R)^2 \Rightarrow R = 5$

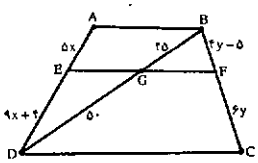
۶ ــ حل از دانش‌آموز سروری از نیشابور. نقطهٔ برخورد امتدادهای BC و AD را E می‌نامیم.



فرض می‌کنیم $\hat{B} = \alpha$ باشد. در این صورت $\hat{D} = 2\alpha$ است. به دلیل موازی بودن DC با AB داریم $D\hat{C}E = \alpha$. از طرفی زاویهٔ ADC زاویهٔ خارجی مثلث DCE است. پس : $A\hat{D}C = D\hat{C}E + C\hat{E}D$ از آن جا، $2\alpha = \alpha + C\hat{E}D$ پس $C\hat{E}D = \alpha$ ؛ درنتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین و $DC = DE = b$ است. حال بنا به قضیهٔ تالس داریم :

$\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{b}{b+a} = \frac{b}{AB} \Rightarrow AB = b + a$

۷ ــ در مثلثهای ABD و BDC با توجه به قضیه تالس داریم :



$\frac{5x}{9x+4} = \frac{25}{50} \Rightarrow \frac{5x}{9x+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$

$AE = 20 \ , \ ED = 36 + 4 = 40 \Rightarrow AD = 20 + 40 = 60$

$\frac{4y-5}{6y} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow$

$BF = 15 \ , \ FC = 30 \Rightarrow BC = 15 + 30 = 45$

۸ ــ الف ــ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACC' و ABB' در زاویهٔ حادهٔ $\hat{A}$ مشترکند. پس متشابه‌اند. از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود :

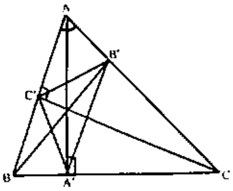
$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

از آن‌جا داریم :

$AB.AC' = AC.AB'$

ب ــ زاویهٔ A در دو مثلث ABC و $AB'C'$ مشترک است و رابطهٔ $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ نیز برقرار است. بنابراین دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه می‌باشند.

پ ــ اگر ارتفاع سوم مثلث را AA' بنامیم. مثلثهای.



BC′A′ و CA′B′ نیز با مثلث ABC متشابه‌اند.

۹ ــ با فرض $k=\frac{c}{۴}=\frac{b}{۳}=\frac{a}{۲}$ داریم:

$$a=۲k \ ,\ b=۳k \ ,\ c=۴k$$

$$V=a.b.c \Rightarrow ۶۴۸=(۲k)(۳k)(۴k)=۲۴k^۳ \Rightarrow$$

$$k^۳=۲۷ \Rightarrow k=۳ \Rightarrow a=۶ \ ,\ b=۹ \ ,\ c=۱۲$$

$$d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}=\sqrt{۳۶+۸۱+۱۴۴}=\sqrt{۲۶۱}$$

کل $S=۲(a+b)c+۲ab=۲(۶+۹)۱۲+۲(۶\times۹)=۴۶۸$

۱ ــ اندازهٔ ضلع شش ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R برابر R است. پس $a=c_۶=۸cm$ است. از طرفی مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با $\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$، پس $S=\frac{۳\times۶۴\sqrt{۳}}{۲}=۹۶\sqrt{۳}$ قاعدهٔ منشور. از آن‌جا:

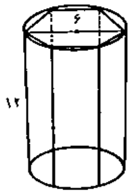
حجم منشور = سطح قاعده × ارتفاع $=۹۶\sqrt{۳}\times۱۲=۱۱۵۲\sqrt{۳}$

سطح جانبی منشور = محیط قاعده × ارتفاع $=۶\times۸\times۱۲=۵۷۶$

سطح جانبی استوانه = محیط قاعده × ارتفاع

$=۲\pi R\times h=۲\pi\times۸\times۱۲=۱۹۲\pi$

$$\frac{\text{سطح جانبی منشور}}{\text{سطح جانبی استوانه}}=\frac{۵۷۶}{۱۹۲\pi}=\frac{۳}{\pi}$$

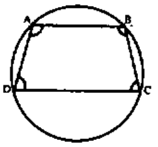


حل مسأله‌های هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی

۱ ــ نخست ثابت می‌کنیم:

قضیه ــ اگر ذوزنقه‌ای متساوی الساقین باشد، آن ذوزنقه محاطی است.

اثبات ــ ذوزنقه متساوی الساقین ABCD را در نظر می‌گیریم.



داریم: $\hat{A}=\hat{B}$ و $\hat{C}=\hat{D}$

از طرفی $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰°$

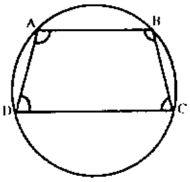
از آن‌جا خواهیم داشت: $\hat{A}+\hat{A}+\hat{C}+\hat{C}=۳۶۰°$

$\Rightarrow ۲\hat{A}+۲\hat{C}=۳۶۰° \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰°$

درنتیجه، ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، محاطی است.

حال ثابت می‌کنیم:

عکس قضیه ــ اگر ذوزنقه‌ای محاطی باشد، آن ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



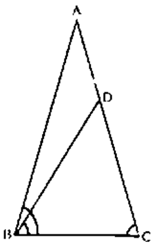
اثبات ــ ذوزنقه محاطی ABCD را در نظر می‌گیریم. به دلیل موازی بودن AB و CD کمانهای $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ برابرند. پس خواهیم داشت:

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{۲} \ ,\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

درنتیجه $\hat{A}=\hat{B}$ است و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\hat{C}=\hat{D}$ است.

یعنی ذوزنقه محاطی ABCD متساوی‌الساقین است.

۲ ــ در مثلث BDC، $\hat{C}>D\hat{B}C$ است. زیرا به دلیل آن که نقطه D بین دو نقطهٔ A و C است، پاره‌خط BD داخل زاویهٔ ABC و بنابر این $A\hat{B}C>D\hat{B}C$ است. امّا به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، $A\hat{B}C=\hat{C}$ است. پس $\hat{C}>D\hat{B}C$: درنتیجه $BD>DC$ است. (زیرا در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچکتر).



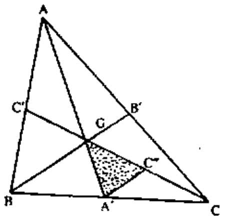
۳ ــ شرط نخست امکان مسأله آن است که $\begin{cases}۴-m>۰\\ ۲m-۳>۰\end{cases}$، یعنی $\frac{۳}{۲}<m<۴$ باشد. امّا شرط آن که سه مقدار a و b و c ضلعهای یک مثلث باشند، آن است که $|b-c|<a<b+c$ باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|(۲m-۳)-(۴-m)|<۳<(۲m-۳)+(۴-m)$$

$$\Rightarrow |۳m-۷|<۳<m+۱$$

در نتیجه حدود m عبارت است از: $۲<m<\frac{۱۰}{۳}$.

۴ ــ فرض می‌کنیم مثلث رسم شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. میانه‌های AA′ و BB′ و CC′ از این مثلث را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. از نقطهٔ A′ به نقطهٔ C″ وسط پاره‌خط GC وصل می‌کنیم: در مثلث BCG

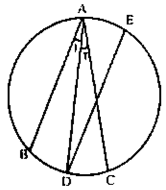


پاره‌خط A′C″ موازی BG و مساوی نصف آن است، زیرا وسطهای دو ضلع از این مثلث را به هم وصل کرده است. پس

$$A'C''=\frac{BG}{۲}=\frac{\frac{۲}{۳}m_b}{۲}=\frac{۱}{۳}m_b$$

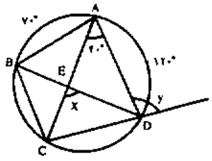
از طرفی $GA'=\frac{۱}{۳}m_a$ و $GC''=\frac{۱}{۲}GC=\frac{۱}{۳}m_c$ است. بنابراین سه ضلع مثلث GA′C″ معلوم است و این مثلث به دلیل معلوم بودن اندازهٔ سه ضلعش قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC ابتدا مثلث GA′C″ را رسم می‌کنیم. سپس A′G را به اندازهٔ دو برابر خود امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ A به‌دست آید. GC″ را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ C به‌دست آید. از C به A′ وصل کرده CA′ را به اندازهٔ خود ادامه می‌دهیم، تا نقطه B حاصل شود. از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC رسم می‌شود.

۵ ــ از برابری دو زاویه $A_۱$ و $A_۲$ داریم $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$. و از



موازی بودن DE و AB نتیجه می‌شود $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AE}$. در نتیجه داریم $\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{EC}$ و یا $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AC}$. پس DE = AC است.

۶ ــ داریم:

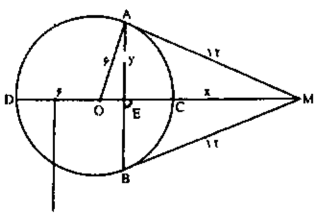


$$C\hat{A}D=۴۰° \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۸۰°$$

$$C\hat{E}D=x=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{۷۰°+۸۰°}{۲}۷۵°$$

$$y=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{۱۲۰°+۸۰°}{۲}=۱۰۰°$$

۷ ــ می‌دانیم که MO عمودمنصف AB است. یعنی AE = EB = y است. از طرفی داریم:



$$MC=x \quad , \quad MD=x+۱۲$$

$$MB^۲=MA^۲=MC.MD \Rightarrow$$

$$۱۴۴=x(x+۱۲) \Rightarrow x^۲+۱۲x-۱۴۴=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۶\pm\sqrt{۱۸۰}}{۲}=\frac{-۶\pm۶\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow MC=x=۳(\sqrt{۵}-۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم :

$$OM.AE = OA.AM \Rightarrow (۳\sqrt{۵} - ۳ + ۶) \times y = ۶ \times ۱۲$$

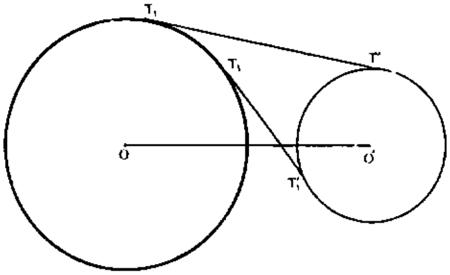
$$y = \frac{۷۲}{۳(\sqrt{۵}+۱)} = \frac{۲۴(\sqrt{۵}-۱)}{۴} = ۶(\sqrt{۵}-۱)$$

۸ ــ اگر TT' یک مماس مشترک برونی دو دایره باشد،

داریم :

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow$$

$$TT' = \sqrt{۱۰۰ - (۵ - ۳)^۲} = \sqrt{۹۶} = ۴\sqrt{۶}$$



و در صورتی که $T_۱T'_۱$ یک مماس مشترک درونی دو دایره باشد

داریم :

$$T_۱T'_۱ = \sqrt{۱۰^۲ - (۵ + ۳)^۲} = ۶$$

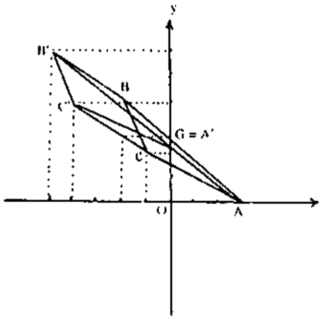
از آن‌جا نسبت خواسته شده برابر است با :

$$\frac{T_۱T'_۱}{TT'} = \frac{۶}{۴\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۴}$$

۹ ــ الف) با استفاده از ویژگی محل برخورد میانه‌های مثلث (مرکز ثقل مثلث) داریم :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} = \frac{۳ + (-۲) + (-۱)}{۳} = ۰ \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳} = \frac{۰ + ۴ + ۲}{۳} = ۲ \end{cases} \Rightarrow G(۰,۲)$$

ب) مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث را مشخص می‌سازیم. از A به G وصل می‌کنیم و از نقطه‌های B و C بردارهای $\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CC'}$ را مساوی بردار $\overrightarrow{AG}$ رسم



می‌کنیم. مثلث $GB'C'$ انتقال یافته مثلث ABC به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AG}$ است. واضح است که نقطهٔ A' بر نقطهٔ G منطبق است.

پ) با توجه به این که تصویر نقطهٔ $A = (۳,۰)$، نقطهٔ $G = (۰,۲)$ است. پس اگر قانون انتقال را $T(x,y) = (x + h, y + k)$ در نظر بگیریم داریم :

$$h = ۰ - ۳ = -۳ \quad , \quad k = ۲ - ۰ = ۲$$

بنابراین قاعدهٔ این نگاشت، که یک انتقال است $T(x,y) = (x - ۳ \; , \; y + ۲)$ است.

ت)

$$A(۳,۰) \Rightarrow A' = G = (۰,۲)$$

$$B = (-۲,۴) \Rightarrow B' = (-۲ - ۳ \; , \; ۴ + ۲) \Rightarrow B' = (-۵,+۶)$$

$$C = (-۱,۲) \Rightarrow C' = (-۱ - ۳ \; , \; ۲ + ۲) \Rightarrow C' = (-۴,۴)$$

۱۰ ــ دو نقطهٔ اختیاری از خط D را در نظر گرفته تبدیل یافته‌های آنها را تحت تبدیل $T(x,y) = (۲x - ۱, y + ۲)$ به‌دست می‌آوریم.

$$P \in D, x_P = ۰ \Rightarrow y_P = ۳ \Rightarrow P = (۰,۳) \Rightarrow P' = (-۱,۵)$$

$$Q \in D, x_Q = ۱ \Rightarrow y_Q = ۱ \Rightarrow Q = (۱,۱) \Rightarrow Q' = (۱,۳)$$

حال اگر $M = (x,y)$ نقطه‌ای از خط D' باشد، با توجه به این که شیب MP' و $P'Q'$ با هم برابر است، داریم :

$$\text{شیب } MP' = \frac{y - ۵}{x + ۱} \; ,$$

$$\text{شیب } P'Q' = \frac{۵ - ۳}{-۱ - ۱} = -۱ \Rightarrow \frac{y - ۵}{x + ۱} = -۱$$

$$\Rightarrow y - ۵ = -x - ۱ \Rightarrow D' : x + y - ۴ = ۰ \quad \text{معادلهٔ خط } D'$$

$$A \in D \; , \; x_A = ۲ \Rightarrow ۴ + y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = -۱$$

$$\Rightarrow A = (۲,-۱)$$

$$\Rightarrow A' = (۳,۱)$$

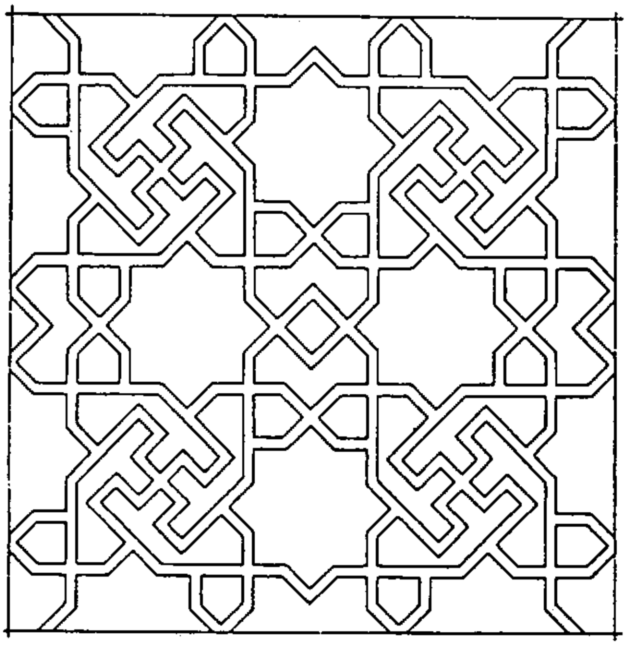
$$B \in D \; , \; y_B = ۵ \Rightarrow ۲x + ۵ - ۳ = ۰ \Rightarrow x_B = -۱$$

$$\Rightarrow B = (-۱,۵) \Rightarrow B' = (-۳,۷)$$

$$AB = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (-۱-۵)^۲} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

$$A'B' = \sqrt{(۳+۳)^۲ + (۱-۷)^۲} = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$$

چون $AB \neq A'B'$ است. پس تبدیل بالا یک ایزومتری نیست.



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

سطح کل مطلوب را می‌توان در صورتی که بدانیم مجموع مربعات n عدد طبیعی اولیه

$$S=\frac{n+3n^2+2n^3}{6}$$

است به سرعت محاسبه کرد. دراین حالت سطح کل 6S است، زیرا هر جعبه ۶ وجه دارد، و در آن n برابر ۱۰۰ است.

سطح $=100+3(100)^2+2(100)^3=2{,}030{,}100$ اینچ مربع

کل حجم جعبه‌ها مجموع مکعبات اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ است. در اتحاد

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$$

محاسبهٔ عبارت سمت راست، به عنوان تصاعدی حسابی، به ازای $n=100$، کاری آسان است.

حجم $=(\frac{1+100}{2}\times 100)^2=25{,}502{,}500$ اینچ مکعب

اثبات مجاور اثبات ظریفی از این اتحاد منسوب به **فیبوناتچی** است. اثبات مزبور از مثلثهای شمارهٔ فرد نشان داده شده در چپ استفاده می‌کند.

```
            ۱
         ۳    ۵
      ۷    ۹    ۱۱
  ۱۳   ۱۵   ۱۷   ۱۹
  .               .
  .               .
  M    ···    L    n/s
```

توجه داشته باشید که تعداد جمله‌های واقع در هر سطر برابر آن شمارهٔ سطر است. تعداد کل جمله‌های واقع در مثلث تا هر سطر، n، مجموع

$$S=1+2+3+\dots+n$$

است که $\frac{(1+n)n}{2}$ می‌باشد. آخرین جملهٔ سطر nام، L، برابر $2s-1$ است؛ و اولین جملهٔ آن، M، برابر $L-2(n-1)$.
مجموع عددهای واقع در هر سطر، n، عبارت است از

$$\frac{(M+L)n}{2}=\frac{(2L-2n+2)}{2}=(2S-n)n=n^3$$

بنابراین، مجموع

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$

مجموع اعداد واقع در سطرهای ۱ تا n است ــ یعنی، مجموع جمیع عددهای واقع در مثلث است. عددها به تصاعد حسابی‌اند و مجموعشان عبارت است از

$$\frac{(1+L)S}{2}=S^2=(1+2+3+\dots+n)^2$$

که همان است که می‌خواستیم.

اتحاد به کار رفته در محاسبهٔ سطح کل جعبه‌ها، یعنی

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n+3n^2+2n^3}{6}$$

را می‌توان با استفاده از تعداد مثلثهای نشان داده شده در زیر به اثبات رساند. این مثلث را در هند باستان می‌شناختند. در صورت تمایل به آن بپردازید.

```
        ۱
      ۲  ۲
    ۳  ۳  ۳
  ...........
  n.........n
```

پاسخ ۲:

رفعتی به خودش کلک زده است. البته، راست است که علی‌آبادی قطعاً بازی را آغاز نمی‌کند و شانس بین او و پهلوان تقسیم می‌شود، اما، از آن‌جا که وی نمی‌داند چرا علی‌آبادی آغاز نمی‌کند، این اطلاع نمی‌تواند برشانسش تأثیر بگذارد، و آن همان ــ ۱ به ۳ــ باقی می‌ماند درحالی که احتمال انتخاب پهلوان ۲ به ۳ افزایش می‌یابد.

به بررسی احتمالهای این مطالب که چرا مربی گفت «علی‌آبادی بازی را آغاز نمی‌کند» می‌پردازیم.

الف) به علت این‌که پهلوان بازی را آغاز می‌کند: $\frac{1}{3}$

ب) به علت این که رفعتی بازی را آغاز می‌کند: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ (سکه خط می‌آید) $=\frac{1}{6}$

محاسبه مشخص می‌کند که احتمال آغازکردن وی نصف احتمال آغازکردن پهلوان است.

پاسخ ۳:

آنها در مجموع ۳۰۰ کیلومتر پیموده‌اند «حمل مسافر براساس کیلومتر چیزی است که متخصصان حمل و نقل آن را مسافر کیلومتر می‌نامند».

در اینجا هر مسافرکیلومتر ۸ = ۳۰۰ + ۲۴۰۰ ریال است. بنابراین مهرداد ۱۶۰۰ ریال و دوستش ۸۰۰ ریال پرداخته‌اند.

اما در چنین مسألهٔ ساده‌ای چرا درگیر مسافر کیلومتر شویم، زیرا در اولین وحله می‌گوییم مهرداد نصف راه را به تنهایی پیموده است، در نتیجه ۱۲۰۰ ریال باید بپردازد.

آن‌گاه اتومبیل را با دوستش سوار می‌شود و باید ۶۰۰ ریال دیگر نیز برای این قسمت بپردازد. بنابراین مهرداد جمعاً ۱۸۰۰ و دوستش ۶۰۰ ریال خواهد پرداخت. در این حالت مسأله به اشغال اتومبیل مربوط می‌شود نه به مسألهٔ حمل و نقل.

پاسخ ۴:

ترنی را در نظر می‌گیریم که از یک شهر به طرف شهر مقابل حرکت می‌کند. اولین ترنی را که می‌بیند، ترنی است که در لحظهٔ آغاز حرکت، از طرف مقابل به این شهر می‌رسد، و این، ترنی است که ۵ ساعت زودتر از ترن موردنظر، از شهر مقابل حرکت کرده است، و آخرین ترنی را که با آن مواجه می‌شود ترنی است که ۵ ساعت بعد از لحظه‌ای که ترن مورد نظر ما به شهر مقابل می‌رسد، از آن شهر می‌خواهد حرکت کند. بین این دو لحظه، ۱۰ ساعت فاصله زمانی وجود دارد که در این مدت ۱۱ ترن از شهر مقابل عزیمت کرده‌اند. بنابراین هر ترن از شروع حرکت از یک شهر تا رسیدن به شهر مقابل با ۱۱ ترن مواجه می‌شود.

پاسخ ۵:

کیک را در فر قرار داده، دو ساعت را به کار می‌اندازیم. هنگامی که اولی به پایان رسید، آن‌را سرو ته می‌کنیم. (زمان منقضی شده: ۴ دقیقه). دومی را نیز، زمانی که به پایان رسید، سرو ته می‌کنیم. هنگامی که اولی بار دیگر به پایان برسد (۸ دقیقه) دومی، از آن‌جا که آن را بار دیگر به‌کار انداخته‌اید، یک دقیقه کار کرده است، بنابراین آن‌را نیز بار دیگر برمی‌گردانیم. زمانی که یک دقیقه به پایان برسد کیک آماده است.

پاسخ ۶:

طول مسافت پیموده شده در هرقسمت راL می‌نامیم. موتور سوار برای پیمودن هر قسمت زمانهای زیر را صرف می‌کند:

اولین قسمت: $\frac{L}{10}$ ساعت

دومین قسمت: $\frac{L}{5}$ ساعت

سومین قسمت: $\frac{L}{30}$ ساعت

چهارمین قسمت: $\frac{L}{15}$ ساعت

مجموع زمان لازم برای پیمودن مسافت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{L}{10}+\frac{L}{5}+\frac{L}{30}+\frac{L}{15}=\frac{12L}{30}=\frac{2L}{5}$$

چون سرعت برابر است با مسافت طی شده (4L) تقسیم بر زمان مصرف شده ($\frac{2L}{5}$).

پس: سرعت $=4L:\frac{2}{5}L=\frac{5\times4}{2}=10$ کیلومتر در ساعت

پاسخ ۷:

نحوهٔ انجام کارطبق جدول زیراست. عددهایی که زیر هم نوشته شده‌اند. مقدار آب موجود در هر سطل را درهر مرحله از کارنشان می‌دهند.

۳	۱۱	۰	۱	۱	۹	۹	۱۱	۰	۶	۶	۱۱	۰	۳	۳	۱۱	سطل اول
۸	۱	۱	۰	۸	۰	۸	۶	۶	۰	۸	۳	۳	۰	۸	۰	سطل دوم

Borhan
Vol. 7 No. 1
Serial numbers: 21 Summer 1997

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

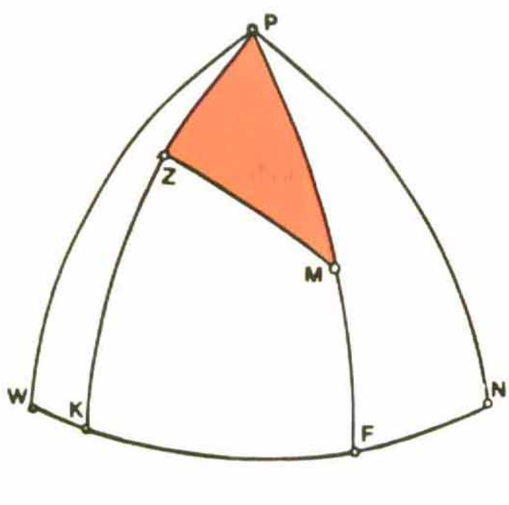
Contents:

روش ابوریحان بیرونی
(از ریاضیدانان مسلمان قرن چهارم)
برای تعیین قبله (سمت نماز)

مسأله یافتن جهت مکّه نسبت به مکانی مفروض از ضروریات دین اسلام بود، زیرا مکه جایگاه کعبه، مقدسترین مکان دنیای اسلام، و جهتی است که مسلمانان نمازهای پنجگانهٔ خود را باید رو به آن بخوانند. این جهت، به عربی، قبله نامیده می‌شود، و مسأله تعیین آن برای مسلمانان مهمّ است. از این روست که بسیاری از بزرگترین دانشمندان اسلامی توجه خود را به حل آن معطوف داشتند. ابوریحان بیرونی، در حوالی انتهای اثر کامل و دقیق خود در جغرافیای ریاضی ـ تحدید نهایات‌الاماکن ـ چنین می‌نویسد: با آنکه اکنون به پایان منظور خود (اندازه‌گیری پایانهای جایها) رسیده‌ایم، بایسته است که از آن بهره‌ای بیرون آوریم تا برای همهٔ مردمانی که در سرزمینی زندگی می‌کنند که به یافتن طول و عرض آن پرداختیم سودمند باشد یا خاص گروهی از مردم باشد و آن بهره که به همگان می‌رسد یافتن جهت قبله است. در هر حال، بیرونی چهار روش برای حل این مسأله عرضه می‌دارد. گرچه توضیح مفصّل هرکدام از این راه حلها خارج از حدود این کتاب است. ما به توصیف مسأله پرداخته و شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان آن را به کمک مثلثات کروی حل کرد.

مسأله را در مورد سطح کرهٔ زمین در نظر گیرید. شکل زیر وضع را در مورد مکانی در شمال غربی مکّه نشان می‌دهد که در آن P قطب شمال، Z مکان مورد بحث، M محل مکه و WKFN خط استواست. (چون در زیر تنها کمانها را درنظر خواهیم داشت و هرگز به خطهای راست کاری نداریم بدون آنکه ابهامی پیش آید، به جای xy خواهیم نوشت: xy) بنابراین PZ و PM به ترتیب، نصف‌النهارهای محل و مکه‌اند و $\angle PZM$ سمت مکه، یعنی قبله است. به علاوه، ZM فاصله محل از مکه روی دایرهٔ عظیمه (برحسب درجه) است. چون KZP نصف‌النهار است، اگر در Z بایستیم و جهت دایره به امتداد ZP باشد، روی ما به شمال خواهد بود. در این صورت اگر به قدر زاویهٔ $\angle PZM$ به راست بچرخیم، رویمان به مکّه خواهد بود، زیرا ZM کوتاهترین مسیر ممکن تا آن شهر است. بنابراین، برای آنکه قبله را تعیین کنیم، باید $\angle PZM$ را محاسبه کنیم.

از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی انتشارات فاطمی



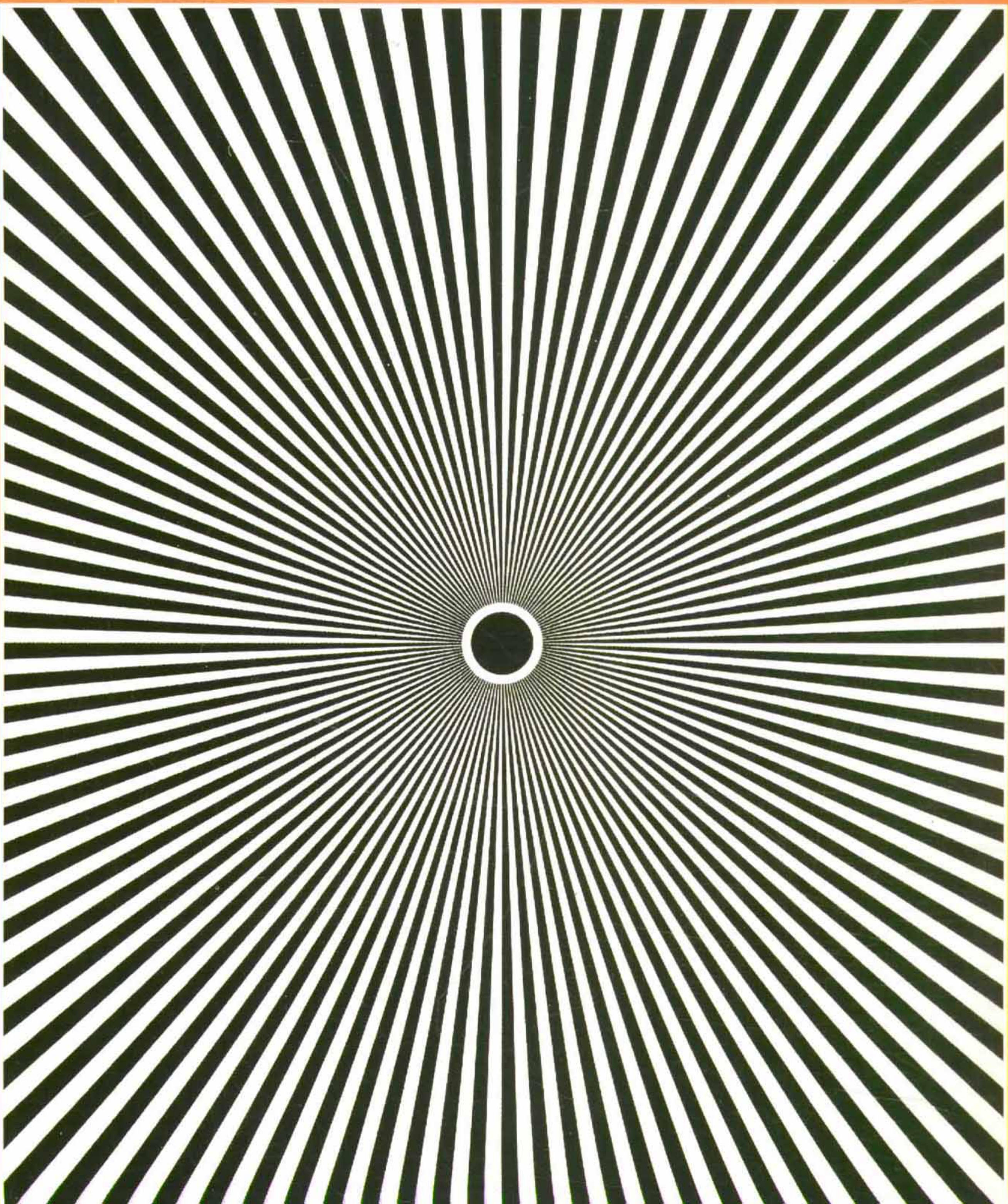
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۲

سال هفتم، شمارهٔ دوم، پاییز ۱۳۷۶، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ▫ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
سردبیر: حمیدرضا امیری ▫ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ▫ حمیدرضا امیری ▫ محمدهاشم رستمی ▫ احمد قندهاری ▫ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
▫ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری) ▫ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی
▫ طراح و صفحه‌آرا: امیر بابایی ▫ رسّام: سیدجعفر طرازانی ▫ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، پاییز ۱۳۷۶، شمارهٔ دوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهیدمحمودحقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

نهر شیری در بهشت

سال قبل در یکی از دبیرستانهای تهران دانش‌آموزی داشتم که پس از گذشت یک ماه از سال تحصیلی کاملاً نظرم را جلب کرد و از همان ابتدا متوجه علاقه و استعداد و پشتکار او شدم. او علاوه بر انجام تکالیف کلاس همیشه بیش از آنچه مورد نیاز کلاس بود مطالعه می‌کرد و حتی درس جلسه بعد را نیز بررسی می‌نمود. سؤالهای او در کلاس دقیق و عمیق بود و به سؤالهای من نیز همیشه پاسخ صحیح می‌داد. در امتحانها تمیزترین و زیباترین ورقهٔ امتحانی از ایشان بود. مسلّم و عادلانه است که او برای من با بقیه شاگردهای کلاس فرق داشته باشد و برایش احترام و ارزش و پاداش مخصوصی قایل شوم. این دانش‌آموز، علاوه بر وظایفی که برای او در حکم واجبات بود اعمال دیگری که برایش حکم مستحبات را داشت نیز به نحو احسن انجام می‌داد و همین امر باعث پیشرفت و ارتقاء وی می‌گشت.

اگر انجام یک سری وظایف غیرواجب از طرف یک دانش‌آموز در نظر مربّی او باارزش جلوه کرده، آیا در نزد خالق یکتا و ربّ‌العالمین که همه چیز ما از اوست، بندگان سخت‌کوش و متّقی نسبت به دیگر بندگانش که فقط به انجام واجبات بسنده می‌کنند مساوی هستند؟ آیا در نظر حضرت حق پاداش مؤمنی که سعی در انجام و اقامهٔ مستحبات دارد با پاداش مؤمنی که پا را از حد واجبات فراتر نمی‌گذارد فرقی ندارد؟

عزیزان دانش‌آموز! خداوند واجبات را برای همه و مستحبات را نیز برای همه مسلمین قرار داده است، اما مستحبات را فقط آنها که قصد تقرّب به درگاه الهی را دارند انجام داده و از طریق آن موجبات خشنودی خالق و رشد و کمال معنوی خود را فراهم می‌آورند.

در هر سال ماهها و ایامی هستند که این مستحبات از جانب خداوند و توسط پیامبر(ص) و معصومین علیهم‌السلام بیشتر توصیه شده و نیز عبادتهای مخصوصی درنظر گرفته شده که انجام آنها در این ماهها و ایام بیشتر مورد نظر حضرت پروردگار است.

از جمله این ماهها سه ماه رجب[1]، شعبان و رمضان است که در پیش داریم، فراموش نکنیم که بزرگان دین و اولیاء خدا و حتّی بزرگانِ علم همچون فارابی و ابن‌سینا همواره بر انجام مستحبات تأکید داشته و خود عامل به آنها بودند. عزیزان، این ماهها، ماههای سازندگی، خودسازی و آمادگی برای حرکت به سوی ا... است، این فرصتها را غنیمت بشمارید و از آنها استفاده کنید.

والسلام ـ سردبیر

۱- رَجَبْ نام نهرِ شیری است در بهشت.

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۲)

● پرویز شهریاری



IV ساختمان سایهٔ یک جسم فضایی بر صفحه. اگر بخواهیم این عنوان «فیزیکی» را ــ که به ظاهر به مبحث نور مربوط می‌شود ــ به زبان ریاضی درآوریم، باید بگوییم: **«مسأله‌هایی دربارهٔ تصویر یک شکل فضایی بر صفحه»**.

در واقع، همان‌طور که از فیزیک می‌دانیم، نور روی خط راست حرکت می‌کند؛ بنابراین، اگر نور از نقطهٔ S بر جسم بتابد (سرچشمهٔ نور را برای سادگی کار، یک نقطه به حساب می‌آوریم)، برای پیدا کردن سایهٔ جسم بر صفحه، باید از نقطهٔ S به همهٔ نقطه‌های جسم وصل کنیم و ادامه دهیم تا صفحه را قطع کنند: مجموعهٔ نقطه‌هایی که روی صفحه به‌دست می‌آید، سایهٔ جسم را تشکیل می‌دهد. این روش ساختن سایه را، در هندسه، **تصویر مرکزی جسم بر صفحه**، و نقطهٔ S را، **مرکز تصویر** گویند.

برای پیدا کردن سایه جسم بر صفحه، لازم نیست همهٔ نیم‌خط‌های راستی را که از S و نقطه‌های جسم گذشته‌اند، رسم کنیم. برای پیدا کردن سایه، کافی است بتوانیم دورهٔ آن را تشخیص دهیم.

دشواریهایی که ممکن است در عمل پیدا شود، مربوط به این است که: **کدام نیم‌خط‌های راست را، برای تشخیص دورهٔ سایه، باید رسم کرد؟**

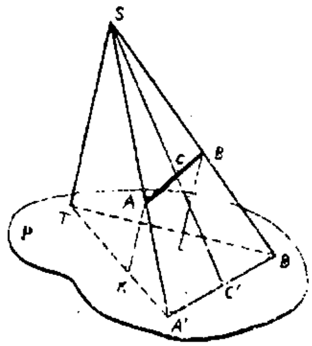
مسأله‌های مربوط به سایه، بیش از همه، در دو مورد ممکن است دشواری ایجاد کند: ۱) پیدا کردن شکل سایه و ۲) محاسبهٔ برخی از عنصرهای آن (مثل محاسبهٔ مساحت سایه). دشواری مربوط به محاسبه را، مثل حالت‌مقطع، باید ناشی از دشواری حل مسأله‌های فضایی و کاربرد مثلثات در آنها دانست، ولی دشواری مربوط به شکل سایه را، باید با تجسم فضایی، همراه با استدلال منطقی برطرف کرد.

در آغاز، به ساده‌ترین مسأله از این‌گونه، یعنی سایهٔ یک پاره‌خط راست می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱۵. پاره‌خط راست AB، به وسیلهٔ نقطهٔ نورانی

S روشن شده است و می‌دانیم، نقطهٔ S، نسبت به صفحهٔ P، بالای نقطه‌های A و B واقع است. پاره‌خط راست AB، چه سایه‌ای روی صفحهٔ P می‌اندازد؟

با توجه به موقعیت نقطه‌های S، A و B، نیم‌خط‌های راست SA و SB، صفحه P را در نقطه‌هایی مثل A′ و B′ قطع می‌کنند. روشن است، پاره‌خط راست A′B′، همان سایهٔ



شکل ۱۷

پاره‌خط راست AB است. اثبات این حکم دشوار نیست: هر خط راستی که در درون مثلث SA′B′، طوری رسم شود که از رأس S بگذرد، پاره‌خط‌های راست AB و A′B′ را به‌ترتیب، در نقطه‌هایی مثل C و C′ قطع می‌کند که در ضمن، C′ سایهٔ C است. از این‌جا نتیجه می‌شود که: سایهٔ هر نقطه‌ای از پاره‌خط راست AB، بر A′B′ قرار می‌گیرد و برعکس، هر نقطه‌ای از پاره‌خط راست A′B′، سایهٔ نقطه‌ای از AB است.

برای دقیقتر شدن مطلب، باید نکته‌ای را به آن چه گفته‌ایم، اضافه کنیم: ما نقطه‌های A′ و B′ را جدا از هم در نظر گرفتیم و در این‌باره سکوت کردیم که، اگر S، A و B روی یک خط راست باشند، آن وقت A′ و B′ دو نقطهٔ متمایز نخواهند بود. در این حالت، سایهٔ پاره‌خط راست AB، تنها همان نقطهٔ A′ خواهد بود، یعنی سایهٔ پاره‌خط راست، به یک نقطه تبدیل می‌شود.

برای پیدا کردن سایهٔ پاره‌خط راست، به پاره‌خط‌های راست ST، AK و BL نیازی نیست (در شکل ۱۷، این پاره‌خط‌های راست بر صفحه P عمودند). ولی اگر بخواهیم محاسبه‌ای انجام دهیم، این پاره‌خط‌های راست می‌توانند سودمند باشند. خودتان ثابت کنید، نقطهٔ K روی پاره‌خط راست TA′ و نقطهٔ L روی پاره‌خط راست TB′ قرار دارند. در ضمن برای دو حالت دیگر هم، خودتان شکل را رسم کنید:

۱) حالتی که فاصلهٔ نقطهٔ S از صفحهٔ P، مقداری بین فاصله‌های A و B از P باشد؛ و ۲) وقتی که فاصلهٔ ST، از دو فاصلهٔ SK و SL کوچکتر باشد.

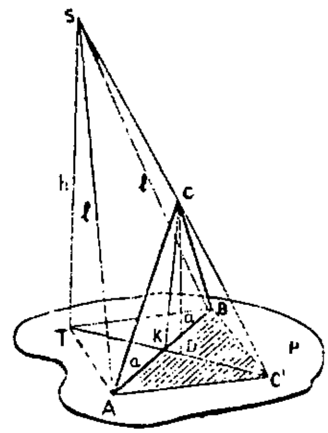
با توجه به مسألهٔ ۱۵، روشن می‌شود که، سایهٔ هر مثلث، مثلث دیگری است که، ضلعهای آن، سایهٔ ضلعهای متناظر خود در مثلث اصلی است؛ تنها در حالتی که نقطهٔ S، روی صفحهٔ مثلث باشد، سایهٔ مثلث، به صورت یک پاره‌خط راست درمی‌آید. [در این‌جا، هر وقت از سایهٔ یک جسم صحبت کنیم، فرض بر این است که سرچشمهٔ نور (که به جسم و به صفحه می‌تابد) طوری است که سایه، بخش محدودی از صفحه را گرفته است.]

به گزارهٔ شرطی مهم زیر هم توجه کنیم: اگر پاره‌خط راست AB، موازی صفحهٔ P باشد، سایهٔ آن، A′B′ هم، موازی AB خواهد بود؛ در این حالت، صفحهٔ SA′B′، از پاره‌خط راست AB (که موازی صفحهٔ P است) می‌گذرد و بنابراین، صفحهٔ P را در خط راستی موازی AB قطع می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود که: سایهٔ هر متوازی‌الاضلاع بر صفحه‌ای که از یک ضلع دلخواه آن می‌گذرد، یک ذوزنقه است، به جز در حالتی که سرچشمهٔ نور، بر صفحهٔ متوازی الاضلاع واقع باشد (در این حالت، سایه، به یک پاره‌خط راست تبدیل می‌شود).

مسأله‌ای می‌آوریم تا با دستگیرهٔ آن روشن کنیم، در این‌گونه موردها، چگونه باید به محاسبه پرداخت. ضمن حل مسأله، به اثبات حکمهای هندسی نمی‌پردازیم، ولی طبیعی است، برای حل کامل مسأله، باید همهٔ این حکمها ثابت شوند.

مسألهٔ ۱۶: قاعدهٔ AB از مثلث متساوی‌الساقین ABC، بر صفحهٔ P واقع است و طولی برابر $2a$ دارد. در ضمن می‌دانیم، مقدار زاویه C (زاویهٔ رأس مثلث) برابر است با 2α و صفحهٔ مثلث با صفحهٔ P، زاویه‌ای برابر β می‌سازد.

مثلث، به وسیلهٔ نقطهٔ S روشن می‌شود که به فاصلهٔ h از صفحهٔ P و در بالای رأس C و به فاصلهٔ l از دو نقطهٔ A و B قرار دارد. مساحت سایهٔ مثلث ABC را، بر صفحهٔ P، پیدا کنید (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

پاره‌خطهای راست ST و CD را، عمود بر صفحهٔ P، رسم می‌کنیم. از برابری طولهای دو پاره‌خط راست SA و SB نتیجه می‌شود که، خط راست TD از نقطهٔ K، وسط قاعدهٔ AB، و همچنین، از نقطهٔ C′، سایهٔ C، می‌گذرد (هر دو حکم را؛ به طور جداگانه، خودتان ثابت کنید). به جز این، روشن است که، زاویهٔ CKD، زاویهٔ دو وجهی بین صفحهٔ مثلث ABC و صفحهٔ P است و، بنابراین $\widehat{CKD}=\beta$.

سایهٔ مثلث ABC، یعنی ABC′ ، یک مثلث متساوی‌الساقین است و برای حل مسأله، باید طول ارتفاع آن، KC′ را پیدا کرد. از تشابه دو مثلث STC′ و CDC′ به دست می‌آید:

$$\frac{|CD|}{|DC'|}=\frac{|ST|}{|TK|+|KD|+|DC|}$$

که از آن محاسبه می‌شود:

$$|DC'|=\frac{|CD|(|TK|+|KD|)}{|ST|-|CD|}$$

طول پاره‌خطهای راست CD و KD، از مثلث CKD، محاسبه می‌شوند:

$$|CD|=|CK|.\sin\beta=a\cot g\alpha\sin\beta;$$

$$|DK|=a\cot g\alpha\cos\beta$$

از طرف دیگر، از مثلثهای ATK و ATS به‌دست می‌آید:

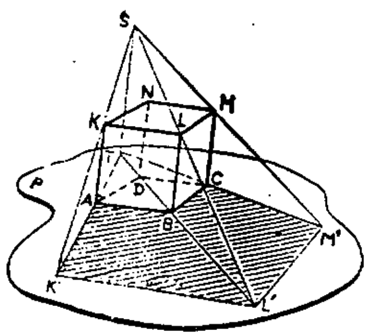
$$|TK|^2=|TA|^2-|AK|^2=l^2-h^2-a^2$$

با قرار دادن مقدارهایی که برای طول پاره‌خطهای راست CD، KD و TK پیدا کردیم، مقدار طول پاره‌خط راست DC′ و، سپس،

$$|KC'|=|KD|+|DC'|$$

به دست می‌آید. پاسخ نهایی، به اندازهٔ کافی طولانی است، ولی پیدا کردن آن دشوار نیست.

ساختن سایهٔ چند وجهی‌ها، دشواری عمده‌ای، در مقایسه با ساختن تصویر قائم آنها، پیدا نمی‌کند. به شکل ۱۹ توجه کنید:



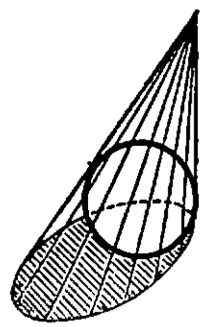
شکل ۱۹

قاعدهٔ ABCD از مکعب ABCDKLMN روی صفحهٔ P قرار دارد، نقطهٔ S، سرچشمهٔ نور را روی صفحهٔ قطری مکعب (صفحه‌ای که از مربع NLBD می‌گذرد) طوری انتخاب کرده‌ایم که تصویر قائم S بر P، یعنی نقطهٔ T، در بیرون قاعدهٔ مکعب قرار گیرد. سایهٔ چنین مکعبی خیلی ساده به دست می‌آید: روشن است، این سایه، از سایه‌های دو وجهی AKLB و BLMC به‌دست می‌آید و از دو ذوزنقه تشکیل شده است. برای این که، به عنوان نمونه، ذوزنقهٔ ABL′K′ را، با دقت هندسی، پیدا کنیم، باید عمود ST را بر صفحهٔ قاعدهٔ مکعب در نظر بگیریم،

آن‌وقت نقطهٔ K'، به عنوان نقطهٔ برخورد خطهای راست TA و SK به‌دست می‌آید. به همین ترتیب، نقطهٔ L'، در نقطهٔ برخورد خطهای راست TB و SL قرار دارد (هر یک از این دو حکم، نیازمند اثبات است؛ خودتان ثابت کنید). این ساختمان هندسی، بی‌تردید، برای محاسبهٔ عنصرهای سایه، مثل مساحت آن، به درد می‌خورد. اگر موضع سرچشمهٔ نور معین باشد (به عنوان مثال، با معلوم بودن طول پاره‌خطهای راست ST و TD)، با توجه به این ساختمان هندسی، می‌توان طول سایهٔ هر یک از پاره‌خطهای راست افقی و قائم را پیدا کرد (که در واقع، همان طول ضلعهای ذوزنقه است) و، سپس، مساحت را بر حسب طول ضلعها به‌دست آورد (خودتان، حل مسأله را تمام کنید).

وقتی با سایهٔ جسمهای گرد سر و کار داشته باشیم، دشواری، به‌گونه دیگری پدید می‌آید. در این‌گونه مسأله‌ها، با مفهوم مماس بر جسم برخورد می‌کنیم. در واقع، اگر سرچشمهٔ نور، کره‌ای را که بر صفحه قرار گرفته است، روشن‌کند، برای پیدا کردن دورهٔ سایه، باید پرتوهایی از نور را در نظر گرفت که، تنها در یک نقطه، با کره مشترک باشند، یعنی نیم‌خطهای راستی را که بر کره مماس‌اند (شکل ۲۰) و این به بحثی از هندسهٔ فضایی مربوط می‌شود که از برنامهٔ دبیرستانی بیرون است.

به همین مناسبت، این مسأله را تنها در حالت سادهٔ آن، وقتی که S (سرچشمهٔ نور)، درست در بالای مرکز کره قرار گرفته باشد، بررسی می‌کنیم. در این حالت، مماسهایی که از S، بر

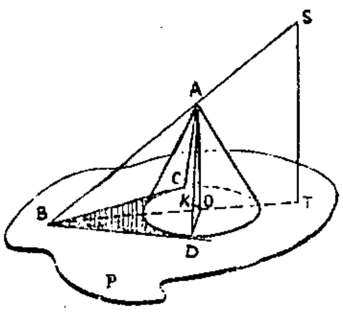


شکل ۲۰

سطح کره رسم شوند، مولدهای یک مخروط را تشکیل می‌دهند و، روشن است که سایهٔ آن، به‌صورت یک دایره درمی‌آید.

تنها یادآوری می‌کنیم، اگر فاصلهٔ نقطهٔ S از صفحه، بزرگتر از قطر کره باشد، سایهٔ آن بر صفحه به صورت بیضی درمی‌آید؛ اگر فاصلهٔ S از صفحه، برابر قطر کره باشد، سایهٔ آن، بخشی نامتناهی از صفحه را فرا می‌گیرد، که در داخل یک سهمی قرار گرفته است. و اگر فاصلهٔ S از صفحه، کوچکتر از قطر دایره باشد، سایهٔ کره در درون شاخه‌های یک هذلولی واقع می‌شود؛ این مطلب را در هندسهٔ تحلیلی ثابت می‌کنند. بیضی، سهمی و هذلولی، سه حالت مختلف از مقطعهای مخروطی هستند.

مسأله ۱۷. قاعدهٔ مخروط قائمی، بر یک صفحه قرار دارد. شعاع قاعدهٔ مخروط برابر ۱ متر و ارتفاع مخروط برابر ۲ متر است. سرچشمهٔ نور، در ۴ متری صفحه، طوری قرار گرفته است که، فاصلهٔ پای عمودی که از آن‌جا بر صفحه رسم شده است تا مرکز قاعدهٔ مخروط، برابر ۲ متر است. مساحت سایهٔ مخروط بر صفحه را، بدون در نظر گرفتن قاعدهٔ مخروط، پیدا کنید (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

قبل از هر چیز یادآوری می‌کنیم، اگر OK بر مولد AD عمود باشد، صفحه‌ای که از AD بگذرد و بر OK عمود باشد، جز نقطه‌های واقع بر AD، نقطهٔ مشترک دیگری با سطح مخروطی ندارد. بنابراین، هیچ خط راستی از این صفحه، به جز خط راست AD، نمی‌تواند بیش از یک نقطهٔ مشترک با سطح مخروطی داشته باشد.

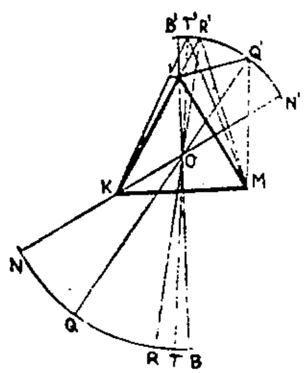
اکنون از نقطهٔ B، مماسهای BC و BD را بر دایرهٔ قاعدهٔ

مخروط رسم می‌کنیم. در این صورت، خط BD بر DO عمود می‌شود و درنتیجه، خط راست BD، بر صفحهٔ AOD عمود است. بنابراین BD بر OK هم عمود می‌شود. چون، بنابر فرض، OK بر DA عمود است، بنابراین OK بر صفحهٔ ABD عمود می‌شود. یعنی، صفحهٔ ABD از همان نوعی است که، در آغاز حل، از آن صحبت کردیم. به این ترتیب، هر نیم خط راستی که از نقطهٔ S روی این صفحه رسم شود، بر سطح مخروطی مماس خواهد بود و بنابراین، مرز سایه به‌وسیلهٔ همین نیم‌خط راست معین می‌شود، یعنی این مرز، بر مماس BD منطبق است. به همین ترتیب، مرز دیگر سایه، یعنی BC هم معین می‌شود.

به این ترتیب، سایهٔ مخروط، شکلی است که به دو پاره‌خط راست BD و BC و کمان کوچکتر CD محدود شده است. خودتان مساحت این شکل را پیدا کنید.

در پایان مسأله‌ای را می‌آوریم که، در آن، سرچشمهٔ نور، جابه‌جا می‌شود و می‌خواهیم، حرکت سایه را دنبال کنیم.

مسأله ۱۸. چهار وجهی منتظمی روی صفحهٔ P قرار دارد. چشمهٔ نور S، روی محیط دایره‌ای، که بر صفحه‌ای موازی P واقع است، حرکت می‌کند. مرکز دایره، روی ارتفاع هرم قرار دارد. بزرگی شعاع دایره چنان است که، از هر نقطهٔ واقع بر محیط آن، دست‌کم، یکی از ضلعهای قاعدهٔ هرم دیده نمی‌شود. ثابت کنید، کمترین مساحت سایه، وقتی به‌دست می‌آید که نقطهٔ S، بر صفحهٔ یکی از وجه‌های جانبی هرم قرار گیرد.



شکل ۲۲

این مسأله را، بدون رسم شکل فضایی هم، می‌توان حل کرد. به سادگی می‌توان تصور کرد، اگر از بالا نگاه کنیم، تصویری شبیه شکل ۲۲ دیده می‌شود: در این شکل، O رأس هرم و دایره π'، دایره‌ای است که، سایهٔ رأس هرم، ضمن حرکت S، روی آن حرکت می‌کند (حرکت S روی دایره π است؛ در شکل، دایرهٔ π در پایین و دایرهٔ π' در بالا قرار گرفته است).

فرض کنیم، صفحه‌هایی که از ارتفاع هرم و یکی از یالهای OK و OL می‌گذرند، به ترتیب، دایرهٔ π را در نقطه‌های N و B قطع کنند. با توجه به تقارن، روشن است که، کافی است، حرکت S را، تنها روی کمان NB مورد بررسی قرار دهیم.

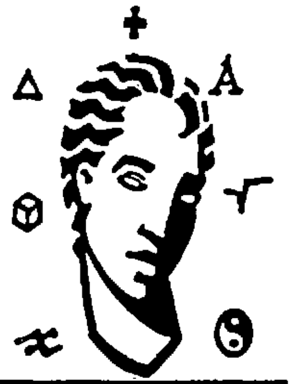
اکنون فرض کنید، نقطهٔ S، روی محیط دایرهٔ π، از N به طرف نقطهٔ B حرکت می‌کند. ضمن این حرکت، سایهٔ رأس هم از N′ به طرف نقطهٔ B′ جابه‌جا می‌شود.

R′ را نقطه‌ای از محیط دایرهٔ π' می‌گیریم که بر خط راست KL واقع باشد و R را، نقطهٔ متناظر آن از S، فرض می‌کنیم. نقطهٔ R بر خط راست OR′ قرار دارد و، نقطه‌های O و R′، روی وجه OKL واقع‌اند. بنابراین، نقطهٔ R هم روی صفحهٔ OKL قرار می‌گیرد. به این ترتیب، اگر نقطهٔ S، در نقطه‌ای مثل Q، بین N و R قرار گیرد (و از آن جمله، خود نقطه‌های N و R)، از آن‌جا، تنها یک ضلع LM از قاعدهٔ هرم دیده نمی‌شود و، سایهٔ هرم، به صورت مثلث LQ′M درمی‌آید. وقتی حرکت S، از N به طرف R باشد، مساحت این مثلث، رو به کاهش می‌رود، زیرا قاعدهٔ مثلث، یعنی LM، ثابت می‌ماند و ارتفاع آن، به روشنی، کوچک و کوچکتر می‌شود.

اگر نقطهٔ S، در نقطه‌ای مثل T، بین R و B باشد، از آن‌جا، دو ضلع KL و LM، از قاعدهٔ هرم، دیده نمی‌شوند. بنابراین سایهٔ هرم، به‌صورت چهارضلعی T′KLM درمی‌آید. مثلث KLM، با اضافه شدن این سایه به آن، به مثلث T′KM تبدیل می‌شود. مساحت مثلث T′KM، وقتی نقطهٔ S از R به سمت B می‌رود، بزرگتر می‌شود، زیرا قاعدهٔ مثلث ثابت می‌ماند و ارتفاع آن روبه افزایش است. بنابراین، روشن است که، ضمن این

حرکت، مساحت چهار ضلعی T'KLM هم ترقی می‌کند، زیرا اختلاف مساحت این چهارضلعی با مساحت مثلث T'KM مقدار ثابتی است (برابر با مساحت قاعدهٔ هرم).

به این ترتیب، وقتی نقطهٔ S، از N به طرف R می‌رود، مساحت سایه کم می‌شود و، وقتی از R به طرف B می‌رود، این مساحت زیاد می‌شود. یعنی، کمترین مقدار مساحت سایه، وقتی به دست می‌آید که، چشمهٔ نور، در نقطهٔ R، یعنی روی وجه OKL باشد.



تفریح اندیشه ۱

لوبیاهای جهندهٔ مکزیکی

دوستم سه قوطی یک شکل و شش لوبیای جهنده ـ سه قرمز و سه سیاه ـ در کنارش گذاشته بود، و هنگامی که پشتم به او بود در هر قوطی دو لوبیا قرار داد و اولی را با برچسب «ق ـ س» (به‌جای قرمز ـ سیاه)، دومی را با برچسب «ق ـ ق»، و آخری را با برچسب «س ـ س» مشخص کرد، و در حالی که آنها را مقابل من می‌گذاشت، گفت : هیچ‌یک از این قوطیها دارای برچسب درست نیست. اجازه داری از هر قوطی که انتخاب می‌کنی، هر بار یک لوبیا ـ البته بدون نگاه کردن به داخل قوطی ـ برداری. مسأله‌ای که برای تو مطرح کرده‌ام این است که مشخص کنی در هر قوطی کدام لوبیاها قرار دارند. این را هم به‌خاطر داشته باش که مجاز نیستی بیش از حد لزوم لوبیا از قوطیها بیرون بیاوری.

پس از چند دقیقه فکر کردن گفتم : حلش کردم، خیلی ساده بود!

دوستم که از حرفم اصلاً تعجب نکرده بود گفت : حالا مسأله را به طریق دیگری طرح می‌کنم.

سپس برچسبها را از قوطیها برداشت و دو لوبیای قرمز در قوطی اول، دو لوبیای سیاه در قوطی دوم، و یک لوبیای قرمز و یک لوبیای سیاه در قوطی سوم قرار داد، و بعد از بستن در جعبه‌ها جای آنها را جلوی من عوض کرد، و گفت : هر یک از قوطیها را که می‌خواهی بردار و یک لوبیا از آن بیرون بیاور.

یک لوبیای قرمز بیرون آوردم.

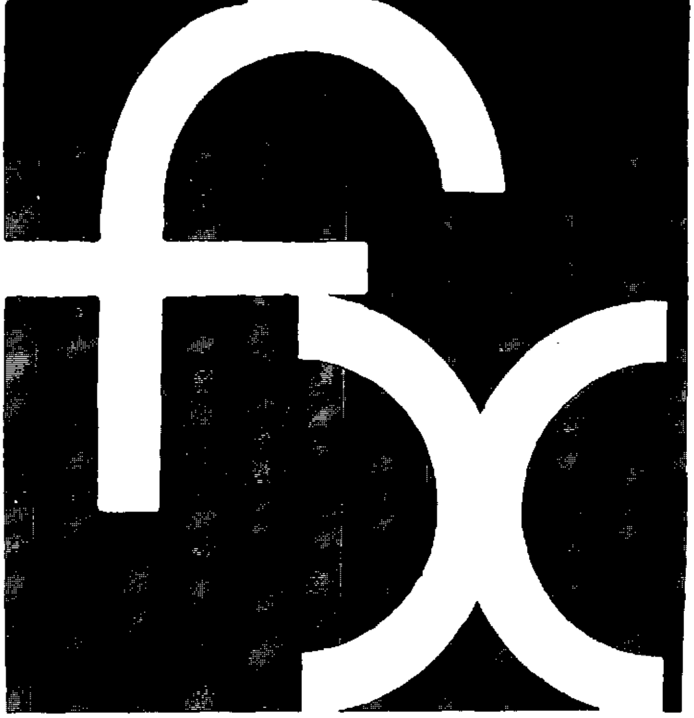
دوستم پرسید : احتمال اینکه دومین لوبیای واقع در قوطی‌ای که انتخاب کرده‌ای نیز قرمز باشد چیست؟

با صدای بلند استدلال کردم : لوبیای قرمزی که بیرون آوردم باید یا از قوطی «قرمز ـ قرمز» یا از قوطی «قرمز ـ سیاه» باشد، و از آنجا که احتمال انتخاب هر یک از قوطیها دقیقاً یکی است، احتمال اینکه لوبیای دوم نیز قرمز باشد پنجاه ـ پنجاه است.

و اضافه کردم : این یکی نیز بسیار آسان بود.

دوستم با لبخند گفت : خیر، دوست عزیز آسان نیست، مشکل است.

جواب در صفحهٔ ۸۸



چند نکته درباره f(x)ها

● احمد قندهاری

هر عبارت بر حسب x را می‌توان با $f(x)$ نشان داد[1].

به عنوان مثال: $f(x)=2x-4$ ، $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ ، $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ، $f(x)=\sin^2 x-1$ ، $f(x)=\mathrm{Arctan}\, x$ و ...

بحث این مقاله در مورد انواع $f(x)$ها است و می‌خواهیم درباره پنج مورد اساسی مربوط به $f(x)$ها مطالبی را به شرح زیر عنوان کنیم:

۱ـ فرض کنیم $f(x)$ معلوم است، می‌خواهیم $f(h(x))$ را بیابیم.

۲ـ فرض کنیم $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $f(x)$ را بیابیم.

۳ـ رابطه‌ای مانند $af(h(x))+bf(t(x))=g(x)$ مفروض است. می‌خواهیم $f(x)$ را پیدا کنیم.

۴ـ فرض کنیم $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را پیدا کنیم.

۵ـ فرض کنیم $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را پیدا کنیم. حال به توضیح و تشریح هریک از موارد پنج‌گانه گفته شده می‌پردازیم. برای آنکه مطلب بهتر به خاطر بماند، این پنج مورد را به صورتهای زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

۱ـ مسأله اصلی f(x):

یعنی $f(x)$ معلوم است، می‌خواهیم $f(h(x))$ را محاسبه کنیم. بدیهی است برای محاسبه $f(h(x))$ باید در تساوی $f(x)$ به جای هر x، $h(x)$ را قرار دهیم. توجه کنید، این عمل یک جایگذاری است، به معنی این که $h(x)$ با x برابر نمی‌باشد.

مثال (۱): اگر $f(x)=3x-4x^3$ ، آن‌گاه $f(\sin\alpha)$ را بیابید.

حل: باید در تساوی $f(x)$ به جای هر x، $\sin\alpha$ را قرار دهیم:

$$\Rightarrow f(\sin\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

اگر کمی دقّت کنیم، با توجه به فرمول:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

می‌توان نوشت:

$$f(\sin\alpha)=\sin 3\alpha$$

مثال (۲): اگر $f(x)=x^5$ ، آن‌گاه $f(f(f(x)))$ را بیابید.

حل: محاسبه $f(f(x))$ چنین است که باید در تساوی $f(x)$، به جای هر x، $f(x)$ را قرار دهیم، $f(f(x))$ را $h(x)$ می‌نامیم.

$$h(x)=f(f(x))=(x^5)^5=x^{25}$$

$$f(f(f(x)))=f(h(x))=f(x^{25})=(x^{25})^5=x^{125}$$

۱ـ f اوّل کلمه function است که به‌طور معمول به عنوان ضابطه تابعی از x به کار می‌رود.

نتیجه:

$$f(x)=x^n \Rightarrow \underbrace{fff\cdots f(x)}_{\text{مرتبه } m} = x^{n^m}$$
$$n\in N$$

مثال(۳): اگر $x\neq 1$ ، $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ، آن‌گاه $f(f(\frac{1}{x}))$ ، $(x\neq 0)$ را بیابید.

حل: ابتدا $f(\frac{1}{x})$ را h(x) می‌نامیم و آن را تشکیل می‌دهیم :

$$h(x)=f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

سپس $f(f(\frac{1}{x}))$ که همان f(h(x)) است را تشکیل می‌دهیم :

$$f(f(\frac{1}{x}))=h(f(x))=f(\frac{x}{x-1})=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}\Rightarrow f(f(\frac{1}{x}))=1-x$$

در سه مثال ذکر شده، f(x) شامل یک متغیر x بود، ولی ممکن است f شامل چند متغیر باشد که آن را به صورتهای زیر نشان می‌دهیم :

f(x,y,z,...) ، f(x,y,z) ، f(x,y)

به مثالهای زیر دقت کنید :

مثال(۴): اگر $f(x,y)=x^2+4xy$ ، آن‌گاه $f(\sin\alpha,\cos\alpha)$ را بیابید.

حل: برای ساختن $f(\sin\alpha,\cos\alpha)$ باید به جای x ، $\sin\alpha$ و به جای y ، $\cos\alpha$ را قرار دهیم :

$$f(\sin\alpha,\cos\alpha)=\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=\sin^2\alpha+2\sin2\alpha$$

مثال (۵): اگر $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ ، آن‌گاه $f(a-b,b-c,c-a)$ را بیابید.

حل: باید به جای x ، $(a-b)$ و به جای y ، $(b-c)$ و به جای z ، $(c-a)$ را قرار دهیم :

$$f(a-b,b-c,c-a)=(a-b)(b-c)+$$
$$(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)$$

اگر سمت راست را در هم ضرب و جمع جبری کنیم :

$$f(a-b,b-c,c-a)=ab+ac+bc-(a^2+b^2+c^2)$$

۲ـ مسأله یافتن f(x) :

یعنی f(h(x)) معلوم است، می‌خواهیم f(x) را محاسبه کنیم.

روش اوّل: h(x) را مساوی a فرض می‌کنیم، از این‌جا x را پیدا کرده ، در مسأله قرار می‌دهیم.

مثال(۱): اگر $f(2x-1)=4x^2-4x+5$ آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل:

$$2x-1=a\Rightarrow x=\frac{a+1}{2}$$
$$f(a)=4(\frac{a+1}{2})^2-4(\frac{a+1}{2})+5$$
$$=4(\frac{a^2+2a+1}{4})-2(a+1)+5$$
$$=a^2+2a+1-2a-2+5$$
$$=a^2+4$$

حال به‌جای a ، x را قرار می‌دهیم : $f(x)=x^2+4$

روش دوم: عبارت سمت راست را بر حسب $(2x-1)$ می‌نویسیم (اگر مقدور باشد)، سپس در کل تساوی $(2x-1)$ را به x تبدیل می‌کنیم. بهتر است این را روش **تبدیل** بنامیم.

$$f(2x-1)=4x^2-4x+1+4$$
$$f(2x-1)=(2x-1)^2+4 \qquad 2x-1\xrightarrow{\text{تبدیل}}x$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2+4$$

روش سوم: روش عددگذاری است که به طور معمول در تستها رایج است، فرض کنید این مثال به صورت تست زیر باشد :

اگر $f(2x-1)=4x^2-4x+5$ ، آن‌گاه f(x) کدام است؟

۱) x^2+x+3 ۲) x^2-4

۳) x^2+4 ۴) x^2+3

حل: به جای x عددی مانند (۱) قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow f(1)=4-4+5\Rightarrow f(1)=5$$

حال می‌گوییم گزینه‌ای درست است که f(1) آن(۵)باشد. ملاحظه می‌کنیم هم گزینه (۱) درست است و هم گزینه (۳)، حال عددی دیگری مانند (۰) را به جای x قرار می‌دهیم.

$$f(-1)=0-0+5\Rightarrow f(-1)=5$$

حال بین دو گزینه (۱) و (۳) امتحان می‌کنیم، درگزینه (۱) $f(-1)=3$ ،ولی در گزینه (۳)، $f(-1)=5$ ، پس گزینه (۳) درست است. ممکن است در تستها با همان عمل اول گزینه جواب مشخص شود.

مثال (۲): اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: از روش تبدیل استفاده می‌کنیم.

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$$

$$x+\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=x^2-2$$

مثال (۳): اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^4+\frac{1}{x^4}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: از روش تبدیل استفاده می‌کنیم :

$$f(x+\frac{1}{x})=\left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]^2-2=\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]^2-2$$

$$x+\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{تبدیل}}x\Rightarrow f(x)=(x^2-2)^2-2$$

توجه : ممکن است روش تبدیل در یک مسأله مقدور نباشد. مانند مثال زیر :

مثال(۴): اگر $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$ و $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$$

طرفین تساوی را به توان (۲) می‌رسانیم :

از طرفین تساوی۴واحد کم می‌کنیم : $x^2+\frac{1}{x^2}+2=a^2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=a^2-4\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=a^2-4$$

باتوجه به اینکه $x>0$ و $x>\frac{1}{x}$: $\Rightarrow x-\frac{1}{x}=\sqrt{a^2-4}$

و $x+\frac{1}{x}=a$ و $x-\frac{1}{x}=\sqrt{a^2-4}$

: $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$

$$f(a)=a\sqrt{a^2-4}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x^2-4}$$

مثال (۵): اگر $f(x+y,x-y)=x.y$ ، آن‌گاه f(x,y) را بیابید.

حل: روش اول

$$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a+b}{2}\\y=\frac{a-b}{2}\end{cases}$$

داشتیم : $f(x+y,x-y)=xy\Rightarrow f(a,b)=\frac{a+b}{2}.\frac{a-b}{2}$

$$\Rightarrow f(a,b)=\frac{a^2-b^2}{4}\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{4}$$

روش دوم (روش تبدیل):

می‌دانیم که :

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\Rightarrow\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=ab$$

$$\Rightarrow f(x+y,x-y)=x.y=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$$

حال (x+y)را به x و $(x-y)$ را به y تبدیل می‌کنیم :

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{4}$$

مثال (۶): اگر $f(x+y,x-y)=2\sin x\sin y+\cos x+\cos y$ ، آن‌گاه f(x,y)را بیابید.

حل: روش تبدیل :

$$\begin{cases}2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)\\\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}\end{cases}$$

$$f(x+y,x-y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)+2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

حال (x+y)را به x و $(x-y)$را به y تبدیل می‌کنیم :

$$f(x,y)=\cos y-\cos x+2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

مثال (۷): اگر $x>0$ و $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ ، آن‌گاه f(x) را بیابید.

توجه :

$$\begin{cases}x\sqrt{2}=\sqrt{2x^2}\\x>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x\sqrt{2}=-\sqrt{2x^2}\\x<0\end{cases}$$

حل: روش تبدیل

$$f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

حال $(\frac{y}{x})$ را به x تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=-\sqrt{1+x^2}$$

مثال (۸): اگر $f\left(\frac{x-4}{y+5}\right)=\frac{y-x+9}{x+y+1}$، آن‌گاه $f(\frac{y}{x})$ را بیابید.

حل: روش تبدیل

$$f\left(\frac{x-4}{y+5}\right)=\frac{(y+5)-(x-4)}{(x-4)+(y+5)}$$

حال $(x-4)$ را به y و $(y+5)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f(\frac{y}{x})=\frac{x-y}{y+x}$$

مثال (۹): اگر $f\left(\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$، آن‌گاه $f(\sin 2\alpha)$ را بیابید.

حل: $x=tg\frac{\alpha}{2}$ فرض می‌شود.

$$f\left(2\times\frac{2x}{1+x^2}\times\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f\left(2\times\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\times\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow f(2\sin\alpha.\cos\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow f(\sin 2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$$

مثال (۱۰): اگر $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$، آن‌گاه $n\in N$، مطلوب است محاسبه $\underbrace{fofo.....f}_{\text{2n مرتبه}}(\sqrt{\cos 2\alpha})$

حل:

$$f\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}}=\sqrt{tg^2\alpha}=tg\alpha$$

$$fof(\sqrt{\cos 2\alpha})=f(tg\alpha)=\sqrt{\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{\cos^2\alpha(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})}=\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow fofof(\sqrt{\cos 2\alpha})=f(\sqrt{\cos 2\alpha})=tg\alpha$$

$$\Rightarrow fofofof(\sqrt{\cos 2\alpha})=f(tg\alpha)=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$\underbrace{fofo....f(\sqrt{\cos 2\alpha})}_{\text{2n مرتبه}}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

حال به روش استقراء ثابت می‌کنیم:

داشتیم: $n=1\Rightarrow fof\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$

$$n=k,k\in N\Rightarrow \underbrace{fofo...f\sqrt{\cos 2\alpha}}_{\text{2k مرتبه}}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

ثابت‌می‌کنیم: $n=k+1\Rightarrow \underbrace{fofo...f\sqrt{\cos 2\alpha}}_{\text{2(k+1) مرتبه}}=\sqrt{\cos 2\alpha}$

$$=fof\underbrace{f......f(\sqrt{\cos 2\alpha})}_{\text{2k مرتبه}}=fof\sqrt{\cos 2\alpha}=\sqrt{\cos 2\alpha}$$

مثال ۱۱: اگر برای عددهای حقیقی x,y و عدد طبیعی n داشته باشیم: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ و $f(1)\neq 0$ ثابت کنید:

$f(n)=nf(1)$

$n=1\Rightarrow f(1)=f(1)$

فرض می‌کنیم به ازای $n=k\in N$ داشته باشیم $f(k)=kf(1)$. حال ثابت می‌کنیم به ازای $n=k+1$ نیز رابطه فوق برقرار است:

$$\begin{cases}x=k\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(k+1)=f(k)+f(1)$$

$$f(k+1)=kf(1)+f(1)$$

$$\Rightarrow f(k+1)=(k+1)f(1)$$

۳ـ مسأله گسترده f(x)

مسائلی است به صورت $af(h(x))+bf(t(x))=g(x)$، می‌خواهیم f(x) را محاسبه کنیم. باید عملی انجام دهیم که h(x) و t(x) به یکدیگر تبدیل شوند. آن‌گاه دستگاه حاصل را حل کرده و f(x) را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱: اگر $3f(x)+2f(-x)=10x-12$، آن‌گاه f(x) را بیابید.

حل: اگر در رابطه بالا x را به x- تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$3f(-x)+2f(x)=-10x-12$$

حال با رابطه اولیه یک دستگاه می‌سازیم.

$$\begin{cases} 3f(x)+2f(-x)=10x-12 & \times 3 \\ 3f(-x)+2f(x)=-10x-12 & \times(-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9f(x)+6f(-x)=30x-36 \\ -6f(-x)-4f(x)=20x+24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5f(x)=50x-12 \Rightarrow f(x)=10x-\frac{12}{5}$$

مثال ۲: اگر $2f(2x-3)+f(3-2x)=8x+20$، آن‌گاه $f(4x-1)$ را بیابید.

حل: $2x-3=a$ فرض می‌شود $\Rightarrow x=\frac{a+3}{2}$

در صورت مسأله قرار می‌دهیم:

$$2f(a)+f(-a)=4a+32$$

حال مانند مثال قبل a را به a- تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f(-a)+f(a)=-4a+32 \\ 2f(a)+f(-a)=4a+32 & \times(-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(a)=-12a \Rightarrow f(a)=4a$$

$$\Rightarrow f(4x-1)=4(4x-1) \Rightarrow f(4x-1)=16x-4$$

مثال ۳: اگر $f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x$، آن‌گاه $f(tgx)$ را بیابید.

حل: x را به $(\frac{\pi}{2}-x)$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))+2f(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=2\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\cos x)+2f(\sin x)=2\cos^2 x \\ f(\sin x)+2f(\cos x)=2\sin^2 x & \times(-2) \end{cases}$$

در نتیجه:

$$-3f(\cos x)=2\cos^2 x-4\sin^2 x$$

$$-3f(\cos x)=2\cos^2 x-4+4\cos^2 x$$

$$-3f(\cos x)=6\cos^2 x-4 \Rightarrow f(\cos x)=-2\cos^2 x+\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(tgx)=-2tg^2 x+\frac{4}{3}$$

۴ـ مسأله ترکیبی

وقتی $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم است، می‌خواهیم $g(x)$ را محاسبه کنیم. در این شرایط با توجه به ساخت $f(g(x))$، $g(x)$ به راحتی محاسبه می‌شود.

مثال ۱: اگر $f(x)=2x-3$ و $f(g(x))=6x^4+4x^2-1$، $g(x)$ را بیابید.

حل: $f(g(x))=6x^4+4x^2-1$

$$2g(x)-3=6x^4+4x^2-1 \Rightarrow 2g(x)=6x^4+4x^2+2$$

$$\Rightarrow g(x)=3x^4+2x^2+1$$

مثال ۲: اگر $f(x)=4x-5$ و $f(g(x))=8x^2+8x-1$، $g(f(x))$ را بیابید.

حل: $f(g(x))=8x^2+8x-1$

$$\Rightarrow 4g(x)-5=8x^2+8x-1 \Rightarrow g(x)=2x^2+2x+1$$

$$g(f(x))=g(4x-5)=2(4x-5)^2+2(4x-5)+1$$

$$\Rightarrow g(f(x))=32x^2-72x+41$$

۵ـ مسأله ترکیبی

وقتی $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم است، می‌خواهیم، $g(x)$ را محاسبه کنیم. با توجه به ساخت $g(f(x))$، مسأله به شماره ۲ درس (مسأله یافتن $f(x)$) تبدیل می‌شود.

مثال ۱: اگر $f(x)=2x-5$ و $g(f(x))=4x^2-20x+1$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.

حل: $g(f(x))=4x^2-20x+1$

$$g(2x-5)=4x^2-20x+1$$

$$g(2x-5)=(2x-5)^2-24$$

حال $(2x-5)$ را به x تبدیل می‌کنیم:

$$g(x)=x^2-24$$

تمرین:

۱ـ اگر $f(x)=\frac{4}{x-4}$، $x\neq 4$، $x\neq 0$، آن‌گاه $f\left(\frac{1}{f(\frac{1}{x})}\right)$ را بیابید.

۲ـ اگر $f(\frac{x+1}{x-1})=\sin x.\cos x$، آن‌گاه $f(\frac{x+1}{x-1})\cdot f(\frac{x-1}{x+1})$ را بیابید.

۳ـ اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x^3})$ را بیابید.

۴ـ اگر $f(x-1)+3f(1-x)=4x$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۵ـ اگر $f(\frac{x+1}{y+1})=\frac{x+y+2}{x+1}$، آن‌گاه $f(\frac{1}{x})$ را بیابید.

۶ـ اگر $2f(x^3)+f(-x^3)=x$، آن‌گاه $f(x^2)$ را بیابید.

۷ـ اگر $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$، آن‌گاه $f(\frac{1}{y})$ را بیابید.

۸ـ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}, f(g(x))=-f(x)$، آن‌گاه $g(x)$ را بیابید.



• غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۱)

در شمارهٔ ۲۷ مجله و در مقالهٔ داستانهای تفننی ریاضی، نوشتهٔ ژرژگامو، تحت عنوان **باد اتر**، این مسأله طرح و بررسی شده است:

دسته‌ای از افراد نیروی هوایی دور میزی در باشگاه هوانوردان نشسته‌اند و مشغول صحبت کردن و ورق زدن مجلات مصورهستند. یکی از آنها خطاب به دیگری می‌گوید:

ـ جاک، مثل اینکه قرار است امروز تا پایگاه N پرواز کرده و قبل از غروب مراجعت کنی؟!

ـ امروز از این کار منصرف شدم. پایگاه N درست در سمت مشرق ما واقع است و بادی قوی که از سمت مشرق می‌وزد پرواز هواپیمای مرا کُند خواهد کرد. بهتر است که تا فردا صبر کنم. هواشناسی برای فردا روز آرامی را پیش‌بینی کرده است.

ـ اما اگر همین امروز عصر قصد مراجعت داشته باشی، در زمان پروازت تغییری حاصل نمی‌شود: باد به همان اندازه که در رفتن به پایگاه N هواپیمایت را به عقب می‌راند در مراجعت از آنجا آن را به جلو رانده سرعتش را زیاد می‌کند. زمانی را که در وقت رفتن از دست داده‌باشی به هنگام برگشتن جبران می‌کنی.

ـ تو این‌طور فکر می‌کنی ؟!

ـ مسلماً که چنین است.

ـ چنین برمی‌آید که در این باره بی‌تجربه هستی و از **نظریهٔ نسبیت** اطلاعی نداری.

ـ نظریهٔ نسبیت چه ربطی به موضوع ما دارد؟

ـ در حقیقت این موضوع اساس آزمایشی است که **مایکلسون** دربارهٔ حرکت یک موج در «جریان اتر» انجام داد، جریانی که بایستی در اثر حرکت زمین در مادهٔ «اتر» پدید آمده باشد.

جاک به گفتهٔ خود خطاب به همکارش چنین ادامه داد:

مسألهٔ پرواز خودم را تا پایگاه N به زبان معمولی طوری تشریح می‌کنم که اگر ریاضیات را هم فراموش کرده باشی به اشکالی برنخوری. به هنگام رفتن تا پایگاه N که باد در خلاف جهت حرکت می‌وزد سرعت هواپیما کم می‌شود و در نتیجه زمان بیشتری برای رسیدن به پایگاه لازم است: برعکس به هنگام مراجعت باد که در جهت حرکت هواپیما می‌وزد سرعت هواپیما را زیاد کرده و در نتیجه زمان کمتری صرف خواهد شد. مقاومت باد و در نتیجه کندی سرعت هواپیما در زمانی طولانیتر انجام می‌گیرد و ازدیاد سرعت آن در زمانی کمتر و روی هم رفته

زمانی که از دست می‌رود بیش از زمانی است که صرفه‌جویی می‌شود و باخت بیش از برد است.

ممکن است که از این استدلال ساده قانع نشده باشی، اما اگر ریاضیات و حل معادلات را به خاطر داشته باشی توضیح قانع‌کننده‌تری به تو خواهم داد. فرض کنیم v سرعت هواپیمای من (سرعت آن نسبت به هوا) و v' سرعت باد باشد. اگر l فاصلهٔ پایگاه N تا اینجا فرض شود، زمان لازم برای رفتن از اینجا تا N برابر خواهد شد با $\frac{l}{v-v'}$ و زمان برگشتن از آنجا برابر خواهد بود با $\frac{l}{v+v'}$ و در نتیجه زمان رفت و برگشت روی هم چنین خواهد شد:

$$T=\frac{l}{v-v'}+\frac{l}{v+v'}=\frac{2lv}{v^2-v'^2}=\frac{2l}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{v'^2}{v^2}}$$

اگر هوا کاملاً آرام باشد، $v'=0$ بوده و T برابر $\frac{2l}{v}$ می‌باشد. اما اگر v' وجود داشته باشد، در این صورت مقدار T بیش از مقدار $\frac{2l}{v}$ خواهد بود.

فرض کنیم که سرعت باد برابر با نصف سرعت هواپیما یعنی $\frac{v'}{v}=\frac{1}{2}$ باشد. در این صورت زمان t چنین خواهد شد:

$$T=\frac{2l}{v}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2l}{v}\times\frac{4}{3}$$

ملاحظه می‌شود که زمان رفت و برگشت $\frac{4}{3}$ برابر شده است. اگر سرعت باد با سرعت هواپیما برابر باشد، در این صورت زمان لازم زمانی نامحدود خواهد بود.

از اینها گذشته و صرف نظر از مسألهٔ مقاومت باد، من از این جهت امروز به پایگاه N پرواز نمی‌کنم که به وسیلهٔ تلفن چنین دستوری را به من داده‌اند. انجام مأموریت من به فردا موکول شده است.

همکار جاک از وی خواست حال که آنجا می‌ماند و وقت دارد، راجع به نظریهٔ نسبیت و آزمایش مایکلسون توضیحات بیشتری بدهد و جاک چنین توضیح داد:

این یک اصل است. بعضی از فیزیکدانان برای اینکه چگونگی انتشارات نور را در فضا توجیه کنند، فرض کردند که تمام فضا را یک نوع مادهٔ سبک به نام «اتر» فرا گرفته است. مایکلسون فکر کرد که اگر چنین ماده‌ای وجود داشته باشد، باید در نتیجهٔ حرکت زمین در آن یک نوع «جریان اتر» یا «باد اتر» به‌وجود آید. زمین با سرعت حدود ۳۰ کیلومتر در ثانیه دور خورشید می‌گردد و ما که بر زمین مستقر هستیم باید وجود چنین وزشی را حس بکنیم. همچنانکه وقتی در هواپیمای روباز حرکت می‌کنیم، وزش باد را در اطراف خود حس می‌کنیم.

باری، مایکلسون در آزمایش خود از یک منبع نور یک شعاع نورانی را در جهت جریان فرضی اتر و یک شعاع نورانی را در جهت عمود بر آن به خارج فرستاد و با استفاده از انعکاس، این دو شعاع را به منبع بازگرداند و زمان وصول آنها را به منبع با هم مقایسه کرد. قاعدةً باید شعاعی که در جهت جریان اتر فرستاده باشد، دیرتر از شعاع دیگر واصل شده باشد، همان طور که برای رفت و برگشت هواپیمای خود در جهت حرکت باد توضیح دادم و حساب کردم. مایکلسون امیدوار بود که با مقایسهٔ زمان برگشت دو شعاع نورانی تغییر مکان زمین را نسبت به اتر تعیین کند.

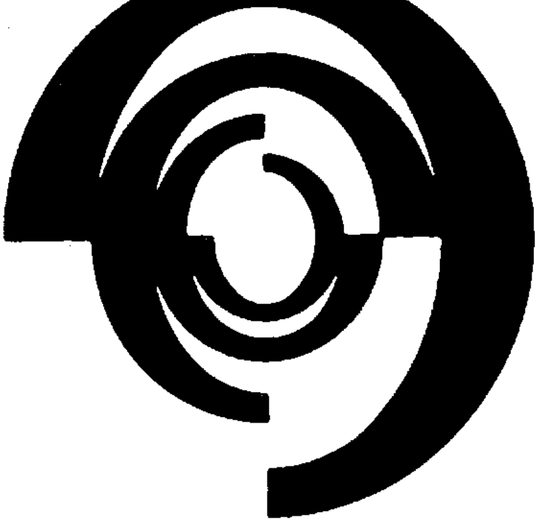
اما برخلاف تصور، هر دو شعاع در یک لحظه به منبع واصل شدند، بدون آنکه یکی نسبت به دیگری تأخیر داشته باشد. نتیجهٔ این آزمایش تا مدتها فیزیکدانان را متحیر ساخته بود، تا اینکه اینشتین با ارائه نظریهٔ مشهور خود راجع به نسبیت، تصورات گذشتگان را دربارهٔ فضا و زمان دگرگون ساخت و علت نتیجهٔ غیرمنتظرهٔ آزمایش مایکلسون را بیان داشت.

من تصور نمی‌کردم که موضوع پرواز من تا پایگاه N به نظریهٔ نسبیت اینشتین منتهی شود. شاید بگویید که طرح مسألهٔ پرواز تا پایگاه N در مقابل نظریهٔ نسبیت ابلهانه است، اما موضوع آن است که اغلب تصور می‌کنند اثر باد در حرکت هواپیما در جهت وزش باد در رفت و برگشت آن خنثی می‌شود.

در حاشیه تابع

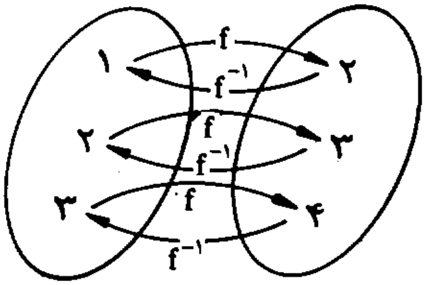
(قسمت چهارم)

●حمیدرضا امیری



تابع معکوس و معکوس تابع

فرض کنید روی مجموعهٔ اعداد طبیعی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+1$ تعریف شده باشد و داشته باشیم $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ حال اگر وارون f یعنی f^{-1} را تشکیل دهیم، خواهیم داشت $f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ اگر نمودار پیکانی این دو رابطه را رسم کرده، با هم مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که این دو رابطه اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی هر عضوی را که f از مجموعهٔ اول به مجموعهٔ دوم منتقل می‌کند f^{-1}، آن عضو را به‌جای قبلی خود برمی‌گرداند.



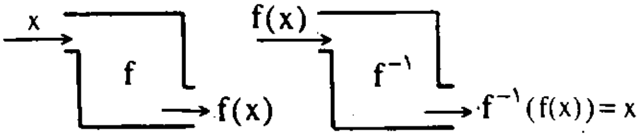
$f(1)=2\ ,\ f^{-1}(2)=1$

$f(2)=3\ ,\ f^{-1}(3)=2$

$f(3)=4\ ,\ f^{-1}(4)=3$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود همواره، $D_f=R_{f^{-1}}$ و $R_f=D_{f^{-1}}$.

این مطلب را می‌توان به‌صورت زیر نیز توجیه کرد که اگر f و f^{-1} را در حکم دو ماشین تابع در نظر بگیریم، همواره ورودی تابع f، xها بوده و خروجی آن $f(x)$ و ورودی تابع f^{-1}، $f(x)$ها هستند و خروجی f^{-1}، xها می‌باشند.



در حالت کلّی اگر $f(x)=y$، در این صورت $f^{-1}(y)=x$ و برعکس، حال با توجه به تابع f که در ابتدای این مبحث به آن اشاره شد یعنی $f(x)=x+1$ و این‌که تابع f روی اعضای دامنه به این شکل اثر می‌کند، که ۱ واحد به آنها اضافه می‌کند، می‌خواهیم ضابطهٔ f^{-1} را بیابیم، بدیهی است که اگر $y=x+1$، ضابطهٔ f باشد (ضابطهٔ f برحسب x است) کافی است x را برحسب y بیابیم.یعنی $x=y-1$ که این ضابطه، ضابطهٔ f^{-1} است،یعنی $f^{-1}(y)=y-1$، اگردر حالت کلّی f^{-1} را برحسب x یا z بیان کنیم به ترتیب خواهیم داشت، $f^{-1}(x)=x-1$ و $f^{-1}(z)=z-1$.

بنابراین اگر بتوانیم ضابطهٔ f^{-1} را از روی ضابطهٔ f به‌دست آوریم، در این حالت و با توجه به تعریف ترکیب توابع می‌توانیم تابع معکوس را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: تابعهای f و g معکوس یکدیگرند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

الف) به ازای هر x از D_g ، $(fog)(x) = f(g(x)) = x$

ب) به ازای هر x از D_f ، $(gof)(x) = g(f(x)) = x$

در این صورت g را با f^{-1} و f را با g^{-1} نمایش می‌دهند.

مثال: نشان دهید که دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ وارون یکدیگرند.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = (x-1) + 1 = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (\sqrt[3]{x^3+1}) - 1 = \sqrt[3]{x^3} = x$$

پس طبق تعریف دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

شاید این مطلب در ذهن ایجاد شود که چون $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$ پس اگر f و g وارون هم باشند باید $fog = gof$ که این مطلب در حالت کلّی صحیح نمی‌باشد و برای روشن شدن مطلب f و g را به صورت مجموعه‌هایی از زوجهای مرتب و وارون یکدیگر در نظر می‌گیریم، توجه کنید!

فرض کنیم $f = \{(2,3)\ (3,4),(1,5)\}$

$$\Rightarrow f^{-1} = g = \{(3,2),(4,3),(5,1)\}$$

$$fog = \{(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

$$gof = \{(2,2),(3,3),(1,1)\}$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید fog و gof هر دو تابعهای همانی هستند ولی $fog \neq gof$ می‌باشد.

نامی که در ابتدای این بحث به‌کار بردیم، **تابع معکوس و معکوس تابع** بود. اکنون این سؤال پیش می‌آید که، آیا همواره اگر f یک تابع باشد، f^{-1} نیز تابع است یا خیر؟

مثلاً اگر $f = \{(2,3)(3,4)\}$ ، واضح است که f طبق تعریف تابع، یک تابع است و $f^{-1} = \{(3,2)(4,3)\}$ نیز تابع است که در این حالت f^{-1} را تابع معکوس f نامیده و اصطلاحاً می‌گوییم تابع f **معکوس‌پذیر** است. امّا اگر فرض کنیم $f = \{(2,3)(3,3)\}$ ، f تابع است ولی $f^{-1} = \{(3,2)(3,3)\}$ (با توجه به تعریف تابع) تابع نمی‌باشد، که در این حالت f^{-1} را فقط می‌توان معکوس f نامیده و می‌گوییم f معکوس‌پذیر نیست.

اگر کمی دقت کنید، مشاهده می‌کنید در این مثال، f تابع است ولی یک‌به یک نیست. یعنی زوج مرتبهای آن دارای مؤلفه‌های دوم برابر هستند و همین امر باعث می‌شود در f^{-1} زوج مرتبهایی بامؤلفه های اوّل برابرتولیدشوند که تابع بودن f^{-1} را نقض می‌کند و اگر چنین زوج مرتبهایی (با مؤلفه‌های دوم برابر) در f یافت نشود، در f^{-1} نیز زوج مرتبهایی با مؤلفه‌های اوّل برابر یافت نخواهد شد و f^{-1} تابع می‌شود. پس معکوس‌پذیر بودن تابع f را به‌صورت زیر به شکل قضیه‌ای می‌توان بیان کرد:

قضیه: تابع f معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

مثال: ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ معکوس‌پذیر است و ضابطهٔ تابع معکوس آن را بیابید.

برای اثبات معکوس‌پذیری تابع طبق قضیه کافی است ثابت کنیم تابع f یک‌به‌یک است پس،

فرض کنیم: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1 - 1}{x_1 + 2} = \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 2}$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 + 4x_1 - x_2 - 2 = 2x_1x_2 + 4x_2 - x_1 - 2$$

$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ تابع f یک‌به‌یک است.

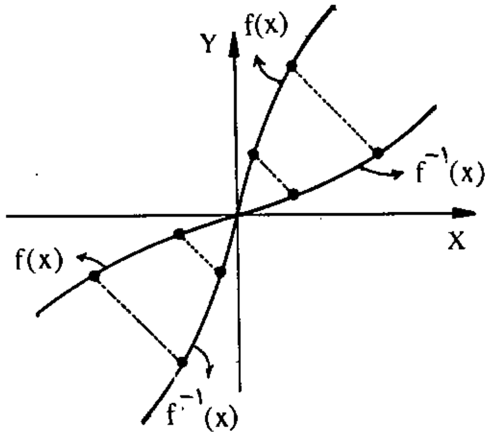
فرض کنیم $y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = 2x - 1$

$$\Rightarrow xy - 2x = -2y - 1 \Rightarrow x(y-2) = -2y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2y-1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{-2y-1}{y-2}$$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2}$ (ضابطهٔ f^{-1} برحسب x)

تذکر مهم: می‌خواهیم از نظر نموداری، وضعیت یک تابع معکوس‌پذیر و معکوس آن را بررسی کنیم، اولاً چون f معکوس‌پذیر است پس طبق قضیه یک‌به‌یک است و لذا خطی موازی با محور xها نمی‌تواند نمودار f را در بیش از یک نقطه قطع کند، از طرفی اگر $(a,b) \in f$ یا $f(a) = b$ با توجه به تعریف f^{-1} واضح است که $(b,a) \in f^{-1}$ یا $f^{-1}(b) = a$ ، پس از آن‌جایی که دو نقطهٔ (a,b) و (b,a) نسبت به خط $y = x$ تقارن دارند به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ محوری یکدیگرند. پس به‌راحتی با دراختیار داشتن نمودار تابع f و توجه به مطلب فوق به‌راحتی می‌توان به نمودار f^{-1} دست پیدا کرد. در شکل زیر این مطلب مشاهده می‌شود:



مثال: فرض کنید $f(x)=x^{۳}-۱$ و $g(x)=۲x+۱$ در این صورت هریک از تابعهای $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ و $(fog)^{-۱}$ و $g^{-۱}of^{-۱}$ را محاسبه کرده و رابطهٔ $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ را تحقیق کنید.

چون f و g هر دو تابعهای یک‌به‌یک هستند لذا معکوس‌پذیر بوده و داریم :

$y=x-۱ \Rightarrow x=y+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x+۱$

$y=۲x+۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(y-۱) \Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)$

$(fog)(x)=f(g(x))=(۲x+۱)-۱=۲x$

$\Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=\frac{x}{۲} \quad (۱)$

$(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=\frac{۱}{۲}[(x+۱)-۱]=\frac{۱}{۲}x \quad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow (fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$

تذکر مهمّ: مطلبی که در مثال قبل تحقیق شد، تصادفی نبوده و در حالت کلّی نیز برقرار بوده و می‌توان آن را به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کرد :

قضیه: اگر f و g دو تابع معکوس‌پذیر باشند همواره، $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$.

نتیجهٔ مهمّ: این قضیه را می‌توان به‌صورت بسیار مناسبی در محاسبهٔ وارون تابعهایی که بتوان آنها را به شکل ترکیب چند تابع نوشت، به‌کار برد.

مثال: وارون تابع با ضابطهٔ $h(x)=\frac{۱}{۳}(x+۳)^{۴}$ را به‌دست آورید.

قبل از محاسبهٔ وارون f، ابتدا متذکر می‌شویم که قضیهٔ قبل قابل تعمیم است، یعنی برای سه تابع f و g و h و حتی بیشتر نیز می‌توان قضیه را به‌کار برد مثلاً برای سه تابع f و g و h داریم:

$(fogoh)^{-۱}=h^{-۱}og^{-۱}of^{-۱}$

حال اگر قرار دهیم $f(x)=x+۳$ و $g(x)=x^{۴}$ و $k(x)=\frac{۱}{۳}x$ واضح است که

$k^{-۱}(x)=۳x \ ,g^{-۱}(x)=\sqrt[۴]{x} \ ,f^{-۱}(x)=x-۳$

و $h(x)=(kogof)(x)$

زیرا $(kogof)(x)=ko(g(f(x))\ ,\ g(f(x))=(x+۳)^{۴}$

$\Rightarrow ko(g(f(x))=\frac{۱}{۳}(x+۳)^{۴}$

پس : $h^{-۱}(x)=(f^{-۱}og^{-۱}ok^{-۱})(x)=f^{-۱}o((g^{-۱}ok^{-۱})(x))$

$\Rightarrow h^{-۱}(x)=f^{-۱}o(g^{-۱}(k^{-۱}(x)))\ ,\ g^{-۱}(k^{-۱}(x))=\sqrt[۴]{۳x}$

$\Rightarrow h^{-۱}(x)=f^{-۱}(\sqrt[۴]{۳x})=(\sqrt[۴]{۳x})-۳$

تمرین:

۱ ــ تابع f به معادلهٔ $f(x)=x^{۲}-۲x+۳$ در کدام یک از فاصله‌های زیر معکوس پذیر است.

الف) $(-\infty,۱)$ ب) $(-\infty,۱]$ ج) $(۱,+\infty)$ د) $[۱,+\infty)$

۲ ــ ثابت کنید تابع f به معادلهٔ $f(x)=۲\sqrt{x-۲}+x$ معکوس‌پذیر بوده و ضابطهٔ $f^{-۱}$ را برحسب x بیابید.

۳ ــ ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ معکوس‌پذیر بوده و ضابطهٔ $f^{-۱}$ را بیابید.

۴ ــ اگر $h(x)=۴(x-۱)^{۳}$ در این صورت ضابطهٔ $h^{-۱}$ را بیابید.

۵ ــ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}x+۲ & x\geq ۱\\ ۲x-۱ & x<۱\end{cases}$ در این صورت $f^{-۱}(x)$ را بیابید.

۶ ــ هر یک از حالتهای زیر را بررسی کنید که آیا دو تابع داده شدهٔ f و g، وارون یکدیگرند یا خیر؟

الف) $f(x)=۲x^{۳}-۱$ و $g(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲y+۱}{۳}}$

ب) $f(x)=2x+5$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-5)$

ج) $f(x)=x^5+1$ و $g(x)=\sqrt[5]{x-1}$

د) $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\arcsin x$

هـ) $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\mathrm{cotg}(x)$

۷ ـ کدام‌یک از تابعهای زیر معکوس‌پذیر می‌باشند؟

الف) $f(x)=x^2+x$ ب) $f(x)=x^2-x$ (برای هر $x\geq 0$)

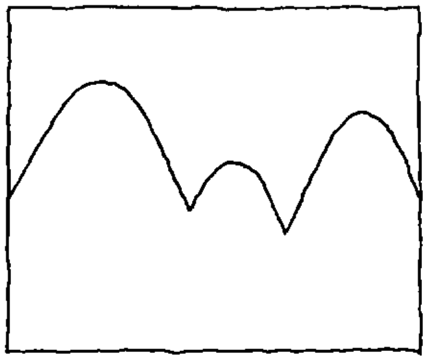
ج) $f(x)=2x^3-4$ د) $f(x)=\frac{4-x}{3x+2}$

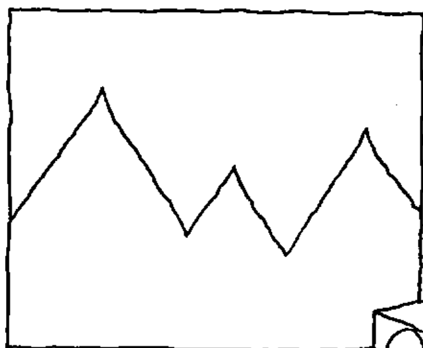
هـ) $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$ (برای هر $x\geq 0$)

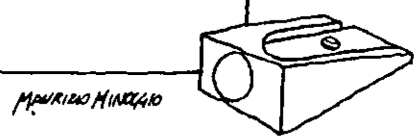
و) $f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$

۸ ـ ثابت کنید که اگر تابع f، زوج باشد، معکوس‌پذیر نیست.

۹ ـ ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ با معکوس خود برابر است.









ادب ریاضی

اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً احتیاج به تجربه نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجه و علاقه‌مندی لازم بود. اما چه کسی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی است که چون گلهٔ خود را به چراگاه می‌برد، شبانگاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همهٔ آنها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد، اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً جهل او مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آنها را معین کند، زیرا مرغ خانگی نیز که حساب و حساب کردن نمی‌داند هنگامی که یکی از جوجگان او غائب باشند ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

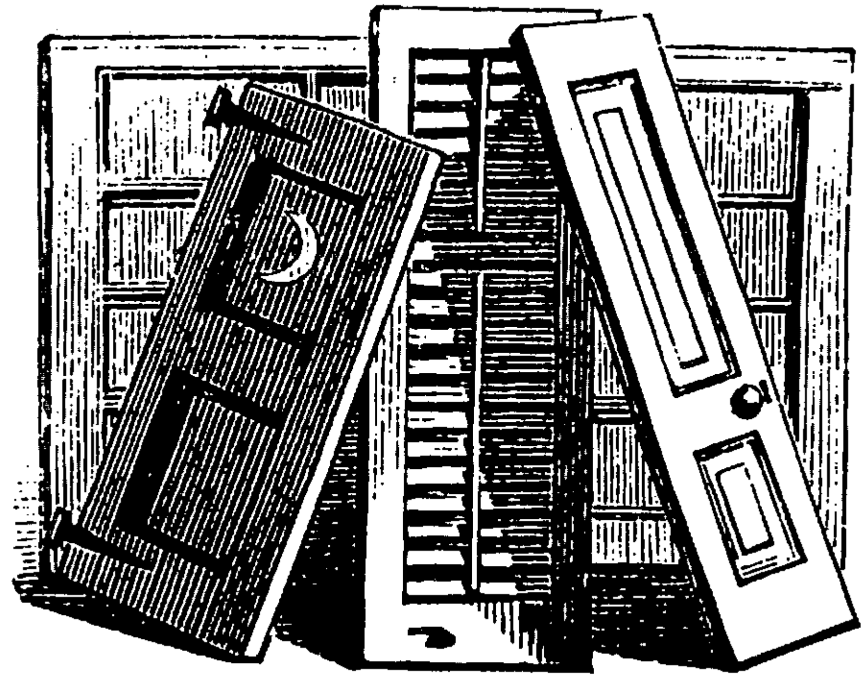
اما به زودی چه چوپان و چه آن کشاورزی که احتیاج داشت تا وسعت مزرعهٔ خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر درنتیجهٔ احتیاج مجبور شدند نوعی وسیلهٔ شمارش دقیقتر، غیر از غریزهٔ طبیعی خود، به‌وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب کردن آماده و مهیایی بود.

تاریخ علوم

پی‌یر روسو

ترجمه: حسن صفاری

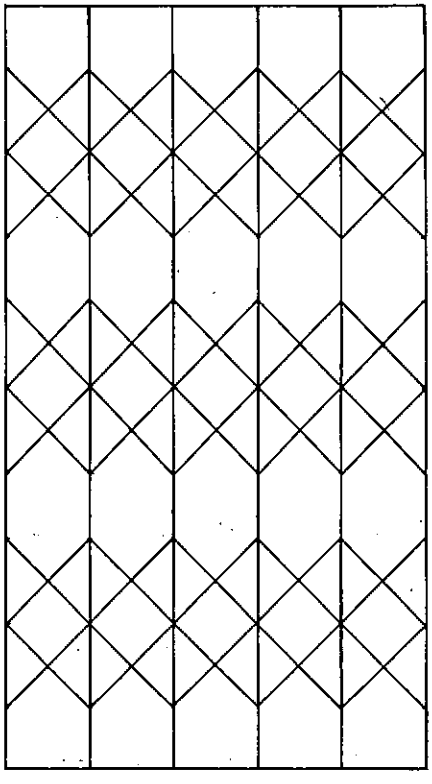
در کشویی



● دکتر احمد شرف‌الدین

یک مسألهٔ زیبای هندسه

شکل زیر طرح کلی یک لنگه درکشویی (آکوردئونی) را نشان می‌دهد. در کشویی فلزی علاوه بر محکم بودن چون به آسانی جمع می‌شود و پس از جمع شدن در کنار جرز مغازه جای کمی اشغال می‌کند مورد توجه است. از خارج مغازه‌ای که در کشویی دارد، می‌توان داخل آن را مشاهده کرد، از تنوع کالاهای آن مطلع شد و این از محاسن در کشویی است.

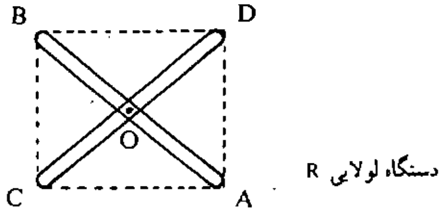


شکل ۱

برای تحلیل اساس هندسی در کشویی، ابتدا ترکیب لوزیها را در نظر گرفته و پس از آن که استدلال را به پایان رساندم و درباره مطلب بیشتر فکر کردم، دریافتم که بهتر است تحلیل اساس هندسی در کشویی بر مبنای خاصیت مستطیل باشد.

خاصیت مستطیل: دو قطر یک مستطیل مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند و برعکس اگر در یک چهار ضلعی دو قطر مساوی باشند و یکدیگر را نصف کنند آن چهارضلعی مستطیل است.

به کارگیری خاصیت مستطیل در صنعت: وسطهای دو تسمه AB و CD را که دارای طولهای مساوی‌اند سوراخ می‌کنیم و از سوراخ آنها لولا عبور می‌دهیم. هنگامی که دو



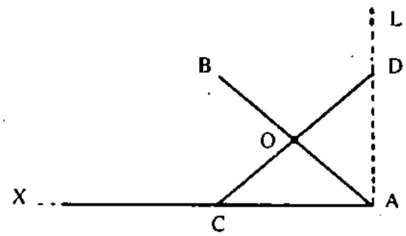
شکل ۲

تسمه لولا شده را دور لولای O می‌چرخانیم، شکل چهارضلعی ACBD تغییر می‌کند، ولی این چهارضلعی همواره مستطیل است، زیرا دو قطر آن مساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

برای آسانی کار، دستگاه لولایی حاصل از دو تسمه لولا شده مذکور در بالا را R می‌نامیم.

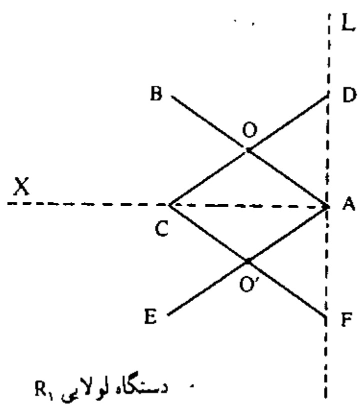
ترکیب دستگاههای R: در لولایی از چند دستگاه R و چند تیغه عمودی (عمود بر سطح زمین) که به طرز مناسب به هم لولا شده‌اند تشکیل شده است.

اگر رأس A از یک دستگاه لولایی R را ثابت نگاه داریم و رأس C را روی نیم خطی چون AX به طرف نقطه A حرکت دهیم، نقطه D روی نیم‌خط AL که از نقطه A بر نیم‌خط AX عمود است حرکت می‌کند. شکل (۳)



شکل ۳

اکنون دو دستگاه لولایی از نوع R می‌سازیم و سپس آن دو را مانند شکل (۴) به هم لولا می‌کنیم. یکی از این دو دستگاه تشکیل شده است از دو تسمه هم طول AB و CD که در وسطشان نقطه O به هم لولا شده‌اند. دستگاه دیگر از دو تسمه

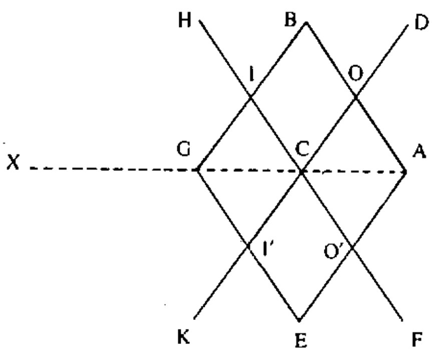


شکل ۴

هم طول AE و CF که در وسطشان به یکدیگر لولا شده‌اند تشکیل شده است. دو دستگاه مذکور در دو نقطه A و C به هم لولا شده‌اند. دستگاه حاصل از دو دستگاه مذکور را دستگاه R_1 می‌نامیم.

اگر نقطه A را ثابت نگاه داریم و نقطه C را روی نیم‌خطی چون AX به سوی نقطه A حرکت دهیم، دو نقطه D و F روی خط راست L که از نقطه A بر خط AX عمود شده باشد حرکت می‌کند. حرکت نقطه C موجب حرکت دو نقطه B و E می‌شود، اما سه نقطه C ،B و E همواره بر یک خط راست قرار دارند. چهارضلعی AOCO′ یک لوزی است، زیرا طولهای چهارضلع آن مساوی‌اند. وقتی نقطه C را به طرف نقطه A می‌بریم، شکل لوزی تغییر می‌کند و دو رأس O و O′ آن از خط AX دور می‌شوند. وقتی نقطه C را از نقطه A دور می‌کنیم دو نقطه O و O′ به خط AX نزدیک می‌شوند. خط متحرک OO′ همواره موازی خط L است.

اکنون دو دستگاه لولایی به شکل R_1 می‌سازیم و آنها را مانند شکل (۵) به هم لولا می‌کنیم. دستگاه حاصل را R_2 می‌نامیم.



شکل ۵

در دستگاه R_2 دو تسمه AB و GB در نقطه B و دو تسمه AE و GE در نقطه E لولا شده‌اند. چهار تسمه CD، CH، CK و CF در نقطه C لولا شده اند.

در دستگاه لولایی R_2 نقطهٔ A را ثابت نگاه می‌داریم و نقطهٔ G را روی نیم‌خطی چون AX به طرف نقطهٔ A حرکت می‌دهیم. با حرکت نقطهٔ G به طرف نقطهٔ A، شکل دستگاه لولایی تغییر

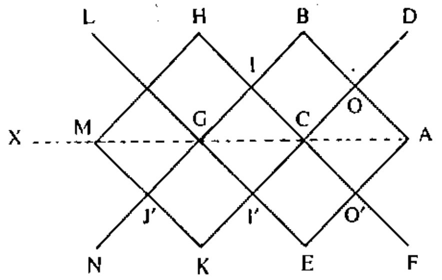
می‌کند اما نقطه C همواره بر وسط پاره‌خط متغیر GA قرار دارد. برای اثبات این مطلب می‌گوییم در چهارضلعی BICO طولهای هر چهارضلعی برابراند پس OC‖BG و IC‖BA. خط OC که از نقطهٔ O وسط ضلع AB از مثلث ABC موازی ضلع BG رسم شده از وسط ضلع AG می‌گذرد. به همین دلیل خط IC از وسط ضلع AG می‌گذرد پس نقطهٔ C وسط ضلع GA است.

وقتی نقطهٔ G را به طرف نقطهٔ A ببریم، دستگاه لولایی R_2 تغییر شکل می‌دهد اما در تمام لحظات، دستگاه لولایی R_1 که در سمت راست خط BCE واقع است با دستگاه لولایی R_1 که در سمت چپ BCE قرار دارد با هم مساوی‌اند.

چون دو چهار ضلعی BICO و IGI′C لوزی‌اند پس CO‖BI و CI′‖IG پس CD و CK در یک امتداداند. از این جهت به جای دو تسمه CD و CK فقط یک تسمه DK به کار می‌بریم. با همین شیوه استدلال نتیجه می‌گیریم که به جای دو تسمه CH و CF می‌توان یک تسمه HF به کار برد.

اکنون یک دستگاه لولایی R_1 در سمت چپ دستگاه لولایی R_2 قرار می‌دهیم و آنها را مانند شکل (۶) به یکدیگر لولا می‌کنیم و دستگاه حاصل را R_3 می‌نامیم. دو دستگاه لولایی R_2 و R_1 در نقاط H، G و K به هم لولا شده‌اند.

اگر نقطهٔ M را روی نیم‌خطی چون AX به طرف A حرکت دهیم، آنگاه دو نقطهٔ G و C به طرف نقطهٔ A حرکت می‌کنند و



دستگاه لولایی R_2

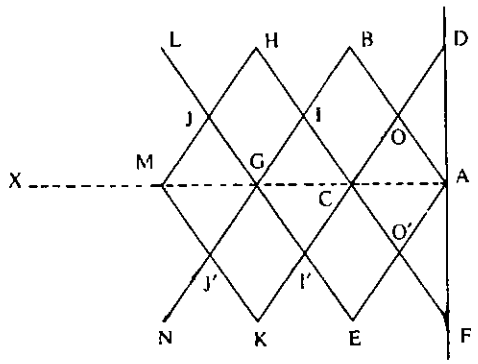
شکل ۶

همواره چنین داریم:

$$\overline{MG} = \overline{GC} = \overline{GA}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که دو خط GB و GN همواره در یک امتداداند پس بجای دو تسمه GB و GN فقط یک تسمه BN به کار می‌بریم. همچنین بجای دو تسمه GE و GL یک تسمه EL به کار می‌بریم.

ساختمان در کشویی: دو تیغه فلزی هم طول M_1M_2 و $M'_1M'_2$ اختیار می‌کنیم و آنها را به جرز مغازه در امتداد عمود برزمین و نزدیک به‌هم استوار می‌کنیم، سپس دستگاه لولایی R_3 را که در شکل (۶) نموده شده است طوری قرار می‌دهیم که سه نقطهٔ D، A و F بین دو تیغه مذکور قرار گیرد. این دستگاه لولایی را در یک یا دو نقطه به دو میله M_1M_2 و $M'_1M'_2$ لوله می‌کنیم. شکل (۷)



شکل ۷

اگر دستگاه R_3 فقط در یک نقطه مثلاً در نقطهٔ A به دو تیغه لولا شود، آنگاه این دستگاه دور لولا به طرف پایین می‌چرخد.

اگر دستگاه لولایی R_3 در دو نقطه یا سه نقطه به دو تیغه مذکور لولا شود، آنگاه شبکه R_3 باز و بسته نمی‌شود (منظور آن است که با وارد کردن نیرو به تسمه‌های شبکه R_3 هیچ یک از تسمه‌ها حرکت نمی‌کنند). برای اثبات حکم اخیرالذکر فرض می‌کنیم دستگاه لولایی مذکور در دو نقطه D و F به دو تیغه M_1M_2 و $M'_1M'_2$ لولا شده باشد.

در مثلث DCF طولهای سه ضلع معین‌اند (ثابت‌اند)، زیرا دو پاره‌خط CD و CF نمایشگر دو تسمه CD و CF‌اند که طولشان

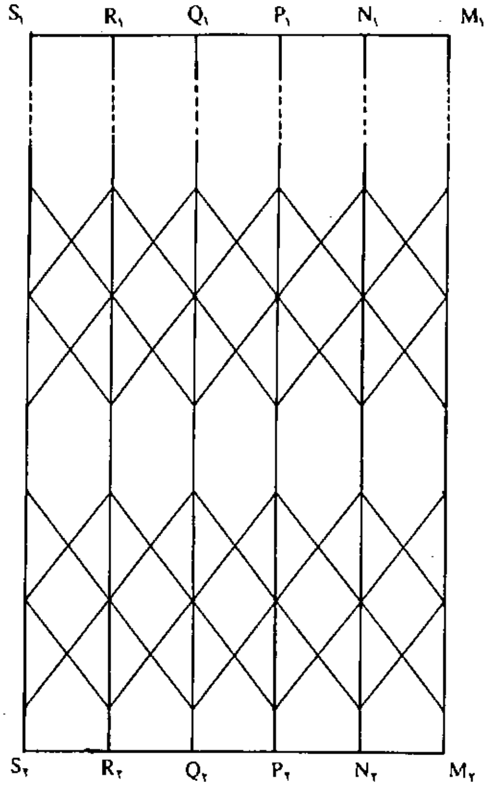
ثابت است و دو نقطهٔ D و F نمـایش جـای دو لولای ثابت می‌باشند، پس طول FD ثابت است. پس دو تسـمه CD و CF دارای وضـعیت ثابت‌اند، یعنی با وارد کردن نیرو به دستگاه لولایی R_2 دو تسمه مذکور حرکت نمی‌کنند.

چون CD جزیی از تسمه DK و همچنین CF جزیی از تسمه FH است پس با وارد شدن نیرو به شبکه لولایی R_2، دو تسمه DK و FH حرکت نمی‌کنند، بنابراین تمام نقاط دو تسمه مذکور وضع ثابت دارند. پس نقطهٔ O وضع ثابت دارد. حـال می‌گوییم دو نقطهٔ A و O از تسمه AB دارای وضع ثابت‌اند، پس تسمه AB وضع ثابت دارد و لذا نقطه B وضع ثابت دارد (منظور آن است که اگر نیرویی به شبکه R_2 وارد شود لولای B حرکت نمی‌کند). اکنون می‌گوییم چون تسمه FH وضعیت ثابتی دارد پس نقطه I وضع ثابتی دارد. اکنون توجه کنیم که دو نقطهٔ B و I از تسمه BN وضع ثابت دارند، پس این تسمه وضع ثابت دارد. این شیوه استدلال را ادامه می‌دهیم و گام به‌گام به پیش می‌رویم تا نتیجه بگیریم که تمام تسمه‌های شبکه R_2 که در دو نقطه D و F به دو تیغه M_1M_2 و $M'_1M'_2$ لولا شده‌اند، حرکت نمی‌کنند.

تیغه‌های عـمودی در کشـویی: در شکل (۸) یک لنگه در کشـویی نمایش شـده است. در این شکل خطهـای M_1M_2، N_1N_2، P_1P_2، .... نمایش تیغه‌های فلزی عمود به سطح زمین‌اند که در جلوی در کشـویی قـرار دارند. در پشت در کشـویی تیغـه‌های فلزی $M'_1M'_2$، $N'_1N'_2$، $P'_1P'_2$، .... قـرار دارند که به ترتیب در پشت تیغه‌های M_1M_2، N_1N_2، P_1P_2، .... می‌باشند (منظور از جلو در کشویی سمتی از در کشویی است که به طرف خارج مغازه است).

هر جـفت تیـغـه عـمودی رو به روی هم (N_1N_2، $N'_1N'_2$)، (P_1P_2 و $P'_1P'_2$)، .... در بالا و پایین به هم متـصل شـده‌اند (شکل ۹). مـیله اتصـال بالایی می‌تواند در داخل شیـار یک ناودانک افقی حـرکت کند. این ناودانک فلزی قسمت بالای چهارچوب در را تشکیل می‌دهد. میله اتصال پایینی می‌تواند در شیـار بین دو تیغه فلزی که روی زمین محکم شده‌اند حرکت کند.

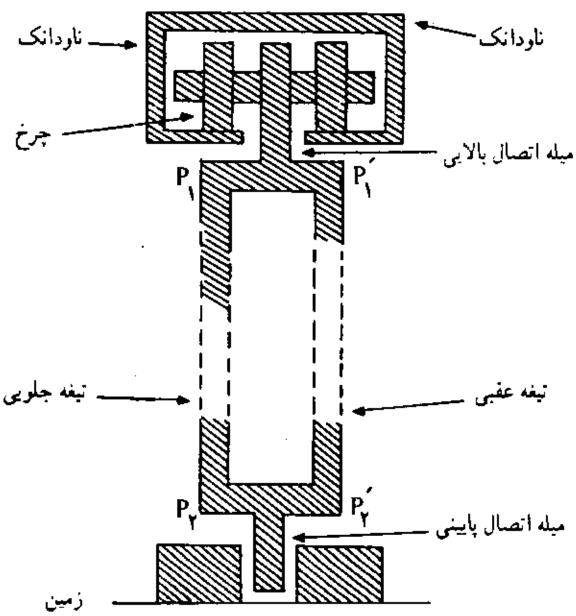
چهـارچوب در کشـویی: چهـارچوب در کشـویی تشکیل



شکل ۸

می‌شود از:

۱ ـ چهـار جفت تیـغه فلزی که در دو طرف مغازه به جرز محکم شده‌اند (دو جفت در سمت راست و دو جفت در سمت چپ).



شکل ۹

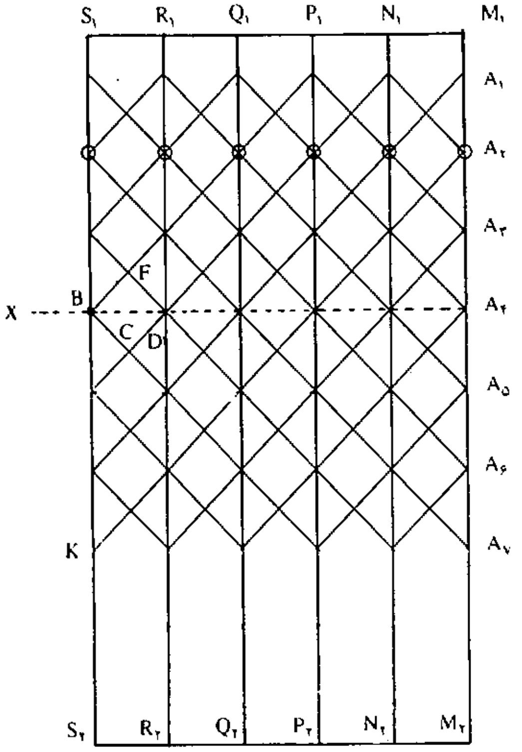
۲ ــ دو تیغه فلزی که در آستانه در به‌طور موازی با هم قرار دارند. این دو تیغه اندکی در زمین فرو رفته‌اند. انتهای آنها به تیغه‌های جرز متصل‌اند. بین این دو تیغه شیار باریکی است که میله‌های اتصال پایینی تیغه‌ها می‌توانند در آن حرکت نمایند.

۳ ــ در قسمت بالای چهارچوب یک ناودانک فلزی قرار دارد که به تیغه‌های جرز متصل است. میله‌های اتصال بالایی تیغه‌های عمودی متحرک، می‌توانند در شیار ناودانک حرکت کنند (به جز تیغه‌های دو جرز بقیه تیغه‌ها می‌توانند حرکت کنند). میله‌های اتصال بالایی اگر به‌وسیله چرخهایی بر سطح پایین ناودانک متکی شوند، آنگاه فشار وزن تیغه‌ها و شبکه لولایی به ناودانک وارد می‌شود و درنتیجه باز و بسته شدن در کشویی روان می‌شود (یعنی اگر تیغه قائم S_1S_2 را به طرف تیغه ثابت M_1M_2 حرکت دهیم تیغه‌های N_1N_2 ، P_1P_2 ، Q_1Q_2 ، R_1R_2 ، به روانی به طرف تیغه M_1M_2 حرکت می‌کنند).

فایده شیار پایین آستانه چهارچوب در کشویی آن است که دامنه نوسان تیغه‌های بلند عمودی را کم می‌کند.

اندکی بیشتر فکر کنیم: اکنون از خود می‌پرسیم که چرا در کشویی را به شکل (۱) می‌سازند و به صورت شکل زیر نمی‌سازند.به عبارت دیگر چرا تعداد دستگاههای لولایی R_1 را در امتداد تیغه‌ها به اندازه کافی زیاد اختیار نمی‌کنند تا شبکه لولایی حاصل در را از بالا تا پایین بپوشاند.

اگر شبکه لولایی در کشویی را در دو نقطه یا بیش از دو نقطه به تیغه‌های جرز لولا کنیم، آنگاه در باز و بسته نمی‌شود یعنی تیغه‌های عمودی و شبکه لولایی نمی‌توانند حرکت کنند. اگر شبکه لولایی در کشویی را در یک نقطه مثلاً A_4 به تیغه‌های جرز لولا کنیم، هنگامی که تیغه‌های عمودی را به طرف جرز فشار می‌دهیم، قسمتی از شبکه لولایی که در پایین خط A_4x قرار دارد به مقدار زیاد پایین می‌رود (خطی را که از نقطه A_4 به خط M_1M_2 عمود شود خط A_4X می‌نامیم) و درنتیجه انتهای پایین شبکه لولایی به زمین‌گیر می‌کند (منظور کف شیار پایین است) و نمی‌تواند جلوتر برود. همچنین قسمتی از شبکه لولایی که در بالای خط A_4X است به مقدار زیاد بالا



شکل ۱۰

می‌رود و درنتیجه انتهای بالایی شبکه به زیر ناودانک گیر می‌کند و نمی‌تواند بیشتر به طرف تیغه M_1M_2 برود.

بیشتر توضیح می‌دهیم : لوزی BCDE را در شبکه شکل ۱۰ در نظر می‌گیریم. تیغه فلزی S_1S_2 را به اندازه a به طرف تیغه جرز یعنی M_1M_2 می‌بریم و فرض می‌کنیم رأس C لوزی از خط A_4X به اندازه L پایین برود و رأس E از همان خط به اندازه L بالا برود، در این صورت نقاطی چون A_7 که پایینترین نقاط شبکه فلزی لولایی‌اند به اندازه (۶L) پایین می‌روند و نقاطی چون A_1 که بالاترین نقاط شبکه فلزی‌اند به اندازه (۶L) بالا می‌روند. در صورتی که در شبکه لولایی شکل (۱) مقدار بالا و پایین رفتن انتهای بالایی و انتهای پایینی هر شبکه جزیی برابر (۲L) است.

خلاصه آن که شبکه لولایی در کشویی اگر به صورت یک پارچه ساخته شود، نمی‌تواند به‌طور کامل باز و بسته شود، مگر آن که انتهای شبکه لولایی در قسمت پایین با آستانه در خیلی فاصله داشته باشد و همچنین فاصله انتهای شبکه لولایی در قسمت بالا با ناودانک خیلی زیاد باشد. در این صورت در

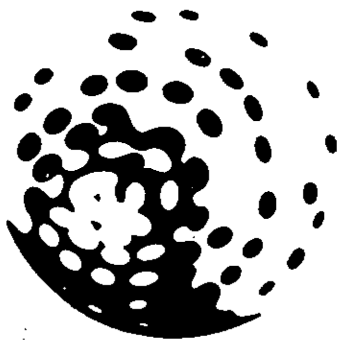
کشویی دارای نقصی بزرگ است.

شبکه لولایی یک پارچه دارای نقص دیگری که در مقابل نقص مذکور در بالا بسیار اندک است: اگر شبکه لولایی یک پارچه باشد، فقط یک لولای ثابت که از دو تیغه M_1M_2، $M'_1M'_2$ می‌گذرد، به کار می‌رود اما اگر شبکه لولا، از سه شبکه جزیی تشکیل شود، آنگاه سه لولای ثابت که از دو تیغه M_1M_2 و $M'_1M'_2$ می‌گذرند به کار می‌آید. در حالت اول فشار روی لولای ثابت بیشتر است.

چند تبصره:

۱ ــ چون در شبکه لولایی در کشویی مقدار زیادی لوزی مشاهده می‌کنیم، به عبارت دیگر چون شبکه لولایی در کشویی تقریباً پوشیده از لوزیهاست، چنین تصور می‌کنیم که تحلیل هندسی در کشویی باید براساس لوزی باشد در صورتی که چنین نیست. درکشویی از دستگاههای لولایی از نوع R تشکیل شده است، لذا تحلیل هندسی در کشویی اگر براساس دستگاههای لولایی به شکل R باشد، بهتر است در واقع امر دستگاه لولایی R، موتیف (MOTEF) شبکه لولایی در کشویی است. از این جهت است که دستگاه لولایی R را موتیف شبکه لولایی در کشویی محسوب می‌دارم.

۲ ــ در تحلیل هندسی شبکه لولایی در کشویی براساس موتیف R، نزدیکی هندسی دستگاه R با بالابری که براساس خاصیت مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود معلوم می‌شود.





تفریح اندیشه ۲

یک استنتاج منطقی

الف: در این معما پنج گزارهٔ حرفی موجودند.
ب: این گزاره نیست.
پ: تنها دو تا از این گزاره‌ها دروغ‌اند.
ت: تنها یکی از آنها راست است.
ث: اگر بتوانید این معما را حل کنید، شخصی بسیار منطقی هستید.
آیا گزارهٔ ث راست است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸



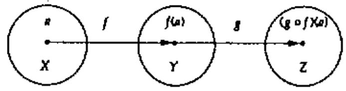
آموزش ترجمه متون ریاضی(۱۸)

● حمیدرضا امیری

10. Composition of Functions

Suppose there are two functions $f : X \longrightarrow Y$ and $g : Y \longrightarrow Z$ in which the domain of g is the codomain of f. Then we denote the composition of these two functions as $g \circ f$, a function mapping X to Z defined as follows:

(10.1) $$\forall a \in X, (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

(10.1F) 

(10.2) The notation $g \circ f$ may seem backward, but it is necessary because we put the argument of the function on the right-hand side. From the sketch (10.1F) you see that f is the function we must apply first. From a we go to $f(a)$. From $f(a)$ we go to $g(f(a))$. We call this function $g \circ f$ and write

$$g \circ f : X \longrightarrow Z.$$

۱۰. ترکیب تابعها

فرض کنیم دو تابع $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ وجود داشته باشند، به طوری که دامنهٔ g هم دامنهٔ f باشد. سپس ترکیب این دو تابع را با نماد gof نمایش داده و آن تابعی است که طبق تعریف زیر X را به Z می‌نگارد:

$$\forall a \in X \ , \ (gof)(a) = g(f(a))$$

ممکن است نماد gof(با توجه به نمودار) یک رابطهٔ پَسرو (برگشتی) به نظر برسد، اما ضروری می‌باشد، زیرا ما شناسهٔ تابع را (a را) در سمت راست قرار می‌دهیم. از نمودار (۱۰.۱F) درمی‌یابید، f تابعی است که می‌بایست اول از آن استفاده کنیم. از a به f(a) می‌رویم. از f(a) به g(f(a)) می‌رویم. ما این تابع را gof نامیده و می‌نویسیم: $gof : X \to Z$.

(If, as some do, we wrote the arguments of our functions on the left, we would denote the same composition as $f \circ g$ and define it as $((a)f)g$. See (18).)

(10.3) You have seen the composition of functions before, as for example $\log(1 + x)$, which is the composition of the logarithm function g with the function f defined by the rule $f(x) = 1 + x$ for all real $x > -1$. Here is another example: a program (f) that acts on the input (a) to produce a value ($f(a)$), which is then taken as the input to a subroutine (g).

(اگر از اول، ما شناسهٔ تابعهایمان را در سمت چپ آنها می‌نوشتیم می‌بایست برای نمایش همان ترکیب، نمایش fog را به کار ببریم و آن را به صورت g((a)f) تعریف کنیم (۱۸ را مشاهده کنید).

شما قبلاً ترکیب تابعها را دیده‌اید، به طور مثال لگاریتم log(۱+x) به صورت ترکیب تابع لگاریتم g با تابع f که با ضابطهٔ f(x)=۱+x برای هر عدد حقیقی x > -۱ تعریف شده است. در اینجا مثال دیگری عنوان می‌کنیم:

برنامهٔ (f) که روی ورودی (a) اثر کرده و مقدار حاصل‌ضربی (f(a)) را به دست می‌دهد و سپس این مقدار به عنوان ورودی زیر برنامهٔ (g) در نظر گرفته می‌شود.

The *chain rule* in calculus tells you how to get the derivative of a composition of functions $g \circ f$ in terms of the derivatives of the functions f and g. In our notation, if the prime ′ denotes derivative, the chain rule is

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Thus to find $(\sin^2 x)'$ we have, for all $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := x^2$$
$$f(x) := \sin x.$$

Then $(g \circ f)(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x$. The derivatives: $g'(x) = 2x$ and $f'(x) = \cos x$. By the chain rule $(g' \circ f)(x) := g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2 \sin x$; multiply these by $f'(x) = \cos x$ to get the result $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$.

قاعدهٔ زنجیری در حساب دیفرانسیل و انتگرال برای شما بیان می‌کند که مشتق‌گیری از ترکیب تابعها یعنی gof بر حسب مشتقهای تابعهای f و g است.

در نمادگذاری ما، اگر پریم نشان دهندهٔ مشتق باشد، قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر است:

$$(gof)' = (g'of).f'$$

بنابراین برای یافتن $(\sin^2 x)'$ خواهیم داشت، برای هر $x \in R$

$$g(x) := x^2$$
$$f(x) := \sin x$$

بنابراین:

$$(gof)(x) := g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 =: \sin^2 x.$$

مشتق: $g'(x) = 2x \ , \ f'(x) = \cos x.$

با توجه به قاعدهٔ زنجیری

$$(g'of)(x) := g'(f(x)) = g'(\sin x) = 2\sin x$$

با ضرب مقدار حاصل در $f'(x) = \cos x$ نتیجه بدست می‌آید: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$

Proposition (10.4) The composition of injections [surjections] is injective [surjective].[†] ∎

The proof, omitted here, is a nice exercise.

Corollary (10.5) The composition of bijections is a bijection.

قضیهٔ (۱۰.۴)

ترکیب ــ تابعهای ــ یک به یک [پوشا] تابعی یک به یک [پوشا] می‌باشد. در اینجا اثبات که تمرین خوبی می‌باشد حذف شده است.

نتیجه (۱۰.۵)

ترکیب ــ تابعهای ــ دو سویی یک تابع دو سویی است.

Proposition (10.6) The inverse of a composition is the composition of the inverses in reverse order:

$$\widehat{(g \circ f)}^{-1} = \hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1}.$$

Proof Notice first that this claim makes sense, because $\widehat{(g \circ f)}^{-1}$, with the above choice of notation in (10.1*F*) for domains and codomains, is a function from $\mathcal{P}(Z)$ to $\mathcal{P}(X)$, and $\hat{g}^{-1}$ maps $\mathcal{P}(Z)$ to $\mathcal{P}(Y)$, and $\hat{f}^{-1}$ maps $\mathcal{P}(Y)$ to $\mathcal{P}(X)$.

قضیهٔ (۱۰.۶)

معکوس یک ترکیب عبارت است از ترکیب معکوسها با ترتیب عکس:

$$\widehat{(gof)}^{-1} = \hat{f}^{-1} o \hat{g}^{-1}$$

اثبات

در ابتدا توجه کنید که این ادعا مفهومی را می‌سازد، زیرا $\widehat{(gof)}^{-1}$، با انتخاب بالا از نمادگذاری(۱۰.۱F) برای دامنه‌ها و هم دامنه‌ها، تابعی است از P(Z) به P(X)، و g^{-1} می‌نگارد P(Z) را به P(Y)، و f^{-1} می‌نگارد P(Y) را به P(X).

Let us prove the claim (10.6) of equality between functions. We have just observed that both have the same domain and codomain. We now must show that

$$\text{(10.7)} \qquad \forall C \subseteq Y, \widehat{(g \circ f)}^{-1}(C) = (\hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1})(C).$$

We can transform the left side of (10.7) into the right side more easily than you might think:

$$\begin{aligned}\widehat{(g \circ f)}^{-1}(C) &:= \{a;\ a \in X, (g \circ f)(a) \in C\} \\ &:= \{a;\ a \in X, g(f(a)) \in C\} \\ &:= \{a;\ a \in X, f(a) \in \hat{g}^{-1}(C)\} \\ &:= \{a;\ a \in X, a \in \hat{f}^{-1}(\hat{g}^{-1}(C))\} \\ &:= (\hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1})(C).\end{aligned}$$

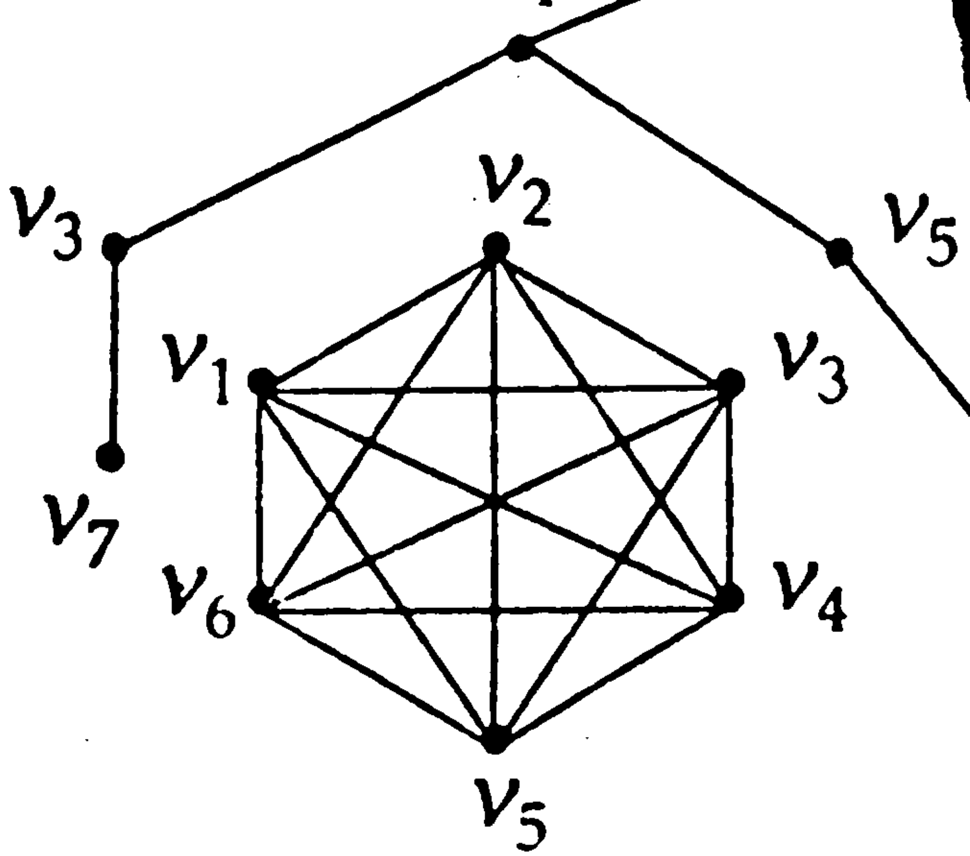
QED

بیایید ادعای (۱۰.۶) از برابری بین تابعها را ثابت کنید. دیدیم که هر دو ــ تابع ــ دامنه و هم دامنهٔ مشابه دارند. حال می‌بایست نشان دهیم که

$$\forall C \subseteq Y \ , \ \widehat{(gof)}^{-1}(\hat{C}) = (f^{-1}og^{-1})(\hat{C})$$

ما بسیار ساده‌تر از آنچه شما ممکن است فکر کنید، سمت چپ رابطهٔ (۱۰.۷) را به سمت راست تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\widehat{(gof)}^{-1}(C) &:= \{a; a \in X, (gof)(a) \in C\} \\ &:= \{a; a \in X, g(f(a)) \in C\} \\ &:= \{a; a \in X, f(a) \in \hat{g}^{-1}(C)\} \\ &:= \{a; a \in X, a \in \hat{f}^{-1}(\hat{g}^{-1}(C))\} \\ &:= (\hat{f}^{-1}o\hat{g}^{-1})(c)\end{aligned}$$



●ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات گسسته

RALPH P. GRIMALDI

(قسمت هفتم)

اکنون با بازگشت به بررسی روشهای اثبات قضایا (یا استلزامهای منطقی)، باید نگاهی محتاطانه به اندازهٔ جدول ۱۳.۲ بیندازیم. جدول مزبور دارای هشت سطر است، زیرا می‌توانیم سه فرض p_1 ، p_2 و p_3 و نتیجهٔ q را بر حسب سه گزارهٔ p ، r و s نمایش دهیم. اگر، فی‌المثل، با اثبات این موضوع که

$$[(p \to r)\wedge(r \to s)\wedge(t \vee \bar{s})\wedge(\bar{t} \vee u)\wedge \bar{u}] \to \bar{p}$$

استلزام منطقی (یا قضیه) است یا خیر، مواجه شویم، جدول مورد نیاز به $32 = 2^5$ سطر نیاز خواهد داشت. این رهیافت، چون تعداد فرضها بیشتر شوند و جدولهای ارزشمان به ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ سطر یا بیشتر افزایش یابد، کارآیی خود را به سرعت از دست می‌دهد.

گذشته از این، با یکبار دیگر نگریستن به جدول ۱۳.۲، درمی‌یابیم که در تشخیص این که

$$[(p \to r)\wedge(\bar{s} \to p)\wedge \bar{r}] \to s$$

استلزامی منطقی است یا نه، تنها به بررسی سطرهایی از جدول نیاز داریم که در آنها هر یک از سه فرض $p \to r$ ، $\bar{s} \to p$ و $\bar{r}$ ارزش راستی ۱ دارد. (به خاطر داشته باشید در صورتی که گزارهٔ سمت چپ یک شرطی دروغ باشد، اهمیتی به گزارهٔ سمت راست آن نمی‌دهیم.) و این تنها در سطر دوم جدول رخ می‌دهد، و بنابراین در واقع مقدار زیادی از جدول ۱۳.۲ ضروری نیست. (همواره چنین نیست که تنها یک سطر جمیع فرضها را راست داشته باشد.)

در نتیجه، آنچه در این مرحله مورد نیاز است، تکنیک یا فهرستی از تکنیکهایی است که به گونه‌ای لزوم رسم جدولهای ارزش، مخصوصاً جدولهای ارزش بزرگ، را کنار می‌گذارد. این تکنیکها به *قواعد استنتاج*[1] موسوم‌اند، و به طریق زیر به کمکمان می‌آیند :

۱. استفاده از این تکنیک توانایمان می‌کند که تنها به بررسی حالتهایی که در آنها جمیع فرضها راست‌اند بپردازیم. در نتیجه تنها سطرهایی از جدول ارزش را در نظر می‌گیریم که در آنها هر فرض دارای ارزش راستی ۱ است و جدول ارزش مربوطه را رسم نمی‌کنیم.

۲. قواعد استنتاج در توسعهٔ *اثباتهای* مرحله به مرحله، با نشان این که چگونه نتیجهٔ q منطقاً از فرضهای p_1 ، p_2 ، p_3 ، ... ، p_n واقع در استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$$

به دست می‌آید، اساسی‌اند.

توسعه‌ای چنین درستی اثبات (یا *استدلال*[۲]) مان را محقق می‌کند.

هر یک از قاعده‌های استنتاج از استلزامی منطقی یا هم‌ارزی‌ای منطقی رخ می‌دهد، و استلزام منطقی یا هم ارزی‌ای منطقی مزبور، در هر حالت، بدون اثبات بیان می‌شود.

قواعد استنتاج بسیاری در بررسی منطق روی می‌دهند، و ما به آنهایی توجه می‌کنیم که به کمکشان در اثبات قضایای مورد بحثمان نیاز داریم. قواعدی را که هم اکنون تحقیقشان را آغاز می‌کنیم در آینده، در جدول ۲. ۱۴ خلاصه خواهیم کرد.

مثال ۱۸.۲

به عنوان اولین مثال قاعدهٔ استنتاج موسوم به *قیاس استثنایی*[۳]، یا *قاعدهٔ فاصل*[۴] را بررسی می‌کنیم. این قاعده به صورت علامتی با استلزام منطقی

$$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$$

بیان می‌شود.

قاعدهٔ واقعی را به صورت جدول شکل

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

می‌نویسیم، که سه نقطه ($\therefore$) ی آن به جای کلمهٔ «بنابراین» قرار گرفته است، و مقرر می‌کند که q دنبالهٔ منطقی فرضهای p و $p \to q$ است، که در بالای خط افقی ظاهر شده‌اند. نیز می‌گوییم که فرضها (گزاره‌های بالای خط افقی) *استدلال* درست[۵] یا *اثبات*[۶]، نتیجهٔ q را به دست می‌دهند.

این قاعده در وضعیتهایی رخ می‌دهد که در آنها استدلال می‌کنیم که *اگر* (۱) p راست باشد، و (۲) $p \to q$ راست باشد (یا $p \Rightarrow q$)، *آنگاه* نتیجهٔ q نیز باید راست باشد. (به هر حال، اگر q دروغ و p راست باشد، نمی‌توانیم $p \to q$ را راست داشته باشیم.)

اثبات زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان قاعدهٔ انفصال را در هندسهٔ دبیرستان به کاربرد.

(۱) مثلث ABC متساوی الاضلاع است. p

(۲) اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

(۳) بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

مثال ۱۹.۲

دومین قاعدهٔ استنتاج با استلزام منطقی

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow p \to r$$

داده می‌شود، که p، q، و r آن هر سه گزاره‌اند. این قاعده به صورت جدول شکل چنین نوشته می‌شود.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array}$$

این قاعده، که به آن به عنوان *قانون قیاس*[۷] اشاره می‌شود، در اثباتهای بسیار و استدلالهای ریاضی دیگر رخ می‌دهد. در واقع، همان طور که راه حل (اثبات) زیر مبرهن می‌کند، از آن به دفعات بسیار در حل معادلات جبری استفاده می‌کنیم.

(۱) اگر ۲۰ = ۳x − ۷ ، آنگاه ۳x = ۲۷ $\quad p \to q$

(۲) اگر ۳x = ۲۷ ، آنگاه x = ۹ $\quad \underline{q \to r}$

(۳) بنابراین، اگر ۲۰ = ۳x − ۷ ، آنگاه x = ۹ $\quad \therefore\ p \to r$

مثال بعد شامل اثبات اندکی طولانیتری است که قواعد استنتاج مطرح در مثالهای ۱۸.۲ و ۱۹.۲ را به کار می‌برد. در واقع، در این مثال در می‌یابیم که ممکن است در تحقیق درستی

یک استدلال بیش از یک راه موجود باشد.

مثال۲.۲۰

استدلال زیر را در نظر بگیرید.

(۱) در مثلث ABC، طولهای اضلاع AB و AC مساوی‌اند.	p
(۲) اگر مثلث ABC دارای دو ضلع مساوی باشد، آنگاه مثلث مزبور متساوی‌الساقین است.	$p \to q$
(۳) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زوایای مقابل به اضلاع متساوی الطول مساوی‌اند.	$q \to r$
(۴) بنابراین، زوایای B و C در مثلث ABC مساوی‌اند.	$\therefore\ r$

با تمرکز بر صورتهای گزاره‌های استدلال پیشین، می‌توان آن را به گونه‌ای فشرده‌تر به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \qquad (*) \\ q \to r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

اکنون نیازی به نگران بودن در این مورد که گزاره‌ها عملاً به جای چه مواردی قرار گرفته‌اند نیست، و هدفمان استفاده از دو قاعدهٔ استنتاجی که تاکنون بررسی کرددایم برای استنتاج راستی گزارهٔ r از راستی سه فرض p، $p \to q$، و $q \to r$ است.

اثباتمان به طریق زیر تقریر می‌شود:

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to q$
فرض	(۲) $q \to r$
این گزاره از مراحل (۱) و (۲) و قانون قیاس نتیجه می‌شود	(۳) $p \to r$
فرض	(۴) p
این گزاره از مراحل (۴) و (۳) و قاعدهٔ انفصال نتیجه می‌شود.	(۵) $\therefore\ r$

پیش از پرداختن به قانون سوم استنتاج، نشان می‌دهیم که می‌توان اثبات دومی در مورد استدلال ارائه شده در (*) به دست داد. در اینجا «دلایل» مان به صورتی مختصر می‌شود که آن را در باقی این بخش مورد استفاده قرار خواهیم داد، و در هر حال، هر چه را که برای مبرهن کردن این مطلب لازم باشد که چگونه هر مرحلهٔ یک اثبات از مراحل پیشین به دست آمده، یا نتیجه شده است، ثبت می‌کنیم.

اثبات دوم استدلال فوق عبارت است از:

دلایل	مراحل
فرض	(۱) p
فرض	(۲) $p \to q$
(۱)، (۲) ، و قاعدهٔ انفصال	(۳) q
فرض	(۴) $q \to r$
(۳)، (۴) و قاعدهٔ انفصال	(۵) $\therefore\ r$

مثال ۲.۲۱

قاعدهٔ موسوم به *انفصال نقیض*[^] به صورت زیر است:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \bar{q} \\ \hline \therefore\ \bar{p} \end{array}$$

این قاعده از استلزام منطقی $[(p \to q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$ نتیجه می‌شود.

از این قاعده در طرح اثبات استدلال زیر بهره می‌گیریم:

$p \to q$

$r \to s$

$t \vee \bar{s}$

$\bar{t} \vee u$

$\bar{u}$

$\therefore\ \bar{p}$

هم انفصال نقیض هم قانون قیاس، همراه با همارزی منطقی مطرح در مثال ۲.۶ به صحنه می‌آیند.

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to r$ ، $r \to s$
(۱) و قانون قیاس	(۲) $p \to s$
فرض	(۳) $t \vee \bar{s}$
(۳) و قانون تعویضپذیری	(۴) $\bar{s} \vee t$
(۴) و هم ارزی منطقی $\bar{s} \vee t$	(۵) $s \to t$
(۲) ، (۵) و قانون قیاس	(۶) $p \to t$
فرض	(۷) $\bar{t} \vee u$
(۷) و همارزی منطقی $\bar{t} \vee u$	(۸) $t \to u$
(۶)، (۸) و قانون قیاس	(۹) $p \to u$
فرض	(۱۰) $\bar{u}$
(۹)، (۱۰)، و انفصال نقیض	(۱۱) $\therefore\ \bar{p}$

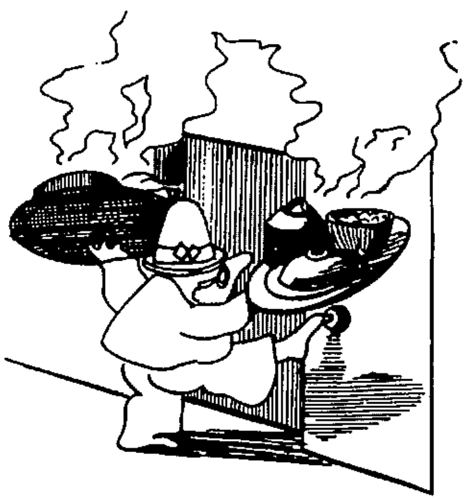
یادداشتها

1. Rules of inference
2. Argument
3. Modus Ponenes
4. Rules of Detachment
5. Valid arguments
6. Proof
7. Law of the Syllogism
8. Modus Tollens

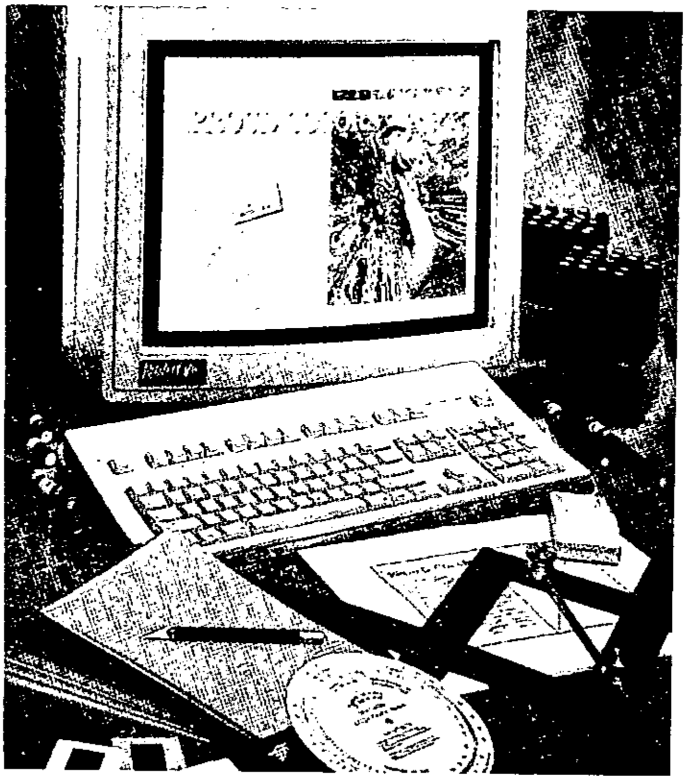


تفریح اندیشه۳

مهرداد و آرش برای خوردن شام به رستوران رفته بودند. برای مهرداد ۵ ظرف و برای دوستش ۳ ظرف غذا آوردند. در همین موقع دوستشان، علی، سر رسید و آنها غذایشان را با او تقسیم کردند. علی پس از صرف غذا، سهم خود را که ۱۶ تومان بود پرداخت. در صورتی که بهای تمام غذاهای سفارش داده شده برابر باشد، مهرداد و آرش هرکدام چه مبلغی از این ۱۶ تومان را دریافت کرده‌اند؟



جواب در صفحهٔ ۸۸



آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال

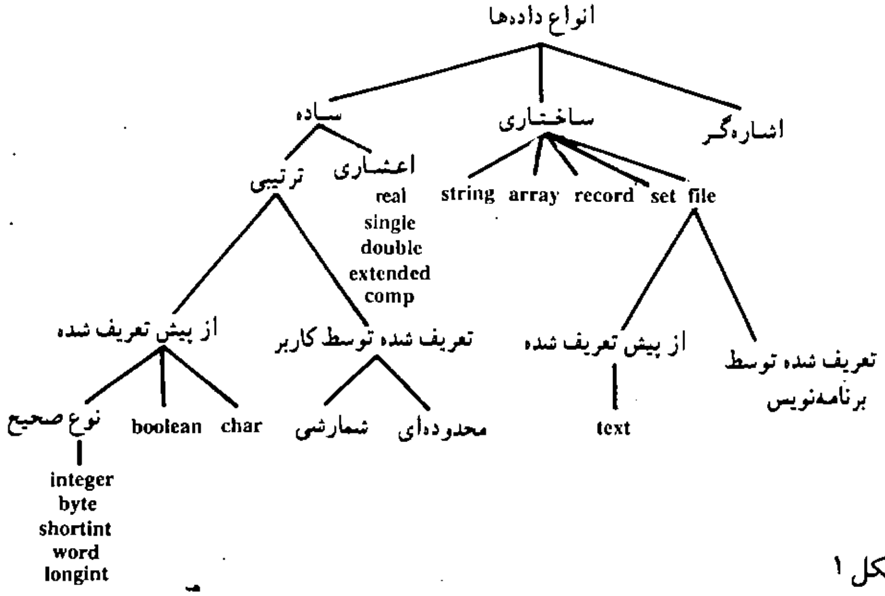
(قسمت دوم)

● محمد رحیم

معرفی انواع داده‌ها در زبان پاسکال

برای نگهداری اطلاعات در طول برنامه باید متغیرهایی را متناسب با نوع اطلاعات تعریف کرد تا اطلاعات از این طریق در حافظه نگهداری شوند. به نوع اطلاعات و داده‌ها اصطلاحاً Data Type یا «نوع» می‌گویند. در شکل ۱ نمودار جامعی از انواع داده‌های مختلف در زبان پاسکال آمده است.

در برنامه‌نویسی ممکن است یک داده و یا گروهی از داده‌های مرتبط با هم را در حافظه ذخیره کنیم. بدیهی است که گروهی از داده‌ها مانند نمره‌های دانش‌آموزان یک کلاس را می‌توان تفکیک کرد، ولی یک داده از نوع صحیح، مثلاً عدد ۵ و یا از نوع اعشاری، مثلاً ۵/۵ را نمی‌توان به داده‌های جزیی‌تر تفکیک کرد. به همین دلیل در شکل ۱ به تقسیم‌بندی نوع ساده[1]



شکل ۱

و ساختاری[۲] اشاره شده است. دادهٔ نوع ساده غیر قابل تفکیک بوده و برای نگهداری داده‌های منفرد به کار می‌رود، ولی داده‌های ساختاری قابل تفکیک به داده‌های کوچکتر هستند. مثلاً دادهٔ نوع رشته (string) که مجموعه‌ای از کاراکترها را شامل می‌شود می‌تواند به اجزای کوچکتری تقسیم شود.

تقسیم‌بندی دیگری که در شکل ۱ به آن اشاره شده مربوط به داده‌های نوع ترتیبی[۳] است. مجموعهٔ محدودی را در نظر بگیرید که دارای عنصر ابتدا و انتها باشد. اگر این مجموعه دارای این خاصیت باشد که به جز عنصر اول مابقی عناصر دارای عنصر ماقبل باشند و نیز به جز عنصر آخر مابقی عناصر دارای عنصر بعد از خود باشند، به چنین مجموعه‌ای یک مجموعه مرتب می‌گوییم. برای مثال اعداد صحیح ...,۲,۱,۰,۱-,۲-,۳-,... به طور طبیعی مرتب هستند. دادهٔ نوع منطقی (Boolean) که فقط می‌تواند True یا False بپذیرد یک داده ترتیبی است. دادهٔ نوع کاراکتری (char) که در زبان پاسکال مبنای عددی دارد یک دادهٔ نوع ترتیبی است. در واقع هرکاراکتر با یک عدد مشخص می‌شود.

توجه داشته باشید که دادهٔ نوع اعشاری (مثلاً real) نمی‌تواند یک دادهٔ نوع ترتیبی باشد، چون برای یک عدد اعشاری نمی‌توان بلافاصله عدد قبل و بعد آن‌را مشخص کرد، ولی در هر صورت دادهٔ نوع اعشاری یک دادهٔ نوع ساده است.

دادهٔ نوع اشاره‌گر[۴] برای نگهداری آدرس به کار می‌رود.

مطابق شکل ۱ در زبان پاسکال این قابلیت وجود دارد که نوعهای جدیدی توسط برنامه‌نویس برحسب ضرورت ایجاد شود. نوعهای ایجاد شده می‌تواند ساده و یا ساختاری باشند.

متغیرها و نحوهٔ معرفی آنها

در شمارهٔ قبلی مجله توضیح دادیم که در زبان پاسکال کلیهٔ متغیرهای مورد استفاده در برنامه باید معرفی شوند. در ابتدای این نوشتار نیز اشاره شد که متغیرها باید متناسب با نوع اطلاعات تعریف شوند. توضیح این مطلب ضروری است که خانه‌های حافظهٔ کامپیوتر دارای دو ویژگی مهم هستند:

الف) آدرس دارند.

ب) توانایی نگهداری اطلاعات را دارند.

در اینجا دسته‌بندی متغیرها نیز بر همین اساس صورت می‌گیرد:

الف) متغیرهایی که آدرس نگه می‌دارند، مانند اشاره‌گرها که در آینده بحث خواهد شد.

ب) متغیرهایی که مقدار نگه می‌دارند، به جز اشاره‌گرها تمام انواع معرفی شده در شکل ۱ انواعی هستند که نگهدارنده مقدار و نه آدرس هستند. در این دسته‌بندی متغیرهای مختلفی را می‌توان معرفی کرد، ولی ما در حال حاضر توجه خود را به متغیرهای زیر معطوف می‌کنیم و سایر متغیرها در آینده معرفی خواهند شد:

۱) متغیرهای نوع صحیح: برای نگهداری اعداد صحیح، «نوع»[۵] متغیر باید یکی از موارد زیر باشد:

longint, word, integer, shortint, byte

۲) متغیرهای نوع اعشاری: برای نگهداری اعداد اعشاری، «نوع» متغیر باید یکی از موارد زیر باشد:

comp, extended, double, single, real

۳) متغیر نوع کاراکتری: برای نگهداری یک کاراکتر، «نوع» متغیر باید char باشد.

۴) متغیر نوع رشته: برای نگهداری مجموعه‌ای از کاراکترها، «نوع» متغیر باید string باشد.

۵) متغیر منطقی: متغیری است که برای نگهداری True و یا False (درست و یا نادرست) به کار می‌رود و «نوع» متغیری که برای آن تعریف می‌شود از نوع Boolean است.

توجه داشته باشید که نام متغیر همانند یک برچسب بر روی یکی از خانه‌های حافظه است و این خانه از حافظه همانطور که قبلاً گفته شد دارای آدرس مشخصی است. در طول اجرای برنامه نام متغیر و آدرس خانه‌ای از حافظه که نام متغیر به آن منتسب است بدون تغییر باقی می‌ماند، ولی محتویات این خانه از حافظه در طول برنامه ممکن است تغییر کند.

چون نام متغیر یک نوع شناسه است، لذا از قاعده‌ای که در

شمارهٔ قبلی مجله در مورد شناسه‌ها گفته شد پیروی می‌کند .

حال که با «نوع» متغیرها آشنا شدیم، باید نحوهٔ اعلان متغیرها را فرا بگیریم. همانطور که در شمارهٔ قبلی مجله در بخش «ساختار زبان پاسکال» اشاره شد، کلیهٔ متغیرهای مورد استفاده باید در بخش اعلانات معرفی شوند. در شکل ۲ نمودار دستوری مربوط به نحوهٔ اعلان متغیرها آمده است.

مطابق شکل ۲، در بخش اعلانات برای آنکه مشخص شود که می‌خواهیم متغیرها را معرفی کنیم، باید ابتدا کلمهٔ کلیدی VAR را بیاوریم و پس از آن به ترتیب نام متغیر، علامت دو نقطه (:)، نوع متغیر و در نهایت باید علامت نقطه ویرگول (;) بیاید. در صورتی که چندین متغیر از یک نوع بخواهیم معرفی کنیم، نام متغیرها را با ویرگول از یکدیگر جدا می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید :

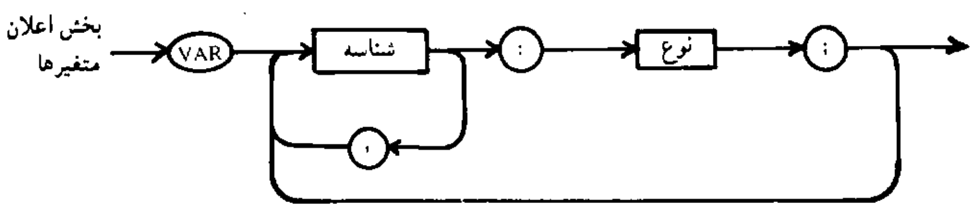
```
Var
        A: Integer;
   B و C: Integer;
x و y و z: Real;
       ch: char;
       str: string;
     flag: Boolean;
```

در مثال فوق A,B,C متغیرهایی هستند که مقادیر صحیح را نگهداری می‌کنند و z و y و x متغیرهایی که مقادیر اعشاری را نگهداری می‌کنند و متغیر flag یک متغیر منطقی است که فقط می‌تواند True و یا False را نگهداری کند. متغیر ch برای نگهداری یک کاراکتر و متغیر str برای نگهداری مجموعه‌ای از کاراکترها به کار می‌رود. متذکر می‌شود که نام متغیرهایی که در مثال فوق آمده، هریک به طور جداگانه به یکی از خانه‌های حافظه منتسب هستند و هیچگونه تداخلی با یکدیگر ندارند. به برنامهٔ زیر توجه کنید :

```
program test;
Var
    a: Integer;
    x: Real;
    ch: char;
    s: string;
BEGIN
    a: = 2;
    x: = 3.5;
    ch: = 'a';
    s: = 'Rahim';
    writeln ('a = ',a);
    writeln ('x = ',x);
    writeln ('The first character is ', ch);
    writeln ('My Name Is ', s);
END.
```

در برنامهٔ فوق ابتدا عنوان برنامه، سپس بخش اعلانات var و در نهایت قسمت اصلی برنامه آمده که با BEGIN شروع شده و با .END به اتمام رسیده است.

در بخش اعلانات چهار متغیر با چهار نوع مختلف معرفی شده و در قسمت اصلی برنامه ابتدا این متغیرها مقدارگذاری شده و سپس با استفاده از دستور writeln مقادیر این متغیرها به همراه یک سری عبارات در خروجی چاپ می‌شود. خروجی برنامهٔ فوق چنین است :



شکل ۲

a = 2

x = 3.5

The first character is a

My Name Is Rahim

همانطور که گفته شد برای نگهداری اعداد صحیح، نوع متغیر می‌تواند Byte، Integer، word و... و در مورد اعداد اعشاری نوع متغیر می‌تواند real، double و... باشد. حال ممکن است این سؤال مطرح شود که برای نگهداری اعداد صحیح چه موقع از Byte و چه موقع از Integer استفاده می‌شود. برای روشن شدن مطلب باید به این نکته اشاره کرد که ما نمی‌توانیم هر عدد صحیح دلخواه بزرگی را در حافظه نگهداری کنیم. در واقع نوعهایی که برای متغیرهای نوع صحیح معرفی شد هر کدام دارای محدودیتی است. برای مثال، متغیری که از نوع Byte است، فقط می‌تواند اعداد ۰ تا ۲۵۵ را نگهداری کند و متغیری که از نوع Integer است، فقط می‌تواند اعداد بین ۳۲۷۶۸- تا ۳۲۷۶۷ را نگهداری کند، به طور مشابه در مورد نوعهای اعشاری نیز محدودیت داریم. همانطور که می‌دانید یک عدد اعشاری به صورت $a\times۱۰^{b}$ درمی‌آید که در آن a مانتیس و b نمای عدد است. در اینجا این محدودیت به a و b اعمال می‌شود. در واقع a و b هر عدد دلخواهی نمی‌توانند باشند. در جدول ۱ محدودیت نوعهای صحیح و در جدول ۲ محدودیت نوعهای اعشاری آمده است. برای آنکه اعداد صحیح و یا اعشاری بزرگتری را در حافظهٔ کامپیوتر نگهداری کنیم، باید حافظهٔ بیشتری را اختصاص دهیم. در

نوع متغیر	محدوده	حافظه مورد نیاز
byte	۰...۲۵۵	۱ بایت
shortint	-۱۲۸...۱۲۷	۱ بایت
integer	-۳۲۷۶۸...۳۲۷۶۷	۲ بایت
word	۰...۶۵۵۳۵	۲ بایت
longint	-۲۱۴۷۴۸۳۶۴۸...۲۱۴۷۴۸۳۶۴۷	۴ بایت

جدول ۱

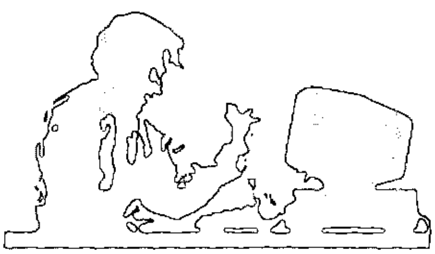
جداول ۱ و ۲ به حافظه‌ای که هرکدام از نوعها نیاز دارند تا بتوانند عدد صحیح و یا اعشاری را، که محدودهٔ آن در جدول آمده، ذخیره کنند نیز ذکر شده است. لازم به ذکر است که برای نگهداری اعداد اعشاری خیلی نزدیک به صفر نیز محدودیت داریم که برای نوعهای مختلف در جدول ۲ مشخص شده است.

نوع متغیر	محدوده	تعداد ارقام مانتیس	حافظه‌مورد‌نیاز
Real	$۲/۹\times۱۰^{-۳۹}...۱/۷\times۱۰^{۳۸}$	۱۱ _ ۱۲	۶
Single	$۱/۵\times۱۰^{-۴۵}...۳/۴\times۱۰^{۳۸}$	۷ _ ۸	۴
Double	$۵/۰\times۱۰^{-۳۲۴}...۱/۷\times۱۰^{۳۰۸}$	۱۵ _ ۱۶	۸
Extended	$۳/۴\times۱۰^{-۴۹۳۲}...۱/۱\times۱۰^{۴۹۳۲}$	۱۹ _ ۲۰	۱۰
Comp	$-۲^{۶۳}+۱...۲^{۶۳}-۱$	۱۹ _ ۲۰	۸

جدول ۲

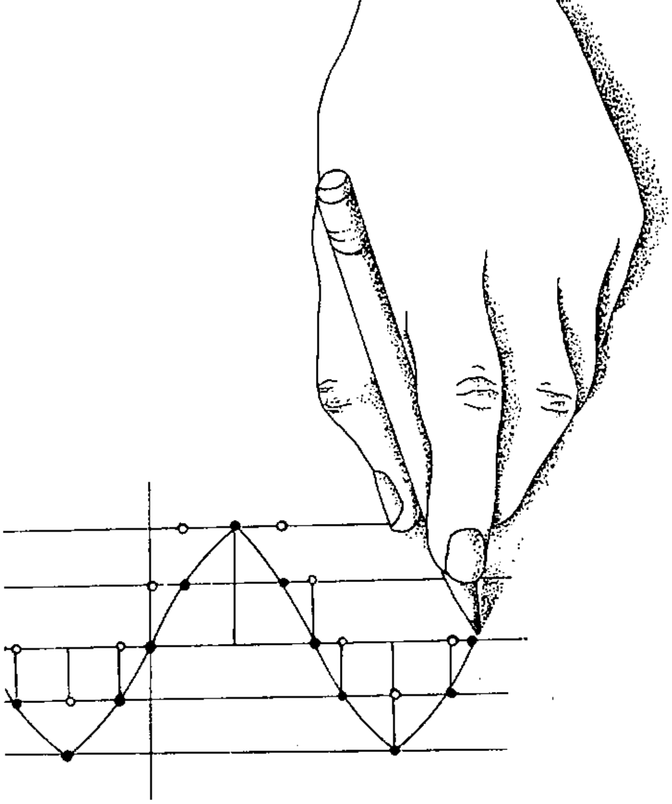
متغیرهایی که با char اعلان می‌شوند به اندازهٔ یک بایت از حافظه را اشغال می‌کنند.

متغیرهایی که از نوع رشته یا string تعریف می‌شوند، حداکثر می‌توانند ۲۵۵ کاراکتر را نگهداری کنند.



واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱ _ Simple
۲ _ Structured
۳ _ Ordinal
۴ _ Pointer
۵ _ Type



رسم منحنیهای توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول با روش نقطه‌یابی و انتقال

برای داوطلبان کنکور نظام جدید و درس ریاضی ۳

● میرشهرام صدر

هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است. جهان پر از حرکتهای تناوبی است که از آن جمله می‌توان از نوسانهای رقاصک ساعت مچی، سیم تار مرتعش، جرم آویزان متصل به فنر درحال نوسان، عقربه کوچک ساعت که بعد از طی دوازده ساعت دوباره مسیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مسیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند. در این مقاله توابع متناوبی را رسم می‌کنیم، که در فاصله‌های مساوی تکرار می‌شوند. چنان‌که خواهیم دید، توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول نمونه‌ای از این نوع توابع می‌باشند.

تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب گوییم، هرگاه کوچکترین مقدار مثبتی مانند $T \neq 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر x واقع در دامنه f، $x \pm T$ نیز در دامنه f باشد و

$$f(x+T)=f(x)$$

در این صورت T را دوره تناوب تابع f می‌گوییم.

مسأله: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x)=\sin(ax+\beta)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow \sin[a(x+T)+\beta]$$
$$=\sin(ax+\beta)$$
$$\Rightarrow ax+aT+\beta=2k\pi+ax+\beta \quad (k\in z)$$
$$\Rightarrow T=\frac{2k\pi}{a}$$

کوچکترین مقدار مثبت T به‌ازای $k=1$ به‌دست می‌آید، چون $D_f=\mathbb{R}$ بدیهی است که اگر $x\in D_f$ آن‌گاه $x\pm T\in D_f$. بنابراین دوره تناوب تابع $f(x)=\sin(ax+\beta)$ برابر است با $T=\frac{2\pi}{a}$. به‌طریق مشابه می‌توان بررسی کرد، که دوره تناوب تابع $f(x)=\cos(ax+\beta)$ به‌صورت $T=\frac{2\pi}{a}$ می‌باشد.

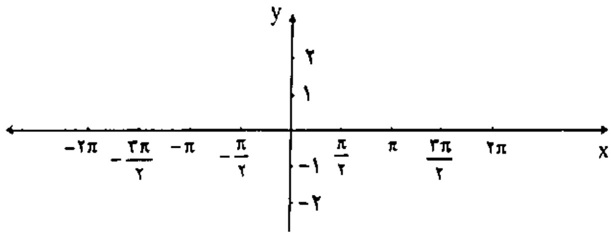
ــ مراحل رسم منحنیهای توابع $f(x)=k\sin(ax+\beta)+L$ و $f(x)=k\cos(ax+\beta)+L$، که در آنها: $L\in\mathbb{R}$ و a و $k\neq 0$ و β زاویه‌ای برحسب رادیان می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده درباره تابع متناوب به‌سادگی درمی‌یابیم که توابعی به‌صورت بالا متناوب می‌باشند. بنابراین شکل آنها در فاصله‌های برابر به‌طور دقیق تکرار می‌شوند. لذا کافی است نمودار آنها را در فاصله $[0, T]$ رسم نماییم، سپس

در فاصله‌های برابر با طول دوره تناوب شکل تابع را به‌طور دقیق تکرار کنیم، تا این‌که نمودار تابع در هر فاصله‌ای از صفحه مختصات مشخص باشد.

برای رسم شکل این نوع توابع مراحل زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

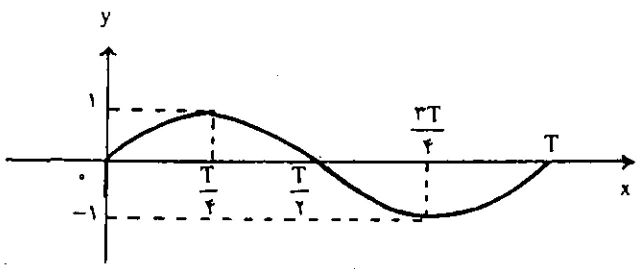
مرحله اول ــ در دستگاه مختصات xoy روی محور xها π را تقریباً به اندازه سه واحد درنظر می‌گیریم، بنابراین $\frac{\pi}{۲}$ را ۱/۵ واحد و $\frac{۳\pi}{۲}$ را ۴/۵ واحد و ۲π را ۶ واحد انتخاب می‌کنیم.



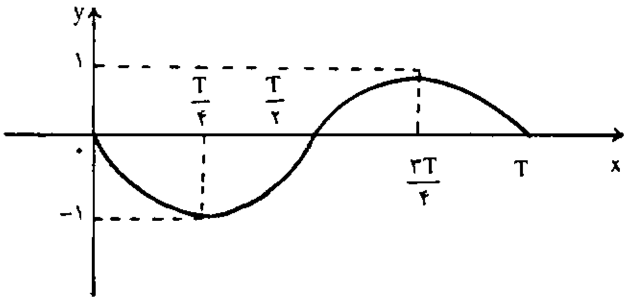
مرحله دوم ــ دوره تناوب تابع را با استفاده از فرمول $T=\frac{۲\pi}{a}$ به‌دست می‌آوریم.

مرحله سوم ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=\sin ax$ و $y=-\sin ax$ (یا $y=\cos ax$ و $y=-\cos ax$) را به کمک جدولهای زیر و با استفاده از روش نقطه‌یابی در ناحیه $[۰,T]$ (T دوره تناوب تابع است) رسم می‌کنیم.

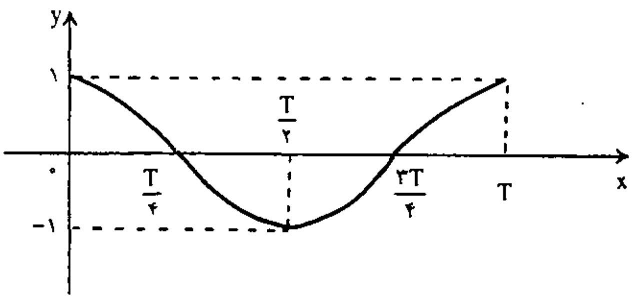
x	۰	$\frac{T}{۴}$	$\frac{T}{۲}$	$\frac{۳T}{۴}$	T
$y=\sin ax$	۰	۱	۰	−۱	۰



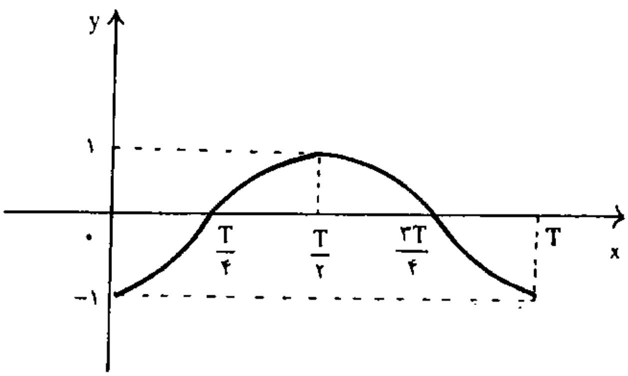
x	۰	$\frac{T}{۴}$	$\frac{T}{۲}$	$\frac{۳T}{۴}$	T
$y=-\sin ax$	۰	−۱	۰	۱	۰



x	۰	$\frac{T}{۴}$	$\frac{T}{۲}$	$\frac{۳T}{۴}$	T
$y=\cos ax$	۱	۰	−۱	۰	۱

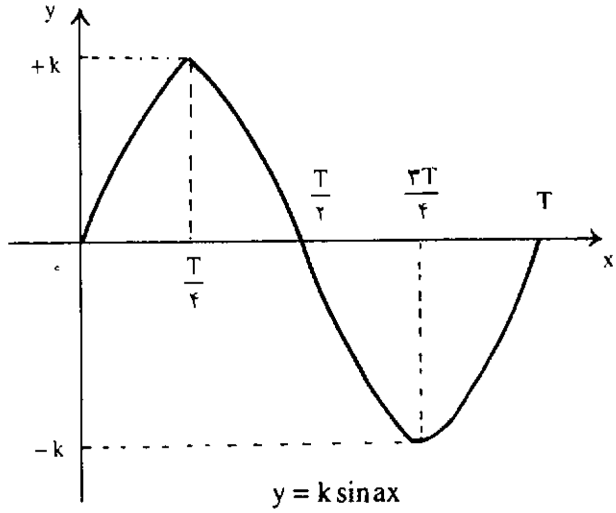


	۰	$\frac{T}{۴}$	$\frac{T}{۲}$	$\frac{۳T}{۴}$	T
$y=-\cos ax$	−۱	۰	۱	۰	−۱



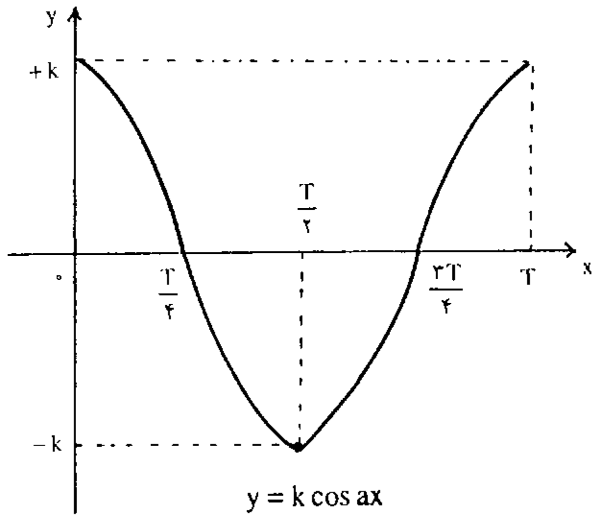
مرحله چهارم ــ نمایش منحنی توابع با ضابطه $y = k\sin ax$ (یا $y = k\cos ax$) را رسم می‌کنیم، برای این منظور باید عرض نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنیهای نمودار مرحله سوم را از نقاط ۱+ و ۱− به‌ترتیب به نقاط $+k$ و $-k$ انتقال دهیم، تا این‌که منحنی آنها به‌صورت زیر به‌دست آید.

با فرض این‌که $k > ۰$ داریم :



$y = k\sin ax$

$k > ۰$



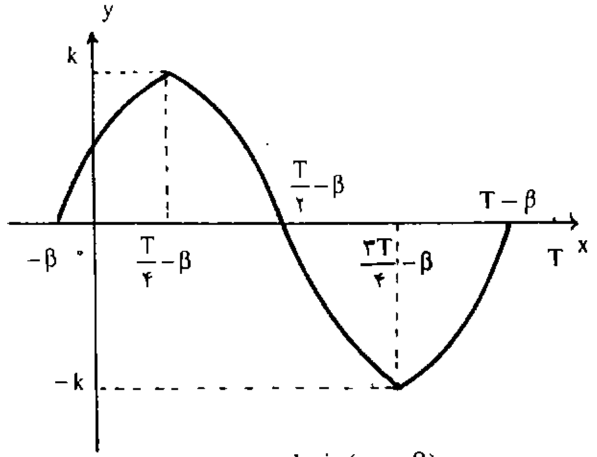
$y = k\cos ax$

$k > ۰$

مرحله پنجم ــ منحنی نمایش توابع با ضابطه $y = k\sin(ax+\beta)$ (یا $y = k\cos(ax+\beta)$) را رسم می‌کنیم :

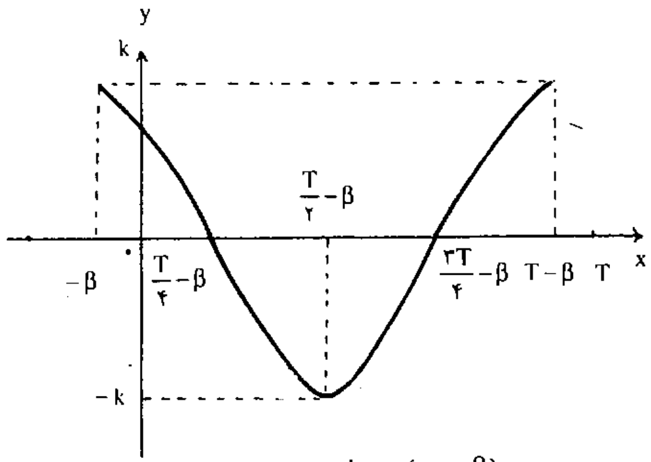
اگر $\beta > ۰$ (β زاویه‌ای برحسب رادیان)، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه β واحد رادیان در جهت منفی محور طولها منتقل می‌کنیم. حال اگر $\beta < ۰$، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه β واحد رادیان در جهت مثبت محور طولها منتقل می‌کنیم.

با فرض این‌که $\beta > ۰$ باشد،نمودار منحنیها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :



$y = k\sin(ax+\beta)$

$(k > ۰, \beta > ۰)$

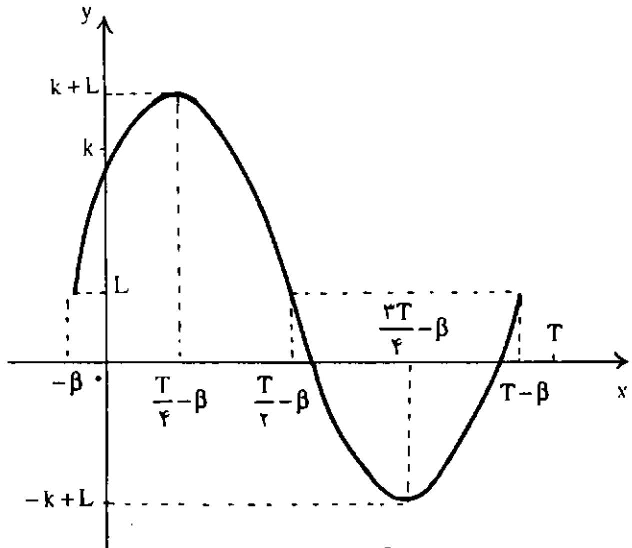


$y = k\cos(ax+\beta)$

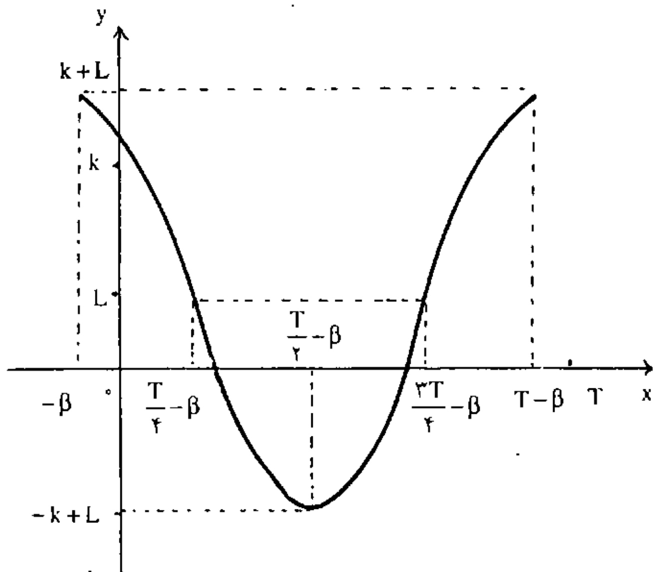
$(k > ۰, \beta > ۰)$

مرحله ششم ــ در این مرحله منحنی نمایش توابع با ضابطه $y = k\sin(ax+\beta)+L$ (یا $y = k\cos(ax+\beta)+L$) را رسم می‌کنیم. اگر $L > ۰$ (Lعدد حقیقی است)، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه L واحد در جهت مثبت محور عرضها بالا می‌بریم و اگر $L < ۰$، آن‌گاه منحنیهای به‌دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه L واحد در جهت منفی محور عرضها پایین می‌بریم.

با فرض این‌که $L > ۰$ شکل توابع بالا به‌صورت زیر می‌باشد :



$$y = k\sin(ax+\beta)+L$$
$$(k, L > ۰, \beta > ۰)$$

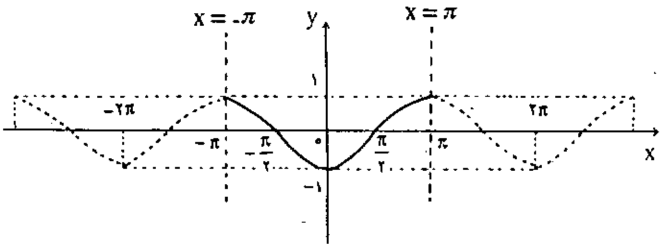


$$y = k\cos(ax+\beta)+L$$
$$(k, L > ۰, \beta > ۰)$$

مثال ۱ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=-\cos x$ را در فاصله $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

حل: دوره تناوب این تابع $T=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi$ می‌باشد بنابراین به کمک جدول زیر و روش نقطه‌یابی نمودار این تابع را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم، سپس در فاصله‌های مساوی ۲π شکل آن‌را به‌طور دقیق تکرار می‌کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $x=-\pi$ و $x=+\pi$ قرار دارد، شکل مورد نظر ما می‌باشد.

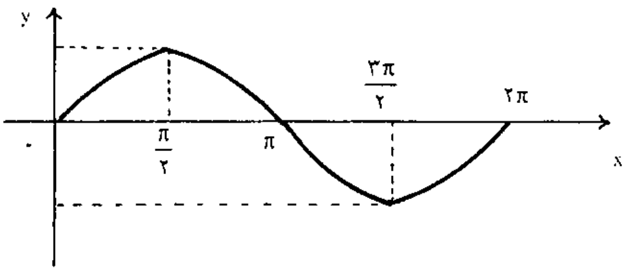
	۰	$\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۲}$	$\frac{T}{۲}=\pi$	$\frac{۳T}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$	$T=۲\pi$
$y=-\cos x$	-۱	۰	۱	۰	-۱



مثال ۲ــ با استفاده از رسم منحنی توابع مثلثاتی نشان دهید که $\sin(x+\frac{\pi}{۲})=\cos x$.

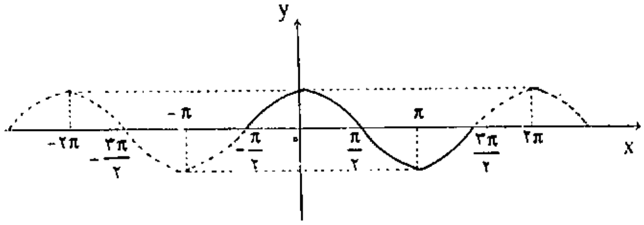
حل: دوره تناوب $y=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ برابر با $T=۲\pi$ می‌باشد، بنابراین نمودار $y=\sin x$ را در فاصله $[۰, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم.

	۰	$\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۲}$	$\frac{T}{۲}=\pi$	$\frac{۳T}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$	$T=۲\pi$
$y=\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰



اکنون برای رسم $y=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ کافی است شکل مرحله

قبل را به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. سپس منحنی نمایش این تابع را در فاصله‌های مساوی ۲π تکرار می‌کنیم.

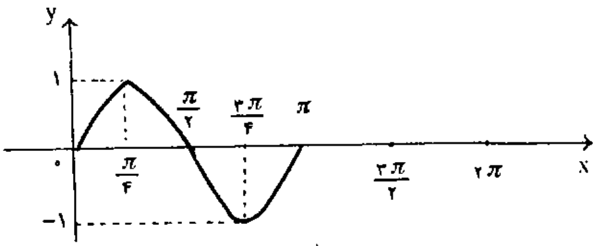


همان‌طور که ملاحظه می‌کنید منحنی بالا نمایش تابع با ضابطه $y=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ و هم‌چنین منحنی نمایش تابع $y=\cos x$ می‌باشد. در فیزیک اصطلاحاً می‌گویند منحنی نمایش $y=\sin x$، $\frac{\pi}{۲}$ تقدم فاز نسبت به $y=\cos x$ دارد، یعنی این‌که منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان از منحنی نمایش تابع $y=\cos x$ جلوتر می‌باشد.

مثال ۳ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=۳\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})-۲$ را رسم کنید.

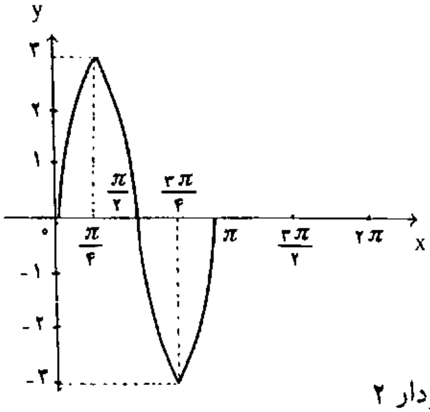
حل ــ دوره تناوب تابع فوق $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ می‌باشد، بنابراین به کمک جدول زیر و با روش نقطه‌یابی ابتدا نمودار $y=\sin ۲x$ را در فاصله $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم.

x	۰	$\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۴}$	$\frac{T}{۲}=\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳T}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$	$T=\pi$
$y=\sin ۲x$	۰	۱	۰	-۱	۰



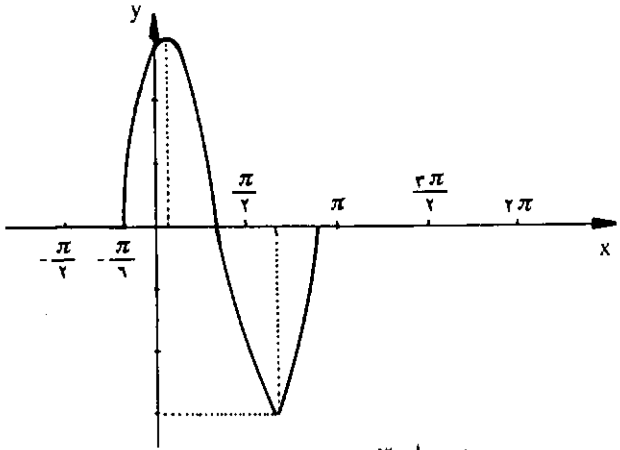
نمودار ۱

اکنون منحنی نمایش $y=۳\sin ۲x$ را رسم می‌کنیم، برای این‌کار کافی است نقاط ۳+ و ۳− را روی محور عرض‌ها مشخص کنیم و نقاط ماکزیمم و مینیمم (نمودار ۱) را به‌ترتیب به نقاط ۳+ و ۳− منتقل کنیم.



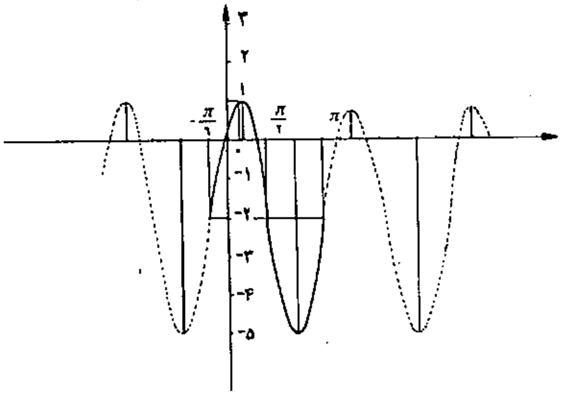
نمودار ۲

برای رسم منحنی نمایش $y=۳\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})$ کافی است (نمودار ۲) را به اندازه $\frac{\pi}{۶}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. بنابراین:



نمودار ۳

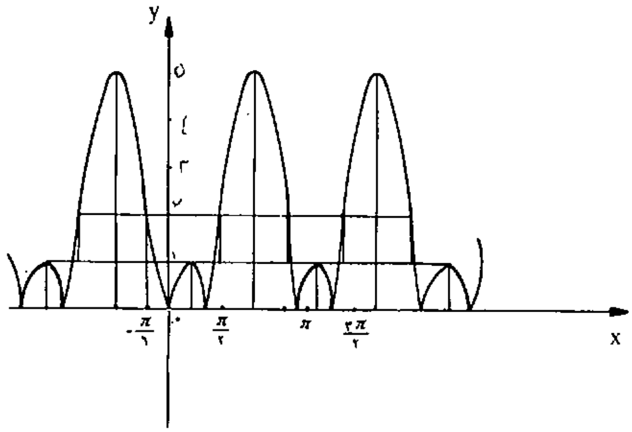
در مرحله آخر برای رسم $y=۳\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})-۲$ کافی است (نمودار ۳) را به اندازه ۲ واحد به طرف پایین منتقل کنیم، سپس در فاصله مساوی π شکل آن را به‌طور دقیق تکرار کنیم.



نمودار ۴

مـــثـــال ۴ ــ منحنی نمـــایش تابع با ضـــابطه $y=|۳\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})-۲|$ را رسم کنید.

حل ــ ابتدا منحنی نمایش تابع $y=۳\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})-۲$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۴)، سپس قرینه قسمتی از منحنی نمایش تابع که زیر محور طولهاست نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم، درنتیجه نمودار تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

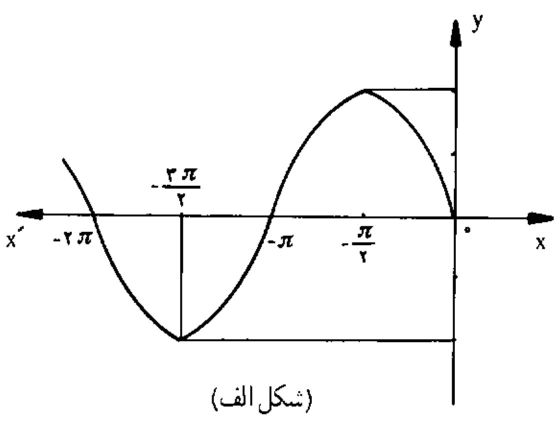


مثال ۵ــ منحنی نمایش تابع با ضابطه $y=۲\sin|x|$ را رسم کنید.

حل ــ با توجه به خواص قدرمطلق داریم :

$$\sin|x|=\begin{cases}\sin x & x\geq ۰\\ -\sin x & x<۰\end{cases}$$

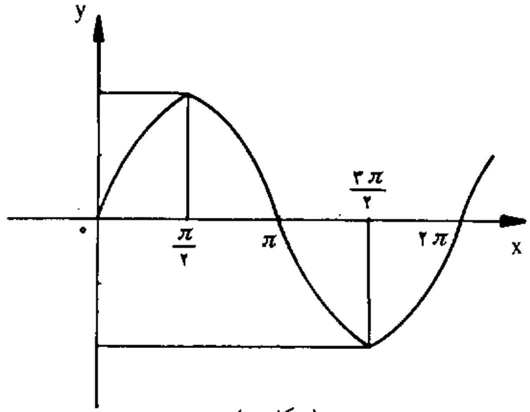
برای رسم منحنی نمایش این تابع ابتدا $y=۲\sin x$ را برای $x\geq ۰$ رسم می‌کنیم، سـپس $y=-۲\sin x$ را برای $x<۰$ رسم خواهیم کرد.



(شکل الف)

$y=-۲\sin x$

$(x<۰)$

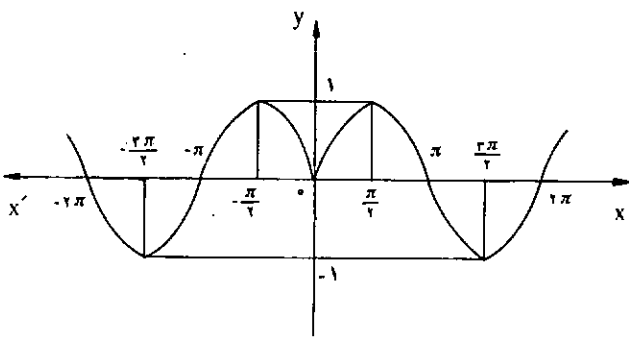


(شکل ب)

$y=۲\sin x$

$(x\geq ۰)$

اکنون اگر (شکل الف و ب) را در یک دستگاه مـختصات رسم نماییم، منحنی نمایش تابع $y=۲\sin|x|$ را خواهیم داشت :



$y=۲\sin|x|$

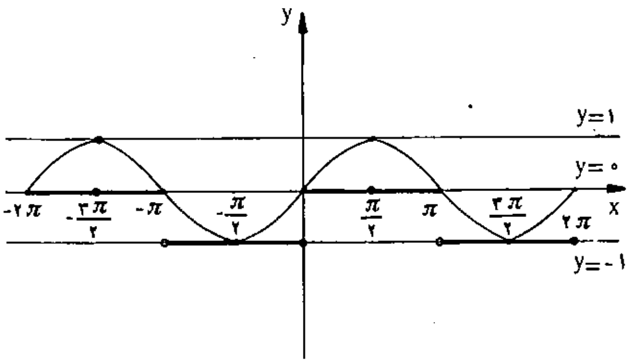
مـثال ۶ ــ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=[\sin x]$ را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید.

حل :

مـرحله ۱ــ ابتـدا منحنی تابع با ضـابطه $y=\sin x$ را در فاصله $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم می‌کنیم.

مــرحله ۲ــ ســه خط $y=-۱$ و $y=۰$ و $y=۱$ را رسم می‌کنیم و نقــاطی از منحنی را کــه روی این ســه خط واقع می‌باشند، با نقـاطی توپر مـشخص می‌کنیم، سپس قـسمتی از منحنی کـه بین دو خط $y=-۱$ و $y=۰$ قـرار دارد (به غـیر از نقــاط توپر) را روی خط $y=-۱$ تصـویر می‌کنیم و به هـمـین ترتیب قـسمـتی از منحنی که بین دو خط $y=۰$ و $y=۱$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) را روی خط $y=۰$ تصویر می‌کنیم،

تا نمودار تابع $y=[\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست آوریم.

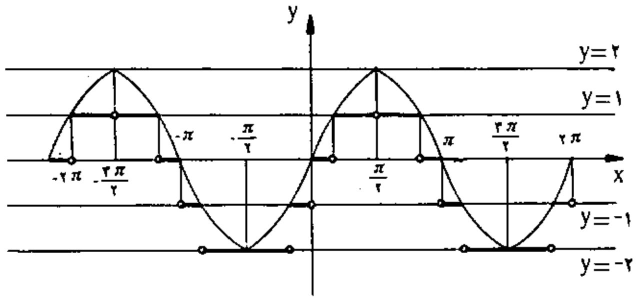


مثال ۷ــ نمودار تابع با ضابطه $y=[2\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱ــ با توجه به مطالب گفته شده درباره رسم توابع مثلثاتی درجه اول، ابتدا منحنی نمایش $y=+2\sin x$ را رسم می‌کنیم.

مرحله ۲ــ خطوط $y=-2$، $y=-1$، $y=0$، $y=1$ و $y=2$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط قرار دارند را پررنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=-2$ و $y=-1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=-2$ تصویر می‌کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=-1$ تصویر می‌کنیم[1] و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم و در مرحله آخر قسمتی از منحنی که بین دو خط $y=1$ و $y=2$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y=1$ تصویر می‌کنیم تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.

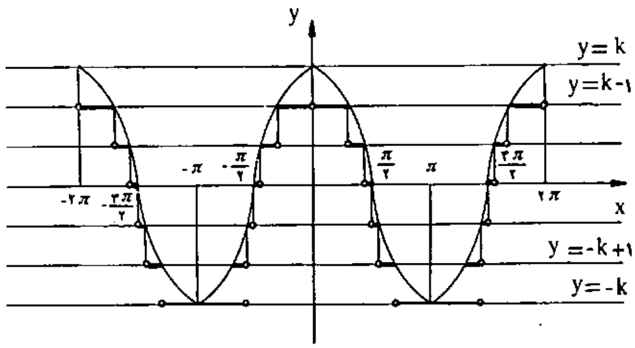


مثال ۸ــ نمودار تابع با ضابطه $y=[k\cos x]$ (که در آن $|k|\geq 1$ و $k\in z$) را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱ــ ابتدا منحنی $y=k\cos x$ را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله ۲ــ خطوط $y=-k$ و $y=-k+1$ و $y=-k+2$ و... $y=k-1$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط واقع می‌باشند را پر رنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-k$ و $y=-k+1$ قرار دارد، روی خط $y=-k$ تصویر می‌کنیم، و... به همین ترتیب در مرحله آخر قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=k-1$ و $y=k$ قرار دارد، روی خط $y=k-1$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.



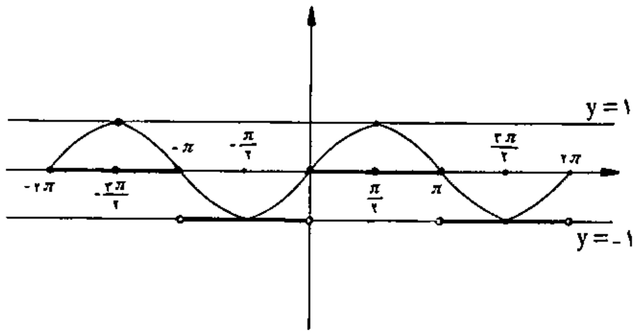
مثال ۹ــ نمودار تابع با ضابطه $y=[k\sin x]$ (که در آن $0\leq|k|<1$) را در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱ــ چون $0\leq|k|<1$. بنابراین منحنی نمایش تابع $y=k\sin x$ همواره بین‌دو خط $y=-1$ و $y=1$ واقع می‌شود.

۱ــ به‌طور کلی قسمتی از منحنی که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد را روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی $y=i$ و $y=i+1$ قرار داشته باشد. آن را روی خط $y=i$ تصویر می‌نماییم.

مرحله ۲ــ ابتدا نقاطی از منحنی را که روی خط $y=0$ قرار دارند، پر رنگ می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=-1$ و $y=0$ قرار دارد، روی خط $y=-1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد، روی خط $y=0$ تصویر می‌کنیم. تا نمودار تابع فوق را به‌دست آوریم.



تمرین

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱ــ $y=-\cos(2x+\frac{\pi}{4})+4$

۲ــ $y=4\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})-3$

۳ــ $y=\left|3\sin(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{3})+2\right|$

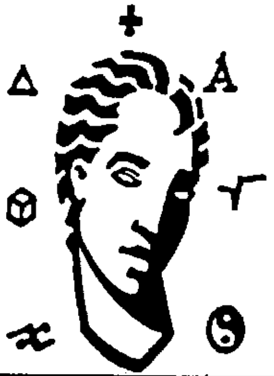
۴ــ $y=-5\sin(x+\frac{\pi}{7})-1$

فهرست منابع

۱ــ ریاضیات ۳ نظام جدید.

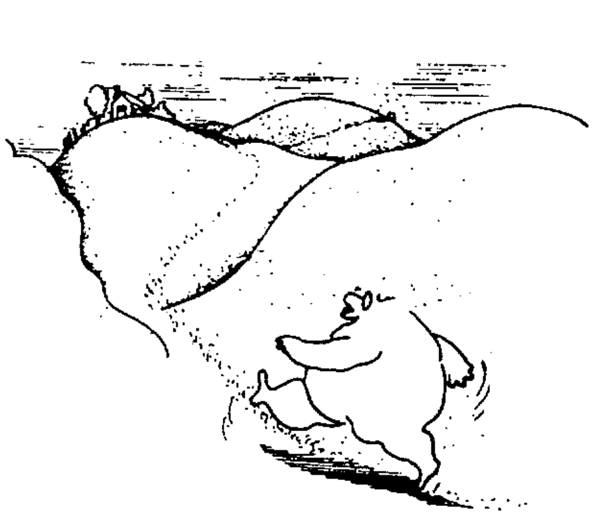
۲ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی ــ لیتهلد ــ (جلد اول).

۳ــ فیزیک هالیدی ــ (جلد اول).

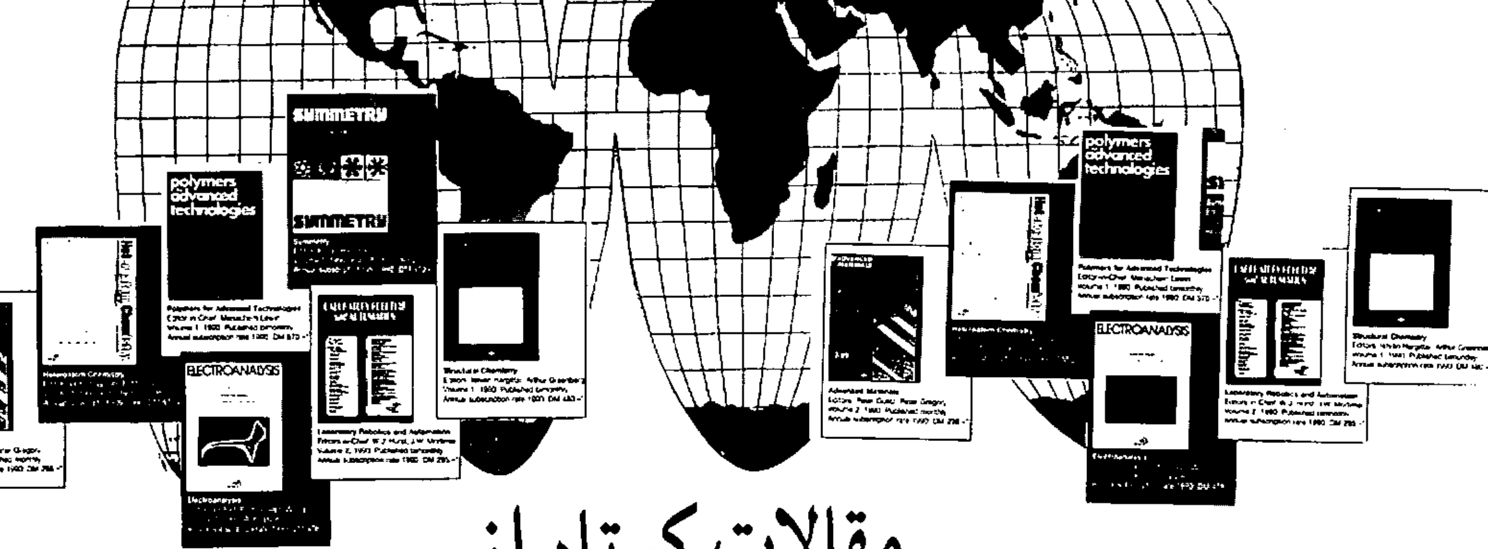


تفریح اندیشه ۴

مهرداد به پیاده‌روی عادت دارد. سرعت او در راهپیمایی ثابت و ۶ کیلومتر در ساعت است. او هر روز، هنگام ظهر، در یک میهمانخانهٔ ییلاقی که در میانهٔ مسیرش است، با دوستش ملاقات می‌کند. این محل در فاصلهٔ ۳۰ کیلومتری خانه او و دوستش واقع شده است. سرعت دوستش در راهپیمایی ۵/۵ کیلومتر در ساعت، یعنی کمی کمتر از سرعت مهرداد می‌باشد. اگر این دو قرار بگذارند که سر ظهر و همزمان به محل ملاقاتشان در میهمانخانه برسند، در ساعت ۱۱ در چه فاصله‌ای از یکدیگر باید قرار داشته باشند.



جواب در صفحهٔ ۸۸



مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۱۹)

قضایای سِوا، مِنلائوس، و اصل سطح

(قسمت اول)

Branko Grünbaum
G.C.Shephard

Mathematics Magazine vol. 68

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱. مقدمه

قضایای سِوا و مِنِلائوس، که به زودی از آنها سخن خواهیم گفت، از جذاب‌ترین و پربارترین قضایای هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی‌اند. بیان این قضایا آسان، و خود قضایا کاملاً عمومی‌اند، مثلاً، قضیهٔ منلائوس، در مورد هر مثلث و هر خط قاطع ناگذرنده از رأس آن، به کار می‌رود. این قضایا و اثبات آنها، چنان که از نامشان پیداست، قضایایی کلاسیک‌اند. منلائوس یونانی در قرن اول میلادی می‌زیست، و جیووانی سوای ایتالیایی "Giovanni Ceva" قضیهٔ خود (و قضیهٔ دوباره کشف کردهٔ منلائوس) را در قرن هفدهم میلادی انتشار داد. اخیراً هواهِنْ "Hoehn" با نشان دادن این که حاصل ضرب پنج، خارج قسمت از طولهای خاصی واقع در یک پنج ضلعی دارای مقدار ۱ است، به نتیجهٔ تازه‌ای از این دست رسید.

هدف از این مقاله، نشان دادن این مطلب است که نتایجی از این نوع، و توسیعاتشان به چند ضلعیهای عمومی‌ای [با هر چند ضلع دلخواه] پیامدهای اندیشهٔ ساده‌ای است که آن را اصل سطح "Area Principle" نام داده‌ایم. این اصل را در شکل ۱ توضیح داده‌ایم. در این شکل P نقطهٔ تقاطع خطوط BC و A_1A_2 است. با نمایش دادن طولهای قطعات $[A_1,P]$ و $[A_2,P]$، به ترتیب، با $|A_1P|$ و $|A_2P|$ و سطح مثلثهای $[A_1,B,C]$ و $[A_2,B,C]$، به ترتیب، با $|A_1BC|$ و $|A_2BC|$. اصل سطح بر این است که

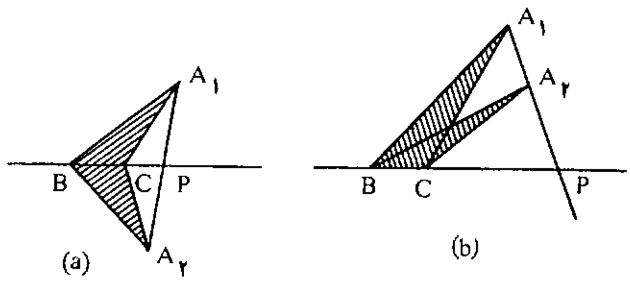
$$\frac{|A_1P|}{|A_2P|}=\frac{|A_1BC|}{|A_2BC|} \qquad (۱)$$

و این رابطه، تا زمانی که نسبتهای موجود در آن خوش تعریف باشند، یعنی مخرجهای آنها صفر نباشند، برقرار است. درستی (۱) به اینکه نقاط A_1 و A_2 توسط BC از هم جدا شده باشند یا نه، بستگی ندارد (شکل ۱(a) یا شکل ۱(b)). بعداً (۱) را، با در نظر گرفتن علامت برای نسبتهای آن، پالوده خواهیم کرد؛ اما در حال حاضر سطحها و طولها را مثبت در نظر می‌گیریم.

اثبات (۱) بلافاصله به دست می‌آید. روشن است که هر طرف این برابری با نسبت ارتفاعات دو مثلث به قاعدهٔ [B,C] برابر است. توجه داشته باشید که، هرچند بعضی از اثباتهای مشهور قضیهٔ سوا (فی‌المثل، کتاب قضایا و مسائل هندسه را ملاحظه کنید) از استدلالهای مربوط به سطوح بهره برده‌اند، این اثباتها با «اصل سطح» مورد بحث ما متفاوت‌اند.

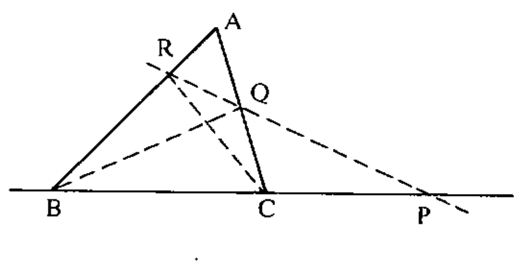
به عنوان پیش‌درآمدی از روشهای به کار رفته، از اصل سطح، برای اثبات سه قضیهٔ یاد شده استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم قاطعی خطوط BC، CA، AB، مشخص شده از زوجهای گفته شده از رأسهای مثلث [A,B,C]، را به ترتیب در نقاط P، Q، R قطع کند، و این نقاط از رأسهای مثلث مزبور متمایز باشند (شکل ۲ را ملاحظه کنید). قضیهٔ منلائوس بر این است که:

$$\frac{|BP|}{|PC|}\cdot\frac{|CQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AR|}{|RB|}=1 \qquad (2)$$



شکل ۱

اصل سطح مقرر می‌کند که: $|A_1P|/|A_2P|=|A_1BC|/|A_2BC|$



شکل ۲

قضیهٔ منلائوس مقرر می‌کند که: $(|BP|/|PC|).(|CQ|/|QA|).(|AR|/|RB|)=1$

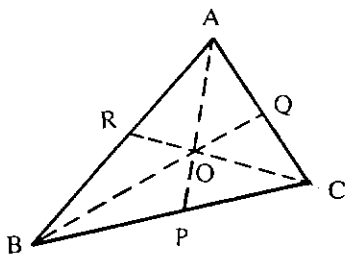
برای اثبات این مطلب، اصل سطح را دربارهٔ مثلثهای با قاعدهٔ [R,Q] به کار برده، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{|BP|}{|PC|}=\frac{|BRQ|}{|CRQ|},\ \frac{|CQ|}{|QA|}=\frac{|CRQ|}{|ARQ|},\ \frac{|AR|}{|RB|}=\frac{|ARQ|}{|BRQ|}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲)، جمیع سطحهای مثلثها حذف می‌شوند، و مشخص می‌شود که (۲) درست است، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم O چنان نقطه‌ای باشد که خطوط AO، BO و CO اضلاع مقابل مثلث را، به ترتیب در P، Q و R تلاقی کنند. در این مورد فرض کرده‌ایم، که این سه نقطه از رأسهای A، B و C متمایزند (شکل ۳ را ملاحظه کنید). قضیهٔ سوا بر این است که رابطهٔ (۲) در این حالت نیز برقرار است. برای اثبات این مطلب مثلثهای با قاعدهٔ [A,O] را در نظر می‌گیریم. در این صورت اصل سطح به دست می‌دهد.

$$\frac{|BP|}{|PC|}=\frac{|AOB|}{|COA|}$$



شکل ۳

قضیهٔ سوا بر این است که: $(|BP|/|PC|).(|CQ|/|QA|).(|AR|/|RB|)=1$

به همان ترتیب، با استفاده از مثلثهای به قاعده‌های [B,O] و [C,O]، داریم:

$$\frac{|CQ|}{|QA|}=\frac{|BOC|}{|AOB|},\quad \frac{|AR|}{|RB|}=\frac{|COA|}{|BOC|}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲)، سطحهای مثلثها همه حذف شده مقدار (۱) را، که قضیه را اثبات می‌کند، به دست می‌دهند.

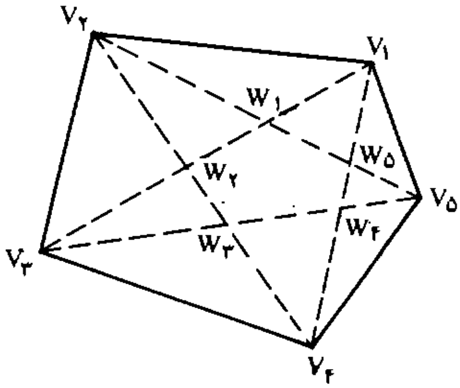
سرانجام، قضیهٔ هواهن را در نظر می‌گیریم، که روابط زیر را، با استفاده از علامت نویسی مقرر در شکل، در مورد پنج‌ضلعی، به دست می‌دهد.

(۳)

$$\frac{|V_1W_1|}{|W_2V_3|}\cdot\frac{|V_2W_2|}{|W_3V_4|}\cdot\frac{|V_3W_3|}{|W_4V_5|}\cdot\frac{|V_4W_4|}{|W_5V_1|}\cdot\frac{|V_5W_5|}{|W_1V_2|}=1$$

(۴)

$$\frac{|V_1W_2|}{|W_1V_3|}\cdot\frac{|V_2W_3|}{|W_2V_4|}\cdot\frac{|V_3W_4|}{|W_3V_5|}\cdot\frac{|V_4W_5|}{|W_4V_1|}\cdot\frac{|V_5W_1|}{|W_5V_2|}=1$$



شکل ۴

قضیهٔ هواهن بر این است که :

$$\frac{|V_1W_1|}{|W_2V_3|}\cdot\frac{|V_2W_2|}{|W_3V_4|}\cdot\frac{|V_3W_3|}{|W_4V_5|}\cdot\frac{|V_4W_4|}{|W_5V_1|}\cdot\frac{|V_5W_5|}{|W_1V_2|}=1$$

$$\frac{|V_1W_2|}{|W_1V_3|}\cdot\frac{|V_2W_3|}{|W_2V_4|}\cdot\frac{|V_3W_4|}{|W_3V_5|}\cdot\frac{|V_4W_5|}{|W_4V_1|}\cdot\frac{|V_5W_1|}{|W_5V_2|}=1$$

در اثبات اصلی هواهن، از قضیهٔ منلائوس در مثلثها و قاطعهای گوناگون واقع در شکل استفاده شده است ؛ ولی ما در اینجا، با استفاده از اصل سطح، اثباتی ساده‌تر و مستقیم‌تر به دست می‌دهیم.

پنج ضلعی نشان داده شده در شکل ۴ را در نظر می‌گیریم. (در این اولین برخورد توجه‌مان را به حالتی معطوف کرده‌ایم که در آن $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$ یک پنج ضلعی محدب است. حالت عمومی‌تر را، بدون هیچ گونه فرضی در مورد تحدب، در بخش ۴ بررسی خواهیم کرد.) با استفاده از مثلثهای به قاعدهٔ $[V_2, V_4]$ ، داریم :

$$\frac{|V_1W_2|}{|W_2V_3|}=\frac{|V_1V_2V_4|}{|V_3V_4V_2|}$$

در نتیجه :

$$|V_1V_3|/|W_2V_3|=\left(|V_1W_2|+|W_2V_3|\right)/\left(|W_2V_3|\right)$$
$$=(|V_1V_2V_4|+|V_3V_4V_2|/|V_3V_4V_2|$$
$$=|V_1V_2V_3V_4|/|V_3V_4V_2|$$

که در آن $|V_1V_2V_3V_4|$ سطح چهار ضلعی $[V_1, V_2, V_3, V_4]$ است. به همین ترتیب،

$$\frac{|V_1V_3|}{|V_1W_1|}=\frac{|V_1V_2V_3V_5|}{|V_1V_2V_5|}$$

و بنابراین

$$\frac{|V_1W_1|}{|W_2V_3|}=\frac{|V_1V_2V_5|}{|V_1V_2V_3V_5|}\cdot\frac{|V_1V_2V_3V_4|}{|V_3V_4V_2|}$$

در حالت کلی، به ازای ۵ و ... و ۲ و ۱ = i

$$\frac{|V_iW_i|}{|W_{i+1}V_{i+2}|}=\frac{|V_iV_{i+1}V_{i+4}|}{|V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+4}|}\cdot\frac{|V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+3}|}{|V_{i+2}V_{i+3}V_{i+1}|} \quad (۵)$$

با قرار دادن این مقادیر در طرف چپ (۳) ملاحظه می‌کنیم که جمیع سطحهای مثلثها و چهارضلعیها حذف می‌شوند، و چنانکه مطلوب بود، مقدار ۱ را به دست می دهند. دومین اظهار (۴) از قضیهٔ هواهن را می‌توان به طریقی مشابه اثبات کرد.

نمونهٔ اثباتهای فوق را می‌توان به‌طور مکرر به کاربرد : نسبتهای طولها را به صورت نسبتهای سطحها بیان می‌کنیم، و بعد، با ضرب این نسبتها، نشان می‌دهیم که، حذف انجام می‌گیرد و مقداری ثابت را به دست می‌دهد.

در اینجا پیش از توضیح توسیعات این نتایج، آنها را در زمینه‌ای عمومی‌تر مطرح می‌کنیم.

هم‌ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو ـ کاربردهای آنها

مورد استفاده دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی

• محمّدصادق عسگری

کتابهای کمک درسی نظام قدیم دبیرستان درقسمت پیوستگی و مشتق، بیشتر به بررسی پیوستگی توابع و مشتق‌پذیری آنها دریک نقطه و یا دریک فاصله پرداخته‌اند، و در قسمت کاربرد مشتق نیز به بیان چگونگی رسم نمودار توابع حقیقی و یا پیداکردن اکسترمم‌های نسبی و ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع می‌پردازند. درنظام جدید نیز این مفاهیم بیشتر در موارد گفته شده به‌کار رفته است. در ریاضی عمومی دورهٔ پیش‌دانشگاهی، دراین قسمتها قضایایی وجود دارد که درکتابهای کمک درسی به دلیل جدید بودن آنها، کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. این قضیه‌ها در قسمت پیوستگی عبارتند از :

۱ ـ قضیه بولتزانو ۲ـ قضیه مقدار میانی ۳ـ قضیه ماکزیمم و می‌نیمم‌مطلق توابع پیوسته.

و در بخش مشتق پذیری تحت عنوان :

۱ـ قضیه ماکزیمم و مینیمم نسبی

۲ـ قضیه رُول

۳ـ قضیه مقدار میانگین می‌باشند.

دراینجا سعی در بیان این قضایا و چگونگی استفاده از آنها در حل مسائل شده است. بنابراین، فرض براین است که خوانندگان ازقبل با تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری و قضیه‌های مقدماتی این دوقسمت آشنایی کافی دارند.

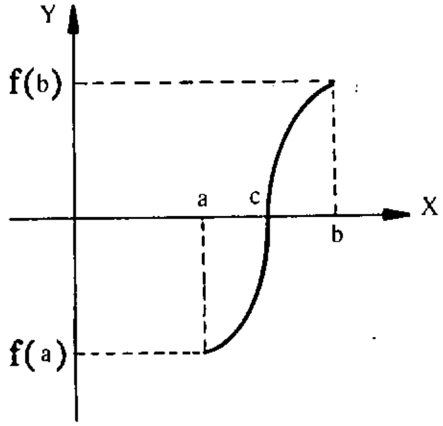
قضیه بولتزانو و قضیه مقدار میانی دو قضیه معادل در مبحث پیوستگی هستند که درابتدا این دوقضیه را به صورت نتیجه‌ای از قضیه دیگر می‌آوریم.

قضیه بولتزانو :

اگر تابع حقیقی f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد، آنگاه نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$. یعنی با برقراری شرایط قضیه معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصله (a,b) دارد.

تعبیر هندسی قضیه بولتزانو

شرایط قضیه بولتزانو به‌طور هندسی، یعنی اگر نمودار تابع f بر فاصله $[a,b]$ متصل باشد و ابتدا و انتهای نمودار تابع f یکی در پایین و دیگری در بالای محور xها قرار داشته باشد، آنگاه نمودار تابع f محور xها را حداقل در یک نقطه $a<c<b$ قطع می‌کند.

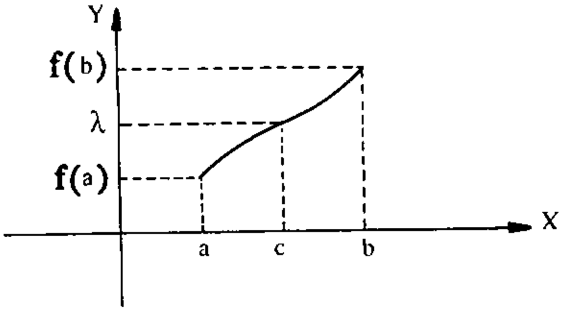


قضیه مقدار میانی پیوستگی:

اگر f برفاصله $[a,b]$ پیوسته و λ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشدآنگاه نقطه $a < c < b$ وجوددارد،به‌طوری که $f(c) = \lambda$. به بیان دیگر یعنی اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و دریک حالت داشته باشیم $f(a) < \lambda < f(b)$، آنگاه نقطه $a < c < b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c) = \lambda$.

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی

قضیه مقدار میانی به تعبیر هندسی یعنی توابع پیوسته بریک فاصله بسته همواره تمام مقادیر بُردشان را اختیارمی‌کنند.



اثبات قضیه بولتزانو با استفاده از قضیه مقدار میانی

اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$، آنگاه دو حالت اتفاق می‌افتد.

I) $f(a) < 0 < f(b)$ II) $f(b) < 0 < f(a)$

درحالت I داریم $f(a) < 0 < f(b)$ چون 0 بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد، بنابر قضیه مقدار میانی نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c) = 0$.

به‌طور مشابه درحالت II نیز حکم قضیه برقرار است.

اثبات قضیه مقدار میانی با استفاده از قضیه بولتزانو:

فرض‌کنیم f بر $[a,b]$ و $f(a) < \lambda < f(b)$ باشد f بنابراین داریم:

$$f(a) < \lambda \Rightarrow f(a) - \lambda < 0$$

$$\lambda < f(b) \Rightarrow f(b) - \lambda > 0 \quad (*)$$

تابع $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x) = f(x) - \lambda$ تعریف می‌کنیم. چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، درنتیجه تابع g نیز پیوسته می‌شود. و به‌علاوه داریم:

$$g(a) = f(a) - \lambda < 0 \quad \text{و} \quad g(b) = f(b) - \lambda > 0$$

یعنی $g(a)g(b) < 0$ بنابر قضیه بولتزانو نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $g(c) = 0$ و یا $f(c) - \lambda = 0$ در نتیجه $f(c) = \lambda$.

قضیه دیگری که در قسمت پیوستگی اهمیت زیادی دارد، قضیه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته است؛ که قبل از بیان صورت این قضیه تعریف زیر را می‌آوریم.

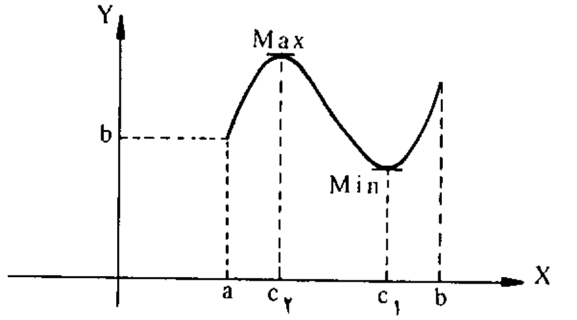
تعریف: نقطه $c \in D_f$ را نقطه ماکزیمم مطلق تابع حقیقی f خوانیم، هرگاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم، $f(x) \le f(c)$، در این صورت $f(c)$را مقدارماکزیمم مطلق f می‌گویند. به طور مشابه نقطه $C \in D_f$ را نقطهٔ مینیمم مطلق f گویند. هرگاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$ که‌دراین‌حالت‌نیز $f(c)$ را مینیمم مطلق f می‌گویند.

قضیه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته:

اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را براین فاصله اختیار می‌کند، یعنی نقاط $C_1, C_2 \in [a,b]$ وجود دارند، به‌طوری که برای هر $x \in [a,b]$ داریم:

$$f(C_1) \le f(x) \le f(C_2)$$

$f(C_1)$ را می‌نیمم مطلق و $f(C_2)$ را ماکزیمم مطلق f می‌گویند.



لازم به تذکر است که قضیه فوق روی فاصله‌های باز برقرار نیست، مثلاً تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی فاصله باز $(0,+\infty)$ پیوسته است. در صورتی‌که این تابع روی این فاصله ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

استفاده از قضایای پیوستگی درحل مسائل اهمیت زیادی دارد که درمثالهای زیر طریقه استفاده از این قضایا را نشان می‌دهیم.

مثالها:

مثال ۱: بُرد تابع $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ را تعیین کنید.

می‌دانیم همواره در توابع حقیقی محاسبه دامنه تابع بر محاسبه بُرد آن مقدم است. بنابراین ابتدا دامنه این تابع را تعیین می‌کنیم.

الف ـ تعیین دامنه :

$$1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow |x|\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1$$

$$D_f=[-1,1]$$

ب ـ تعیین بُرد :

تابع $\sin\theta$ برای هر $\theta\in\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است که بُرد این تابع فاصله $[-1,1]$ است. از طرفی داریم: $-1\le x\le 1$ بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع سینوس، وجود دارد $\theta\in\mathbb{R}$ به‌طوری که $x=\sin\theta$ در نتیجه :

$$y=f(x)=f(\sin\theta)=\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sin\theta\pm\cos\theta$$

با توجه به نامساوی

$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$ داریم :

$$-\sqrt{2}\le y=\sin\theta\pm\cos\theta\le\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$$

از طرفی

$$y=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y-x=\sqrt{1-x^2}\ge 0\Rightarrow y-x\ge 0$$

$$\Rightarrow -1\le x\le y\le\sqrt{2}\Rightarrow -1\le y\le\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R_f=[-1,\sqrt{2}]$$

مثال ۲: بُرد تابع $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ را تعیین کنید.

الف ـ تعیین دامنه : $D_f=\mathbb{R}$

ب ـ تعیین بُرد :

تابع $\tan\theta$ برای هر $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پیوسته است و بُرد آن برابر مجموعه اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است. حال برای $x\in\mathbb{R}$، بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع تانژانت وجود دارد $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ به‌طوری که $x=tg\theta$، درنتیجه :

$$y=f(x)=f(\tan\theta)=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta\Rightarrow y=\sin 2\theta$$

از $-\pi\le 2\theta\le\pi$ نتیجه می‌گیریم $-1\le y\le 1$ بنابراین

$$R_f=[-1,1]$$

مثال ۳: بُرد تابع $f(x)=ax\pm\sqrt{b^2-x^2}$ را به‌دست آورید : (a و $b\ge 0$)

الف ـ تعیین دامنه :

$$b^2-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le b^2\Rightarrow |x|\le b\Rightarrow -b\le x\le b$$

$$\Rightarrow D_f=[-b,b]$$

ب ـ تعیین بُرد : بنابر قسمت الف داریم $-b\le x\le b$، درنتیجه : $-1\le\frac{x}{b}\le 1$ بنابر پیوستگی تابع سینوس و استفاده از قضیه مقدار میانی وجود دارد $\theta\in\mathbb{R}$ به‌طوری که $\frac{x}{b}=\sin\theta$ و یا $x=b\sin\theta$

$$y=f(x)=f(b\sin\theta)=ab\sin\theta\pm\sqrt{b^2-b^2\sin\theta}$$

$$\Rightarrow y=ab\sin\theta\pm b\cos\theta$$

چون داریم:

$$-\sqrt{a^2b^2+b^2} \le ab\sin\theta \pm b\cos\theta \le \sqrt{a^2b^2+b^2}$$

درنتیجه $-b\sqrt{1+a^2} \le y \le b\sqrt{1+a^2}$ حال دوحالت را درنظر می‌گیریم:

$$y=ax+\sqrt{b^2-x^2} \quad (I \qquad y=ax-\sqrt{b^2-x^2} \quad (II$$

$$y=ax+\sqrt{b^2-x^2} \Rightarrow y-ax=\sqrt{b^2-x^2} \ge 0 \Rightarrow y-ax \ge 0 \quad (I)$$

$$\Rightarrow ax \le y \Rightarrow -b \le x \le \frac{y}{a} \le \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow -ab \le y \le b\sqrt{1+a^2} \Rightarrow R_f=[-ab, b\sqrt{1+a^2}$$

$$y=ax-\sqrt{b^2-x^2} \Rightarrow ax-y=\sqrt{b^2-x^2} \ge 0 \qquad (II$$

$$\Rightarrow ax-y \ge 0 \Rightarrow y \le ax \Rightarrow \frac{-b\sqrt{1+a^2}}{a} \le \frac{y}{a} \le x \le b \Rightarrow$$

$$-b\sqrt{1+a^2} \le y \le ab \Rightarrow R_f=\left[-b\sqrt{1+a^2}, ab\right]$$

مثال ۴: ثابت کنید معادله $x^4-x-1=0$ در فاصله $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

قرار می‌دهیم $f(x)=x^4-x-1$. دراین‌صورت تابع f بر فاصله $[0,2]$ پیوسته است و به‌علاوه داریم

$$f(0)=-1<0 \quad \text{و} \quad f(2)=13>0$$

بنابراین طبق قضیهٔ بولتزانو، نقطهٔ $0<c<2$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$ یا $c^4-c-1=0$، یعنی معادلهٔ فوق در فاصلهٔ $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

نکته: باتوجه به حل مثال ۴ ملاحظه می‌شود که قضیه بولتزانو، فقط وجود ریشه را برای یک معادله درصورت امکان نشان می‌دهد. ازاین قضیه نمی‌توان به‌طور دقیق ریشه‌های یک معادله را محاسبه کرد. ولی به کمک این قضیه می‌توان مقدار تقریبی ریشه‌های یک معادله را به‌دست آورد. به‌مثال ۵ توجه کنید.

مثال ۵: با استفاده از جدول زیر محلّ تقریبی جواب معادلهٔ $\sin 3x\cos 4x = \frac{x^3}{\pi^3}$ را در بازه $[1/07, 1/15]$ به‌دست آورید.

x	x^3/π^3	$\sin 3x\cos 4x$	$f(x)=\frac{x^3}{\pi^3}-\sin 3x\cos 4x$
۱/۰۷	۰/۰۳۹۵	۰/۰۲۸۶	۰/۰۱۰۹
۱/۰۸	۰/۰۴۰۶	۰/۰۳۷۶	۰/۰۰۳۰
۱/۰۹	۰/۰۴۱۸	۰/۰۴۴۲	−۰/۰۰۲۴
۱/۱۰	۰/۰۴۲۹	۰/۰۴۸۵	−۰/۰۰۵۶
۱/۱۱	۰/۰۴۴۱	۰/۰۵۰۴	−۰/۰۰۶۳
۱/۱۲	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۹۹	−۰/۰۰۴۶
۱/۱۳	۰/۰۴۶۵	۰/۰۴۷۰	−۰/۰۰۰۵
۱/۱۴	۰/۰۴۷۸	۰/۰۴۱۷	۰/۰۰۶۱
۱/۱۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۳۴۰	۰/۰۱۵۱

باتوجه به جدول بالا ملاحظه می‌شود که معادلهٔ $\frac{x^3}{\pi^3}-\sin 3x\cos 4x=0$ حداقل دراین فاصله دو ریشه دارد که محل تقریبی این دو ریشه، فاصله‌های $[1/13, 1/14]$، $[1/08, 1/09]$ می‌باشد، که به‌طور تقریبی این دو ریشه برابرند با:

$$[1/08, 1/09] \qquad x_1 \cong \frac{1/08+1/09}{2}=\frac{2/17}{2}=1/085$$

$$[1/13, 1/14] \qquad x_2 \cong \frac{1/13+1/14}{2}=\frac{2/27}{2}=1/135$$

مثال ۶: اگر تابع f در بازه $[0,1]$ پیوسته و برای هر $x \in [0,1]$، $0 \le f(x) \le 1$ نشان دهید که برای حداقل یک مقدار $c \in [0,1]$، $f(c)=c$.

اگر $f(0)=0$ و یا $f(1)=1$ باشد، آنگاه حکم مسأله برقرار است. فرض کنیم $f(0)\neq 0$ و $f(1)\neq 1$ تابع $g:[0,1]\to \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم.

دراین‌صورت بنابر پیوستگی تابع f ، تابع g نیز بر فاصله $[0,1]$ پیوسته است و به‌علاوه بنابر فرض $f(0)>0$ و $f(1)<1$، حال داریم:

$g(1)=f(1)-1<0$ و $g(0)=f(0)>0$

درنتیجه بنابر قضیه بولتزانو نقطه $0\le c\le 1$ وجود دارد، به‌طوری که $g(c)=0$ و یا $f(c)-c=0$ و بنابراین $f(c)=c$

مثال ۷: ثابت کنید معادله $ax^2+bx+c=0$ با شرط $5a+3b+3c=0$ همواره یک ریشه درفاصله (۰و۲) دارد.

شرط $5a+3b+3c=0$ را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$5a+3b+3c=c+(a+b+c)+(4a+2b+c)=$

$f(0)+f(1)+f(2)$

بنابراین $f(0)+f(1)+f(2)=0$ چون مجموع سه‌عدد $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ برابر صفراست، درنتیجه باید همواره دوتا از این سه عدد مختلف‌العلامه باشند، در نتیجه حالتهای زیر را داریم:

$f(0)$ و $f(1)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(0)f(1)<0 \overset{\text{ق بولتزانو}}{\Rightarrow}$ f یک ریشه در(۰،۱) دارد

$f(0)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(0)f(2)<0 \overset{\text{ق بولتزانو}}{\Rightarrow}$ f یک ریشه در(۰،۲) دارد

$f(1)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(1)f(2)<0 \overset{\text{ق بولتزانو}}{\Rightarrow}$ f یک ریشه در(۱،۲) دارد

که ازهریک از حالتهای فوق می‌توان نتیجه گرفت که همواره f حداقل یک ریشه در (۰،۲) دارد.

مثال ۸: اگر f تابعی‌حقیقی‌پیوسته‌بر فاصله [۱،۲] باشد و داشته باشیم $f(1)>1$ و $f(2)<2$، آنگاه نقطه‌ای مانند $1<c<2$ وجود داردبه‌طوری که $f(c)=c$

تابعی حقیقی $g:[1,2]\to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم.

چون f و تابع همانی بر فاصله [۱،۲] پیوسته در نتیجه تفاضل آنها یعنی تابع g نیز براین فاصله پیوسته است. با استفاده از مفروضات مسأله داریم:

$g(1)=f(1)-1<0$ و $g(2)=f(2)-2>0$

درنتیجه: $g(1)g(2)<0$ بنابر قضیه بولتزانو وجود دارد $1<c<2$ به‌طوری که $g(c)=0$ یا $f(c)-c=0$ یعنی $f(c)=c$

تمرین: اگر f تابعی حقیقی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ باشد و داشته باشیم $f(a)<a$ و $f(b)<b$، آنگاه نقطه‌ای مانند $a<c<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=c$

{**تذکر:** نقطه c را یک نقطه ثابت تابع‌حقیقی f گویند هرگاه $f(c)=c$.}

مثال ۹: اگر $-1<a<b$، ثابت کنید عدد حقیقی $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که

$2\sqrt{1+c}=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$

حل:

$-1<a<b \Rightarrow 0<a+1<b+1 \Rightarrow \sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}$

از آنجا که میانگین هردو عدد حقیقی همواره بین آن دو عدد حقیقی قرار دارد، بنابراین داریم:

$\sqrt{1+a}<\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}<\sqrt{1+b}$

تابع حقیقی $f(x)=\sqrt{1+x}$ را درنظر می‌گیریم. این تابع روی فاصله $[a,b]$ پیوسته است و به‌علاوه $R_f=\left[\sqrt{1+a},\sqrt{1+b}\right]$ اگر قرار دهیم $\lambda=\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}$ آنگاه داریم: $\sqrt{1+a}<\lambda<\sqrt{1+b}$ بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع f نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=\lambda$ یعنی $\sqrt{1+c}=\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}$ در نتیجه:

$2\sqrt{1+c}=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$

مثال ۱۰: ثابت کنید که هر چند جمله‌ای با درجه فرد حتماً یک صفر دارد.

فرض کنیم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و n یک عدد طبیعی فرد در این‌صورت همواره حدود تابع f در $\pm\infty$ مختلف‌العلامه می‌باشند، یعنی $\lim\limits_{n\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ درنتیجه اعداد حقیقی $a<0$ و $b>0$ وجود دارند، به‌طوری که $f(a)<0$ و $f(b)>0$.

حال اگر تابع f را بر فاصله $[a,b]$ درنظر بگیریم، این تابع

براین فاصله پیوسته است و به‌علاوه $f(a)f(b)<0$ ، درنتیجه بنابر قضیه بولتزانو وجود دارد $a<c<b$ ، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی $x=c$ یک صفر چندجمله‌ای $f(x)$ است. به‌عبارت دیگر هر معادله از درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱۱: فرض کنیم

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $a_0a_n<0$ ، ثابت کنید وجود دارد $c>0$ ، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی هر معادله درجه nام با شرط $a_na_0<0$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

$$a_nf(x)=a_n^2x^n+a_na_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_na_1x+a_na_0$$

حال داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_nf(x)=\lim_{x\to+\infty}a_n^2x^n=+\infty$$

بنابراین عدد حقیقی $b>0$ وجود دارد، به‌طوری که $a_nf(b)>0$ یعنی $f(b)$ و a_n هم علامت هستند. بنابر فرض $a_na_0<0$ یعنی a_n و a_0 مختلف‌العلامه‌اند درنتیجه $f(b)$ و a_0 نیز مختلف‌العلامه‌اند یعنی $a_0f(b)<0$ حال تابع f را بر فاصله $[0,b]$ درنظر می‌گیریم. این تابع براین فاصله پیوسته است و به‌علاوه $f(0)=a_0$ بنابراین $f(0)f(b)=a_0f(b)<0$ حال بنا بر قضیه بولتزانو نقطه $0<c<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=0$.

مثال ۱۲: فرض کنید f تابعی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ باشد و به‌علاوه $f(a)+f(b)=0$. ثابت کنید معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصله $[a,b]$ دارد.

اگر $f(a)=0$ یا $f(b)=0$ باشد، حکم مسأله برقرار است. فرض کنیم $f(a)\neq0$ و $f(b)\neq0$ دراین‌صورت چون $f(a)+f(b)=0$ درنتیجه:

$$f(a)+f(b)=0\Rightarrow f(a)=-f(b)\Rightarrow f(a)f(b)=-[f(b)]^2<0\Rightarrow f(a)f(b)<0$$

بنابر قضیه بولتزانو نقطهٔ $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

تمرین

۱ـ بُرد هریک از توابع زیر را با استفاده از قضیهٔ مقدار میانی پیوستگی محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ ۲) $f(x)=2x-\sqrt{9-x^2}$

۳) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ ۴) $f(x)=\frac{7x}{1+x^2}$

۵) $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$ ۶) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

۷) $f(x)=\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}$ ۸) $f(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$

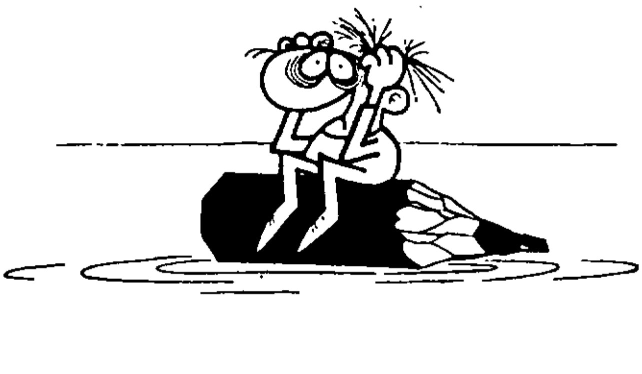
۹) $f(x)=3-x+\sqrt{1-x^2}$

۲ـ ثابت کنید هرمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a+c=0$ همواره یک ریشه در فاصله $[-1,1]$ دارد. (راهنمایی: $f(-1)+f(1)$ را تشکیل دهید.)

۳ـ ثابت کنید معادله $x^5+x^4-x^3+2x-2=0$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

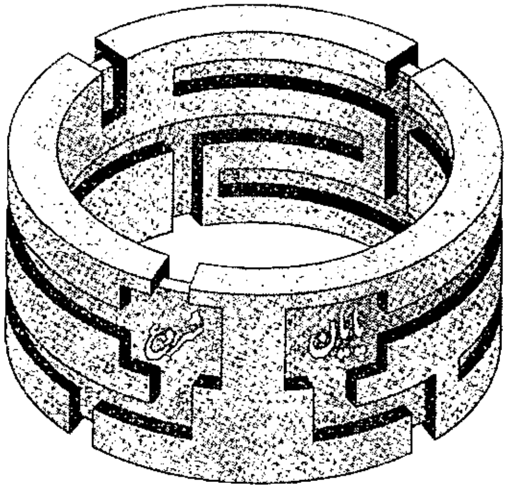
۴ـ ثابت کنید معادله $x^3+x^2+x-1=0$ همواره یک ریشه در فاصلهٔ $[0,1]$ دارد.

۵ـ ثابت کنید به ازای هر مقدار حقیقی k معادله $3\sin x+k\cos x-1=0$ همواره یک ریشه در فاصلهٔ $[0,\pi]$ دارد. (راهنمایی: $f(0)+f(\frac{\pi}{2})+f(\pi)$ را تشکیل دهید).

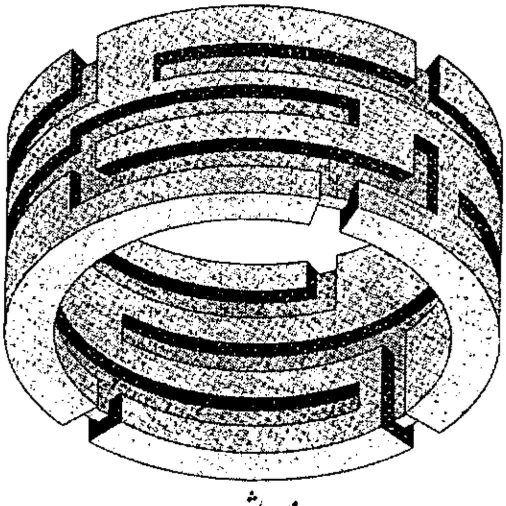


سرگرمی برای اندیشه‌ورزی

● ترجمه حسن نصیرنیا



نمای جلو



نمای پشت

بازی با ماز[1] چند بُعدیِ افسانه‌ای

دو تصویری که می‌بینید، نماهای متفاوتِ یک ماز حلقوی است که به دستور اُردَپ (Ordap) پادشاهِ نیرنگ‌بازِ سرزمین باستانی زفیلا (Xafilah) طراحی و ساخته شده است. چندی پیش، تصویری از این مازِ افسانه‌ای در حفّاریهای باستان‌شناسان کشف شده است.

می گویند، اُردپ دختر هوشمند و زیرکی به‌نام «ویکتوریا» داشته است. اُردَپ تصمیم می‌گیرد که از میانِ خواستگارانِ بی‌شمار ویکتوریا، هوشمندترین آنان را به‌عنوان داماد و وارثِ تاج و تختِ خود برگزیند. برای این‌منظور، افزارمندِ مُبتکرِ دربار یک ماز حلقوی عجیب ابداع می‌کند که بر سطوح بیرونی و درونی آن شیارهای پیچ در پیچی حک شده است. اُردَپ به خواستگاران دخترش تصویری از این ماز (شاملِ دونمایِ پیشین و پسین) می‌دهد و از آنان می‌خواهد که از نقطهٔ شروع، از یکی از شیارها حرکت را آغاز کنند و به نقطهٔ پایان برسند.

ما نیز شما را فرامی‌خوانیم، مدادی برگیرید و با استفاده از نیروی تخیّل و تجسّم، راه حلِ مازِ اردپ را بیابید. چنانچه موفق به یافتن آن نشدید، به صفحه ۶۷ مجله رجوع کنید.

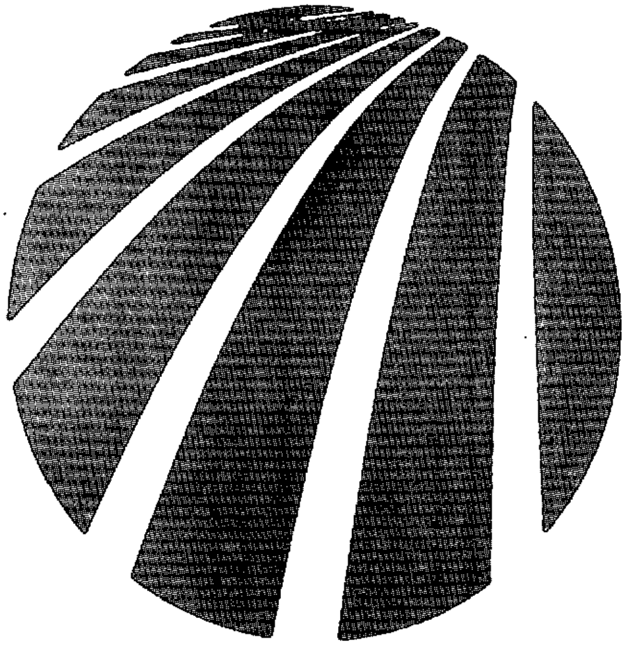
زیرنویس

۱ـ واژهٔ ماز در فارسی به معنی «چین و شکن» است. در زبان انگلیسی کلمهٔ maze به معنی «شبکه گذرگاههای پیچ در پیچ و گیج‌کننده» است. در زبان فرانسوی برای ادای این مفهوم از واژهٔ labyrinthe، لابیرنت (این واژه از کلمهٔ یونانی labyrintos مشتق شده است) استفاده می‌کنند. چنانکه می‌دانید، از دستگاه ماز در آزمونها و تجربه‌های روان‌شناسی استفاده می کنند.(م)

مأخذ ترجمه:

Discover Magazine, Sept. 1992.

روشهای عددی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرالهای معین



حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشته علوم ریاضی

● سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

با روشهای متداول محاسبهٔ $\int_a^b f(x)dx$ آشنا هستید. در این مقاله سعی می‌شود برخی از روشهای عددی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرالهای معینی که با روشهای متداول و معمول قابل محاسبه نیستند، ارائه شود. به‌طور مثال، می‌دانیم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ روی فاصلهٔ [۲و۱]پیوسته و درنتیجه انتگرال‌پذیر است، ولی مقدار انتگرال معین $\int_1^2 \sin(\frac{1}{x})dx$، چیست؟ و چگونه می‌توان آن‌را محاسبه کرد؟

در اینجا راههایی برای محاسبهٔ مقدار تقریبی این‌گونه انتگرالهای معین ارائه خواهد شد. مجموعهٔ این روشها به‌نام روشهای عددی انتگرالگیری موسوم است. در تعریف انتگرال دیدیم که اگر بازهٔ [a و b] را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

که در این رابطه $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ و $x_{k-1}\le c_k\le x_k$ ، $k\in \mathbb{N}$ است.

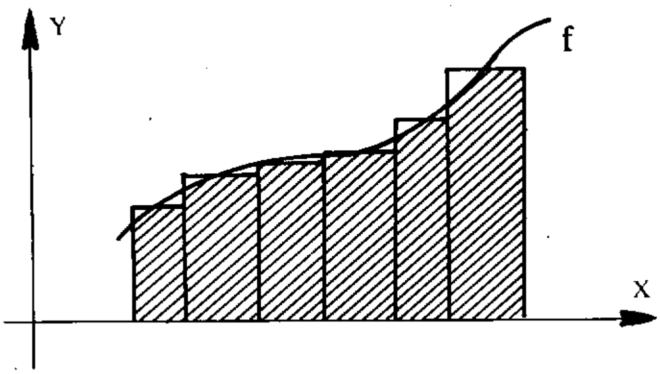
بنابراین اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود، می‌توان مقدار $I_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ را تقریب مناسبی برای مقدار انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ دانست.

روش نقطهٔ میانی (مستطیلی)

دیدیم که مقدار $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ با انتخاب نقطهٔ c_k تغییر می‌کند. در این روش نقطهٔ c_k وسط x_{k-1} و x_k در نظر گرفته می‌شود:

$$c_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

به شکل زیر که برای تابعی مانند : f رسم شده است، توجه کنید:



مثال: با استفاده از روش نقطهٔ میانی، مقدار انتگرال $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+1}$ را تقریب بزنید.

حل: اگر بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم ($n=10$)، آنگاه

$$\Delta x=\frac{1-0}{10}=0/1$$

و $x_0=0$ و $x_k=\frac{k}{10}=0/1k(1\le k\le 10)$

و به‌ازای هر $k\in\{1,2,...,10\}$، مقدار نقاط میانی $c_k=0/1k-0/05$ را از ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x+1}$ محاسبه می‌کنیم:

$$I_{10}=\sum_{k=1}^{10}f(c_k)\Delta x=0/1\sum_{k=1}^{10}f(c_k)=$$
$$0/1\sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{0/1k-0/05+1})$$

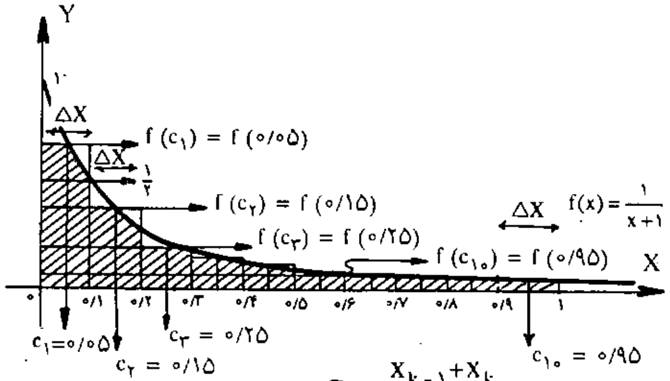
بنابراین:

$$I_{10}=0/1\sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{0/1k+0/95})$$
$$=0/1(\frac{1}{1/05}+\frac{1}{1/15}+\frac{1}{1/25}+...+\frac{1}{1/95})$$
$$I_{10}\approx 0/1\times 6/3223\Rightarrow \boxed{I_{10}\approx 0/63223 \text{(مقدار تقریبی)}}$$

در اینجا مقدار واقعی انتگرال را محاسبه می‌کنیم، و سپس با I_{10} مقایسه می‌کنیم:

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+1}=[Ln(x+1)]_0^1=Ln2-Ln1=Ln2-0=Ln2$$
$$\Rightarrow \boxed{I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+1}=Ln2\approx 0/69314418 \text{(مقدار واقعی)}}$$

بنابراین I_{10} با تقریب نقصانی کمتر از ۰/۰۶۱ با مقدار واقعی اختلاف دارد. واضح است که با افزایش n، جواب به‌دست آمده برای I_n، به مقدار واقعی نزدیکتر می‌شود. یعنی اگر n به عددی بسیار بزرگ میل کند؛ مقدار I_n به Ln2 می‌گراید. برای درک بیشتر این روش، تعبیر هندسی محاسبهٔ I_{10} را در شکل زیر مشاهده کنید. مقدار I_{10} برابر مجموع مساحت مستطیلهایی به ابعاد Δx و $f(c_k)$ (مستطیلهای سایه‌خورده) است.



$$C_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

مثال: با استفاده از روش نقطهٔ میانی مقدار انتگرالهای $I_1=\int_0^1 x^2dx$ و $I_2=\int_0^1\sin(x^2)dx$ و $I_3=\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ را تخمین بزنید.

حل: اگر برای هر سه انتگرال بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم ($n=10$)، آنگاه $\Delta x=\frac{1-0}{10}=0/1$

و $x_0=0$ و $x_k=\frac{k}{10}=0/1k(1\le k\le 10)$

و به‌ازای هر $k\in\{1,2,...,10\}$، مقدار نقاط میانی $c_k=0/1k-0/05$ را به‌ترتیب از ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $f(x)=\sin(x^2)$ و $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$، محاسبه می‌کنیم:

$$I_{10}=\sum_{k=1}^{10}f(c_k)\Delta x\Rightarrow I_{10}=0/1\sum_{k=1}^{10}(0/1k-0/05)^2\Rightarrow$$
$$I_{10}=0/1(\sum_{k=1}^{10}0/01k^2-\sum_{k=1}^{10}0/01k+\sum_{k=1}^{10}0/0025)$$
$$=0/1\left[0/01(\frac{10\times 11\times 21}{6})-0/01(\frac{10\times 11}{2})+0/0025(10)\right]$$
$$=0/3325\quad\Rightarrow \boxed{I_1\approx 0/3325}$$

می‌دانیم مقدار واقعی $I_1=\int_0^1 x^2dx$ برابر $\frac{1}{3}$ است، بنابراین با مقدار I_{10} حدود ۰/۰۰۱ اختلاف دارد.

در جدول زیر مقدار انتگرال I_1 را برای تعداد تقسیمات متفاوت نمایش داده‌ایم:

n	۱۰	۵۰	۱۰۰	۲۰۰
I_n	۰/۳۳۲۵	۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳۳۲۵	۰/۳۳۳۳۳۱

مشاهده می‌شود که با افزایش n، مقدار I_n به مقدار واقعی انتگرال نزدیکتر می‌شود. به همین ترتیب I_2 و I_3 را می‌توان

به‌طور تقریبی محاسبه کرد، و به نتایج زیر رسید :

$$I_2=\int_0^1 \sin(x^2)dx \approx I_{10}=0/1\sum_{k=1}^{10}\sin(c_k^2)\approx 0/3098$$

همچنین می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید :

$$I_2=\int_0^1 \sin(x^2)dx \approx I_{20}=\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}\sin(c_k^2)\approx 0/310$$

می‌دانیم امکان محاسبهٔ مقدار واقعی I_2 وجود ندارد، بنابراین با افزایش n می‌توان به مقدار واقعی انتگرال نزدیک شد. با انتخاب n بسیار بزرگ خواهیم دید که مقدار واقعی انتگرال با دقت سه رقم اعشار برابر ۰/۳۱۰ است.

$$I_3=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx I_{10}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}e^{-\frac{c_k^2}{2}}\approx 0/8558$$

همچنین می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید :

$$I_3=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx I_{20}=\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}e^{-\frac{c_k^2}{2}}\approx 0/8557$$

بنابراین مقدار انتگرال I_3 با دقت سه رقم اعشار برابر ۰/۸۵۶ است : $I_3=\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 0/856$.

روش ذوزنقه

در این روش برای محاسبهٔ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$، به‌جای این که نقطهٔ c_k را میانگین x_{k-1} و x_k بگیریم، $f(c_k)$ را متوسط مقادیر $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ انتخاب می‌کنیم :

$$f(c_k)=\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$$

توجه کنید که اگر تابع پیوسته باشد، بنابر قضیهٔ مقدار میانی یک c_k بین x_{k-1} و x_k وجود دارد که مقدارش برابر $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ باشد.

پس می‌توان نوشت :

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right]$$

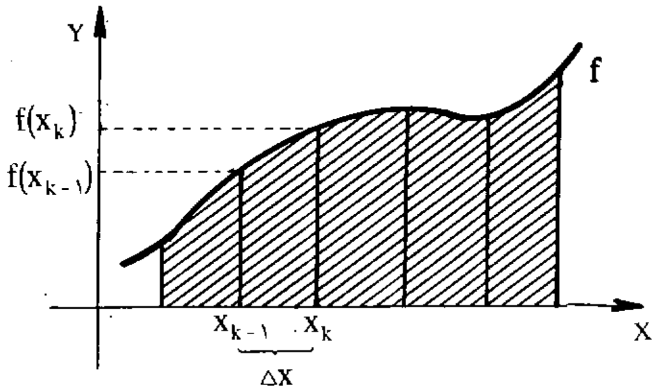
با توجه به برابریهای زیر :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})=f(x_0)+\sum_{k=2}^{n} f(x_{k-1})=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)=f(x_n)+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

خواهیم داشت :

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(x_n)+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$
$$=\frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

به شکل زیر که برای تابعی مانند f: رسم شده است، توجه کنید :



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که طول قاعده‌های هریک از ذوزنقه‌ها $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ و ارتفاع آنها Δx است. بنابراین $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x$ مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های $f(x_{k-1})$ و $f(x_k)$ و ارتفاع Δx است.

با فرض $m=\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}$ می‌توان نوشت :

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\Delta x\left[m+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

مثال: با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقدار انتگرال $J=\int_0^1\frac{dx}{x+1}$ را تقریب بزنید.

حل: اگر بازهٔ [۱و ۰] را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، $(n=10)$ ، آنگاه $\Delta x=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}=0/1$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$J_{10}=\frac{0/1}{2}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{9} f(x_k)\right]$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، یعنی $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$، می‌توان نوشت:

$$J_{۱۰}=۰/۰۵\left[۱+\frac{۱}{۲}+۲\sum_{k=۱}^{۹}\frac{۱}{x_k+۱}\right]$$

$$\left(\sum_{k=۱}^{۹}\frac{۱}{x_k+۱}\approx ۶/۱۸۷۴۲\right)$$

$$=۰/۰۵\left[\frac{۳}{۲}+۲\left(\frac{۱}{۱/۱}+\frac{۱}{۱/۲}+\frac{۱}{۱/۳}+...+\frac{۱}{۱/۹}\right)\right]\approx ۰/۶۹۳۷۴$$

در این‌جا اگر مقدار $J_{۱۰}$ را با مقدار واقعی انتگرال یعنی $J=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x+۱}=Ln۲$ مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود که $J_{۱۰}$ با تقریب اضافی کمتر از ۰/۰۰۰۶ با مقدار واقعی اختلاف دارد.

با مقایسهٔ مقادیر $I_{۱۰}$ و $J_{۱۰}$ و J نتیجه می‌شود:

$$I_{۱۰}<J<J_{۱۰} \qquad (I_n<J<J_n)$$

تمرین: با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقدار $J=\int_{۰}^{۱}e^{-x^۲}dx$ را تقریب بزنید.

مثال: با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقادیر $J=\int_{۰}^{۱}x^۲dx$ و $J'=\int_{۰}^{۱}e^{x^۲}dx$ را تقریب بزنید.

حل: اگر بازهٔ [۱ و ۰] را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، $(n=۱۰)$، آنگاه $\Delta x=\frac{۱-۰}{۱۰}=۰/۱$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$J_{۱۰}=\frac{۰/۱}{۲}\left[f(۰)+f(۱)+۲\sum_{k=۱}^{۹}f(x_k)\right]$$

برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$، می‌توان نوشت:

$$J_{۱۰}=۰/۰۵\left[۰+۱+۲\sum_{k=۱}^{۹}x_k^۲\right]$$

$$=۰/۰۵[۱+۲(۰/۰۱+۰/۰۴+۰/۰۹+۰/۱۶+...+۰/۸۱)]$$

$$\Rightarrow J_{۱۰}=۰/۳۳۵۰ \qquad (I_n<J<J_n)$$

برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^{x^۲}$، می‌توان نوشت:

$$J'_{۱۰}=۰/۰۵[۱+e+۲(۱/۰۰۱+...+۲/۰۷۳)]$$

می‌دانیم $e\approx ۲/۷۱۸۳$، پس:

$$J'_{۱۰}\approx ۱/۳۴۸۷$$

تمرین: با استفاده از روش نقطه میانی و روش ذوزنقه‌ای مقدار $S=\int_{۱}^{۲}\sin(\frac{۱}{x})dx$ را تقریب بزنید.

روش سیمپسون

این قاعده با تقسیم [b و a] به یک تعداد زوج از بازه‌های برابر (n زوج بازهٔ برابر) و تقریب $f(x)$ به‌وسیلهٔ یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم:

$$y=f(x)\approx ax^۲+bx+c \qquad (۱)$$

که از سه نقطهٔ متوالی متناظر به

$x_۰,x_۱,x_۲;x_۱,x_۲,x_۳;...;x_{n-۲},x_{n-۱},x_n$، می‌گذرد به‌دست می‌آید. از نظر هندسی این قاعده به‌جای خم $y=f(x)$ مجموعه‌ای از کمان‌های سهمی تقریبی (۱) را قرار می‌دهد:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx\approx\frac{\Delta x}{۳}(y_۰+۴y_۱+۲y_۲+۴y_۳+۲y_۴+۴y_۵+...+۲y_{n-۲}+۴y_{n-۱}+y_n)$$

مثال: مقدار انتگرال معین $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^۲+۱}$ را با استفاده از روشهای ذوزنقه‌ای و سیمپسون با تقسیم بازهٔ [۱ و ۰] به $n=۴$ قسمت برابر، تقریب بزنید.

حل: با فرض $y=f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$، خواهیم داشت:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱-۰}{۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

حال مقدار y را با چهار رقم اعشار محاسبه می‌کنیم:

$y_۰=f(۰)=۱/۰۰۰۰$ و $y_۱=f(۰/۲۵)=۰/۹۴۱۲$ و

$y_۲=f(۰/۵)=۰/۸۰۰۰$ و $y_۳=f(۰/۷۵)=۰/۶۴۰۰$ و

$y_۴=f(۱)=۰/۵۰۰۰$

از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای نتیجه می‌شود:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^۲+۱}\approx\frac{\Delta x}{۲}[y_۰+y_۴+۲(y_۱+y_۲+y_۳)]=\frac{۰/۲۵}{۲}$$

$$[۱+۰/۵+۲(۲/۳۸۱۲)]=۰/۷۸۲۸$$

از قاعدهٔ سیمپسون نتیجه می‌شود:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^۲+۱}\approx\frac{\Delta x}{۳}(y_۰+۴y_۱+۲y_۲+۴y_۳+y_۴)$$

$$=\frac{۰/۲۵}{۳}(۱+۴(۰/۹۴۱۲)+۲(۰/۸)+۴(۰/۶۴)+۰/۵)$$

$$=۰/۷۸۵۴$$

در این‌جا مقدار واقعی $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^۲+۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^۲+۱}=[\mathrm{Arc\,tan}\,x]_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۴}\approx ۰/۷۸۵۴$$

دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

● میرشهرام صدر

دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، به همّت ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه و با حمایت انجمن ریاضی ایران و دانشکده علوم دانشگاه رازی کرمانشاه، در روزهای اول تا سوم شهریورماه ۱۳۷۶ در مرکز تربیت معلم شهید صدوقی و مرکز آموزش نیروی انسانی فرهنگیان شهر تاریخی و خطّهٔ شهیدپرور کرمانشاه برگزار شد.

در این کنفرانس بیش از ۹۰۰ نفر دبیر و استاد دانشگاه و ۴ نفر میهمان خارجی شرکت داشتند. استادان دانشگاه، همراه با دبیران و دانش‌پژوهان آموزش ریاضی، ارائهٔ مقاله و تبادل نظر کردند، که این امر باعث وحدت و همبستگی بیشتر بین مدرسه و دانشگاه در جهت پیشرفت آموزش ریاضی شد.

هدف اصلی کنفرانس، اعتلای آموزش ریاضی از طریق مشارکت سازندهٔ همه دست‌اندرکاران آموزش ریاضی، بخصوص معلمان پرتوان، زحمتکش، با مطالعه و علاقه‌مند به پژوهش در زمینهٔ آموزش ریاضی بود.

با توجه به هدف اصلی کنفرانس و نیازهای جامعه آموزش ریاضی، چهار محور اصلی این کنفرانس عبارت بودند از :

ــ ضرورت تدوین استانداردهای ملی برنامهٔ درسی

ــ نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضیات

ــ ضرورت تحول در آموزش مستمر، جهت اعتلای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی

ــ شیوهٔ تدریس مفاهیم ریاضی با تأکید بر حسابان

مراسم افتتاحیه صبح روز شنبه، اول شهریور پس از حمل قرآن کریم توسط دانش‌آموزان پیشتاز کرمانشاه، با تلاوت آیاتی از قرآن و به اهتزاز درآوردن پرچم جمهوری اسلامی ایران، همراه با سرود و پرچم دومین کنفرانس آموزش ریاضی آغاز شد. سپس آقای فرخ‌پور، مدیر کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه به مدعوین و شرکت کنندگان خیرمقدم گفت و گزارشی از کارهای انجام شده را به سمع حاضران در کنفرانس رساند. همچنین دبیر کمیته علمی کنفرانس، خانم *زهرا گویا* ضمن خیرمقدم به شرکت کنندگان دربارهٔ برنامه‌های کنفرانس، نحوه داوری مقالات با توجه به چهارمحور اصلی کنفرانس سخنرانی کردند.

از طرف کمیته علمی، در این جلسه جناب آقای میرزا

جلیلی از استان تهران، جناب آقای سید مرتضی حسنی نسب از استان کرمانشاه و جناب آقای **یونس عابدین دوست** از استان گیلان به عنوان پیشکسوتان جامعه آموزش ریاضی ایران معرفی شدند و لوح تقدیر دریافت کردند.

اولین سخنران عمومی جلسهٔ افتتاحیه که باعث پربارتر شدن این کنفرانس گردید، استاد فرزانه، حضرت علامه محمد تقی جعفری بودند. ایشان سخنرانی خود را دربارهٔ «شهود و تجرید» ایراد فرمودند و در لابه‌لای سخنان گهربارشان به اهمیت ریاضیات در جهان امروز اشاره کردند. در این کنفرانس، تقریباً ۷۰ مقاله به صورت سخنرانی‌های ۲۰ یا ۴۰ دقیقه‌ای، عمومی؛ پوستر با چکیده و پوستر بدون چکیده در دو سالن و چهار کلاس تشکیل شد.

سخنرانان عمومی این کنفرانس، دکتر **غلامحسین شکوهی** دربارهٔ «نقدی بر روشهای آموزش مقدمات ریاضی»، دکتر *عبادا*... محمودیان دربارهٔ «نقش ریاضیات گسسته در آموزش ریاضی» پرفسور *آلن بیشاپ*[۱] از استرالیا دربارهٔ «رابطهٔ بین آموزش ریاضی و فرهنگ»، دکتر *یوداریا* محمد یوسف[۲] از مالزی دربارهٔ «تدریس حقایق ریاضی در مقابل تدریس فرایند تفکر ریاضی در دوره کارشناسی آموزش ریاضی»، دکتر مهدی رجبعلی‌پور دربارهٔ «تعریف جدید برای مفهوم بی‌نهایت کوچک» و دکتر *زهرا گویا* دربارهٔ «توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی ــ یک ضرورت» صحبت کردند. همچنین در این کنفرانس، مقاله‌ای توسط آقای *حمیدرضا امیری* از طرف هیأت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان با عنوان «تاریخچه و نقش مجله‌های آموزش ریاضی در آموزش ریاضیات» ارائه گردید، متن کامل این مقاله را علاقه‌مندان می‌توانند در شماره‌های آینده مجله مطالعه کنند.

در این کنفرانس، دو میزگرد برپا شد که اولین میزگرد در بعد از ظهر اول شهریور با هدف رویارویی صمیمانهٔ معلمان ریاضی با شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی تألیف کتابهای درسی آموزش و پرورش و دومین میز گرد، ساعت یازده و سی دقیقهٔ روز سوم شهریور با هدف بررسی کتاب و مشکلات درس حسابان تشکیل شد.

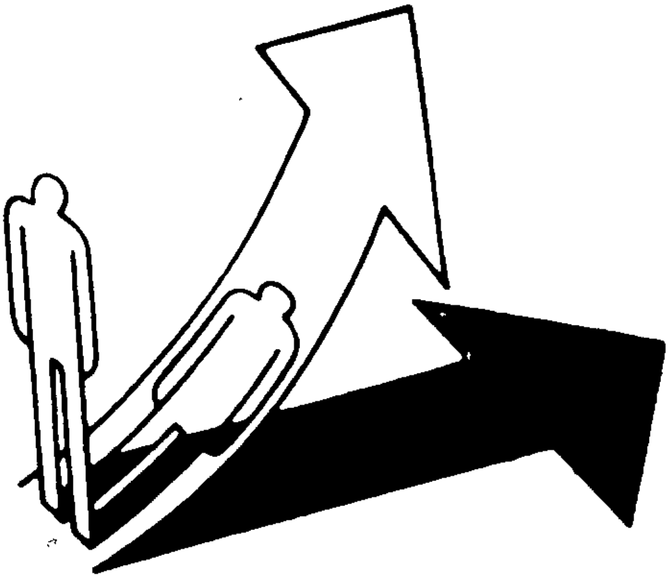
کمیته علمی، اجرایی و هیأت امنای کنفرانس، با دلسوزی و به کارگیری تمام امکانات موجود، با توجه به محدودیتهای شدیدی که در طی هشت سال دفاع مقدس در این شهر تاریخی و شهید پرور وجود داشت، در ارائهٔ محتوای علمی و اجرای این کنفرانس موفق بودند. در کنار برنامه‌های علمی، نمایشگاه صنایع آموزشی وزارت آموزش و پرورش و نمایشگاه کتاب انتشارات مدرسه دایر بود. درضمن، وضعیت پذیرایی و مکانهای اسکان شرکت کنندگان در کنفرانس بسیار عالی بود و کرمانشاهیهای عزیز همهٔ امکاناتشان را به بهترین وضعیتی در طبق اخلاص نهاده بودند.

در خاتمه، باید از همه دست‌اندرکاران، کمیته‌های علمی و اجرایی و هیأت امنای دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که با همکاری، همدلی، مسئولیت‌پذیری فراوان، عشق و ایثار، توانستند این کنفرانس را برپا کنند، تشکر و قدردانی نمود. امید است که با این گونه تلاشها و برگزاری کنفرانسها بتوانیم هر چه بیشتر و بهتر در جهت گسترش آموزش ریاضی و ارتقای سطح علمی آموزشگران ریاضی و برقراری رابطهٔ تنگاتنگ بین مدرسه و دانشگاه، گامهای بلندتری برداریم.

۱) Alan Bishop

۲) Yudariah bt Mohammad Yousof





میانگین همساز

• پرویز شهریاری

میانگین همساز n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n، به این ترتیب تعریف می‌شود :

$$M = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

اگر میانگین همساز را (که به آن واسطهٔ توافقی هم می‌گویند) با میانگین‌های مشهورتر یعنی میانگین حسابی

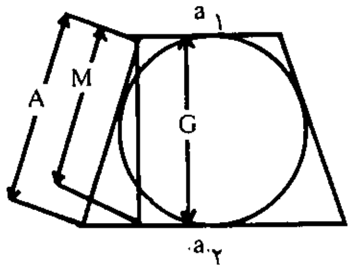
$$A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

و میانگین هندسی $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

مقایسه کنیم معلوم می‌شود که از هر دوی آنها کوچکتر است ؛ درواقع $A \ge G \ge M$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که همهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، باهم برابر باشند.

بستگی بین سه میانگین به ازای $n = 2$ را می‌توان به سادگی و با زیبایی، تعبیر هندسی کرد. ذوزنقه‌ای با ساق‌های برابر و قاعده‌های به طولهای a_1 و a_2 درنظر می‌گیریم که بر دایره‌ای محیط باشد (به سادگی ثابت می‌شود که، چنین ذوزنقه‌ای، همیشه وجود دارد). دراینصورت، طول ساق این ذوزنقه، میانگین حسابی a_1 و a_2 ، طول ارتفاع ذوزنقه، میانگین هندسی و طول تصویرارتفاع روی ساق، میانگین همساز آنها است.



مفهوم «میانگین» با مفهوم تصاعد بستگی نزدیک دارد. در تصاعد حسابی، هرجمله (به جز جملهٔ اول و جملهٔ آخر) میانگین حسابی دو جملهٔ مجاور خود است. همچنین، در تصاعد هندسی، هر جمله (به‌جز جمله‌های اول و آخر) میانگین هندسی دوجملهٔ مجاور خود است. به همین ترتیب می‌توان تصاعد همساز (یا تصاعد توافقی) را تعریف کرد : هرجملهٔ تصاعد همساز (به جز دوجملهٔ اول و آخر)، میانگین همساز دو جملهٔ مجاور خود است. دنباله

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \ (n \in N)$$

نمونه‌ای از یک تصاعد همساز است. درواقع، دو جملهٔ مجاور

جملهٔ $\frac{۱}{n}$ عبارتند از $\frac{۱}{n-۱}$ و $\frac{۱}{n+۱}$، که میانگین همساز آن‌ها، چنین است:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{n-۱}+\frac{۱}{n+۱}}=\frac{۲}{n-۱+n+۱}=\frac{۱}{n}$$

مجموع جمله‌های این تصاعد همساز، یعنی

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots$$

را **رشتهٔ همساز** (یا **رشتهٔ توافقی**) گویند.

گوتفرید ویلهلم لایپ نیتس، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و فیلسوف آلمانی، در سال ۱۶۷۳ ثابت کرد که، این رشته، مجموعی برابر بی‌نهایت دارد. یعنی حد مجموع جزئی

$$S_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}$$

با بزرگ شدن n، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

استدلال لایپ نیتس چنین بود. این n جمله ازرشته همساز را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}$$

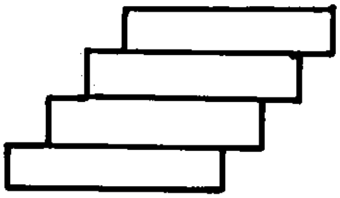
هرجملهٔ این رشته از $\frac{۱}{۲n}$ کوچکتر نیست، بنابراین، این مجموع از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر است. باتوجه به این نکته، می‌توان نوشت:

$$۱>\frac{۱}{۲}$$
$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$
$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}>\frac{۱}{۲}$$
$$\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}>\frac{۱}{۲}$$
....
$$\frac{۱}{۲^n+۱}+\frac{۱}{۲^n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n+۱}}>\frac{۱}{۲}$$

روشن است، اگر جمله‌های رشتهٔ همساز را، به همین ترتیب گروه‌بندی کنیم، هربار تکه‌ای از رشته را به‌دست می‌آوریم که، مجموع جمله‌های آن، از $\frac{۱}{۲}$ کمتر نیست؛ در ضمن، تعداد این تکه‌ها در رشته، بی‌نهایت است.

جالب است، اگر آجری را روی سطح زمین قرار دهیم، آجر دوم را روی آن طوری قرار دهیم که انتهای چپ آن در نقطه $\frac{۱}{۲}$

- - - - - - - - -



آجر زیرین قرار گیرد، به همین ترتیب آجرسوم را درنقطهٔ $\frac{۱}{۳}$ آجر زیر خود، آجر چهارم را در نقطه $\frac{۱}{۴}$ آجر سوم و غیره قرار دهیم، ساختمانی پایدار به‌دست می‌آید، و این ساختمان را می‌توان به هر اندازه بلند ساخت.

لئوناراولر در سال ۱۷۴۰ ثابت کرد، مجموع S_n شبیه $\ln_n$ افزایش می‌یابد. به زبان دقیقتر، عدد ثابت C وجود دارد، به‌نحوی که

$$S_n=\mathrm{Ln}_n+C+\varepsilon_n$$

که در آن، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، ε_n به سمت صفر میل می‌کند؛ درضمن عدد

$$C=۰/۵۷۷۲۱\ldots$$

ثابت اولر نامیده می‌شود.

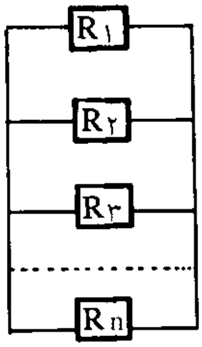
رشتهٔ همساز تنها نمونهٔ تصاعد همساز نیست. اگر a و b را دوجملهٔ اول یک تصاعد همساز بگیریم، جملهٔ سوم آن برابر $\frac{ab}{۲a-b}$، جملهٔ چهارم آن برابر $\frac{ab}{۳a-۲b}$ ،... و جملهٔ nام آن برابر $\frac{ab}{(n-۱)a+(n-۲)b}$ می‌شود. توجه کنیم، اگرa و b دو جملهٔ اول یک تصاعد حسابی باشند، جملهٔ nام آن برابر $(n-۱)b+(n-۲)a$؛ و اگر a و b دو جملهٔ اول یک تصاعد هندسی باشند، جملهٔ nام آن برابر $\frac{b^{n-۱}}{a^{n-۲}}$ می‌شود.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که، به شرط $a\neq۰$ و $b\neq۰$ مجموع جمله‌های هر تصاعد همساز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

در فیزیک، اغلب با میانگین همساز روبه‌رو می‌شویم. به

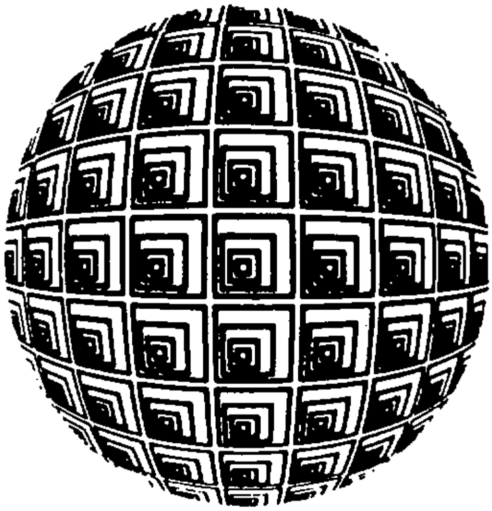
عنوان نمونه، مقاومت دستگاهی که از n مقاومت موازیِ R_1 ، R_2 ، ...، R_n تشکیل شده است، برابر است با:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$



یعنی، برابر است با $\frac{1}{n}$ میانگین همساز آن‌ها یا فاصلهٔ کانونی دستگاهی که شامل n عدسی نازکِ با فاصله‌های کانونی f_1 ، f_2 ، ...، f_n باشد، برابر است با :

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \cdots + \frac{1}{f_n}}$$





● حمیدرضا امیری

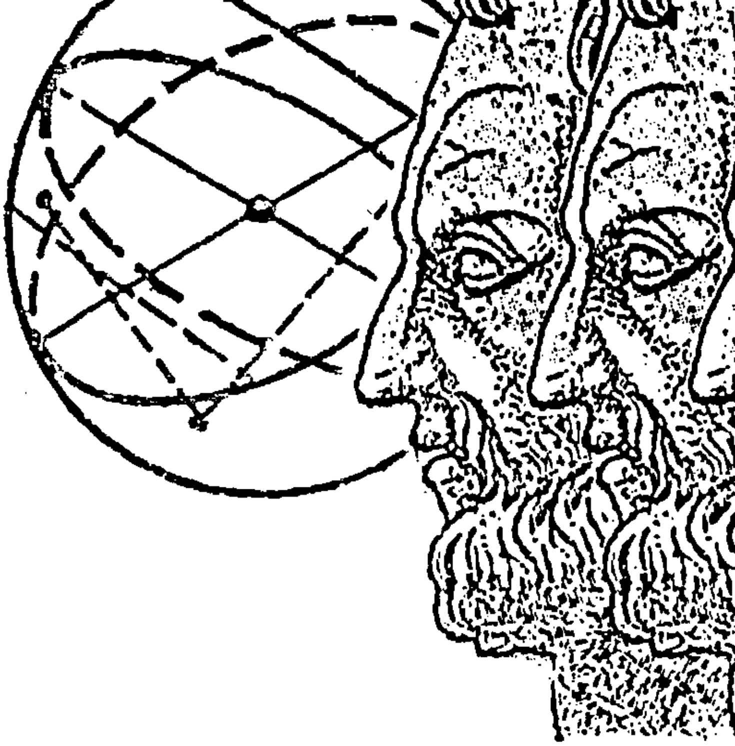
۱ـ در ظرف A ، ۳ مهره قرمز و ۵ مهرهٔ آبی در ظرف B ، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و در ظرف C ، ۴ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. از ظرفهای A و B و C به ترتیب ۲ و ۳ و ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف D قرار می‌دهیم و سپس ۱ مهره به تصادف از D خارج می‌کنیم، احتمال آنکه مهرهٔ خارج شده قرمز باشد را به دست آورید.

۲ـ مطلوب است تعیین عددی طبیعی با شرایط زیر:

I) تعداد مقسوم‌علیه‌های آن، فرد باشد.

II) اگر آن عدد را بر ۳۹ تقسیم کنیم، باقی‌مانده ۱ و خارج قسمت عددی اوّل باشد.





مشاهیر ریاضی جهان

برگرفته از فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

پوانکاره، هانری[۱] (۱۸۵۴ـ ۱۹۱۲). به‌قـول‌هاردی[۲]، شهرت ریاضی، چون به‌دست آید، دیرپاست. ریموند پوانکاره[۳]، رئیس‌جمهور فرانسه، پسر عموی هانری است و نه برعکس. پوانکاره عموماً به عنوان آخرین ریاضیدان فعال در کل حوزهٔ ریاضیات درنظر گرفته می‌شود. او از یک قلمرو ریاضیات به قلمرو دیگر می‌رفت و کارهای مهمی در اغلب آنها انجام می‌داد، و در این مورد نه مستعمره‌نشین که فاتح بود. در ریاضیات محض به‌عنوان یکی از واضعان اصلی توپولوژی و کاشف توابع خود ریخت بود. در ریاضیات کاربردی، به‌خاطر اثر تئوریکش راجع به جنبه‌های کیفی مکانیک سماوی، که احتمالاً از زمان لاپلاس و لاگرانژ به بعد، مهمترین اثر در این زمینه بود، معروف است. نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیلش برانگیخته از این دو ریاضیات و مرتبط کنندهٔ آنها بود. کتابهای متعدد پوانکاره که به هر دو مفهوم، در ریاضیات و دانش مشهورند، به هیچ وجه کمتر از دستاوردهای او نبوده‌اند. این کتب هنوز هم مؤکداً به هر ریاضیدان یا دانشمند جوان و بلندپرواز توصیه می‌شوند.

فیثاغورس[۴] (مرگ در حدود ۴۹۷ ق.م.). فیثاغورس یکی از اولین فلاسفه و عرفای یونان بود. چنین به‌نظر می‌رسد که او و مکتبش اولین اشخاصی بوده‌اند که ریاضیات را به‌طور جدی به‌عنوان بررسی این علم از لحاظ خودش و در مقابل این‌گونه که مجموعه‌ای از فرمولها برای محاسبات عملی باشد، درنظر می‌گرفته‌اند. اینان به افتخار کشف قضیهٔ معروف فیثاغورس[۵] در مورد مثلثهای قائم‌الزاویه نائل آمدند. فیثاغورسیان، به دلایل نیمه فلسفی، با اعداد نیمه رمزی نیز سر و کار داشتند. گفته می‌شود که اعداد تمام را به‌عنوان تشکیل‌دهندهٔ اساسی واقعیت درنظر می‌گرفته‌اند. این نظر گاه با کشف *اعداد گنگ*[۶] درهم شکسته شد.

ریمان، برنهارد[۷] (۱۸۲۶ـ ۱۸۶۶). ریمان، ریاضیدان آلمانی، یکی از چهره‌های مهم ریاضیات قرن نوزدهم است، که از بسیاری جهات، خلف با هوش گاوس می‌باشد. به‌خاطر معادلات کوشی ـ ریمان[۸] رویه‌های ریمان، هندسهٔ ریمانی، معادلهٔ دیفرانسیل ریمان، *انتگرال ریمان*[۹]، تابع زتای ریمان و فرض ریمان معروف است. موضوعات فوق آثار عظیمی را تشکیل می‌دهند. در هندسه ابزارهایی را مطرح کرد که با استفاده از آنها اینشتین مآلاً به توصیف جهان پرداخت و قرن بیستم به سوی نظریهٔ خمینه‌ها[۱۰] حرکت کرد. اندیشه‌های اساسی هندسه‌اش در نطق افتتاحیهٔ دانشگاه گوتینگن[۱۱] مطرح شدند. گاوس که در آن زمان آخرین سال حیات طولانی‌اش را می‌گذراند از حضار این سخنرانی بود. ریمان، در زمانی که آنالیز، پس از افراط کاریهای صوری قرن هجدهم درحال دقیق شدن بود، کارهای بسیار مهمی در این موضوع انجام داد. به‌خاطر تعریف‌اش از انتگرال، معرف حضور بسیاری از دانشجویان ریاضی است. در فرض ریمان، یکی از برجسته‌ترین مسائل ریاضیات را برای این رشته به‌جای نهاد؛ یعنی این که تابع زتای ریمان جمیع صفرهای مختلط خود را بر خط $Rz = \frac{1}{2}$ دارد. این مسأله، درصورتی که اثبات شود، مطالب زیادی در مورد توزیع اعداد اول بیان

می‌کند، و یکی از موارد بسیار قابل توجه تأثیر متقابل آنالیز و حساب خواهد بود.

تیلور، بروک[۱۲] (۱۶۸۵ـ ۱۷۳۱). تیلور ریاضیدانی بریتانیایی است که نامش را به ***سری تیلور***[۱۳]، بسط تابعی دلخواه به توانهای متغیرش، داده است. سری مزبور توسط جیمز گرگوری[۱۴]، نیز دیگران، کشف شده است.

توم، رنه[۱۵] (۱۹۲۳ـ). توم ریاضیدانی فرانسوی است که بیشتر به‌خاطر نظریهٔ ساخت تکوین‌اش معروف می‌باشد، که به‌عنوان نظریهٔ فاجعه مشهور است، این نظریه یکی از کوششهای جدی و معدود در به‌کار گرفتن ریاضیات در قالبها و جریانات موجودات زنده است، غالب کوششهای قبلی به‌طور طبیعی در مسیر کمی بودن در سنت ریاضیات کاربردی انجام گرفته‌اند، و توسط پیچیدگی محض طبیعت با شکست مواجه شده‌اند. نظریهٔ توم از این توان که هم‌کیفی هم دقیق است، برخوردار می‌باشد.

فون نویمان، جان[۱۶] (۱۹۰۳ـ ۱۹۵۷). فون نویمان، دانشمند اعجوبه، در بوداپست متولد شد اما از ۱۹۳۰ به بعد در آمریکا زندگی کرد. در ریاضیات محض، بیشتر به‌خاطر کارش در آنالیز تابعی، به‌خصوص در زمینهٔ فضاهای هیلبرت معروف است. در ریاضیات کاربردی، یکی از به‌وجود آورندگان نظریهٔ بهینه‌سازی و نظریهٔ بازیهاست. کتابی اساسی در مورد اقتصاد ریاضی نوشت. در سراسر عمر به ادوات مکانیکی علاقه‌مند بود و نوعی مخترع به‌شمار می‌رفت، و همین علاقه او را به توسعهٔ اولیهٔ کامپیوترهای الکترونیکی مدرن و مفهوم مهم برنامهٔ ذخیره شده رهنمون شد. بزرگترین شکست نویمان، در میان تأسف عمیقش، کوشش بیهوده‌اش در معرفی تذکرهٔ رستوران وینی به پرینستون بود.

وایراشتراس، کارل[۱۷] (۱۸۱۵ـ ۱۸۹۷). آنالیز ریاضی قرن نوزدهم از آشفته بازار حساب دیفرانسیل و انتگرال قرن هجدهم گسترش یافت. جریان مزبور با افرادی مانند کوشی آغاز شد، و در آثار وایراشتراس به کمال رسید. در اواخر قرن هجدهم، ریاضیدانها در مورد تفاوت بین تابع و فرمول دچار اشکال بودند. در زمان وایراشتراس، کارها به مرحله‌ای رسیده بود که او توان، علاقه‌مندی به‌دست دادن مثالی از تابعی که در هر جا پیوسته باشد، اما در هیچ‌جا مشتق‌پذیر نباشد را به‌دست آورده بود. این مرحله، به یک معنی، مرحله‌ای بود که در آن آنالیز ریاضی در میان ناراحتی بسیاری از بدگویان وایراشتراس، از شهود و درک متعارف منحرف شده بود. بعضی از کارهای او هنگامی انجام گرفت که معلم مدرسه‌ای محلی بود، و تماس اندکی با دنیای ریاضیدانهای حرفه‌ای داشت. وایراشتراس یکی از اشخاص معدودی است که در سن بالای ۴۰ سالگی مستقیماً از معلمی مدرسه به استادی ریاضیات رسید.

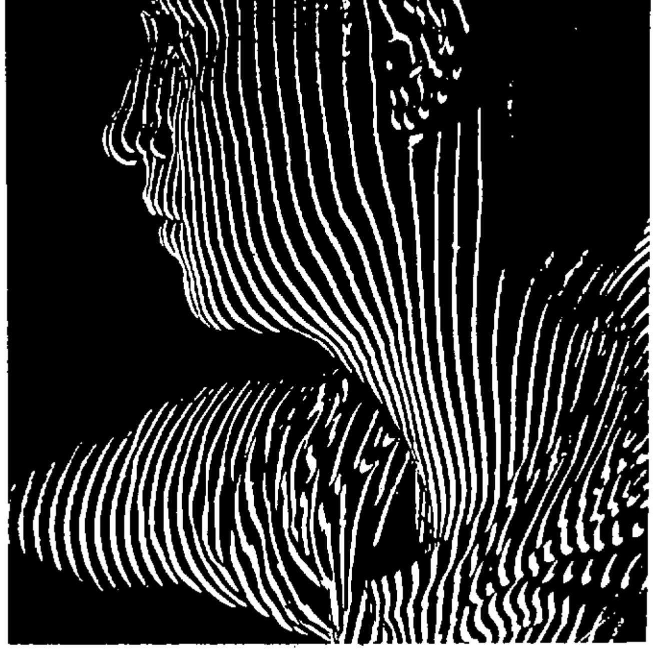
یادداشتها:

۱. Poincaré, Henri
۲. Hardy
۳. Raymond Poincaré
۴. Pythagoras
۵. Pythagoras' Theorem
۶. Irrational numbers
۷. Riemann, Bernhard
۸. Cauchy - Riemann
۹. Riemann integral
۱۰. manifolds
۱۱. Gottingen
۱۲. Taylor, Brook
۱۳. Taylor series
۱۴. James Gregory
۱۵. Thom, René
۱۶. Von Neumann, John
۱۷. Weierstrass, Karl



تئوری زوج خط

●سیامک جعفری



(۱) شکل کلی معادله درجه دوّم به‌صورت زیر است :

$$S(x,y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

اگر $D \equiv ax + by + c = 0$ و $D' \equiv lx + my + n = 0$ معادلات دو خط راست باشد، به معادله $DD' = 0$ توجه بفرمایید.

$$DD' : (ax + by + c)(lx + my + n) = 0$$

مشخص است که :

۱) اگر $P(x_1, y_1)$ روی D (یا D') باشد، روی مکان DD' نیز هست.

۲) برعکس اگر $DD' = 0$ برای یک $P(x_1, y_1)$، آنگاه این نقطه روی D یا D' است.

۳) اگر برای $P(x_1, y_1)$، $D \neq 0$ و $D' \neq 0$ آنگاه $DD' \neq 0$ می‌شود، یعنی نقطه $P(x_1, y_1)$ روی مکان DD' نیز نیست.

به‌طور کلی $DD' = 0$ نمایش یک زوج خط مانند $D = 0$ و $D' = 0$ خواهد شد. این معادله $DD' = 0$ نسبت به x و y درجه دوم است.

(۲) حال اگر $S(x,y) = 0$ نمایش یک زوج خط باشد، باید به شکل $DD' = 0$ قابل تبدیل باشد، سه حالت را بررسی می‌کنیم :

۱) $a \neq 0$

معادله را نسبت به x مرتب می‌کنیم :

$$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

طبق تئوری معادله درجه دوّم خواهد شد.

$$a\left[x - \frac{-(hy+g) + \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a}\right] \times \left[x - \frac{-(hy+g) - \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a}\right] = 0$$

به‌عبارت ساده‌تر:

$$\left[(ax + by + c) - \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}\right] \times \left[(ax + hy + g) + \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}\right]$$

عبارت بالا وقتی خطی می‌شود که مقدارهای زیر رادیکال مربع کامل باشند. یعنی اگر برحسب y مرتب شوند، عبارت زیر مربع کامل باشد. $(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + (g^2 - ac)$

یعنی معادله $(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + (g^2 - ac) = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta' = 0 \Rightarrow (gh - af)^2 = (h^2 - ab)(g^2 - ac)$$

عبارت اخیر را به شکل دترمینان می‌نویسیم :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

به‌طور خلاصه اگر $a \neq 0$ باشد، آنگاه $S(x,y) = 0$ وقتی

نمایش زوج خط می‌شود که دترمینان مذکور برابر صفر باشد. فی‌الواقع بر طبق تئوری ماتریسی دستگاه معادلات دو خط حاصل حالت دوم:

۲) $a=0$، $b\neq 0$ بحث مشابه حالت ۱ می‌شود.

۳) $a=0$ و $b=0$، $h\neq 0$ آنگاه

$$S(x,y): hxy+2gx+2fy+c=0$$

برای تبدیل $S(x,y)=0$ بر ضرب دو عبارت خطی چنین عمل می‌کنیم:

$$hxy+2gx+2fy+c\equiv(x+p)(y+q)$$

$$p=f/h\ ,\ q=g/h\ ,\ p.q=c/2h$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{f.g}{h^2}=\frac{c}{2h}\ \Rightarrow\ ch-2fg=0$$

امّا دقت بفرمایید که اگر $a=b=0$ باشد، آنگاه

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & h & g\\ h & 0 & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=ch-2fg$$

که نشان می‌دهد همان شرط $\Delta=0$ اینجا نیز برقرار است.

از بحث سه حالت به این نتیجه می‌رسیم که $S(x,y)=0$ وقتی یک زوج خط را نمایش می‌دهد که $\Delta=0$ باشد.

(۳) بحث مشابه برای حالتی است که زوج خط، محل تلاقی در مبدأ مختصات داشته باشند، که در اینجا ما به کمک معادلات انتقال از $S(x,y)=0$ به شکل کلی آنها $H(x,y)=0$ می‌رسیم. یا از حاصل‌ضرب دو خط که از مبدأ می‌گذرند.

معادله دو خط که از مبدأ می‌گذرند

$$(y-m_1x)(y-m_2x)=0$$

$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)xy+y^2=0 \qquad (1)$$

و به‌طورکلی

$$H(x,y): ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad (2)$$

که به آن معادله همگن درجه دوم می‌گویند. عکس مسأله بالا نیز صادق است.

تمرین (۱): نشان دهید اگر قسمتی از عبارت $H(x,y)$ و $S(x,y)$ که برحسب x و y درجه دوم هستند یکی باشند، زوج خط $H(x,y)=0$ موازی زوج خط $S(x,y)=0$ است.

۱) شیب زوج خط $H(x,y)=0$

$$S=m_1+m_2=-\frac{2h}{b}\ ,\ p=m_1m_2=\frac{a}{b}$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲)

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow m^2-(m_1+m_2)m+(m_1m_2)=0$$

$$\Rightarrow m^2+\frac{2h}{b}m+\frac{a}{b}=0$$

$$\Rightarrow bm^2+2hm+a=0$$

شیب زوج خط ریشه معادله درجه دوم اخیر است. آشکار است طبق تمرین (۱) داده شده، برای تعیین شیب زوج خط $S(x,y)=0$ نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آید.

تمرین (۲): در وجود شیب زوج خط بحث کنید.

۲) زاویه بین زوج خط $H(x,y)=0$

$$tg(D,D')=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

با توجه به بحث قبل و تئوری معادله درجه دوم

$$tg(D,D')=\frac{\left(\sqrt{(h^2-ab)}\right)/b}{1+\frac{a}{b}}$$

$$tg(D,D')=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

به‌همین ترتیب زاویه بین زوج خط $S(x,y)=0$ که عبارت درجه دوم آن با $H(x,y)=0$ یکی است نیز به‌دست می‌آید.

۳) نیمسازهای زوج خط $H(x,y)=0$

نیمساز زاویه مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

(۴) طبق فرمول محاسبه فاصله یک نقطه از خط. اگر دو خط را به‌صورت $y=m_1x$ و $y=m_2x$ درنظر بگیریم داریم:

$$\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}=\pm\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

درنتیجه برای پیدا کردن معادله زوج ـ نیمسازها مانند زوج

خط عمل می‌کنیم :

$$\left[\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}+\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}\right]\left[\frac{y-m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}}-\frac{y-m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}\right]=0$$

پس از ساده کردن

$$(m_1+m_2)x^2-2(1-m_1m_2)xy-(m_1+m_2)y^2=0$$

عبارت m_1-m_2 که در محاسبات ظاهر می‌شود، صفر نیست، زیرا در این‌صورت زوج خط $H(x,y)=0$ بر هم منطبق می‌شوند. زیرا اگر $m_1-m_2=0$ آنگاه $y-m_2x=0$ و $y-m_1x=0$ برهم منطبق می‌شوند.

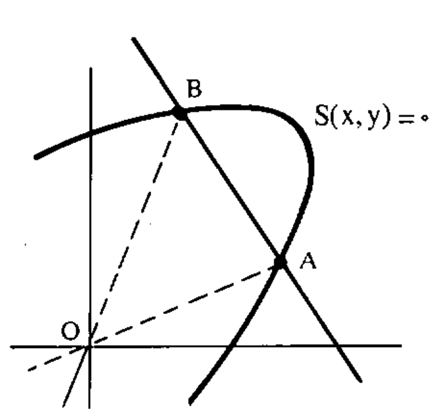
معادله اخیر با جایگذاری m_1+m_2 و $m_1\times m_2$، از قبل می‌شود :

$$-\frac{2h}{b}x^2-2(1-\frac{a}{b})xy-(-\frac{2h}{b})y^2=0$$

و بالاخره : معادله زوج‌ـ نیمساز می‌شود :

$$\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{a-b}{h}$$

(۵) با توجه به شکل روبرو اگر معادله خط AB به‌صورت $y=mx+k$ باشد، آنگاه یک روش برای به‌دست آوردن زوج خط OA و OB چنین است :



اولاً : A,B محل تلاقی دو خط OA و OB با $S(x,y)=0$ هستند.

ثانیاً : مرکز معادله همگن $H(x,y)=0$ یک زوج خط مبدأ مختصات است.

ثالثاً : $(y-mx)=k(y-mx)=k^2$

حال می‌توان به کمک عامل k^2، $S(x,y)=0$ را تبدیل به همگن $H(x,y)=0$ کرد.

$$(ax^2+2hxy+by^2)k^2+(2gx+2fy)k(y-mx)+c(y-mx)^2=0$$

معادله اخیر، همان زوج خط OA و OB است.

مسائل

۱) ثابت کنید شرط اینکه زوج خط

$S(x,y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

موازی باشد این است که : $a/h=h/b=g/f$، آنگاه معادلات دو خط موازی را به‌دست آورید و نشان دهید فاصلهٔ بین آنها خواهد شد $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a^2+h^2}}$، شیب زوج خط را محاسبه کنید.

۲) نشان دهید سطح مثلث محدود به خط $px+qy-1=0$ و زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ خواهد شد.

$S=\sqrt{h^2-ab}/(bp^2-2hpq+aq^2)$

۳) نشان دهید معادله زوج خطی که از مبدأ می‌گذرد و بر زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ عمود است $bx^2-2hxy+ay^2=0$ است.

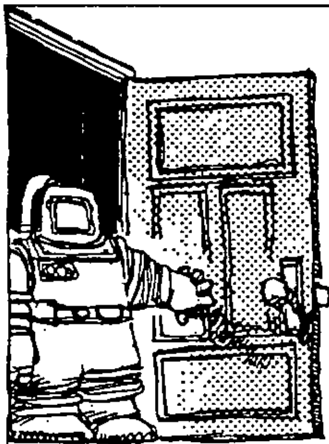
۴) اگر $ax^2+2hxy+by^2=0$ معادله زوج خط OA و OB و معادله زوج خط OP و OQ به صورت $(a+\lambda)x^2+2hxy+(b+\lambda)y^2=0$ باشد، نشان دهید $\angle AOP=\angle BOQ$

۵) ثابت کنید معادله زوج خطی که از مبدأ می‌گذرد و با خط $lx+my+n=0$ مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازد، $(l^2-3m^2)x^2+8lmxy+(m^2-3l^2)y^2=0$ می‌باشد.

۶) نشان دهید شرط اینکه یکی از خطوط، زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ بر یکی از خطوط زوج خط $lx^2+2mxy+hy^2=0$ عمود باشد، آن است که :

$4(hm+ma)(mb+nl)=(al-bn)^2$

۷) ثابت کنید اگر دو زوج خط $ax^2+2hxy+by^2=0$ و $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ در یک خط مشترک باشند، آنگاه



پاسخ سرگرمی برای اندیشه‌ورزی

$$4(ah' - a'h)(hb' - h'b) = (ab' - a'b)^2$$

۸) اگر دو زوج خط $x^2 - 2bxy - y^2 = 0$ و $x^2 - 2axy - y^2 = 0$، هر یک منصف زاویه دیگری باشد، نشان دهید $ab + 1 = 0$

۹) نشان دهید حاصلضرب فواصل نقطه (α,β) از زوج خط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ خواهد شد.

$$(a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2)\Big/\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}$$

۱۰) PM و PN عمودهایی هستند که بر زوج خط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ رسم شده است، اگر طول MN برابر $2k$ باشد، نشان دهید مکان p خواهد شد.

$$(x^2 + y^2)(h^2 - ab) = k^2\left[(4h^2 + (a-b)^2\right]$$

منابع

۱ـ هندسه تحلیلی — حسین غیور

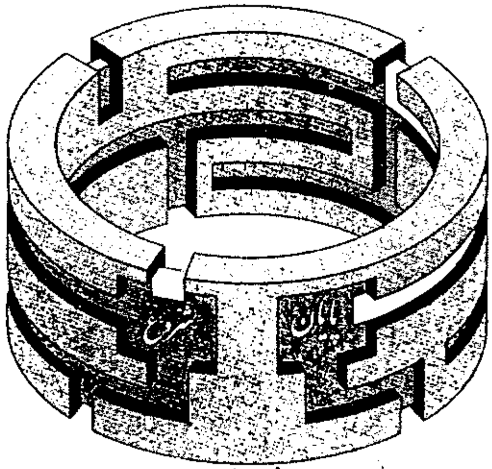
۲ـ ریاضی جدید — نظام قدیم سال چهارم

۳ـ هندسه مخروطی — غلامعلی گهرفر

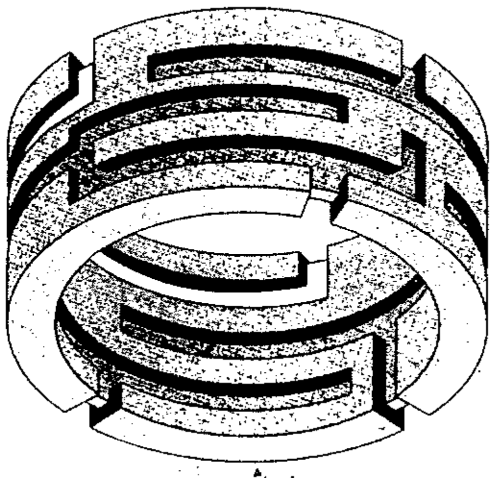
۴ـ جبرپایه — محمدهاشم رستمی

۵ ـ جبر خطی — طرخورانی

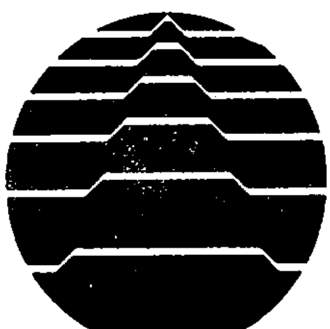
۶ ـ مجلات ریاضی رشد، برهان ـ یکان



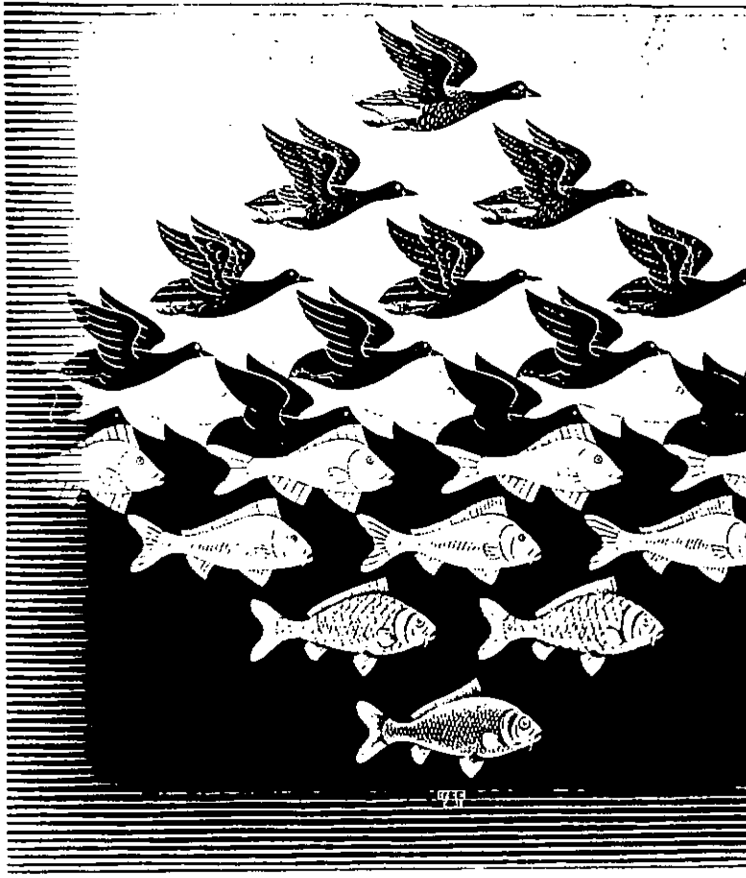
نمای جلو



نمای پشت



تجزیه یک عدد به عوامل اوّل



• مقاله از یک دانش‌آموز دبیرستانی

(برای دانش‌آموزان سال اول نظام جدید)

مجموعه اعداد اول: مجموعه اعداد اول زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که هر کدام از عضوهای آن دو و فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارند که یکی از آن مقسوم‌علیه‌ها ۱ و دیگری خود آن عدد می‌باشد. با این تعریف معلوم می‌شود که عدد ۱ عدد اول نیست، چون فقط یک مقسوم‌علیه دارد.

مجموعه اعداد اولی که عدد طبیعی m بر آنها بخش‌پذیر باشد، عاملهای اول m نامیده می‌شوند. هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را می‌توان به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه کرد. قبل از این‌که روش تجزیه یک عدد به عاملهای اول بیان شود، شرایط بخش‌پذیری اعداد طبیعی به چند عدد نخست مجموعه اعداد اول، یادآوری می‌شود :

الف) بخش‌پذیری بر ۲: شرط لازم برای آن که یک عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد، آن است که رقم یکان آن زوج باشد ، مانند ۳۰، ۱۹۹۶، ۲۰۴.

ب) بخش‌پذیری بر ۳: شرط لازم برای آن‌که عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن است که مجموع ارقام آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد : مانند ۱۹۲. (زیرا ۱۲=۲+۹+۱ و ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است).

ج) بخش‌پذیری بر ۵: شرط لازم برای آن‌که یک عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد، آن است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد، مانند ۲۰۵، ۴۱۰.

د) بخش‌پذیری بر ۷: عددی بر ۷ بخش‌پذیر است که اگر رقم اول سمت چپ آن را در ۳ ضرب کرده و با رقم دوم سمت چپ جمع کنیم و حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم ؛ سپس باقیماندهٔ تقسیم را دوباره در ۳ ضرب کرده و با رقم سوم از سمت چپ جمع و حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم ؛ و همین عملها را تا آخرین رقم ادامه دهیم ؛ در پایان، باقیماندهٔ تقسیم بر ۷ برابر با صفر باشد.

مثال ۱: آیا عدد ۳۷۵۲۰ بر ۷ بخش‌پذیر است؟

جواب:

۳×۳=۹	۲×۳=۶	۴×۳=۱۲	۰×۳=۰
۹+۷=۱۶	۶+۵=۱۱	۱۲+۲=۱۴	۰+۰=۰
$۱۶÷۷=۲+\frac{۲}{۷}$	$۱۱÷۷=۱+\frac{۴}{۷}$	$۱۴÷۷=۲+\frac{۰}{۷}$	$۰÷۷=۰+\frac{۰}{۷}$

باقیماندهٔ مورد نظر

چون در پایان این عمل، باقیماندهٔ تقسیم صفر می‌باشد،پس عدد ۳۷۵۲۰ بر ۷ بخش‌پذیر است.

هـ) بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اختلاف مجموع ارقام مرتبهٔ زوج (یکان، صدگان، ده هزارگان، ...) با مجموع ارقام مرتبهٔ فرد (دهگان، هزارگان، صدهزارگان،...) بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۲: از دو عدد $a = ۴۵۰۲۹۱۶$ و $b = ۴۲۳۷۶۴$ کدام‌یک بر ۱۱ بخش‌پذیر است؟

جواب:

$۱۹ = ۴ + ۰ + ۹ + ۶ =$ مجموع ارقام مرتبهٔ زوج عدد a

$۸ = ۵ + ۲ + ۱ =$ مجموع ارقام مرتبهٔ فرد عدد a

چون اختلاف ۱۹ و ۸ یعنی ۱۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس a بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

$۱۳ = ۲ + ۷ + ۴ =$ مجموع ارقام مرتبهٔ زوج b

$۱۳ = ۴ + ۳ + ۶ =$ مجموع ارقام مرتبهٔ فرد b

چون اختلاف ۱۳ و ۱۳ یعنی صفر بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس b نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. (یادآوری می‌شود که صفر بر تمامی اعداد طبیعی بخش‌پذیر است).

عددی مانند m اول است، اگر و تنها اگر m بر هیچ‌کدام از اعداد اول نابیشتر از $\sqrt{m}$ بخش‌پذیر نباشد. به‌عنوان مثال برای بررسی اول بودن عدد ۱۲۷، کافی است تحقیق کنیم که آیا ۱۲۷ بر یکی از اعداد اول نابیشتر از $\sqrt{۱۲۷}$ (۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱) بخش‌پذیر است یا خیر؟ عدد ۱۲۷ بر ۲ بخش‌پذیر نیست، چون رقم یکان آن فرد است ؛ بر ۳ بخش‌پذیر نیست چون ۷+۲+۱ یعنی ۱۰ بر ۳ بخش‌پذیر نیست ؛ بر ۵ بخش‌پذیر نیست چون رقم یکان آن یکی از ارقام «۰» یا «۵» نیست ؛ بر ۷ بخش‌پذیر نیست چون :

$۱ \times ۳ + ۲ = ۵ \longrightarrow ۵ \times ۳ + ۷ = ۲۲$

$۵ \div ۷ = ۰ + \frac{⑤}{۷} \qquad ۲۲ \div ۷ = ۳ + \frac{①}{۷}$ ← باقیمانده

عدد فوق بر ۱۱ نیز بخش‌پذیر نیست ؛ زیرا $۶ = ۷ + ۲ - ۱$ و ۶ بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست ؛ پس عدد ۱۲۷ یک عدد اول می‌باشد.

برای تجزیهٔ یک عدد به حاصل‌ضرب عاملهای اول، آن را به کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش‌پذیر باشد تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را نیز بر کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش‌پذیر باشد تقسیم می‌کنیم و این‌کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که خارج‌قسمت یک باشد. در این‌صورت حاصل‌ضرب مقسوم‌علیه‌ها، حاصل‌ضرب عاملهای اول عدد مورد نظر خواهد بود.

مثال ۳: اعداد ۳۶ و ۴۵ را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه کنید.

جواب:

$۴۵ = ۳^۲ \times ۵^۱$

۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	

$۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$

۳۶	۲
۱۸	۲
۹	۳
۳	۳
۱	

مثال ۴: اعداد ۱۴۱۶، ۱۳۷۵ و ۱۹۹۶ را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه کنید.

جواب:

$۱۴۱۶ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵۹^۱$

۱۴۱۶	۲
۷۰۸	۲
۳۵۴	۲
۱۷۷	۳
۵۹	۵۹
۱	

$۱۳۷۵ = ۵^۳ \times ۱۱^۱$

۱۳۷۵	۵
۲۷۵	۵
۵۵	۵
۱۱	۱۱
۱	

$۱۹۹۶ = ۲^۲ \times ۴۹۹$

۱۹۹۶	۲
۹۹۸	۲
۴۹۹	۴۹۹
۱	

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b عبارت است از کوچکترین عددی که هم بر a و هم بر b بخش‌پذیر باشد. برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b (ک.م.م) که آن را به صورت [a,b] نمایش می‌دهیم ؛ ابتدا دو عدد a و b را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم. سپس کوچکترین مضرب مشترک دو عدد عبارت است از حاصل‌ضرب عاملهای مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر که در تجزیه دو عدد موجود است. به‌عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۵ با توجه به مثال ۳ برابر با $۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۱$ یعنی ۱۸۰ خواهد بود.

مثال ۵: [۱۹۹۶ , ۱۴۱۶] را بیابید.

جواب: با توجه به مثال ۴ که دو عدد مورد نظر به عاملهای اول تجزیه شده است :

$$[۱۴۱۶ \ , \ ۱۹۹۶] = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵۹^۱ \times ۴۹۹^۱$$

کوچکترین مضرب مشترک سه عدد و یا بیشتر نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

مثال ۶: کوچکترین مضرب مشترک سه عدد ۱۳۷۵، ۱۴۱۶ و ۱۹۹۶ را بیابید.

جواب:

$$[۱۳۷۵ \ , \ ۱۴۱۶ \ , \ ۱۹۹۶] = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۳ \times ۱۱ \times ۵۹ \times ۴۹۹$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b عبارت است از بزرگترین عددی که هم a و هم b بر آن بخش‌پذیر می‌باشند. برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b (ب.م.م) که آن را به‌صورت (a و b) نمایش می‌دهیم ؛ ابتدا دو عدد a و b را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم، سپس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد عبارت است از حاصل‌ضرب عاملهای مشترک دو عدد a و b با توان بیشتر که در تجزیه دو عدد موجود است. به‌عنوان مثال ب.م.م دو عدد ۴۵ و ۳۶ با توجه به مثال ۳ برابر با $۳^۲$ یعنی ۹ می‌باشد.

مثال ۷: (۱۹۹۶ و ۱۴۱۶) را بیابید.

جواب: با توجه به مثال ۴ که دو عدد مورد نظر به عاملهای اول تجزیه شده‌اند خواهیم داشت :

$$(۱۴۱۶,۱۹۹۶) = ۲^۲ = ۴$$

دو عدد متباین (نسبت به هم اول)

دو عدد a و b را نسبت به هم اول یا متباین گویند هرگاه ب.م.م آن دو عدد برابر با ۱ باشد. برای مثال دو عدد ۸ و ۹ نسبت به هم اول می‌باشند، زیرا ۱= (۹ و ۸).

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد $(n \geq ۳)$ نیز به همین صورت تعریف می‌شود. باید توجه داشت که در این حالت منظور از عاملهای مشترک، اعداد اولی هستند که در تجزیه تمامی n عدد مشترک می‌باشد.

مثال ۸: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۱۳۷۵، ۱۴۱۶ و ۱۹۹۶ را بیابید.

جواب: ۱= (۱۹۹۶ و ۱۴۱۶ و ۱۳۷۵)

با بررسی مثالهای ۵ و ۷ می‌توان حدس زد که، حاصل‌ضرب ک.م.م دو عدد a و b در ب.م.م آن دوعدد برابربا حاصل‌ضرب a و b است. این حدس با بررسی ک.م.م و ب.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۵ قوی‌تر می‌شود. حال این مطلب را در مورد هر دو عدد دلخواه مثبت a و b، اثبات می‌کنیم :

قضیه: برای هر دو عدد طبیعی a و b تساوی $(a,b).[a,b]=ab$ برقرار می‌باشد.

برهان: فرض می‌کنیم $(a,b)=d$ بنابراین $a' \neq ۰$ و $b' \neq ۰$ یافت می‌شوند به‌گونه‌ای که $a=d.a'$ و $b=d.b'$ که در آن a' و b' هیچ عامل مشترکی ندارند. به عبارت دیگر a' و b' نسبت به هم اول می‌باشند. درنتیجه :

$$a.b=(d.a').(d.b')=d.(a'.b'.d)$$

در طرف راست این برابری، عبارت داخل پرانتز برابر است با حاصل‌ضرب عاملهای مشترک در عاملهای غیرمشترک ؛ که طبق تعریف این حاصل‌ضرب همان ک.م.م. دو عدد a و b می‌باشد :

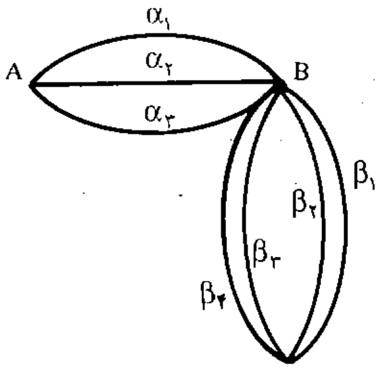
$$a.b = d.[a,b] = (a,b).[a,b]$$

با بررسی مثالهای ۶ و ۸ معلوم می‌شود که این موضوع در مورد ک.م.م و ب.م.م سه عدد صدق نمی‌کند. یعنی:

$$a.b.c \neq (a,b,c).[a,b,c]$$

اصل ضرب

اگر از شهر A به شهر B سه مسیر α_1، α_2 و α_3 و از شهر B به شهر C چهار مسیر β_1، β_2، β_3 و β_4 موجود باشد، واضح است که برای رفتن از شهر A به شهر B می‌توان 3×4 یعنی ۱۲ مسیر را انتخاب کرد که عبارتند از:



$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_3\beta_1$
$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_2$
$\alpha_1\beta_3$	$\alpha_2\beta_3$	$\alpha_3\beta_3$
$\alpha_1\beta_4$	$\alpha_2\beta_4$	$\alpha_3\beta_4$

در حالت کلی اگر از شهر A_1 به شهر A_2، m_1 مسیر و از A_2 به A_3، m_2 مسیر و... و از A_n به A_{n+1}، m_n مسیر مستقل از هم موجود باشد، برای رفتن از A_1 به A_{n+1} به تعداد $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ مسیر موجود خواهد بود.

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت یک عدد

مثال ۹: تمامی مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۳۶ را بنویسید.

جواب: می‌دانیم $3^2\times2^2=36$. برای نوشتن یک مقسوم‌علیه از عدد ۳۶ می‌توانیم از عاملهای ۲ به تعداد ۰ یا ۱ یا ۲ عدد، و از عاملهای ۳ نیز به تعداد ۰ یا ۱ یا ۲ عدد انتخاب کنیم که طبق اصل ضرب این عدد 3×3 یعنی ۹ مقسوم‌علیه خواهد داشت که عبارتند از:

$d_1=2^0\times3^0$	$d_4=2^1\times3^0$	$d_7=2^2\times3^0$
$d_2=2^0\times3^1$	$d_5=2^1\times3^1$	$d_8=2^2\times3^1$
$d_3=2^0\times3^2$	$d_6=2^1\times3^2$	$d_9=2^2\times3^2$

مثال ۱۰: تمامی مقسوم‌علیه‌های عدد ۴۵ را بنویسید.

جواب: می‌دانیم $3^2\times5^1=45$. پس تمامی مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۵ عبارتند از:

$d_1=3^0\times5^0$	$d_3=3^1\times5^0$	$d_5=3^2\times5^0$
$d_2=3^0\times5^1$	$d_4=3^1\times5^1$	$d_6=3^2\times5^1$

درحالت کلی اگر عدد تجزیه به عوامل اول a به‌صورت $a=P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.\cdots.P_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن P_1، P_2، ...، P_n اعداد اول متمایز می‌باشند، برای نوشتن یک مقسوم‌علیه از a می‌توانیم از عاملهای P_1 به تعداد ۰، ۱، ...، α_1 و از عاملهای P_2 به تعداد ۰، ۱، ...، α_2 و... و بالاخره از عاملهای P_n به تعداد ۰، ۱، ...، α_n انتخاب کنیم که طبق اصل ضرب این عدد به تعداد $(\alpha_1+1).(\alpha_2+1).\cdots.(\alpha_n+1)$ مقسوم‌علیه خواهد داشت.

مثال ۱۱: تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $n=2^7\times3^2\times4^3$ را بیابید.

جواب: باید دقت داشت که عدد n هنوز به صورت حاصل‌ضرب عاملهای اول آن تجزیه نشده است، چون ۴ عامل اول نیست. پس آن را به‌صورت حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می کنیم:

$$n=2^7\times3^2\times(2^2)^3=2^7\times3^2\times2^6=2^{13}\times3^2$$

و طبق اصل ضرب، تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد n برابر با $(13+1)(2+1)$ یعنی ۴۲ می‌باشد.

مثال ۱۲: جذر عدد 2^{16} را بیابید.

جواب: واضح است که دنبال عددی هستیم که در خودش ضرب شود و عدد 2^{16} را تولید کند و این عددی نیست، جز 2^8 زیرا $2^{16} = 2^8 \times 2^8$.

پس جـذر عـدد $n^m (n \geq 0)$ برابر $n^{\frac{m}{2}}$ خـواهد بود، زیرا $n^{\frac{m}{2}} . n^{\frac{m}{2}} = n^m$.

درحـــالت کلی اگـــر عـــدد a را به‌صـــورت $a = P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} . \dots . P_n^{\alpha_n}$ تجزیه کرده باشیم، که در آن P_1 ، P_2 ، ...، P_n اعداد اول متمایزی هستند، آنگاه جذر عدد a برابر با $P_1^{\frac{\alpha_1}{2}} . P_2^{\frac{\alpha_2}{2}} . \dots . P_n^{\frac{\alpha_n}{2}}$ است. پس عدد a وقتی مجذور کامل است که α_1 ، α_2 ، ...، α_n همگی زوج باشند.

مـــثـــال ۱۳: از دو عـــدد a و b کـــه $a = 2^9 \times 3^{16}$ و $b = 2^6 \times 5^8$ می‌باشند، کدام‌یک مجذور کامل است؟

جواب: عدد a مجذور کامل نیست چون توان عوامل اول آن همگی زوج نیستند. ولی عدد b مجذور کامل است، چون هم توان ۲ و هم توان ۵ که هر دو اولند، زوج هستند.

مثال ۱۴: اگر $a = 2^3 \times 3^7 \times 5^6$ باشد، کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که وقتی در a ضرب می‌شود حاصل مجذور کامل گردد.

جواب: عدد مطلوب را b می‌نامیم. برای اینکه a.b مربع کامل باشد، باید توان عاملهای اول آن همگی زوج باشند، پس؛ $b = 2 \times 3$ زیرا در این‌صورت خواهیم داشت:

$$a.b = (2^1 \times 3^1)(2^3 \times 3^7 \times 5^6) = 2^4 \times 3^8 \times 5^6$$

که مجذور کامل است.

مثال ۱۵: اگر $a = 2^3 \times 3^5 \times 6^7$ باشد، کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که وقتیِ در a ضرب می‌شود، حاصل مجذور کامل گردد.

جواب: باید دقت کرد که عدد a به حاصل‌ضرب عاملهای اولش تجـزیه نشـده است. بنابراین ابتـدا آن را به‌صـورت حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم:

$$a = 2^3 \times 3^5 \times (2 \times 3)^7 = 2^{10} \times 3^{12}$$

که حاصل مجذور کامل است، پس عدد مطلوب $3^0 \times 2^0$ یعنی عدد ۱ می‌باشد.

مثال ۱۶: چند عدد دو رقمی می‌توان پیدا کرد که وقتی در عدد $a = 3^6 \times 5^5 \times 45^{10}$ ضرب می‌شوند حاصل مکعب کامل گردند؟

جواب: باید توجه داشت که یک عدد وقتی مکعب کامل است که توان هر کدام از عاملهای اول آن بعد از تجزیه، مضرب ۳ باشند.

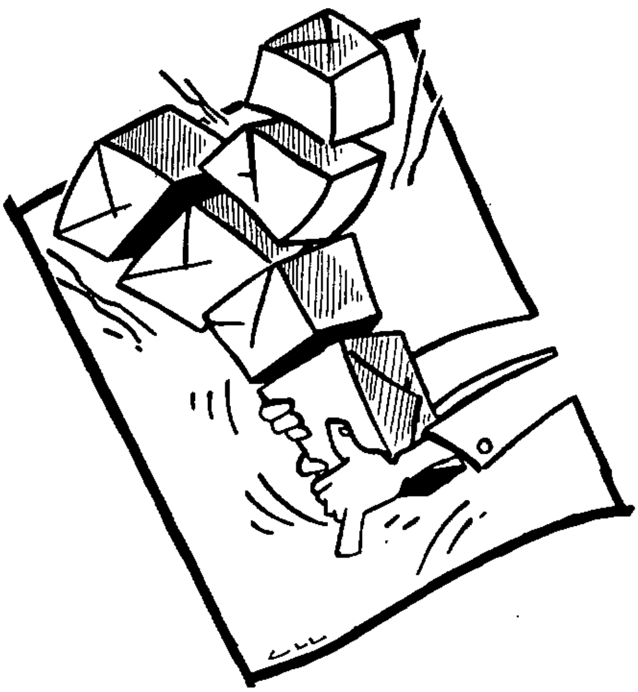
ابتدا عدد مورد نظر را به حاصل‌ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم:

ابتدا عدد مورد نظر را به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه می‌کنیم:

$$a = 3^6 \times 5^5 \times (3^2 \times 5)^{10} = 3^{26} \times 5^{15}$$

برای اینکه a . b که در آن b عدد مطلوب است، مکعب کامل باشد، باید توانهای عاملهای اول عدد حاصل مضرب ۳ باشند:

$$b_1 = 3 \Rightarrow a.b_1 = 3^{27} \times 5^{15}$$





کامپیوتر و شغل آینده

● محسن صدیقی مشکنانی

دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

برای رفع مشکلات گذشته و یا برای به‌دست آوردن تواناییها و تسهیلات جدید، انسان هر روز دستگاهها و ابزار تازه‌ای می‌سازد. یا اینکه آنها را بهتر می‌کند. مثل ساختن هواپیما، ابزار صنعتی و دستگاههای جدید پزشکی. همراه هر ابزار جدید، شغلهایی به‌طور طبیعی شکل می‌گیرد :

۱ـ کارشناسان مربوط به آن دستگاه که کارشان، طراحی، تولید، تغییر و تعمیر آن ابزار است.

۲ـ کسانی که آن ابزار در محیط کاری به کار می‌گیرند.

۳ـ کسانی که موضوعِ کارشان آن ابزار است.

به‌عنوان مثال در مورد خودرو افراد و شغلهای زیر مطرح است :

۱ـ طراحان، مهندسان، کارگران و تمام دست‌اندرکاران تولید، تغییر و تعمیر بخشهای مختلف خودرو.

۲ـ رانندگان، کسانی که شغل آنها رانندگی است. گرچه بسیاری از افراد رانندگی خودرو خود را به‌عهده دارند.

۳ـ فروشندگان قطعات یدکی، بنگاههای معاملات خودرو و مشاغل مرتبط دیگر که موضوع کارشان خودرو است.

گاهی ممکن است یک دستگاه یا ابزار را با تغییراتی برای کاربردهای خاصّی آماده کنند. به‌عنوان مثال، آمبولانس برای حمل بیمار، تراکتور برای کارهای کشاورزی و ماشین آتش‌نشانی برای مقابله با آتش‌سوزیها. مسلماً یک رانندهٔ آمبولانس یا تراکتور با رانندهٔ ماشینهای معمولی متفاوت است. رانندهٔ آمبولانس باید چگونگی مراقبتهای اولیهٔ پزشکی را نیز بداند. رانندهٔ تراکتور چگونگی کار در مزارع کشاورزی را نیز باید بداند. با این مثالها احتمالاً متوجه شده‌اید که در مورد هر دستگاه، علاوه بر مشاغلی که در بالا ذکر شد، مشاغل متعددی با توجه به نوعِ به‌کارگیری آن دستگاه مطرح می‌شود. کسانی که این‌گونه مشاغل را دنبال می‌کنند، هم باید کار با ابزار را بدانند و هم محیط کارشان (مثلاً کشاورزی در مزرعه یا کمکهای اولیه به بیماران) را بشناسند. به‌علاوه این ابزار هم باید توسط کارشناسان (گروه اول) برای این کاربرد جدید طراحی و ساخته شده باشند.

کامپیوتر به‌عنوان یک ابزار

با مقدمه‌ای که در بالا گفته شد، می‌خواهیم به سراغ کامپیوتر و مشاغل مرتبط با آن برویم. در مورد کامپیوتر به‌عنوان یک ابزار هم مشاغل متعددی مطرح است :

۱ـ طراحان، سازندگان و تولیدکنندگان بخشهای الکترونیکی

کامپیوتر (سخت‌افزار) و همچنین طراحان و تولیدکنندگان برنامه‌هایی که روی آن سخت‌افزار باید اجرا شود (نرم‌افزار). همچنین کسانی که مسؤول نصب و راه‌اندازی یک سیستم کامپیوتری در محیط اجرایی خاص هستند و یا مسؤول رفع اشکالات احتمالی و تغییرات جدید هستند. (تقسیم‌بندی مشاغل تخصصی رشته کامپیوتر خود فرصت دیگری را طلب می‌کند).

۲ـ راه برای کامپیوتر، کسانی که معمولاً برنامه‌های ثابتی را روی سخت‌افزار ثابت به تناوب اجرا می‌کنند. مثلاً هر ماهه برنامهٔ حقوق و دستمزد را برای کارکنان یک اداره اجرا می‌کنند.

۳ـ ارائه‌دهندگان کامپیوتر، قطعات یدکی و ابزارهای متصل‌شونده به کامپیوتر و برنامه‌های کامپیوتری و یا واردکنندگان داده‌ها و کلاً کسانی که موضوع کارشان کامپیوتر است.

۴ـ کسانی که با ابزارِ کامپیوتر، کارِ خود را انجام می‌دهند. مثلاً ماشین‌نویسان که با استفاده از کامپیوتر و برنامه‌های مربوط ماشین‌نویسی می‌کنند. یا کسانی که به کمک کامپیوتر قطعات صنعتی را طراحی می‌کنند.

کسانی که در گروه چهارم هستند، تعدادشان به مراتب از تعداد افراد گروههای دیگر بیشتر است. بد نیست در ذهن خود در اجتماع گردش کنید و مشاغلی که با کامپیوتر درهم آمیخته است را فهرست کنید. در بانکها، در ادارات، در پزشکی، در صنعت، در کشاورزی و در تمام زمینه‌های دیگر. هر روز هم کاربردهای جدیدتری مطرح می‌شود.

شاید مهمترین ویژگی کامپیوتر در مقایسه با ابزارهای دیگر همین برنامه‌پذیری و قدرت تطابق آن با کاربردهای مختلف باشد. این درحالی است که به‌کارگیری دستگاهها و ابزار دیگر در چند زمینهٔ متفاوت مشکل است. مثلاً به‌کارگیری یک ماشین آتش‌نشانی برای شخم زدن تقریباً غیرممکن است. ولی با هر برنامهٔ جدید، همان کامپیوتر (همان سخت‌افزار) قابلیتی دیگر را در اختیار می‌گذارد. روی یک کامپیوتر خاص می‌توان یک برنامهٔ بازی گذاشت و با آن بازی کرد. می‌توان یک برنامهٔ طراحی صنعتی گذاشت و با آن به طراحی صنعتی پرداخت. می‌توان یک برنامهٔ محاسبات راه و ساختمان داشت و با آن محاسبات یک پل را انجام داد. جالب این است که شغل تعداد بسیار بسیار زیادی از افراد در ایران و در جهان این است که بدانند چگونه با یک برنامهٔ کامپیوتری (مثلاً نقشه‌کشی) به‌خوبی کار کنند. بد نیست نگاهی به آگهیهای استخدام در روزنامه‌های مختلف داشته باشید. خیلی سریع متوجه می‌شوید که بسیاری از مؤسسات، استخدام افراد جدید را مشروط به آشنایی ایشان با بعضی برنامه‌های کامپیوتری کرده‌اند. تعداد این موارد به شدّت رو به تزاید است.

نقش کامپیوتر در شغل آینده

از صحبتهای بالا می‌خواهم نتیجه بگیرم که حتّی اگر کار تخصصی شما کامپیوتر نباشد، در هر رشته‌ای که بخواهید در آینده کار کنید، به احتمال زیاد با کامپیوتر سر و کار خواهید داشت و دانستن چگونگی کار با کامپیوتر به نوعی مثل سواد داشتن لازم است. باید سواد کامپیوتری را با کار عملی با کامپیوتر یاد گرفت. بعلاوه آشنایی با بعضی برنامه‌های کامپیوتری می‌تواند یک شغل بالقوه برای آینده باشد.

مشاهده می‌شود بعضی جوانان و نوجوانان بخش عمدهٔ وقت خود با کامپیوتر را به بازی کردن می‌گذرانند. من مخالف بازیهای کامپیوتری نیستم. بازیهایی که اشکالات فرهنگی و اجتماعی نداشته باشند می‌توانند ازجهات متعددی آموزش‌دهنده و مفید باشند. ولی به‌جای سرگرم شدن با آنها می‌توان با برنامه‌هایی کار کرد که تسلّط به آنها می‌تواند در آینده حتی به‌عنوان یک شغل مطرح باشد. مثلاً برای کارهای گرافیکی و انتشاراتی.

از سوی دیگر بعضی افراد سرگرم کلاسهای آموزشی کامپیوتری متعدد هستند. با اتمام یک دوره آموزشی، آموزش یک زبان برنامه‌سازی دیگر را شروع می‌کنند. این حرف به این معنی نیست که من با آموزشهای کامپیوتری مخالفم. نه‌تنها مخالف نیستم بلکه بعضی آموزشها را ضروری می‌دانم. یاد گرفتن کار با زبانهای برنامه‌نویسی متعدد می‌تواند در دراز مدت،

به‌خصوص برای کسانی که بخواهند به نوعی در گروه کارشناسان زمینه کامپیوتر باشند، مفید باشد. زبانهای برنامه‌سازی ابزارهایی برای تهیهٔ برنامه‌هایی است که دیگران بتوانند از آنها برای رفع دشواریهای محیط کاری خود استفاده کنند. امّا تا موقعی که ابزاری برای کاربردش به‌کار نرود، چه خاصیّتی دارد؟ که گفته‌اند «برای نهادن چه سنگ و چه زر». مشترکات زبانهای برنامه‌سازی به مراتب بیشتر از تفاوتهای آنهاست. غالباً یک برنامه‌نویس خوب می‌تواند بسیاری از ناتوانیهای یک زبان را با کارِ خود جبران کند. منظورم این است که به‌جای رفتن به سراغ زبانهای برنامه‌سازی متعدد، بهتر است به یکی از آنها مسلّط شد و در عوض به کاربردها بیشتر فکر کرد و به پیاده‌سازی کاربردها همت نمود. امّا در بسیاری از موارد، دنبال کردن کاربردهای جدی کامپیوتری نیاز به آگاهی دیگری علاوه بر دانستن زبان برنامه‌نویسی دارد. می‌خواهم بگویم موقعیتهای شغلی حاصل از تسلّط به برنامه‌های کاربردی به مراتب بیشتر و قابل دسترستر از موقعیتهای شغلی حاصل از دانستن زبانهای برنامه‌سازی است.

چند پرسش

در اینجا چند پرسش اصلی می‌تواند مطرح باشد که : چه برنامه‌های کامپیوتری در زمینه‌های تخصصی وجود دارد؟ چگونه می‌توان از وجود آنها مطلع شد؟ چگونه می‌توان آنها را به‌دست آورد؟ چگونه می‌توان با آنها کار کرد؟

جالب اینجاست که در مورد بازیها نیز چنین پرسشهایی مطرح است. اما بسیاری از جوانان و نوجوانان برای این پرسشها پاسخهای مناسبی پیدا کرده‌اند. به‌دلیل اینکه عملاً برنامه‌های بازی جدید و متعدد را در اختیار دارند و به آن مشغولند. می‌خواهم نتیجه بگیرم که اگر دانش‌آموزان واقعاً دنبال جواب پرسشهای این‌گونه در مورد برنامه‌های تخصصی باشند، خود می‌توانند به این پاسخها برسند.

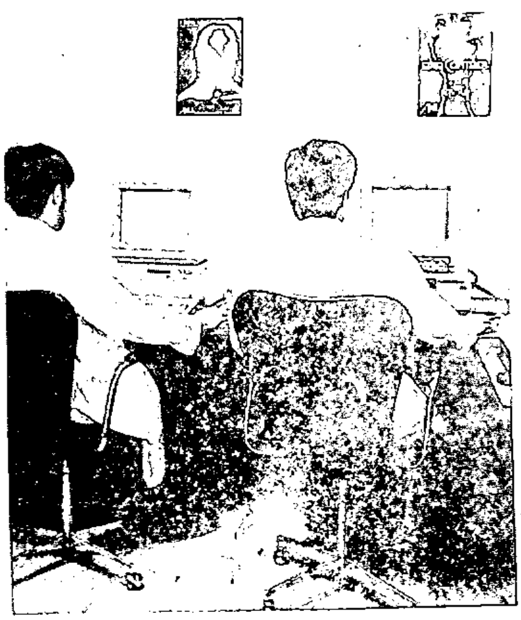
البته مسؤولان و مدرسان مدارس راهنمایی، دبیرستانها (و در کل نظام آموزشی کشور) می‌توانند به شدت در این زمینه کمک‌کننده باشند. مدرسان دروس کامپیوتر، حرفه و فن و پرورشی و همچنین مدرسان دروس تخصصی می‌توانند در تهیه مستندها و برنامه‌ها، معرفی و آموزش آنها اقدام کنند. این‌کار نه‌تنها برای دانش‌آموزان، بلکه برای خود مدرسان هم بسیار سودمند است.

نتیجه‌گیری

● آشنایی با کامپیوتر و توان کار با برنامه‌های کامپیوتری مثل سواد خواندن و نوشتن لازم است.

● سرگرم شدن به آموزشهای متعدد و مشابه، مثل سرگرم شدن به بازیها، می‌تواند عاملی برای اتلاف تواناییها و به‌خصوص از دست دادن زمان باشد.

● تسلّط در کار با هر برنامهٔ کاربردیِ خوب کامپیوتری، می‌تواند عاملی تعیین‌کننده در اشتغال به یک شغل در آن زمینه باشد.





معرفی کتاب

● **پرسشهای چهارگزینه‌ای و پاسخهای تشریحی**

سفارش تألیف: معاونت آموزش متوسطه، دفتر آموزشهای نظری و پیش‌دانشگاهی وزارت آموزش و پرورش

توزیع: انتشارات مدرسه

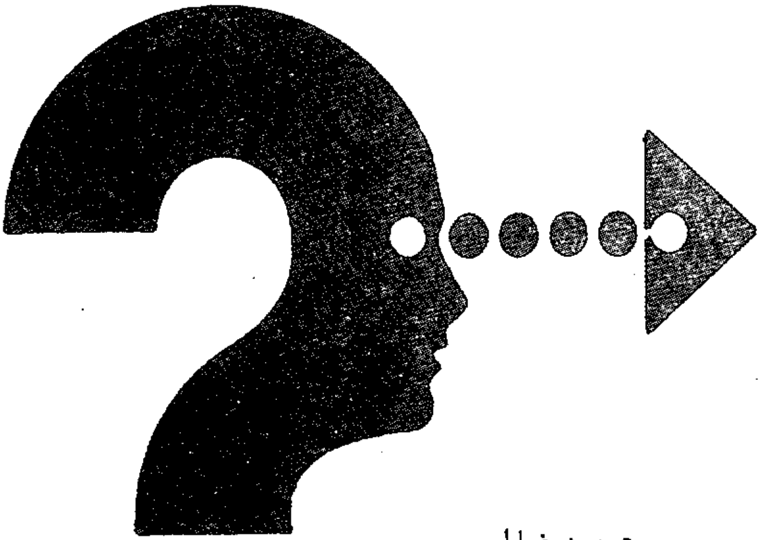
نظر به اینکه دانش‌آموزان نظام جدید آموزش متوسطه در برنامه آموزشی و درسی نظام جدید نیاز به آشنایی به شیوه اجرایی آزمون سراسری دانشگاهها دارند، ضرورت برنامه‌ریزی در تهیه کتابهای کمک آموزشی براساس کتابهای نظام جدید هر چه بیشتر احساس می‌شود. به این منظور دفتر آموزشهای نظری و پیش‌دانشگاهی با همکاری گروهی از دبیران و مدرسین مجرب دبیرستانها اقدام به تهیه سؤالات چهارگزینه‌ای با پاسخ تشریحی در رشته‌های ریاضی ـ تجربی ـ انسانی را نموده که می‌تواند به عنوان یک منبع کمک آموزشی سودمند جهت ارتقاء سطح علمی دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرد. بدون شک بررسی دقیق و کامل کتاب درسی محور اصلی مطالعات دانش‌آموزان عزیز را تشکیل می‌دهد و این مجموعه حاضر در جهت درک بهتر و عمیق‌تر مطالب درسی و آمادگی هرچه بیشتر دانش‌آموزان نظام جدید برای شرکت در آزمون ورودی دانشگاهها و مراکز آموزش عالی پیش‌بینی و تدوین گردیده است. در مراحل مختلف طرح و ارزیابی سؤالات سعی بر آن شده که محتوای کتاب درسی نظام جدید مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و متناسب با بخشهای کتاب سؤالات و پرسشهای مناسب طراحی و پاسخ تشریحی آن داده شود.

کتابهای ریاضی که در این مجموعه کتابها، تاکنون چاپ و توزیع شده به قرار زیر است:

۱ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ (مصطفی اخگرژند و عباس اعتزازیان)
۲ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ (سیدحسین سیدموسوی و اکبر جوادی)
۳ـ ریاضیات گسسته (حمیدرضا امیری و سیدحسین سیدموسوی)
۴ـ جبر و احتمال (محمدصادق نوذری و رضا ممقانی)
۵ـ هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی (علی‌اکبر علی‌پورورحیم‌امیری)
۶ـ ریاضی ۱ و ۲ (رمضان همتی و محمود جالینوسی)
۷ـ ریاضی ۳ و ۴ (علی‌اکبر علی‌پور و رحیم امیری)
۸ـ حسابان ۲ (عبدالرضا عالی‌پناه و علی‌اکبر همتی)

کتابهای ریاضی زیر در دست چاپ بوده و به زودی منتشر می‌شود:

۱ـ ریاضی پایه رشتهٔ علوم انسانی (سیدمحمدرضاهاشمی‌موسوی و میرشهرام صدر)
۲ـ حسابان ۱ (عبدالرضا عالی‌پناه و علی‌اکبر همتی)
۳ـ ریاضی ۵ (داریوش مشعوف، حسین خاکپاش، رحیم آصفی و زین‌العابدین دهقان)
۴ـ ریاضیات عمومی رشتهٔ تجربی ۱ و ۲، پیش‌دانشگاهی (داریوش مشعوف، رحیم آصفی، حسین خاکپاش و زین‌العابدین دهقان)



مسأله برای حل

• حمیدرضا امیری
• سید محمدرضا هاشمی موسوی
• میرشهرام صدر
• محمّدصادق عسگری

مسأله‌های ریاضیات ۲

(۱) به‌ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $۲m^۲x+۶m+۴=(۶m-۴)x$ جواب حقیقی ندارد؟

(۲) درصورتی که $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-m^۲=۰$ باشند، حاصل عبارت $p=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲-x_۱x_۲}{x_۱^۳+x_۲^۳}$ را بیابید.

(۳) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(x^۴+۲)(۷x+۱۴)(x^۲-۱)^۴\geq ۰$ را بیابید.

(۴) اگر خط به معادلهٔ $px+qy=۱$ برخط به معادلهٔ $py+x-q=۰$ عمود باشد و از نقطهٔ A(۱ و ۲-) نیز بگذرد، مقادیر p و q را تعیین کنید (p و $q\neq ۰$).

(۵) برای آن‌که نقطهٔ مفروض $p(۶m-۱۲\ ,\ ۴m-۱۲)$ در ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات واقع شود، حدود m را بیابید.

(۶) خطی که از دو نقطهٔ A(-۶و-۷) و B(-۷ و-۶) می‌گذرد، با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

(۷) اگر A(m-۱و۲) و B(۲و -۱) و C(۳m-n و m-n) رأسهای مثلث ABC و نقطهٔ G(-۲ و ۱) مرکز ثقل این مثلث باشند، مقدار m و n را تعیین کنید.

مسأله‌های ریاضیات ۴

(۱) انحراف معیار داده‌های زیر را به‌دست آورید:

۲۴و۲۲و۱۶و۱۴و۱۲و۸

(۲) حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$p=\frac{\tan ۴۵^\circ+[\log(\tan ۱^\circ)+\log(\tan ۲^\circ)+\cdots+\log(\tan ۸۹^\circ)]}{(\tan ۱^\circ)(\tan ۲^\circ)\cdots(\tan ۸۹^\circ)}$$

(۳) اگر $\tan(x+y)=۲$ و $\tan y=\frac{۱}{۳}$، آنگاه x چقدر است؟

(۴) اگر $\tan ۶x=\tan ۴x+\tan ۲x$، آنگاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$p=\tan ۲x\ \ \tan ۴x\ \ \tan ۶x$

(۵) مجموع n جملهٔ یک تصاعد عددی برابر

$S_n = 3n^2 - 4n$ است، جملهٔ اول، قدر نسبت و جملهٔ یازدهم این تصاعد را تعیین کنید $(n \in \mathbb{N})$.

(۶) جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $\frac{1}{3^{n-1}}$ است، حدّ مجموع این تصاعد را بیابید.

(۷) اگر $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$، مختصات و طول بردار $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ و حاصل $\vec{u} \times \vec{v}$ را بیابید.

(۸) تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب را ازطریق ترکیب r شیء از n شیء بیابید.

مسأله‌های حسابان ۲

(۱) a و b را چنان به‌دست آورید که، تابع با ضابطهٔ
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \sqrt{ax+b} & x \geq 0 \\ a\cos x + b\sin x & x < 0 \end{cases}$$
در نقطهٔ x=0 مشتق‌پذیر باشد.

(۲) درتابع با ضابطهٔ $y = x^3 + ax^2 + bx + c$، a و b و c را چنان تعیین کنید که نقطهٔ (۱ و ۱-) مرکز تقارن منحنی باشد، و خط مماس در نقطهٔ x=0 عمود بر خط به معادلهٔ $2y - x = 1$ باشد.

(۳) الف ـ به‌ازای چه مقادیری از a و b منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{b\sin x + a}{\sin x + 1}$ برمحور xها مماس است؟

ب ـ به ازای $a = 1$ و $b = -1$ نمودار این تابع را درفاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

(۴) تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ مفروض است. نقاط بحرانی و نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق یا نسبی را (درصورت وجود) تعیین کنید.

(۵) الف ـ دامنه و بُرد تابع با ضابطه $y = \mathrm{Arctg}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]$ را به‌دست آورید.

ب ـ معادلهٔ خط مماس و خط قائم را بر نمودار این تابع درنقطهٔ $x = 0$ بنویسید.

(۶) نمودار هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = \mathrm{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ب) $y = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

(۷) اگر $-1 \leq x \leq 0$ ثابت کنید:
$$\mathrm{Arc}\cos x = \pi - \mathrm{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}$$

(۸) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}$ ب) $\lim_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

(۹) مشتق هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $y = (\sin x)^{1+\tan x}$ ب) $y = \frac{xe^x}{1+xe^x}$

ج) $y = \int^{\sin x} \frac{dt}{1-t^2}$ د) $y = \int_1^{\mathrm{tg}x} \frac{\cos 2t}{1+t^2}dt$

(۱۰) نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 2 + \sin\theta \end{array}\right.$ مفروض است.

اولاً: مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی $0 \leq \theta \leq 2\pi$ باشد، تعیین کنید.

ثانیاً: مکان هندسی نقطه M را رسم کنید. ثالثاً: معادله خط مماس و خط قائم را درنقطه $t = \frac{\pi}{6}$ بنویسید.

(۱۱) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{x}] x^2 dx$ ب) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2}$

ج) $\int_{-1}^{5} \frac{|x-3|-4}{2} dx$

مسأله‌های ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

(۱) آیا ممکن است در یک کلاس ۲۱ نفری، هر دانش‌آموز به تنهایی، با ۷ نفر از همکلاسی‌های خود، دوست صمیمی باشد؟ چرا؟

(۲) اگر G یک گراف باشد، یک‌دور اویلری برای گراف G دوری است که شامل هر رأس و هر یالِ G باشد. (از هر رأس G

حداقل یک‌بار مورد استفاده قرار گرفته و از هر یال G نیز فقط یک‌بار استفاده شود.)

ثابت کنید : اگر گرافی یک دور *اویلری* داشته باشد، هررأس این گراف، درجهٔ زوج دارد.

با استفاده از مطلب فوق، مسألهٔ معروف پُل‌های کونیگبرگ را حل کنید!

(۳) ثابت کنید که دورقم سمت راست $A=\sum_{k=1}^{21} k!$ ، ۱۳ می‌باشد.

(۴) ثابت کنید که عبارت $\left(a^{n+4}-a^{n}\right)$ همواره بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

(۵) عبارت حاصل از بسط $(x+y+z+t)^{14}$ چند جمله دارد؟

(۶) معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=11$ ، چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_1<1$ و $x_2>3$ دارد؟

(۷) رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ با شرطهای اولیهٔ $a_0=0$ و $a_1=8$ را حل کنید.

(۸) n مهره را به تصادف داخل N ظرف u_1 و u_2 و ... و u_N قرار می‌دهیم، احتمال اینکه در ظرف u_1، دقیقاً K مهره قرار گرفته باشد چقدر است (K<n)

(۹) اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمالی به‌صورت $f_X(x)=a(\frac{1}{3})^x$ به ازای $X=0,1,2,\cdots$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

(۱) تابع باضابطهٔ $f(x)=x^2|x|+1$ درفاصلهٔ $[0,2]$ مفروض است. نقاط بحرانی و نقاط ماگزیمم و مینیمم مطلق یا نسبی را (درصورت وجود) تعیین کنید.

(۲) قضیه مقدار میانگین را بیان کنید و سپس به کمک قضیه مقدار میانگین، ثابت کنید برای هر a<b>0

$$\frac{b-a}{b^2+1}<\operatorname{Arc\,tan} b-\operatorname{Arc\,tan} a<\frac{b-a}{a^2+1}$$

(۳) جدول تغییرات و نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و نقاط عطف هریک را بیابید.

الف) $f(x)=x^2(x+2)^3$ ب) $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

(۴) به‌کمک تعریف انتگرال معین هریک از حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{4+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+\cdots+e^{-\frac{n}{n}}}{n}$

(۵) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to+\infty}\log_{(x-2)}(2x+1)$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\operatorname{Ln}(1-x)}$

ج) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{Ln}(1-x)}-\frac{1}{x}\right)$

(۶) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x\operatorname{Ln}x\,dx$ ب) $\int\frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

ج) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x+1}}$

(۷) طول کمان منحنی (طول قوس) به معادلهٔ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ را بیابید.

(۸) مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y=\sqrt{4-x^2}$ و $y=1$ حول محور xها.

(۹) مساحت محصوری بین منحنی $y=x-x^2$ و $y=2x-2$ را حساب کنید.

مسأله‌های ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

(۱) درستی نتیجهٔ قضیهٔ رُل را برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ روی بازه $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ تحقیق کنید.

(۲) ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع باضابطهٔ $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$ را با استفاده از آزمون مشتق دوم به‌دست آورید و تعیین کنید درچه بازه‌ای تقعّر منحنی تابع داده شده رو به بالا و درچه بازه‌ای تقعّر آن رو به پایین است.

(۳) منحنی نمایش توابع به معادله‌های زیر را رسم کنید.

$$\text{الف)}\ y=\frac{-1+x}{x+2} \qquad \text{ب)}\ y=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$$

(۴) حجم بزرگترین مخروط دواری را بیابید که در درون کره‌ای به شعاع r محاط شده است.

(۵) یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس تا کانونش ۵ سانتیمتر می‌باشد. اگر قطر قاعده آینه ۴۰ سانتیمتر باشد، عمق آینه درمرکز آن چقدر است؟

(۶) معادله هذلولی را بنویسید که نقاط $F(6,-3)$ و $F'(-4,-3)$ کانونهای آن بوده و خط به معادلهٔ $3y-4x+13=0$ یکی از مجانبهای آن باشد.

(۷) با استفاده از نمودار تابع باضابطهٔ $f(x)=\left|6-3x\right|-6$ مقدار $\int_{-1}^{5}f(x)dx$ را حساب کنید.

(۸) الف ـ مساحت محدود به محور xها، منحنی تابع باضابطهٔ $y=\sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^5}}$، محور yها و خط $x=\frac{\pi}{4}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل را حساب کنید.

ب ـ مقدار میانگین تابع باضابطهٔ $y=x^2\sqrt[3]{x+2}$ را بر بازه $[-2,6]$ پیدا کنید.

(۹) یک بازیکن فوتبال $\frac{7}{10}$ ضربات پنالتی خود را گُل می‌کند، اگر او پنج ضربه پنالتی بزند، احتمال آن‌که دقیقاً سه گل زده باشد، چقدر است؟

(۱۰) درتوزیع زیر، امید ریاضی برابر $\frac{70}{42}$ است، مقدار K را به‌دست آورید.

X	۰	۱	K	۳
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$



این‌قدر می‌دانم که در حدود سال ۴۵۰ قبل از میلاد مسیح یونانیان دارای هندسه‌ای بدوی و مقدماتی بوده‌اند: موضوع این هندسه فقط طریقه‌های عملی و دستورهای قابل استفاده در اندازه‌گیری طول پارچه یا میزان محصول زیتون نبوده است، بلکه استدلالها و براهین منطقی متصل به یکدیگر دیده می‌شد که در حدود هندسهٔ مقدماتی ما بوده‌اند.

بدون شک این استدلالها آن‌قدرها دقیق نبوده است و بیشتر از الهام و مکاشفه استفاده می‌کردند تا از منطق و بیشتر آنها مربوط به ساختمانهای هندسی بوده است.

تاریخ علوم، پی‌یرروسو

ترجمه: حسن صفاری

حل مسأله‌های مسابقه‌ای برهان ۲۰

(۱) نشان دهید برای هر عدد حقیقی ۱ و $x\neq 0$ داریم:

$$1<\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}<2$$

اثبات: فرض کنیم ۱ و $x\neq 0$ دلخواه و ازاین به بعد ثابت باشد. قرار می‌دهیم: $f:[1,2]\to IR$ با ضابطه $f(t)=t^x$

این تابع روی فاصله [۲و۱] پیوسته و برفاصله(۲و۱) مشتق‌پذیر است. بنابه قضیه مقدار میانگین وجود دارد $C\in(1,2)$ به‌طوری که

$$f(2)-f(1)=f'(C)(2-1)$$

$$2^x-1=xC^{x-1}$$

$$\frac{2^x-1}{x}=C^{x-1}$$

$$\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}=C$$

چون $1<C<2$، درنتیجه داریم: $1<\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}<2$

(۲) فرض کنیم $p>5$ یک عدد اول باشد، قرار می‌دهیم:

$$S=\{p-n^2:n\in Z^+,n^2<p\}$$

(برای مثال اگر $P=31$ باشد در این صورت $S=\{6,15,22,27,30\}$)

ثابت کنید S شامل دوعضو a و b چنان است به‌طوری که $1<a<b$ و $a|b$.

اثبات: اگر عدد اول p چنان باشد، به‌طوری که $p=m^2+1$ آنگاه بنابه‌فرض $p>5$ باید m عدد زوج باشد و $m^2+1>5$ یا $m^2>4$ درنتیجه $m>2$ بنابراین m زوج است و $m>2$ و $p=m^2+1$ دراین حالت قرار می‌دهیم:

$$b=p-1^2=m^2 \quad \text{و} \quad a=p-(m-1)^2=2m$$

اولاً: $a,b\in S$ زیرا $p=m^2+1$ درنتیجه $m^2<p$ و $a=p-(m-1)^2$ و $b=p-1^2$ به‌علاوه چون $m>2$ درنتیجه $m^2>2m>1$ یعنی $1<a<b$. همچنین چون m عدد طبیعی زوج است، درنتیجه $2|m$ لذا $2m|m^2$ یعنی $a|b$

اگر عدد اول p به شکل m^2+1 نباشد، دراین صورت عدد صحیح مثبت m را چنان درنظر می‌گیریم؛ به‌طوری که $5<1+m^2<p<(m+1)^2-1$ دراین حالت قرار می‌دهیم:

$a=p-m^2$ واضح است $a\in S$ و به‌علاوه

$$1+m^2<p<(m+1)^2-1$$

$$1+m^2<p<m^2+2m$$

$$1<p-m^2<2m$$

$$1<a<2m$$

یعنی $1<a<2m$ ثانیاً $a\neq m$ زیرا اگر $a=m$ آنگاه باید $p-m^2=m$ درنتیجه $p=m^2+m$ که این با اول بودن p متناقض است.

چون هرعدد طبیعی بین ۱ و $2m$ بجز m به شکل $m-k$ یا $m+k$ $(k\in N)$ می‌باشد، بنابراین عدد طبیعی $k<m$ چنان وجود دارد به‌طوری که $a|(m-k)(m+k)$ درنتیجه $a|(m-k)(m+k)+a$ قرار می‌دهیم $b=(m-k)(m+k)+a$ بنابراین $a|b$ به‌علاوه

$$b=(m-k)(m+k)+a=m^2-k^2+a=$$
$$m^2-k^2+p-m^2=p-k^2$$

چون $k^2<m^2<p$ درنتیجه $b\in S$ واز آنجا که $m^2-k^2>0$ لذا $a<m^2-k^2+a$ یعنی: $1<a<b$ این نشان می‌دهد که $a,b\in S$ و $1<a<b$ و $a|b$

حل مسأله‌های برهان شماره ۲۱

حل مسأله‌های ریاضیات ۱

(۱)
$$A=\{x|x\in Z \text{ و } -1\le x<6\}$$
$$B=\{x|x\in IR \text{ و } x\ge 1\} \text{ و } C=\{x|x\in IR \text{ و } x\le 5\}$$
$$(A\cup B)\cap C=\{x|x\in IR \text{ و } 1\le x\le 5 \; ; x=0 \; ; x=-1\}$$

(۲) می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی برابر 2^n است. بنابراین:

$$2^{k+2}=2^k+96\Rightarrow 4\times 2^k-2^k=96$$
$$\Rightarrow 3\times 2^k=96$$
$$\Rightarrow 2^k=\frac{96}{3}=32=2^5\Rightarrow \boxed{k=5}$$

(۳)

$$1)\ (a^3-2)(a^3+2)(a^{12}+4a^6+16)=$$
$$=(a^6-4)(a^{12}+4a^6+16)$$
$$=a^{18}-64$$

$$2)\ (2x-y)^3(y^2+4x^2)^3(2x+y)^3$$
$$=\left[(2x-y)(2x+y)(y^2+4x^2)\right]^3$$
$$=\left[(4x^2-y^2)(4x^2+y^2)\right]^3$$
$$=(16x^4-y^4)^3$$

(۴)

$$1)(a+b)^4+16=(a+b)^4+8(a+b)^2+16-8(a+b)^2$$
$$=[(a+b)^2+4]^2-8(a+b)^2$$
$$=[(a+b)^2+4-2\sqrt{2}(a+b)][(a+b)^2+4+2\sqrt{2}(a+b)]$$

$$2)\ x^2+5y+x-25y^2=(x^2-25y^2)+(x+5y)$$
$$=(x-5y)(x+5y)+(x+5y)$$
$$=(x+5y)(x-5y+1)$$

(۵)

$$x^4+px^2+qx+2 \;\Big|\; \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+p+2}$$
$$\underline{-x^4+2x^3-2x^2}$$
$$2x^3+(p-2)x^2+qx+2$$
$$\underline{-2x^3+4x^2-4x}$$
$$(p+2)x^2+(q-4)x+2$$
$$\underline{-(p+2)x^2+(2p+4)x-2p-4}$$
$$(q+2p)x-2p-2$$

باقیمانده باید برابر $7x+4$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} q+2p=7 \\ -2p-2=4 \end{cases}\Rightarrow p=-3 \text{ و } q=13$$

(۶) می‌توان نوشت:

$$x^{45}+1=(x^{15})^3+1$$
$$=(x^{15}+1)(x^{30}-x^{15}+1)$$

بنابراین بزرگترین عامل مشترک بین $x^{45}+1$ و $x^{15}+1$ چنین است: $(x^{45}+1 \text{ و } x^{15}+1)=x^{15}+1$

(۷)

$$\frac{p-a}{(p-q)(p-r)}+\frac{q-a}{(q-r)(q-p)}+\frac{r-a}{(r-p)(r-q)}$$
$$=\frac{(p-a)(q-r)-(q-a)(p-r)+(r-a)(p-q)}{(p-q)(p-r)(q-r)}$$
$$=\frac{pq-pr-aq+ar-qp+qr+ap-ar+rp-rq-ap+aq}{(p-q)(p-r)(q-r)}=0$$

حاصل عبارت برابر صفر است.

حل مسأله‌های ریاضیات ۳

(۱)
$$\frac{x^3-4x^2+5x}{(x^2+1)(x-1)}\ge 0$$

$$x^3-4x^2+5x=0\Rightarrow x(x^2-4x+5)=0\Rightarrow \boxed{x=0};$$
$x^2-4x+5=0$ (ریشه حقیقی ندارد، $\Delta<0$)
$x^2+1=0$ (ریشه حقیقی ندارد) و $x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3-4x^2+5x		−	0	+		+	
x^2+1		+		+		+	
$x-1$		−		−	0	+	
جواب		+		−		+	

$\{x|x\in IR \text{ و } x\le 0 \text{ و } x>1\}$ = مجموعهٔ جواب

(۲)
$$p(x)=\frac{1}{x-4}+\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$$

$$\begin{cases}4-x^2\ge 0\\ x^2-4\ge 0\\ x-4\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\le 4\\ x^2\ge 4\\ x\ne 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2\\ x\ge 2 \text{ یا } x\le -2\\ x\ne 4\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب دستگاه اخیر، دامنهٔ متغیر عبارت $p(x)$ است: یعنی عبارت فوق، فقط بهازای $x=\pm 2$ تعریف شده است: $D_p=\{-2,2\}$

یا

(۳)
$$\frac{4x-1}{2x+1}-\frac{2x-1}{2x-2}=\frac{2x+3}{4x^2-2x-2}$$

باتوجه به $x\ne 1$ و $x\ne -\frac{1}{2}$، می‌توان نوشت:

$$\frac{(4x-1)(2x-2)-(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)(2x-2)}=\frac{2x+3}{(2x+1)(2x-2)}$$

$$۸x^{۲}-۸x-۲x+۲-(۴x^{۲}-۱)=۲x+۳$$

$$۴x^{۲}-۱۲x=۰ \Rightarrow x=۰ \;;x=۳$$

(۴)
$$\begin{cases} ۴^{۳x-۳y}=۳۲ \\ ۹^{۳x+۳y}=۲۴۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲^{۶x-۶y}=۲^{۵} \\ ۳^{۶x+۶y}=۳^{۵} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۶x-۶y=۵ \\ ۶x+۶y=۵ \end{cases} \Rightarrow ۱۲x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۶} \text{ و } y=۰$$

(۵) بافرض $x \geq ۲$ ، دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$\left(\sqrt{x-۲}\right)^{۲}=\left(\sqrt{۲x-۳}-۱\right)^{۲}$$
$$x-۲=۲x-۳+۱-۲\sqrt{۲x-۳}$$
$$۲\sqrt{۲x-۳}=x \Rightarrow ۴(۲x-۳)=x^{۲}$$
$$x^{۲}-۸x+۱۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۶)=۰$$

(هردو ریشه قابل قبول است زیرا در معادلهٔ اول صدق می‌کند) $x=۲;x=۶$

(۶)
$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x \geq ۲ \\ x+۳ & x < ۲ \end{cases} \text{ و } g(x)=x+۴$$

$$f(-۱)=(-۱)+۳=۲ \Rightarrow g(f(-۱))=g(۲)=۲+۴=۶$$
$$g(۰)=۰+۴=۴ \Rightarrow f(g(۰))=f(۴)=۴^{۲}-۱=۱۵$$

(۷)
$$f(x)=x^{۲}-۳x \text{ و } A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$f(A)=A^{۲}-۳A \text{ و } f(-A)=A^{۲}+۳A$$
$$f(A)+f(-A)=A^{۲}-۳A+A^{۲}+۳A=۲A^{۲}$$

$$A^{۲}=A \times A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & -۱+۰ \\ -۱+۰ & ۱+۰ \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$f(-A)+f(A)=۲\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

(۸) تابعی معکوس پذیر است که یک‌به‌یک باشد :

$$f(x_{۱})=f(x_{۲}) \Rightarrow \frac{x_{۱}^{۵}+۱}{x_{۱}^{۵}-۱}=\frac{x_{۲}^{۵}+۱}{x_{۲}^{۵}-۱} \Rightarrow$$
$$(x_{۱}^{۵}+۱)(x_{۲}^{۵}-۱)=(x_{۱}^{۵}-۱)(x_{۲}^{۵}+۱)$$
$$x_{۱}^{۵}x_{۲}^{۵}-x_{۱}^{۵}+x_{۲}^{۵}-۱=x_{۱}^{۵}x_{۲}^{۵}+x_{۱}^{۵}-x_{۲}^{۵}-۱$$
$$۲x_{۱}^{۵}=۲x_{۲}^{۵} \Rightarrow x_{۱}^{۵}=x_{۲}^{۵} \Rightarrow x_{۱}=x_{۲}$$

تابع f یک‌به‌یک است، بنابر این معکوس پذیر است.
حال ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم :

$$y=f(x)=\frac{x^{۵}+۱}{x^{۵}-۱} \Rightarrow x^{۵}=\frac{y+۱}{y-۱} \Rightarrow x=\sqrt[۵]{\frac{y+۱}{y-۱}}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۵]{\frac{x+۱}{x-۱}}$$ (ضابطهٔ تابع معکوس)

(۹)
$$f(x)=\frac{x}{x+۱} \text{ و } (fog)(x)=۲x$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+۱} \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+۱}=۲x$$

$$g(x)=۲xg(x)+۲x \Rightarrow g(x)=\frac{۲x}{۱-۲x}$$

(۱۰)
$$x=X-۳ \text{ و } y=Y+۴:۲(X-۳)-(Y+۴)=۵$$
$$۲X-۶-Y-۴=۵ \Rightarrow ۲X-Y=۱۵$$

حل مسأله‌های جبر و احتمال

۱) می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر n، می‌تواند یکی از اعداد ۰،۱،۲،...،n−۱ باشد، حال اگر این n عدد را (از صفر تا n−۱) در حکم لانه‌های کبوتر و اعضای مجموعهٔ A را که تعدادشان (n+۱) است، کبوترها فرض کنیم، طبق اصل «لانه کبوتری» دست کم دو عضو مجموعهٔ A می‌بایست بر n هم باقیمانده باشند!

(۲) در حالت کلّی ثابت می‌شود اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آنگاه $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$ و $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ (ثابت کنید!)

می‌دانیم همواره $\varnothing \subseteq X$ (۱) از طرفی طبق فرض $X \subseteq A$ و $X \subseteq A'$ پس $(X \cap X) \subseteq (A \cap A')$ یا $X \subseteq \varnothing$ (۲) و با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $X=\varnothing$. برای حل قسمت دوم مسأله، به صورت زیر عمل می‌کنیم :

می‌دانیم $X \subseteq U$ (۱)
طبق فرض داریم $A' \subseteq X \;, A \subseteq X \Rightarrow (A' \cup A) \subseteq (X \cup X)$
$\Rightarrow U \subseteq X$ (۲)
(۱) , (۲) $\Rightarrow X=U$

(۳) فرض کنیم A وB و C وD مجموعه‌های دلخواهی باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم :
$(A \times B) \cap (C \times D)=(A \cap C) \times (B \cap D)$ ، برای این کار کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ سمت چپ تساوی فوق زیر مجموعهٔ طرف راست است و برعکس : پس عضو دلخواهی از سمت چپ تساوی در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم عضوی از مجموعهٔ سمت راستی بوده و برعکس :

فرض کنیم $(x,y) \in [(A \times B) \cap (C \times D)]$
$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x,y) \in (A \times B)$ و $(x,y) \in (C \times D)$
$\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x \in A$ و $y \in B)$ و $(x \in C$ و $y \in D)$
$\xrightarrow{\text{جابجایی}} (x \in A$ و $x \in C)$ و $(y \in B$ و $y \in D)$
$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} [x \in (A \cap C)]$ و $[y \in (B \cap D)]$
$\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x,y) \in [(A \cap C) \times (B \cap D)]$

(۴) طبق تعریف، داریم :

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}+t^{۲}$$

۱)خاصیت بازتابی $x^{۲}+y^{۲}=x^{۲}+y^{۲} \Rightarrow (x,y)R(x,y)$

۲) فرض کنیم $(x,y)R(z,t)$ در نتیجه :

$$x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}+t^{۲} \Rightarrow z^{۲}+t^{۲}=x^{۲}+y^{۲}$$

خاصیت تقارنی $\Rightarrow (z,t)R(x,y)$

۳) فرض کنیم $(x,y)R(z,t)$ و $(z,t)R(m,n)$ درنتیجه :

$$x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}+t^{۲} \text{ و } z^{۲}+t^{۲}=m^{۲}+n^{۲}$$

خاصیت تعدی $\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=m^{۲}+n^{۲} \Rightarrow (x,y)R(m,n)$

برای تعیین شکل کلاسهای هم‌ارزی رابطهٔ داده شده، کافی است شکل یک کلاس هم‌ارزیِ دلخواه مثل $[(۱,۰)]$ را بیابیم :

$$[(۱,۰)]=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{۲} \mid (x,y)R(۱,۰)\right\}$$
$$=\left\{(x,y) \mid x^{۲}+y^{۲}=۱^{۲}+۰^{۲}=۱\right\}$$

یعنی شکل کلاس هم ارزی $[(۱,۰)]$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ بنابراین بقیهٔ کلاسهای هم‌ارزی این رابطه نیز دایره‌هایی به مرکز مبدأ (دایره‌های هم مرکز) و با شعاعهای متفاوت خواهند بود. (کلاسهای هم‌ارزی یک رابطه نباید اشتراکی داشته باشند.)

(۵) تعداد اعضای فضای نمونه در این مسأله !۹ می‌باشد و تعداد حالتهایی که می‌توان در نظر گرفت تا رضا در مکان وسط قرار گرفته باشد !۸ است. پس $P(A)=\frac{۸!}{۹!}=\frac{۱}{۹}$

(۶) چون احتمال رو شدن هر عدد زوج ۳ برابر هر عدد فرد است، پس :

$$p(۲)=p(۴)=p(۶)=۳p(۱)=۳p(۳)=۳p(۵)$$

از طرفی: $p(۱)+p(۲)+\cdots+p(۶)=۱$

$$\Rightarrow p(۱)+۳p(۱)+p(۱)+۳p(۱)+p(۱)+۳p(۱)=۱$$
$$\Rightarrow p(۱)=\frac{۱}{۱۲} \text{ و } p(۳)=p(۵)=\frac{۱}{۱۲}, p(۲)=p(۴)=p(۶)=\frac{۳}{۱۲}$$
$$A=\{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow p(A)=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

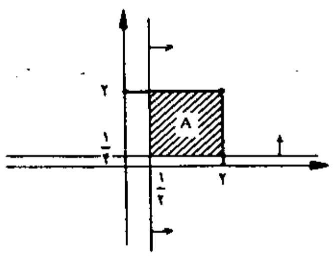
(۷) برای حل این مسأله از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$p(\text{مجموع دو تاس ۵})=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

$$p(\text{دقیقاً k بار موفقیت})=\binom{n}{k}p^{k}(۱-p)^{n-k}$$

$$p(\text{۴ بار موفقیت})=\binom{۶}{۴}\left(\frac{۱}{۹}\right)^{۴}\times\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}$$

(۸) فضای نمونه‌ای طبق شکل زیر سطح مربعی است به طول ضلع ۲ واحد و داریم :



$$p(A)=\frac{a_{A}}{a_{S}}=\frac{\frac{۳}{۲}\times\frac{۷}{۴}}{۲\times۲}=\frac{۲۱}{۳۲}$$

(۹) طبق فرض $Z=(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳})$ و I,J طبق رابطهٔ

دموآر داریم:

$Z^6=(\cos 6\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3})=(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=1$

از طرفی: $1376=6\times(229)+2\Rightarrow Z^{1376}=(Z^6)^{229}\times Z^2=1\times Z^2=Z^2$

و $Z^2=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=\left[\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\right]$

$\Rightarrow Z^2=(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل مسأله‌های هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

(۱) این مکان هندسی، کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{6}$ است. معادلهٔ این کره به صورت $x^2+y^2+z^2=(\sqrt{6})^2=6$ است.

برای آنکه نقطهٔ $A(a,2a-1,a+1)$ روی این کره قرار داشته باشد، باید مختصاتش در معادلهٔ کره صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$a^2+(2a-1)^2+(a+1)^2=6\Rightarrow 6a^2-2a-4=0\Rightarrow$

$3a^2-a-2=0\Rightarrow a=1, a=-\frac{2}{3}$

(۲) داریم:

$a=i+2j-k, b=-3i+j+2k\Rightarrow a=(1,2,-1)$

و $b=(-3,1,2)\Rightarrow 3a=(3,6,-3), 2b=(-6,2,4)$

$\Rightarrow 3a-2b=(9,4,-7)\Rightarrow|3a-2b|=\sqrt{9^2+4^2+(-7)^2}$
$=\sqrt{146}$

(۳) اگر تصویر بردار b روی بردار a را b′ بنامیم، داریم:

$a=(2,3,-1), b=(2,0,-3)\Rightarrow$

$b'=$ اندازه جبری $=pr\frac{b}{a}=\frac{a.b}{|\vec{a}|}=\frac{4+0+3}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

(۴) بردارهای هادی دو خط، $L_1=(3,m,2)$ و $L_2=(1,-1,2)$ و زاویهٔ بین دو خط $\alpha=60°$ است. از آنجا داریم:

$\cos\alpha=\frac{L_1.L_2}{|\vec{L}_1||\vec{L}_2|}\Rightarrow\cos 60°=\frac{3-m+4}{\sqrt{9+m^2+4}.\sqrt{1+1+4}}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{7-m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+13}}\Rightarrow 6m^2+78=4m^2+196-56m$

$2m^2+56m-118=0\Rightarrow m^2+28m-59=0\Rightarrow$

$m=-14\pm\sqrt{255}$

(۵) قرینهٔ نقطهٔ $M(x,y,z)$ نسبت به محور xها نقطهٔ $M_1(x,-y,-z)$ است بنابراین معادلهٔ قرینهٔ خط D نسبت به محور xها به صورت زیر است:

$2x+1=-y-2=-3(-z)+1$

$\Rightarrow 2(x+\frac{1}{2})=-(y+2)=3(z+\frac{1}{3})$

$\Rightarrow\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{x+\frac{1}{2}}{3}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+\frac{1}{3}}{2}$

(۶) معادله‌های متقارن خط Δ را می‌نویسیم:

$N(1,2,1), L=(3,2,1)\Rightarrow\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$

برای تعیین فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,0,2)$ از خط Δ از دستور

$$D=\frac{|\vec{P_0P}\times\vec{L}|}{|\vec{L}|}$$

استفاده می‌کنیم که P_0 نقطه‌ای دلخواه از خط Δ است.
بدین ترتیب:

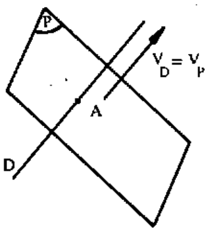
$P_0\in\Delta: x=4\Rightarrow y=4, z=2\Rightarrow P_0=(4,4,2), P=(-1,0,2)$

$\vec{P_0P}=(-5,-4,0), L=(3,2,1)\Rightarrow$

$\vec{P_0P}\times\vec{L}=(-4,5,2)\Rightarrow D=\frac{\sqrt{16+25+4}}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{3\sqrt{70}}{14}$

نکته: نقطهٔ P_0 را می‌توان همان نقطهٔ $N(1,2,1)$ در نظر گرفت.

(۷) نقطهٔ به طول ۲ را A می‌نامیم و مقدار t متناظر با آن را تعیین می‌کنیم تا مختصات نقطهٔ A را محاسبه کنیم.



$t-1=2\Rightarrow t=3\Rightarrow A(2,7,-1)$

حال، بردار قائم صفحهٔ مورد نظر را، که همان بردار هادی خط D است، مشخص می‌سازیم و معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده را می‌نویسیم.

$V_P=V_D=(1,2,-1)$

$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$\Rightarrow 1(x-2)+2(y-7)-1(z+1)=0$

$\Rightarrow x+2y-z-17=0$

حل مسأله‌های جبر خطی پیش‌دانشگاهی

(۱) برای اثبات مستقل خطی بودن بردارهای داده شده، کافی است یک ترکیب خطی دلخواه از آنها را مساوی با بردار صفر قرار داده و ثابت کنیم همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی صفر هستند.

$\alpha_1(x^3+x+1)+\alpha_2(x^2+2x-1)+\alpha_3(x+2)+\alpha_4x$

$=0x^3+0x^2+0x+0$

$\alpha_1x^3+\alpha_2x^2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x+$

$(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)=0$

$\Rightarrow\alpha_1=0,\ \alpha_2=0\Rightarrow\begin{cases}0+0+\alpha_3+\alpha_4=0\\0-0+2\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_3=0\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha_4=0$

(۲) چون بردارهای V_1، V_2 و V_3 پایه‌ای برای IR^3 تشکیل می‌دهند پس طبق تعریف مستقل خطی می‌باشند. حال، فرض کنیم بردار u را به دو صورت بتوانیم بر حسب این سه بردار بنویسیم، یعنی:

$u=\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\alpha_3V_3\quad(1)$

و $u=\beta_1V_1+\beta_2V_2+\beta_3V_3\quad(2)$

$(1),(2)\Rightarrow\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\alpha_3V_3=\beta_1V_1+\beta_2V_2+\beta_3V_3$

$\Rightarrow(\alpha_1-\beta_1)V_1+(\alpha_2-\beta_2)V_2+(\alpha_3-\beta_3)V_3=0$

$\xrightarrow{\text{مستقل خطی‌اند}}\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\alpha_3-\beta_3=0$

$\Rightarrow\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,\ \alpha_3=\beta_3$

(۳) چون ماتریس نگاشت خطی f، ۳×۲ است لذا f نگاشتی از IR^2 به IR^3 می‌باشد از طرفی می‌دانیم:

بُعد $f(IR^2)$ + بُعد هسته = ۲

برای تعیین بُعد هسته به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad(k_f=\{(x,y)|f(x,y)=(0,0,0)\})$

$\begin{cases}x-y=0\\2x=0\\x+3y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0\Rightarrow k_f=\{(0,0)\}$

بنابراین طبق قضیه نگاشت یک به یک است.

از طرفی چون نگاشت خطی f از IR^2 به IR^3 است، نمی‌تواند پوشا باشد. پس داریم:

بُعد $f(IR^2)$ = ۲ − بُعد هسته = ۲ − ۰ = ۲

(۴) می‌دانیم بردارهای (۰, ۱) و (۱, ۰) یک پایهٔ متداول برای IR^2 می‌باشند، لذا هر بردار در IR^2 را می‌توان بر حسب ترکیب خطی این دو بردار نوشت:

$(3,4)=3(1,0)+4(0,1)$

$f(3,4)=f[3(1,0)+4(0,1)]$

$\xrightarrow{f\text{ خطی است}}3f(1,0)+4f(0,1)=$

$3(2,-1)+4(1,2)=(6,-3)+(4,8)=(10,5)$

(۵) سطر اول دترمینان سمت چپ را در a و سطر دوم را در b و سطر سوم را در c ضرب می‌کنیم.

$\begin{vmatrix}bc&1&a\\ac&1&b\\ab&1&c\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}abc&a&a^2\\abc&b&b^2\\abc&c&c^2\end{vmatrix}=$

$\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$

(۶) اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ مفروض باشد، در این صورت: $\lambda^2-(a+d)\lambda+|A|=0$ معادله‌ای است که ریشه‌های آن مقادیر ویژهٔ A بوده و $(a-\lambda)x+by=0$ امتدادهای ویژهٔ نظیر هر λ را مشخص می‌کند.

$A=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$

امتدادهای بردارهای ویژه به‌صورت زیر است:

$(۳-\lambda)x+۲y=۰$: $\lambda_۱=۱\Rightarrow y=-x$ ، $\lambda_۲=-۲\Rightarrow ۲y=-۵x$

حل مسأله‌های هندسه ۱ نظام‌جدید

(۱) زاویه‌های مجاور به هر ساق ذوزنقه مکمل یکدیگرند. بنابراین:

$۲\alpha-۵^\circ+\alpha+۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۱۵^\circ,\ \hat{D}=۶۵^\circ$

$\beta+۱۳۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\beta=۵۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۵۰^\circ$

(۲) درمثلث‌قائم الزاویهٔ ABB′، $BB'=۲\sqrt{۷۳}$، $AB=C$ و $AB'=\frac{C}{۲}$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACC′، $CC'=۴\sqrt{۱۳}$، $AC=b$ و $AC'=\frac{b}{۲}$ است؛ بنابراین داریم:

$BB'^۲=AB'^۲+AB^۲\Rightarrow ۲۹۲=\frac{b^۲}{۴}+c^۲$ (۱)

$CC'^۲=AC'^۲+CC'^۲\Rightarrow ۲۰۸=\frac{c^۲}{۴}+b^۲$ (۲)

$(۱)+(۲)\Rightarrow ۵۰۰=\frac{۵}{۴}(b^۲+c^۲),\ b^۲+c^۲=a^۲\Rightarrow$

$a^۲=۴۰۰\Rightarrow a=۲۰$ اندازهٔ وتر مثلث ABC

(۳) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس:

$۹۶\sqrt{۳}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow a^۲=۳۸۴\Rightarrow a=۸\sqrt{۶}\Rightarrow$

$۳a=۱۸\sqrt{۶}$ = محیط مثلث متساوی‌الاضلاع

(۴) با توجه به قضیهٔ تالس، داریم:

$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$ (۱)

اما از رابطهٔ $۵AD=۲DB$ نتیجه می‌شود:

$\frac{AD}{DB}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{AD}{AD+DB}=\frac{۲}{۲+۵}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{۲}{۷}$ (۲)

از رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow\frac{x+۱}{۳x+۵}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow ۷x+۷=۶x+۱۰$

$\Rightarrow x=۳\Rightarrow BC=۹+۵=۱۴$

(۵) هر دو پنج ضلعی منتظم متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحتهای آنها برابر مجذور نسبت تشابه، یعنی مجذور نسبت ضلعهای آنها می‌باشد. بنابراین اگر مساحتهای دو پنج ضلعی منتظم را S و S′ (S′ > S) و ضلعهای متناظر آنها را a و a′ بنامیم، داریم:

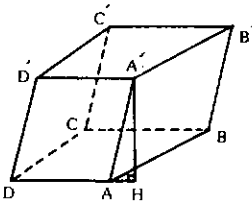
$S'=۱۶S\Rightarrow\frac{S'}{S}=۱۶,\ \frac{S'}{S}=(\frac{a'}{a})^۲\Rightarrow$

نسبت ضلعهای دو پنج ضلعی منتظم: $(\frac{a'}{a})^۲=۱۶\Rightarrow\frac{a'}{a}=۴$

(۶) ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با:

$A'H=AA'\sin۷۵^\circ=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}).\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

$\Rightarrow A'H=۴$

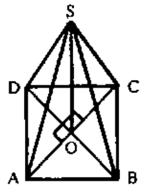


از آنجا:

ارتفاع × سطح قاعده = حجم متوازی السطوح ⇐

$۱۶(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^۲\times۴=۶۴(۸-۴\sqrt{۳})$ = حجم متوازی‌السطوح

(۷) اندازهٔ ضلع قاعده و ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم. با توجه به این که SA = ۱۰ و AC = ۱۲ است، داریم:



$AB=\frac{AC}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۲}}=۶\sqrt{۲},\ AO=\frac{AC}{۲}=۶,$

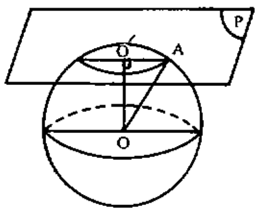
$SO=\sqrt{SA^۲-AO^۲}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸$

ارتفاع × سطح قاعده × $\frac{۱}{۳}$ = حجم هرم ⇐

$\frac{۱}{۳}(۶\sqrt{۲})^۲\times۸\Rightarrow$ = حجم هرم

۱۹۲ = حجم هرم

(۸) شعاع کره را بدست می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه OO′A داریم:



$OA=R=\sqrt{OO'^۲+O'A^۲}=\sqrt{۱۲^۲+۵^۲}=۱۳$

از آنجا حجم کره را محاسبه می‌کنیم.

$V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳\Rightarrow V=\frac{۴}{۳}\pi(۱۳)^۳\Rightarrow V=\frac{۸۷۸۸\pi}{۳}$

حل مسأله‌های ریاضی ۵

(۱) با توجه به این که $A=[۳,+\infty)$، $B=[-۴,۶]$، $C=[۱,+\infty)$ و $D=(-\infty,۱]$ است داریم:

الف. $A\cap C=[۳,+\infty),\ B\cup D=(-\infty,۶]\Rightarrow$

$(A\cap C)\cup(B\cup D)=[۳,+\infty)\cup(-\infty,۶]=(-\infty,+\infty)$

ب. $A\cup B=[-۴,+\infty),\ C\cup D=(-\infty,+\infty)\Rightarrow$

$(A\cup B)\cap(C\cup D)=[-۴,+\infty)\cap(-\infty,+\infty)=[-۴,+\infty)$

(۲) داریم:

$f(x)=ax+b,\ g(x)=x^۲+۲x+۴$

$(fog)(x)=f(g(x))=a(x^۲+۲x+۴)+b$

$=ax^۲+۲ax+۴a+b$

$(gof)(x)=g(f(x))=(ax+b)^۲+۲(ax+b)+۴\Rightarrow$

$(gof)(x)=a^۲x^۲+۲a(b+۱)x+b^۲+۲b+۴$

$\Rightarrow(fog)(x)+(gof)(x)$

$=a(a+۱)x^۲+۲a(b+۲)x+b^۲+۳b+۴a+۴$

با توجه به اینکه $(fog)(x)+(gof)(x)=-۶x+۴$ است، پس:

$$\begin{cases}a(a+۱)=۰\Rightarrow a=۰,\ a=-۱\\ ۲a(b+۲)=-۶\Rightarrow-۲(b+۲)=-۶\Rightarrow b+۲=۳\Rightarrow b=۱\\ b^۲+۳b+۴a+۴=۴\Rightarrow ۱+۳-۴+۴=۴\Rightarrow ۴=۴\end{cases}$$

بنابراین $a=-۱$ و $b=۱$ قابل قبول است.

(۳) با توجه به تعریف حد چپ، حد راست، و مقدار تابع در یک نقطه، داریم:

$$\begin{cases}۲+a=۵\\ b+c=۳\Rightarrow a=۳,\ b=۲,\ c=۱\\ \frac{a+c}{b+۲}=۱\end{cases}$$

(۴) داریم:

الف) $\lim_{x\to۷}\frac{x-۲-\sqrt{۲x+۱۱}}{\sqrt{x+۲}-۳}=\frac{۰}{۰}$

$=\lim_{x\to۷}\frac{((x-۲)^۲-۲x-۱۱)(\sqrt{x+۲}+۳)}{(x+۲-۹)(x-۲+\sqrt{۲x+۱۱})}$

$=\lim_{x\to۷}\frac{(x-۷)(x+۱)(\sqrt{x+۲}+۳)}{(x-۷)(x-۲+\sqrt{۲x+۱۱})}$

$=\lim_{x\to۷}\frac{(x+۱)(\sqrt{x+۲}+۳)}{x-۲+\sqrt{۲x+۱۱}}=\frac{۲۴}{۵}$

ب) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{۸}}\frac{\sin(۴x+\frac{\pi}{۲})}{\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۱۶}}=\frac{۰}{۰}$

$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۸}}\frac{\sin۴(x+\frac{\pi}{۸})}{\frac{۱}{۲}(x+\frac{\pi}{۸})}=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}=۸$

زیرا داریم: $\lim_{\alpha\to۰}\frac{\sin m\alpha}{\alpha}=m$

(۵) با توجه به $f'(x)=\lim_{\Delta x\to۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، داریم:

$f(x)=\sqrt{x^۲+۵x},\ f(x+h)=\sqrt{(x+h)^۲+۵(x+h)}$

$y'=\lim_{\Delta x\to۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to۰}\frac{\sqrt{(x+h)^۲+۵(x+h)}-\sqrt{x^۲+۵x}}{h}=\frac{۰}{۰}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx+5x+5h-x^2-5x}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}+\sqrt{x^2+5x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x+5)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}+\sqrt{x^2+5x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+2x+5}{\sqrt{(x+h)^2+5(x+h)}+\sqrt{x^2+5x}}$$

$$= \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+5}} = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5}}$$

(۶) داریم:

الف) $f(x)=\frac{(x-4)^2}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{2(x-4)(x+\sqrt{x})-(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x-4)^2}{(x+\sqrt{x})^2}$$

ب) $f(x)=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 4x}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\tan 4x \Rightarrow$

$$f'(x)=4(1+\tan^2 4x)$$

(۷) نقطهٔ برخورد نمودار این تابع بامحورعرضها(۳− و ۰) و نقطه(۴− ، ۱) نقطهٔ ماگزیمم یا مینیمم آن است، بنابراین:

$f(x)=ax^2+bx+c$

$(0\,,\,-3)\xrightarrow{\text{در تابع}} -3=c \quad (1)$

$(1\,,\,-4)\xrightarrow{\text{در تابع}} -4=a+b+c \quad (2)$

$f'(x)=2ax+b \Rightarrow 0=2a(1)+b \Rightarrow 2a+b=0 \quad (3)$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$a=1\,,\ b=-2\,,\ c=-3 \Rightarrow f(x)=x^2-2x-3$

حل مسأله‌های حسابان ۱

(۱): روش اوّل:

$y=x-\sqrt{x-2}$

$y=x-2-\sqrt{x-2}+2$

دو جملهٔ اول را به اتحاد تبدیل می‌کنیم:

$y=\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2$

$y=\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

کمترین مقدار $\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2$ صفراست پس کمترین مقدار y برابر $(\frac{7}{4})$ است بیشترین مقدار $\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند پس بیشترین مقدار y هم به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند. در نتیجه بُرد تابع: $\left\{y \mid y\geq\frac{7}{4}\right\}$

روش دوم:

$\sqrt{x-2}=x-y$

$\sqrt{x-2}\geq 0 \Rightarrow x-y\geq 0 \Rightarrow y\leq x$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$x-y=\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=x-2$

$x^2-(2y+1)x+y^2+2=0$

$\Delta=(2y+1)^2-4y^2-8\geq 0$

$4y^2+4y+1-4y^2-8\geq 0 \Rightarrow 4y\geq 7 \Rightarrow y\geq\frac{7}{4}$

بردتابع $=\left\{y \mid y\geq\frac{7}{4}\right\}$

روش سوم:

$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2\sqrt{x-2}-1}{2\sqrt{x-2}}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x-2}=1$

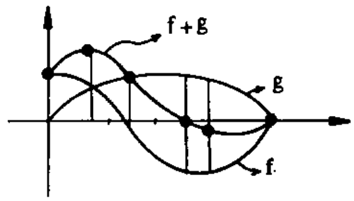
عرض مینیمم $\quad 4x-8=1 \Rightarrow x=\frac{9}{4} \Rightarrow y=\frac{7}{4}$

$x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty \Rightarrow y\geq\frac{7}{4}$

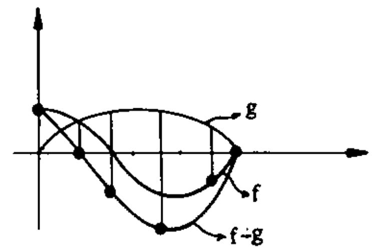
بردتابع $=\left\{y \mid y\geq\frac{7}{4}\right\}$

(۲):

برای رسم تابع به معادله $y=f(x)+g(x)$ باید از هر نقطه روی محور xها رابطی موازی محور عرضها رسم کنیم تا به نمودار f برسیم. سپس از این نقطه به اندازه عرض نقطه هم طول نمودار g به بالا رویم.



برای رسم تابع به معادلهٔ $y=f(x)-g(x)$، باید از هرنقطهٔ روی محور xها، رابطی موازی محور عرضها رسم کنیم تا به نمودار f برسیم، سپس از این نقطه به اندازهٔ عرض نقطهٔ هم طول g به پایین بیاییم.



(۳): روش اوّل:

فرض می‌کنیم آن ریشهٔ معادلهٔ x باشد. پس $x=5-2\sqrt{3}$ باید طرفین آن را به توان ۲ برسانیم، چون می‌خواهیم معادله درجه دوم حاصل ضرایب گویا داشته باشد، باید بنویسیم: $x-5=-2\sqrt{3}$ سپس طرفین این رابطه را به توان ۲ برسانیم:

$\Rightarrow x^2-10x+25=12 \Rightarrow x^2-10x+13=0$

روش دوم:

اگر معادلهٔ درجه دومی با ضرایب گویا، یک ریشه $(5-2\sqrt{3})$ داشته باشد، حتماً باید ریشهٔ دیگرش $(5+2\sqrt{3})$ باشد تا S یعنی مجموع ریشه‌ها و P یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها رادیکالی نباشد.

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=5-2\sqrt{3}\\ x''=5+2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=10\\ P=25-12=13\end{cases}$$

$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-10x+13=0$

(۴): برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس تابع f، باید x را از تابع اصلی پیدا کرد، سپس جای x و y را با هم عوض کرد.

$y=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$

$y+1=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1$

$y+1=(\sqrt{x}+1)^3 \Rightarrow (\sqrt{x}+1)=\sqrt[3]{y+1}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt[3]{y+1}-1 \Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+1}-1)^2$

حال، جای x وy را با هم عوض می‌کنیم.

$\Rightarrow y=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2$

(۵)

$|f(x)-3|<\frac{1}{100} \Rightarrow |4x-1-3|<\frac{1}{100}$

$\Rightarrow |4x-4|<\frac{1}{100} \Rightarrow 4|x-1|<\frac{1}{100}$

$\Rightarrow |x-1|<\frac{1}{400} \Rightarrow -\frac{1}{400}<x-1<+\frac{1}{400}$

$1-\frac{1}{400}<x<1+\frac{1}{400} \Rightarrow \frac{399}{400}<x<\frac{401}{400}$

(۶) چون $C\neq 0$، صورت و مخرج تابع را بر C تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$

اگر $\frac{a}{c}=m$ و $\frac{b}{c}=n$ و $\frac{d}{c}=k$ فرض شوند، داریم:

$y=\frac{mx+n}{x+k}$

محل تلاقی مجانبها $O'\left|\begin{matrix}-k=1\\ m=2\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases}\boxed{k=-1}\\ \boxed{m=2}\end{cases}$

$A\left|\begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{درمعادلهٔ منحنی}} -1=\frac{0+n}{0+k} \Rightarrow -1=\frac{n}{k}$

$\Rightarrow -1=\frac{n}{-1} \Rightarrow \boxed{n=1} \Rightarrow y=\frac{2x+1}{x-1}$ معادله تابع

رسم منحنی تابع: به معادلهٔ $y=\frac{2x+1}{x-1}$

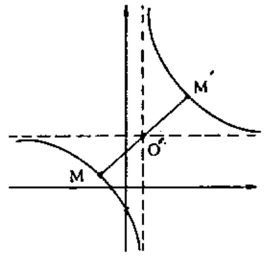
$y=2$: مجانب افقی $\qquad x=1$: مجانب قائم

$y'=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}<0$

$x=0 \Rightarrow y=-1\ ,\ y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	y
قائم {۱	$\pm\infty$
$\pm\infty$	۲} افقی
0	-1
$-\frac{1}{2}$	0

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		−	⋮	−	⋮	−	⋮	−	
y	2	↘	⋮	↘	−1	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘	2



حل قسمت آخر مسأله (۶) $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A\Big|_{-1=f(x_0)}^{0=x_0}$

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x_0)=\frac{-3}{1}=-3$$

معادلهٔ خط مماس برمنحنی در نقطهٔ $A\Big|_{f(x_0)}^{x_0}$ بصورت زیر است:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=-3(x-0)-1 \Rightarrow \boxed{y=-3x-1}$$

معادلهٔ خط قائم بر منحنی درنقطهٔ $A\Big|_{f(x_0)}^{x_0}$ بصورت زیر است:

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=+\frac{1}{3}(x-0)-1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}x-1}$$

حل مسأله‌های حساب دیفرانسیل (۱)

حل مسأله (۱)

اولاً: فرض می‌کنیم: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (n^2-2n)=l \\ n\to+\infty \end{cases}$

پس باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند M، $M\in N$ وجود دارد که برای هر $n>M$ داشته باشیم $\left|n^2-2n-l\right|<4$ و می‌نویسیم:

$$\left|n^2-2n-l\right|<4 \Rightarrow n^2-2n-L<4 \Rightarrow n^2-2n<L+4$$

$$n\to\infty$$

$$\Rightarrow (n-1)^2-1<l+4 \Rightarrow (n-1)^2<l+4+1$$

$$\Rightarrow n-1<\sqrt{l+4+1} \Rightarrow n<\sqrt{l+4+1}+1$$

و این غیرممکن است، زیرا وقتی، $n\to\infty$، n کراندار نیست.

ثانیاً:

$$\lim_{n\to+\infty} (n^2-2n)=+\infty$$

باید ثابت کنیم برای هر $N>0$، عددی مانند M وجود دارد که

$$n>M \Rightarrow n^2-2n>N$$

می‌نویسیم:

$$n^2-2n>N \Rightarrow (n-1)^2-1>N \Rightarrow (n-1)^2>N+1$$

$$\Rightarrow n-1>\sqrt{N+1} \Rightarrow n>\sqrt{N+1}+1$$

اگر $M=\sqrt{N+1}+1$ فرض شود، آنگاه برای هر $n>M$ داریم $n^2-2n>N$.

(۲)

$$\frac{2}{1-4K^2}=\frac{-2}{4K^2-1}=\frac{-2}{(2K+1)(2K-1)}=\frac{A}{2K+1}+\frac{B}{2K-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{4K^2-1}=\frac{2AK-A+2BK+B}{4K^2-1}$$

$$=(2A+2B)K+(B-A)\equiv-2 \Rightarrow \begin{cases}2A+2B=0\\ B-A=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

درنتیجه:

$$\frac{2}{1-4K^2}=\frac{1}{2K+1}-\frac{1}{2K-1}$$

$$K=1 \Rightarrow S_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{1}$$

$$K=2 \Rightarrow S_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$$

$$K=3 \Rightarrow S_3=\frac{1}{7}-\frac{1}{5}$$

....

$$K=K \Rightarrow S_K=\frac{1}{2K+1}-\frac{1}{2K-1}$$

درنتیجه:

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2}{1-4K^2}=\frac{1}{2K+1}-1 \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty}\frac{2}{1-4K^2}=-1$$

پس سری همگرا به عدد (۱−) است.

(۳)

باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $\delta>0$ بطوری که

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+1}{x^2-4x+5}-1\right|<\varepsilon$$

می‌نویسیم:

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2-4x+5}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1+4x-5}{x^2-4x+5}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{4|x-1|}{\left|x^2-4x+5\right|}<\varepsilon$$

می‌دانیم مینیمم x^2-4x+5 برابر (۱) است:

اگر $\frac{4|x-1|}{1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{4|x-1|}{\left|x^2-4x+5\right|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{4}$$

(۴)

الف: مجانب قائم:

$$y\to\infty \Rightarrow \frac{t+2}{t(t+1)}\to\infty \Rightarrow t(t+1)\to 0$$

درنتیجه: $\begin{cases} t\to 0 \Rightarrow x\to\infty \\ t\to -1 \Rightarrow x\to\frac{3}{2}\end{cases}$

پس خط به معادله $x=\frac{3}{2}$ معادله مجانب قائم منحنی تابع است.

ب: مجانب افقی:

$$x\to\infty \Rightarrow \frac{t-2}{t(t-1)}\to\infty \Rightarrow t(t-1)\to 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t\to 0 \Rightarrow y\to\infty \\ t\to 1 \Rightarrow y\to\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس خط به معادلهٔ $y=\frac{3}{2}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

ج: می‌دانیم شرط لازم وجود مجانب مایل در یک منحنی به معادله $y=f(x)$ آن است که $\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$

باید (t)ای پیدا کنیم تا باعث ایجاد این شرط شود، ضمن تعیین مجانبهای قائم و افقی به این t برخوردیم و آن $t\to 0$ یعنی اگر $t\to 0$ آنگاه $\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$.

چنانچه معادلهٔ مجانب مایل بصورت $y=mx+h$ باشد داریم:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{t+2}{t(t+1)}}{\frac{t-2}{t(t-1)}}=\lim_{t\to 0}\frac{t(t-1)(t+2)}{t(t+1)(t-2)}=$$

$$\frac{-2}{-2} \Rightarrow \boxed{1=m}$$

$$h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t+2}{t(t+1)}-\frac{t-2}{t(t-1)}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t-1)(t+2)-(t+1)(t-2)}{t(t^2-1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t(t^2-1)}=\frac{2}{-1} \Rightarrow \boxed{-2=h} \Rightarrow \boxed{y=x-2}$$

معادله مجانب مایل

(۵) اگر $A'\Big|_{2}^{10}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه $A\Big|_{10}^{2}$ روی منحنی تابع f است، پس:

$$y=10 \Rightarrow 10=x^3+x \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow A\Big|_{10}^{2}\ ;A'\Big|_{2}^{10}$$

$$(f^{-1})'_{(10)}=\frac{1}{f'_{(2)}}=\frac{1}{3x^2+1\big|_{x=2}}=\frac{1}{13}=\underset{\text{مماس در }A'}{m} \Rightarrow \underset{\text{قائم}}{m}=-13$$

$$y-y_{A'}=\underset{\text{قائم}}{m}(x-x_{A'}) \Rightarrow y-2=-13(x-10)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-13x+132}$$

(۶)

$$\text{هزینه متوسط}=\frac{C(x)}{x}=\frac{2000+1/2x+30\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$x=3375 \Rightarrow \frac{C(x)}{x}=\frac{2000+1200+30\times\sqrt[3]{(3375)^2}}{3375}$$

هزینه متوسط

$$=\frac{3200+30\sqrt[3]{15^6}}{3375}=\frac{3200+30\times225}{3375}=2/94$$

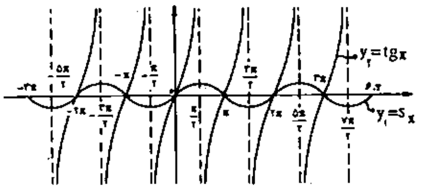
$$\text{هزینهٔ نهایی}=C'(n)=1/2+30\times\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$C'(3375)=1/2+\frac{30\times2}{3\sqrt[3]{3375}}=1/2+\frac{30\times2}{3\times15}=2/53$$

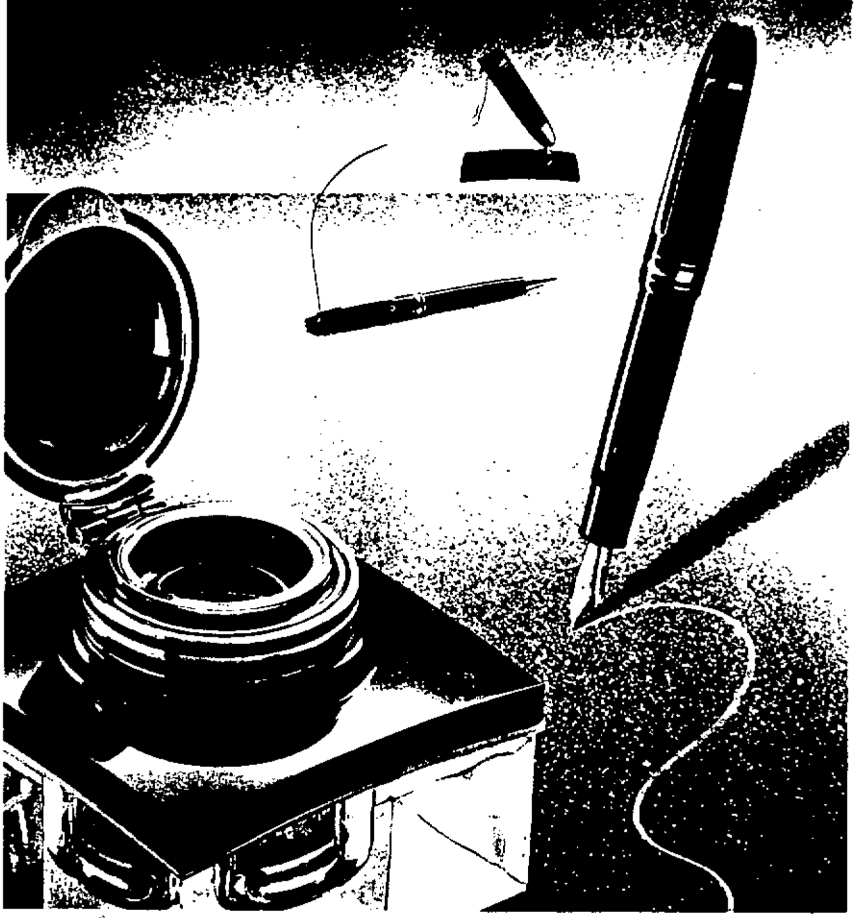
هزینه نهایی

(۷)

باید دو تابع به معادله‌های $y_1=\sin x$ و $y_2=\operatorname{tg}x$ را رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم تعداد نقاط تقاطع بی‌شمار است، پس معادله $\sin x-\operatorname{tg}x=0$ بی‌شمار ریشه دارد.



جوابهای تفریح اندیشه



پاسخ ۱:

پاسخ: معمای اول شاید «خیلی ساده» باشد، از قوطی با برچسب «ق ـ س» یک لوبیا بردارید. این تنها انتخابی است که باید انجام دهید. هر دو لوبیای داخل این قوطی که یک رنگ‌اند به این ترتیب مشخص می‌شوند : برچسب «ق ـ س» را بردارید و آن را با برچسب صحیحی که از یکی از دو قوطی دیگر برداشته‌اید عوض کنید. اکنون برچسبهای این دو قوطی را تعویض کنید. در این حال هر سه قوطی دارای برچسب صحیح‌اند.

توجه داشته باشید که لوبیاها نمی‌توانسته‌اند به‌صورت یک قرمز و یک سیاه در هر قوطی توزیع شده باشند، زیرا در این صورت برچسب «ق ـ س» صحیح می‌شود.

معمای دوم یکی دیگر از آن «پارادوکسها»ی عالی احتمال را مطرح می‌کند که از قرار معلوم منطق انکارناپذیر در آنها درواقع موجه نماست. در حقیقت احتمال اینکه لوبیای دوم قوطی نیز قرمز باشد دو برابر احتمال سیاه بودن آن است.

کار را با بیرون آوردن اولی آغاز می‌کنیم. می‌توانستیم با احتمالی مساویِ لوبیایی سیاه بیرون بیاوریم. در این صورت بی‌توجه به رنگ بیرون آورده شده احتمال بیرون آوردن لوبیای مورد نظر از قوطی «همرنگ» («ق ـ ق» یا «س ـ س») دو برابر احتمال بیرون آوردن آن از قوطی «مخلوط» («ق ـ س») است.

طریق دیگر پرداختن به این مسأله، این استدلال است که احتمال برداشته شدن لوبیای قرمز از قوطی «ق ـ ق» دو برابر بیرون آمدن آن از قوطی «ق ـ س» است، زیرا در اولی دو قرمز و در دومی تنها یک قرمز وجود داشته است.

اگر هنوز پاسخ داده شده را (یعنی احتمال ۲ در ۳ برای اینکه لوبیای دوم نیز قرمز باشد) را نپذیرفته‌اید سه لیوان و شش مهره برداشته، ده الی بیست بار آزمایش کنید.

در ضمن، گرچه استدلال ارائه شده در صورت معما محققاً متداولترین پاسخ داده شده است، تنها پاسخ خطایی که تاکنون شنیده‌ام نیست. زمانی مهندسی برجسته با این جواب شگفت‌زده‌ام کرد که، از آنجا که بعد از بیرون آوردن لوبیا پنج لوبیای نامشخص، ۳ سیاه و ۲ قرمز، موجودند، احتمال اینکه لوبیای دوم سیاه باشد $1\frac{1}{2}$ است.

پاسخ ۲:

پاسخ: از دو گزارهٔ اول یکی راست و دیگری دروغ است. گزارهٔ «ت» نمی‌تواند بدون اینکه متناقض با خودش باشد، راست باشد. گزارهٔ آخر، چه «ب» راست باشد چه نه، نمی تواند بدون نقض کردن «ب» یا «ت» دروغ باشد. نتیجه : شخص بسیار منطقی‌ای هستید، نتیجه‌ای تملق‌آمیز، اما آیا راست است؟

فرض می‌کنیم گزارهٔ «ت» به دروغی آشکار چون «سیاه سفید است» تبدیل شود. در این صورت درست مثل منطقیون یونانی زمانی که اپیمنیوس «Epimenides of Crete» فریاد زد:«تمام کرتیها دروغگویند» با پارادوکس مواجه می‌شویم.

در راه غلبه بر این پارادوکسها و آوردن منطق در دستگاهی ریاضی و صوری کارهای بسیاری توسط متفکران جدیدی چون **راسل و وایتهد** به عمل آمده است. از **گودل** اصل عدم قطعیت «Uncertainty Principle» را داریم که بر این است که دستگاهی که با خودش سر و کار دارد با پارادوکس مواجه می‌شود، و اصلهایش را نمی‌توان در خود آن دستگاه به اثبات رساند.

در این صورت پاسخ به معمای مورد نظر این است که راستی گزارهٔ «ت» غیرقطعی است. **ویلیام جیمز** نوشته است : «اندیشه‌های راست آنهایی هستند که بتوان آنها را درک کرد، اعتبار داد، تأیید کرد و به اثبات رساند.»

پاسخ ۳:

چون سهم هر نفر ۱۶ تومان است بنابراین قیمت کل غذاهای سفارش داده شده ۴۸=۳×۱۶ تومان می‌باشد. از طرفی مجموع ظرفهای سفارش داده شده، ۸=۳+۵ ظرف و قیمت هر کدام نیز برابر می‌باشد، پس قیمت هر ظرف غذا ۶=۸:۴۸ تومان است.

چون مهرداد ۵ ظرف سفارش داده بود، قبلاً باید ۳۰=۵×۶ تومان می‌پرداخت که اگر از آن سهم مساوی ۱۶ تومان را برداریم می‌شود ۱۴=۱۶−۳۰ تومان یعنی مهرداد باید ۱۴ تومان از علی بگیرد. همین‌طور آرش قبلاً ۱۸=۶×۳ تومان باید می‌پرداخت که اگر ۱۶ تومان را از آن کم کنیم می‌شود ۲=۱۶−۱۸ تومان، بنابراین آرش هم ۲ تومان باید از علی بگیرد. به عبارت دیگر از ۱۶ تومانی که علی بابت غذایش پرداخته، ۱۴ تومان به مهرداد و ۲ تومان را به آرش داده است.

پاسخ ۴:

در ساعت ۱۱ هر کدام از آنها به اندازهٔ یک ساعت راهپیمایی تا میهمانخانه با هم فاصله دارند، یعنی مهرداد ۶کیلومتر و دوستش ۵/۵کیلومتر. بنابراین فاصلهٔ این دو از یکدیگر در ساعت ۱۱ برابر است با ۱۱/۵=۵/۵+۶کیلومتر.

Borhan
Vol. 7 No. 2
Serial numbers: 22 Autumn 1997

In the name of God

- **Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications.**

Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

ابوالجود

ابوالجود محمدبن لیث از ریاضیدانان مسلمانِ ایرانی نیمهٔ دوم قرن چهارم هجری و شاگرد صاغانی و معاصر با بیرونی بوده و با او و عده‌ای دیگر از ریاضیدانان زمان خود و از جمله سجزی رابطهٔ علمی داشته است.

از نوشته‌های او چنین برمی‌آید که پس از فراغت از تحصیل، درس و مدرسه را رها کرد و ظاهراً در قلمرو پادشاهان سامانی یعنی خراسان و ماوراءالنهر به **اَعمال سلطانی** (کارهای اداری دربار) مشغول بوده و در عین حال به ریاضیات می‌پرداخته است.

بیرونی در قانون مسعودی ابوالجود را از ریاضیدانان برجستهٔ زمان خود خوانده و در کتاب «استخراج‌الاوتار» به یکی از مقالات وی درباره حلّ یک مسأله هندسی اشاره کرده است.

خیام پس از ذکر دو **صِنف** معادلهٔ منسوب به ابوالجود خطای او را در حل معادلهٔ $x^3+a=cx^2$ به‌وسیلهٔ قطوع مخروطی به تفصیل شرح داده است.

یوشکویچ، با درنظرگرفتن مطالبی که خیام دربارهٔ ابوالجود نوشته، نتیجه گرفته است که: چنین به‌نظر می‌آید که ابوالجود یکی از نخستین کسانی است که کوشیده‌اند تا براساس روشهای قدما یک نظریه کلی برای حل معادلات درجهٔ سوم بیابند.

ابوالجود در حل مسألهٔ تثلیث زاویه و تقسیم دایره به هفت و نه جزء متساوی، تحقیقاتی به‌عمل آورده است. وی در رساله‌ای که در جواب سؤالات ابوریحان بیرونی دربارهٔ چهار مسأله هندسی نوشته است حل مسأله سوم یعنی چگونگی تقسیم دایره به نه جزء متساوی را به حل معادلهٔ زیر برگردانده است:

$$x^۳ + ۱ = ۳x$$

در همان رساله ابوالجود حل یک مسألهٔ هندسی دیگر (سؤال اول بیرونی) را به حل یک معادلهٔ درجهٔ چهارم برگرداند، و آن را به وسیلهٔ تقاطع یک سهمی و یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرده است.

ابوالجود چند رساله در جواب مسایلی که برای او مطرح می‌کرده‌اند به قرار زیر نوشته است:

۱- بیرونی راه حل چهار مسأله هندسی را از ابوالجود خواسته بود و او رساله‌ای را در جواب بیرونی نوشته است. نسخهٔ اصلی این رساله در لیدن موجود است.

سؤال اول بیرونی این است: پاره‌خط BC و نقطه A در خارج آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطه A خط راستی رسم کنیم که BC را در نقطه D قطع کند، به وجهی که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$AB\times BC+\overline{BD}^۲=\overline{BC}^۲$$

ابوالجود این مسأله را به‌وسیله تقاطع یک سهمی و یک هذلولی متساوی‌القطرین حل کرده است.

سؤال دوم بیرونی این است: اگر کسی گفت که وتر یک هفتم دایره مساوی با نصف وتر یک سوم دایره است، چگونه عدم امکان این را ثابت کنیم؟

سؤال سوم دربارهٔ محاسبه ضلع نه ضلعی منتظم محاطی از راه جبر است.

ابوالجود این مسأله را به حلّ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳ + ۱ = ۳x$ برگردانده است.

سؤال چهارم بیرونی مربوط است به محاسبهٔ وتر کمان یک درجه از دایره.

۲- جواب ابوالجود به مسأله‌ای که توسط ابوجعفرخازن طرح شده است.

مسأله این است: مثلث ABC و نقطه D مفروض است. ضلع BC را از دوطرف امتداد می‌دهیم و می‌خواهیم روی آن نقطه‌ای مانند M بیابیم که اگر آن را به D وصل کنیم تا اضلاع AB و AC را در نقاط P و Q قطع کند، نسبت $\frac{QM}{PQ}$ مساوی با عدد معلومی شود.

۳- جواب ابوالجود به مسأله‌ای است که توسط سجزی طرح شده است.

مسأله این است: ترسیم خط راستی که از نقطهٔ معین بگذرد و سه خط راست متقارب را قطع کند، به‌نحوی که برخی از پاره‌خطهای حاصل دارای نسبت معینی باشند.

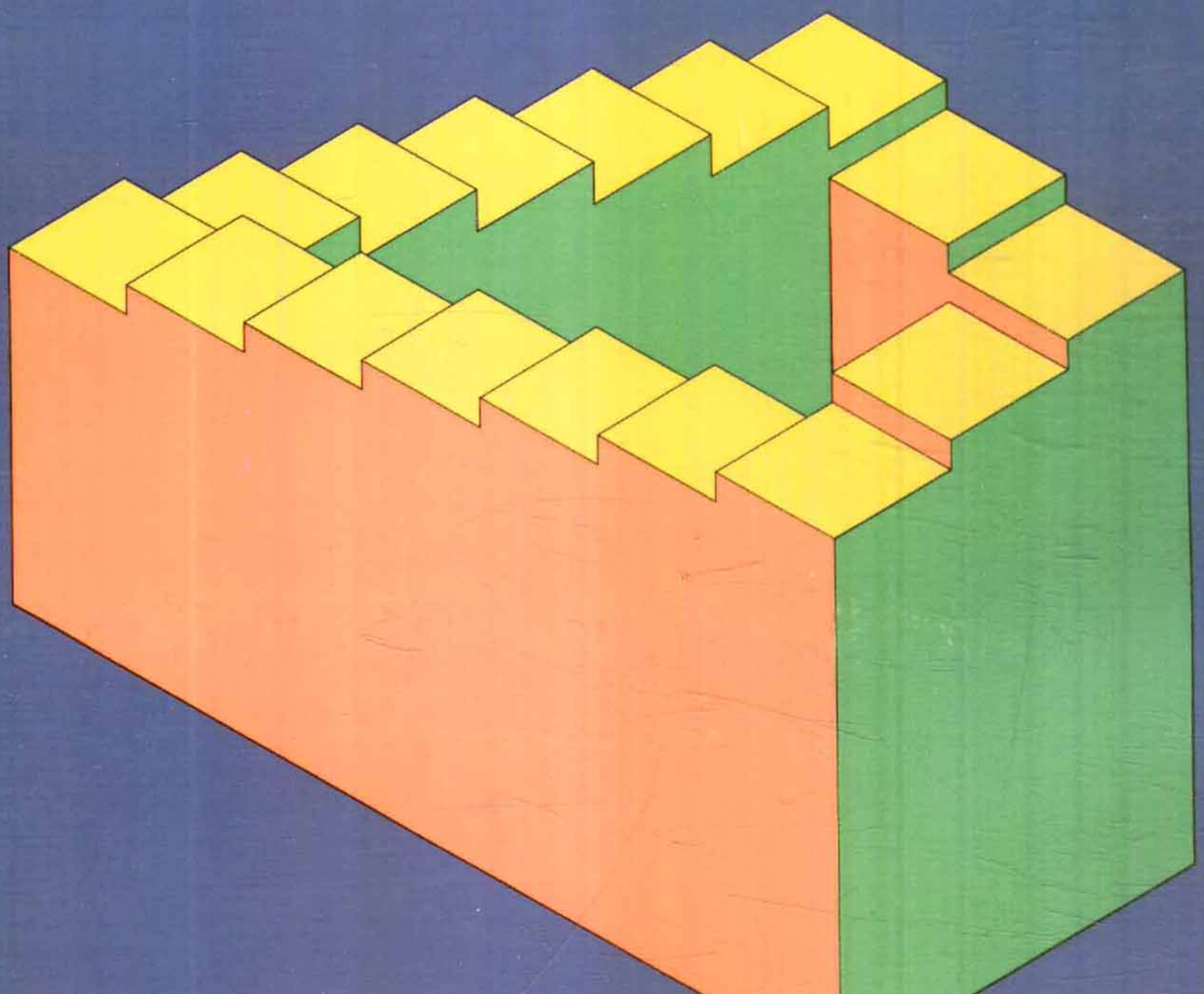
(برگرفته از کتاب زندگینامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی مرکز نشر دانشگاهی)

مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۳



سال هفتم، شمارهٔ سوم، زمستان ۱۳۷۶، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ▢ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
سردبیر: حمیدرضا امیری ▢ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ▢ حمیدرضا امیری ▢ محمدهاشم رستمی ▢ احمد قندهاری ▢ میرشهرام صدر ▢ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ▢ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ▢ طراح گرافیک: امیر بابایی ▢ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، زمستان ۱۳۷۶، شمارهٔ سوم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۸۸۴۹۹۰۴، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

زمستان سال ۵۷، روزهای عشق و شور و ایثار بود. روزهای شکوفایی انقلاب در آمیختگی خون و شمشیر.

آن روزها مدارس نیمه تعطیل بود، کوچه‌ها، خیابانها و میادین، مدرسهٔ عشق بود و کلاس درس و امتحان و شهیدان شاگردهای اول این مدارس بودند هم آنان که «شاهد بر باطن و حقیقتِ عالمند و هم آنان که به دیگران حیات می‌بخشند.»

هم آنان که آسایش و آرامش امروز ما را با خونشان تضمین کردند و حقّی بزرگ بر دوش ما دارند، مبادا خونشان را پایمال کنیم، مبادا نتیجهٔ جانبازیها و فداکاریهایشان را به نااهلان بسپاریم، مبادا شانه خالی کنیم!

در وصیّت‌نامهٔ یکی از این شهیدان والامقام به خانواده‌اش می‌خواندم:

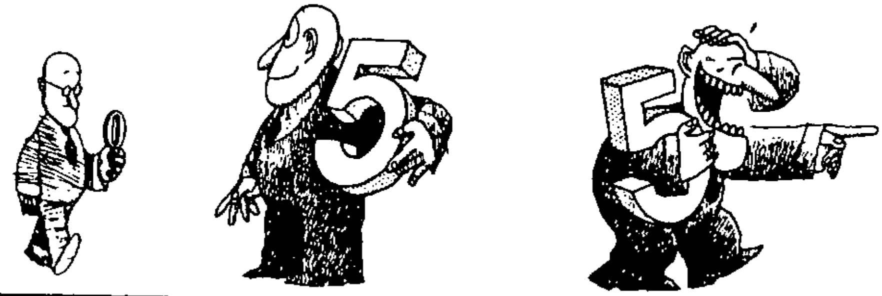
«وصیت می‌کنم به برادرانم که با صبر و استقامت در مسائل و گرفتاریها و با تقوا و اقامهٔ نماز و امر به معروف و نهی از منکر اسلام را و هدفِ انقلاب عزیزمان را زنده نگه دارند. برادرانم، نگاهتان را حفظ کنید و قرآن زیاد بخوانید و روایات اهل بیت را برای هم بازگو کرده به آنها عمل کنید. وصیّت می‌کنم به خواهرانم که حفظ حجاب را مقدم بر هر اموری قرار داده و پاسدار خونِ شهیدان باشید و فرزندانی که بتوانند سربازان امام‌زمان(عج) باشند تربیت کنید...»

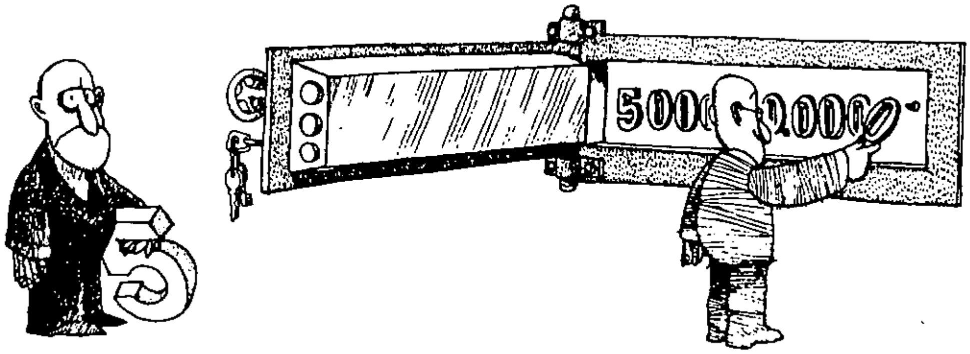
عزیزان دانش‌آموز آیا وصیّت آن شهید بزرگوار و روی سخن او با همهٔ ما نیست؟ آیا برادرم، نگاهت و خواهرم، حجابت را حفظ می‌کنی تا پاسدار خون او باشی؟

به بهار نگاه‌کن و به طبیعت که چگونه تبلوری از معاد را به تصویر می‌کشد، این معاد طبیعت یادآوری و نوید معاد انسان در آخرت است آنجا که با تمام انبیاء و اولیاء الهی و امامان علیهم السلام و شهیدان روبرو خواهیم شد. پس چنان حرکت کنیم و به وصیّت آنها عمل کنیم که خدای ناکرده سر به زیر و شرمنده در رخسار گلگونشان نگاه نکنیم. ـ ان شاءا... ـ

فرارسیدن بهار و سال نو را به همهٔ شما پاسداران و سنگربانانِ ارزشهای اسلامی تبریک می‌گوییم و از خداوند، موفقیت در تمامی مراحل زندگی، بخصوص تحصیل را برای شما عزیزان آرزومندیم.

و السلام ـ سردبیر





شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۳)

• پرویز شهریاری

راهنمایی‌هایی برای حل مسأله‌ها

برای حل یک مسأله ریاضی ــ اگر مضمونی تازه داشته باشد و در ردیف تمرین‌های سادهٔ پایان یک درس نباشد ــ نمی‌توان روش یا روشهای کلی پیدا کرد. در زندگی روزانه و ضمن فعالیت‌های اجتماعی هم، اغلب به «مسأله‌هایی» برمی‌خوریم که برایمان تازگی دارد و برای انتخاب مسیر حرکت آیندهٔ خود، نمی‌توانیم بر «نمونه‌های» آزمایش شده‌ای تکیه کنیم. در این‌گونه موردها، اغلب به یاری دیگران هم نمی‌توانیم متکی باشیم، چرا که «دشواری» مربوط به خود ماست و تنها خودمان هستیم که از زیر و بم آن آگاهیم و دلیل‌های پیدایش آن را می‌شناسیم. بنابراین، چاره‌ای جز این نداریم که با تکیه بر تجربهٔ زندگی، آگاهی‌های علمی، مقایسه و تجزیه و تحلیل راه‌های گوناگون و به کار گرفتن اندیشه، خرد و استعداد خود، راه و روش بهینه را بیابیم. برای حل مسأله‌های ریاضی هم، باید از همین راه رفت و نباید منتظر «دستورها» و «نسخه‌های شفابخش» بود. چنین دستورها و نسخه‌هایی که بتوان به یاری آنها از عهدهٔ حل هر مسأله برآمد وجود ندارند.

با همهٔ اینها، می‌توان از راهنمایی‌هایی سود برد. بویژه برای کسانی که به طور دایم و مستمر با حل مسأله سر و کار دارند (و نه برای کسانی که، به تصادف و گاه‌به‌گاه، می‌خواهند نیروی ذهنی خود را با حل یکی دو مسأله به آزمایش بگذارند)، این راهنمایی‌ها و توصیه‌ها می‌تواند سودمند باشد. ضمن برخورد با یک مسأله، به نکته‌ای توجه داشته باشید: اگر با مسأله‌ای جدی و ناآشنا روبه‌رو هستید، منتظر موفقیت سریع نباشید، از میدان در نروید و خیلی زود ناامید نشوید. گاهی برای رسیدن به راه‌حل درست و منطقی لازم است مدتها روی یک مسأله کار کنید؛ در آغاز، حالتهای خاص و ساده را بررسی کنید، مسأله‌های کم و بیش مشابه را به یاد آورید و راه‌ها و روشهای گوناگون را به کار بگیرید. در این صورت، اگر هم سرانجام نتوانید مسأله را حل کنید، نگران نشوید. همین که مدتها روی یک مسأله اندیشیده‌اید و از جانب‌های مختلف به آن نظر کرده‌اید، می‌تواند در رشد ذهن ریاضی شما تأثیری جدی داشته باشد. **به تأکید، این مطلب را (که می‌تواند قانون اصلی یادگیری باشد) تکرار می‌کنم: اگر روی یک مسألهٔ**

ریاضی، به اندازهٔ کافی کار کنید، حتی اگر موفق به حلّ آن نشوید، برای شما خیلی سودمندتر از آن است که حل ده‌ها مسأله را از روی کتابهای حل مسأله بیابید و یا راه حل آنها را پیش از آن که توان خود را آزموده باشید، از دیگران بپرسید. اندیشهٔ آدمی، ضمن برخورد با دشواریها و چاره‌جویی برای رفع آنها، تکامل می‌یابد و نیرومند می‌شود، نه با شنیدن یا دیدن گفته‌ها و حادثه‌ها، آگاهی‌های روایی و یا مشاهده‌ای سودمندند، ولی مثل ابزار می‌مانند ؛ موضوع اصلی، روش استفاده از این ابزار است، چیزی که بدون آن، هیچ نتیجه عملی حاصل نمی‌شود. برای این که در حل مسأله‌های ریاضی، کارآمد باشید، تا آن‌جا که ممکن است عصاها و دستگیره‌هایی مثل کتابهای حل مسأله و دبیر خصوصی را کنار بگذارید، تلاش کنید روی پای خودتان بایستید و از ذهن و اندیشه و آگاهی‌های خودتان بهره ببرید. وقتی با عصا راه بروید و یا همیشه دستتان به «نرده» راهنما باشد، آن وقت با جدا شدن از عصا و نرده، به زمین می‌خورید. عصا و نرده را برای حالتهای اضطراری و برای زمانی نگه دارید که پیش از آن، از تمامی نیروی اندیشهٔ خود برای پیدا کردن راه «عبور از بن‌بست» را مورد استفاده قرار داده باشید.

داستان کشف بزرگ **پروفسور نیکلای ولادیمیرورویچ یفیموف**، ریاضیدان روزگار ما بسیار شنیدنی است. او از سالهای جوانی و وقتی که هنوز در دبیرستان و سپس دانشگاه تحصیل می‌کرد، روی مسأله‌ای کار می‌کرد. مسأله‌ای که توجه او را به خود جلب کرده بود، بسیار جالب و پر کشش بود : آیا می‌توان برای مفهومها و قضیه‌های هندسهٔ نااقلیدسی، و بویژه «هندسهٔ لباچوسکی»، تعبیری روشن در هندسهٔ اقلیدسی پیدا کرد؟ آیا می‌توان سطح‌هایی در هندسهٔ اقلیدسی ساخت که همهٔ ویژگی‌های یک «سطح لباچوسکی» را داشته باشند؟ پیش از او، ریاضیدانانی مثل «بلترام» و «هیلبرت» روی این مسأله کار کرده بودند و به نتیجه‌هایی رسیده بودند. ولی مسأله، به صورت کلی خود، همچنان حل نشده باقی مانده بود. مسألهٔ دشواری بود. ولی دشواری راه، یفیموف را از تلاش باز نداشت. کوششهای نخستین به جایی نرسید، او حتی نتوانست برای حل این مسأله مسیری پیدا کند. پذیرفتن نتیجه‌گیریهای هیلبرت کافی نبود، سایر روشهای شناخته شده هم توانایی لازم را نداشتند. یفیموف ناچار شد، از حملهٔ مستقیم دست بردارد و به محاصرهٔ طولانی، که به حوصلهٔ زیادی نیاز داشت بپردازد.

جستجو و اندیشه، ناامیدی و امید، شکستها و پیروزیهای موضعی، نزدیک به سی سال طول کشید، دانشمند جوان و تازه کار، به استاد عالی مقامی با شهرت جهانی تبدیل شد، ولی آرزوی دوران جوانی، همچنان به قوت خود باقی بود و در برابر مسألهٔ مورد نظرش تسلیم نمی‌شد. یفیموف، بارها و بارها حل مسأله را از سرگرفت و در این راه نتیجه‌های هندسی جالب و با ارزش تازه‌ای هم به‌دست آورد، ولی هدف اصلی، همچنان تسخیرناپذیر می‌نمود.

به تدریج تجربه‌ها روی هم جمع می‌شد، همهٔ راه‌حلهای ممکن مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت و درنتیجه اعتماد او به کار بیشتر می‌شد : هدف، در محاصرهٔ کامل قرار گرفته بود و سرانجام در سال ۱۹۶۱ میلادی حملهٔ نهایی آغاز شد.

و این بار، پیروزی کامل به دست آمد. کار سخت و پژوهش دراز مدت، صدها صفحه محاسبه و استدلال پیچیدهٔ ریاضی بی‌ثمر نماند و در بهار سال ۱۹۶۳ میلادی، نتیجهٔ دیر انتظار حاصل شد : او ثابت کرد که بسیاری از سطح‌های منحنی را نمی‌توان از فضای لباچوسکی به فضای اقلیدسی انتقال داد. مسأله‌ای که نزدیک به صد سال پیش به وسیلهٔ بلترام و هیلبرت طرح شده بود، در حالت کلی خود به وسیلهٔ یفیموف حل شد. در ضمن، یفیموف راز سطح‌های با انحنای منفی را هم آشکار کرد. ما در دور و بر خود، در هر گام، با این گونه سطح‌ها روبه‌رو می‌شویم : پرده‌های تاب‌دار، پروانهٔ هلیکوپتر، شکاف توربینها و برخی از قطعه‌های چرخها، دارای سطحی با انحنای منفی هستند. بنابراین، بررسی عمیق این‌گونه سطح‌ها اهمیت نظری ویژه‌ای پیدا می‌کند.

پیش از آن که از برخی روشهای اساسی که می‌توانند برای حل مسأله‌های ریاضی به کار آیند یاد کنم، به موضوعی بسیار جدی اشاره می‌کنم که هم از نظر آموزشی و هم از نظر رفتار اجتماعی اهمیتی جدی دارد و با کمال تأسف، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. منظورم فراهم کردن شرایط مناسب، برای **«کار گروهی»** در بین دانش‌آموزان، برای یادگیری ریاضیات (و البته، نه تنها ریاضیات) است. درست برعکس، با انتخاب دانش‌آموزان «ممتاز» در یک کلاس، یا با ثبت نام از روی کارنامهٔ سال قبل (که مثلاً، کسانی ثبت‌نام می‌شوند که معدل نمره‌های آنها، از... بیشتر باشد) و یا گذاشتن نام «تیزهوش» به روی عده‌ای و کشاندن آنها، به «مدرسهٔ تیزهوشان» و یا، بدتر از

همه، به‌وجود آمدن رقابت‌های ناسالم در بین دانش‌آموزان و ترجیح دادن یکی بر دیگری، به خاطر چند صدم معدل بیشتر و... از روشهایی است که هم به دانش‌آموز علاقه‌مند لطمه می‌زند و هم دانش‌آموز «بی‌علاقه» را بی‌علاقه‌تر می‌کند و، در ضمن، زیان بزرگتر آن، پایین آوردن کار گروهی در بین دانش‌آموزان است. دانش‌آموز به خاطر رقابت، از همکاری و همراهی با دیگران دوری می‌گزیند، یاری به دیگران را به زیان خود می‌یابد و ریشهٔ تعاون اجتماعی را می‌خشکاند. آن که از نظر درسی جلوتر است، مغرور می‌شود، خود را تافتهٔ جدا بافته‌ای تصور می‌کند و مستقیم یا غیرمستقیم، به همسالان خود با دیدهٔ حقارت می‌نگرد. و آن که در درس‌ها ضعیف‌تر است، همه‌جا با بن بست مواجه می‌شود و، نه تنها از طرف معلم و پدر و مادر، که از جانب همسالان خود هم، آزار روحی می‌بیند و... سخن کوتاه، هر دو طرف، جدا از اجتماع همسالان خود و جدا از روحیهٔ همکاری و تعاون، زندگی نوجوانی و جوانی خود را تجربه می‌کنند.

اندیشهٔ آدمی و بویژه اندیشهٔ علمی، در برخورد با اندیشه‌های دیگر، شکل می‌گیرد و تکامل می‌یابد. اندیشهٔ فردی، هر قدر خلاّق و مستعد باشد، اگر در انزوا قرار گیرد، به تدریج فرسوده می‌شود و توان خود را از دست می‌دهد. و یکی از راه‌های برخورد اندیشه‌ها، کار گروهی است. خیلی ساده می‌توانید به‌درستی این مطلب پی‌ببرید. یک فیلم خوب انتخاب کنید و با دو نفر از دوستانتان به تماشای آن بروید و با هم قرار بگذارید، بعد از تماشای فیلم، دور هم جمع شوید تا دربارهٔ آن چه احساس کرده‌اید، آن‌چه آموخته‌اید و آن صحنه‌ها یا گفت و شنودهای فیلم که در شما اثر گذاشته است، با هم صحبت کنید... با کمال شگفتی متوجه خواهید شد که به خیلی از نکته‌ها توجه نکرده‌اید، خیلی از صحنه‌ها را، اگر چه دیده‌اید، نتوانسته‌اید درست درک کنید؛ متوجه می‌شوید که احساس کلی شما از فیلم چیزی و احساس دوستان شما چیز دیگری است و اگرچه ممکن است با برخی از دیدگاههای دوستانتان موافق نباشید، ولی تنها بعد از این گفت و شنود است که کمبودهای ذهنی شما دربارهٔ جنبه‌های خوب و بد فیلم برطرف می‌شود. همین آزمایش را می‌توانید دربارهٔ دیدار از یک نمایشگاه نقاشی، شنیدن یک کنسرت موسیقی، خواندن یک رُمان معروف، و حل یک مسألهٔ پرمضمون ریاضی تکرار کنید تا به معنای «تکامل اندیشه» آدمی در برخورد با اندیشه‌های دیگران پی ببرید.

روزگار ما، و به ویژه در میدانهای علمی، کار گروهی را می‌طلبد. ما در هزار سال پیش به سر نمی‌بریم که، وجود تک نابغه‌هایی مثل *ابوریحان بیرونی*، برای تکان دادن دنیای خود و برای تند کردن حرکت دانش مؤثر باشد. در زمان ما، هیچ کار علمی را نمی‌توان بدون همکاری با دیگران و بدون شرکت در یک کار گروهی پیش برد. دوران ما، دوران تک‌روی و سر درگریبان فروبردن نیست. باید در میان جمع بود و راه «در میان جمع بودن» را آموخت، و بهترین زمان، برای آشنا شدن و عادت کردن به کار گروهی، سالهای تحصیل در دبیرستان (و سپس، در دانشگاه) است. ما برای توسعهٔ اقتصادی و برای کم کردن فاصلهٔ خود با جهان پیشرفته، در هر زمینه‌ای (و از جمله در زمینهٔ ریاضیات) به انبوه ویژه‌کاران نیازمندیم، انبوه ویژه‌کارانی که راه همکاری با یکدیگر را بدانند و از تنگ نظری‌ها و حسدها دور باشند. پرورش چند نخبه، آن هم به صورت انفرادی و جدا از هم، مشکلی را حل نمی‌کند.

دربارهٔ «کار گروهی» به دو خاطره اشاره می‌کنم. خاطرهٔ اوّل از «**بوریس گنه‌دنکو**» مربّی معروف است که به شیوهٔ کار در بین دانشجویان و استادان مربوط می‌شود و خاطرهٔ دوم به سالهای تدریس خودم مربوط می‌شود و تا حدی، روشنگر «معجزه» کار گروهی در میان دانش‌آموزان دبیرستانی است.

گنه‌دنکو، در یکی از مقاله‌های خود با عنوان «خلاقیت ریاضی» می‌نویسد:

«... در سالهای پایانی سدهٔ نوزدهم، مکتب ریاضی پترزبورگ، شهرت زیادی به دست آورد و بویژه در دوره‌ای که **پ.ل.چبیشف** دانشمند نامی، در دانشگاه پترزبورگ کار می‌کرد، به اوج شکوفایی خود رسید. خیلی از زمینه‌ها (نظریهٔ عددها، نظریهٔ تابع‌ها، نظریهٔ احتمال و نظریهٔ سازوکارها)، مورد علاقهٔ خودچبیشف بود. او مسأله‌های حل نشده را با کمال میل، با جوانان علاقه‌مند در میان می‌گذاشت. این مسأله‌ها ضمن کار سخت و مستمر او پدید می‌آمدند. تصادفی نیست که‌چبیشف، به‌صورت مرکز جاذبه‌ای برای جوانان با استعداد درآمده بود و پژوهشگران شایسته‌ای از میان شاگردان او به‌وجود آمدند، پژوهشگرانی همچون *لیاپونف*، *مارکُف*، *گراوه* و بسیاری دیگر. در واقع،چبیشف، شرایطی فراهم آورده بود که به پیدایش و شکوفایی استعدادها کمک می‌کرد. او مسأله‌هایی را به شاگردان خود پیشنهاد می‌کرد و آنها را وامی‌داشت که گاهی سالها، روی آنها کار کنند و همین امر تأثیر ژرفی در روند پیشرفت دانش داشت.

روشن است که، در چنین موقعیتی، مسأله‌های تازه، تنها به وسیلهٔ استاد راهنما طرح نمی‌شود. عضوهای جوان این گروه پژوهشگر هم، به آفرینندگی علاقه‌مند می‌شوند و به صورت همکاران استاد درمی‌آیند. ولی این مسأله‌ها در گروه، مورد بحث جمعی قرار می‌گرفت و شکل کامل و سخت، دقیق و لازم خود را پیدا می‌کرد. و طبیعی است که هر قدر نیروی جوان در طرح و بررسی مسأله‌های تازه فعّال‌تر باشد، محیط علمی کامل‌تر و امکان آفرینندگی بیشتر خواهد شد.

من این شانس را داشتم که سالهایی از جوانی‌ام را در مکتب عالی نظریهٔ احتمال، که در سالهای پایانی دههٔ سوم و سالهای آغازین دههٔ چهارم سدهٔ بیستم در دانشگاه مسکو به وجود آمده بود، بگذرانم.

من در دوران شکوفایی این مکتب وارد آن شدم. وقتی که پژوهشگران بزرگی مثل کولسموگورف، خین‌چین، سمیرنوف و سلوتسکی، با همهٔ توان و استعداد خود، در آن کار می‌کردند، در آن زمان، هفته‌ای نبود که نتیجه‌گیریهایا روشهای تازه‌ای برای بررسی و یا طرح مسأله‌های تازه، وارد دانش نشود. و همهٔ اینها به صورت زنده و فعال، در سمینار علمی مربوط به نظریهٔ احتمال، مورد بحث و مذاکرهٔ جمعی قرار می‌گرفت. در این سمینارها، فیزیک‌دانان، زیست‌شناسان و ویژه‌کاران وسیله‌های ارتباطی (و در آن زمان، بیش از همه، ویژه‌کاران رابطهٔ تلفنی)، در کنار ریاضی‌دانان شرکت می‌کردند. در چنین اجتماعی، نظریهٔ احتمال در برابر ریاضی‌دانان جوان و تازه کار، نه تنها به عنوان بخشی از ریاضیات، بلکه بویژه به عنوان ابزاری برای شناخت پدیده‌های دنیای واقعی جلوه می‌کرد.

بحث و مذاکرهٔ سازنده‌ای که دربارهٔ گزارشها و طرحها وجود داشت، راه‌های مختلفی را که برای حل یک مسأله امکان داشت، مشخص و روشن می‌کرد، در فلان پژوهشی که کامل به‌نظر می‌رسد، چه کمبودهایی وجود دارد و چه چشم‌اندازهای تازه‌ای پیدا می‌شود که باید آنها را تکمیل، دقیق و عمیق کرد و راه رشد و تکامل بعدی آنها را به دست آورد.

بحث گروهی دربارهٔ کارهای انفرادی، به طور طبیعی این اعتقاد را استوارتر می‌کرد که دانش، تنها یک کار شخصی و انفرادی یک پژوهشگر نیست، بلکه بیش از هر چیز، یک پدیدهٔ اجتماعی است. به جز این، انتقاد سازندهٔ گروهی و بحث علمی منظم، برای پیشرفت کارهای انفرادی هم بی‌اندازه مهم است. این بحثها و گفت و شنودها، بویژه می‌تواند جنبه‌هایی از کار علمی را که می‌توان با اندکی دقت در بررسی‌های انفرادی پیدا کرد مشخص کند.

در چنین اوضاع و احوالی، به تدریج تمایل به حل مسأله‌های بزرگتر و اساسی‌تر و پیدا کردن روشهایی که برای بررسی آنها لازم است پدیدار می‌شود. همراه با تلاش برای تکمیل آگاهیها، چشم‌اندازی که نسبت به کل اندیشه وجود دارد، گسترده‌تر و آزادتر می‌شود و، همراه با آن، نارسایی‌ها و نقطه ضعف‌های آن، آشکارتر، خود را نشان می‌دهند. پرسش‌های تازه‌ای پدید می‌آید که پاسخی، برای آنها، وجود ندارد. این پرسش‌ها، ذهن همه را به خود مشغول می‌دارد و ناخودآگاه در هر جا و هر موقعیتی به اندیشهٔ دربارهٔ آن‌ها وا می‌دارد: پشت‌میز، موقع گردش، در اتوبوس، ضمن مطالعهٔ روزنامه و حتی در سالن تئاتر یا کنسرت، اندیشه به‌طور دایم در جستجوست و به دنبال چیزهای تازه‌ای است که او را به سمت پاسخ مورد نظرش راهنمایی کند...».

و اما خاطرهٔ خودم. در سالهای جوانی، وقتی که هنوز دانشجو بودم، کار معلمی را هم چه در کلاسهای شبانه و چه در دبیرستان‌ها ادامه می‌دادم. همیشه و همه جا از خود می‌پرسیدم: چرا بعضی از دانش‌آموزان در درسهای ریاضی، احساس ضعف و عجز می‌کنند! آیا به واقع، درک و اندیشهٔ آن‌ها، توان یادگیری موضوع‌های سادهٔ ریاضی را ندارد؟ چرا ذهن نوجوانانی که این‌طور هوشمندانه در همهٔ عرصه‌های زندگی خلاق و پربار است، وقتی با یک مسألهٔ ریاضی روبه‌رو می‌شود، از کار باز می‌ماند؟ می‌پذیرفتم که برای ریاضیدان شدن و برای آفرینندگی، عشق و استعداد لازم است؛ ولی مگر در کلاسهای دبیرستانی، انتظار خلاقیت و نوآوری در دانش‌آموز دارند؟ در این کلاسها، از دانش‌آموز می‌خواهند چیزهایی را یاد بگیرند که بیش از دوهزار سال پیش برای گذشتگان دور ما روشن بوده است. به نظرم می‌رسید که به طور طبیعی هر آدم متعارفی باید بتواند این موضوع‌های پیش‌پا افتاده را، به ویژه وقتی با منطق و استدلال همراه است، بفهمد... و اغلب برای یافتن پاسخ، به تلاشها و آزمایشهایی دست می‌زدم... اینک شرح یکی از این آزمایشها:

در آن سالها، دبستان را در شش سال و سپس دبیرستان را هم در شش سال می‌گذراندند. شش سال دبیرستان، به دو مرحله تقسیم شده بود: دورهٔ اوّل دبیرستان (سه سال) و دورهٔ دوم دبیرستان (سه سال).

من در سال دوم دورهٔ اوّل دبیرستان، دبیر هندسه بودم. دبیرستان، دارای سه کلاس دوم بود و بنا بر سنتی که رئیس

دبیرستان گذاشته بود، دانش‌آموزان را برحسب بلندی قد آنها در کلاسها جا می‌دادند: آنها که از دیگران بلندتر بودند، در کلاس دوم الف، متوسط‌ها در دوم ب و آنها که از همه کوتاه‌تر بودند در کلاس دوم ج... و من، دبیر هندسه در کلاس دوم الف بودم....

در طول نزدیک به یک ماه، تلاش کردم که دانش‌آموزان را از لحاظ قوت و ضعف آنها در درسهای ریاضی، کم و بیش بشناسم و بعد، یک روز وقتی وارد کلاس شدم، آنها را به گروههای سه نفری تقسیم کردم: در هر گروه، یک دانش‌آموز قوی، یک دانش‌آموز متوسط و یک دانش‌آموز ضعیف، و خیلی جدی اعلام کردم: از این به بعد، من با فرد کاری ندارم و گروهها را به رسمیت می‌شناسم. در امتحان سه ماههٔ اوّل هم، البته هر کسی ورقهٔ خودش را می‌نویسد، ولی من ورقه‌های سه نفر هر گروه را با هم سنجاق می‌کنم و به هریک از سه نفر معدل سه ورقه را به عنوان نمره می‌دهم. مثلاً، اگر در یک گروه، نمره‌های ورقه‌ها، ۱۹ و ۱۱ و ۶ باشد، به هر یک از سه نفر نمرهٔ ۱۲ را وارد لیست نمره‌های دبیرستان می‌کنم... طبیعی بود که با اعتراض دانش‌آموزان، بویژه دانش‌آموزان «درس خوان»، روبه‌رو شوم. ولی من مقاومت کردم... در فاصله‌ای که تا امتحان سه ماههٔ اول مانده بود، کسی حرف مرا چندان جدی نگرفت و پیش‌آمد مهمی رخ نداد. امتحان سه ماههٔ اوّل را به همان ترتیبی که قبلاً اعلام کرده بودم انجام دادم و... اعتراضها و فشارها آغاز شد: دانش‌آموزان، مسئولان دبیرستان، پدر و مادرها و بازرسان آموزش و پرورش، یک صدا و در کنار هم مرا زیر فشار گذاشتند، هیچ کس این شیوه را نمی‌پسندید و همه مرا شماتت می‌کردند. ولی من مقاومت کردم. و امیدم به درهم‌ریختگی و کاغذبازیهای رایج در دستگاه آموزش و پرورش بود که، تا بخواهند دربارهٔ من تصمیم بگیرند، سال تحصیلی به پایان می‌رسد... دانش‌آموزان، که از اعتراض‌های خود نتیجه نگرفته بودند و خود را مواجه با دبیری «بی‌منطق» می‌دیدند، به ناچار تسلیم شدند. نخستین باری که در راهروی دبیرستان، فریاد دانش‌آموزی را شنیدم که به دوست خود التماس می‌کرد: «تو را به خدا بیا این قضیه را یاد بگیر، تو پدر نمرهٔ مرا درآوردی!»، متوجه شدم که به نتیجهٔ دلخواه خود رسیده‌ام. البته، دانش‌آموزان ضعیف هم، به خاطر عاطفه‌ای که نسبت به دوستان هم گروه خود داشتند، به تلاش خود افزودند. صبحها، پیش از آغاز کلاسها، ظهرها و عصرها بعد از پایان کلاسها، گروه‌های سه نفری در گوشه و کنار مدرسه به چشم می‌خوردند که با هم کار می‌کردند. مطلع شدم، بسیاری از گروه‌ها، روزهای تعطیل به خانهٔ یکدیگر می‌روند و روی هندسه کار می‌کنند و... البته، فشار نسبت به من هم از جانب‌های مختلف رو به افزایش بود.

در سه ماههٔ دوم هم با همان شیوه عمل کردم، سطح نمره‌ها، نسبت به سه ماهٔ اوّل بالاتر بود، ولی هنوز به حد مطلوب نرسیده بود. ... برای امتحان آخر سال، نمرهٔ هر کسی را به خودش دادم و... معجزه اتفاق افتاده بود. کمترین نمره هندسه، در این کلاس، ۱۵ بود، هیچ کس در درس هندسه «تجدید» نشده بود. چنین است نتیجهٔ فوق‌العادهٔ کارگروهی! و من گروهی را می‌شناختم که در سالهای بعد هم، کار مشترک خود را ترک نکردند... البته، خود من «مردود» شدم، چرا که سال بعد، ساعت تدریس مرا در آن مدرسه از من گرفتند. به هر حال مسئولان دبیرستان، محیطی آرام لازم داشتند و حادثه‌های پر سر و صدا را نمی‌پسندیدند.

تا بعد...





دنباله[1]

قسمت اوّل

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی، ریاضی و تجربی)

● احمد قندهاری

۱ ــ در یک مسابقه وزنه‌برداری، در حرکت دوضرب، ۸ نفر شرکت داشتند، و نفرات اوّل تا هشتم توانستند به ترتیب وزنه‌های زیر را بلند کنند.

نفرات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مقداروزنه برحسب کیلوگرم	۲۱۰	۲۱۵	۲۰۰	۲۲۰	۲۲۵	۲۴۰	۲۳۰	۲۳۷/۵

این جدول، گویای این نتیجه است که مثلاً نفر اول ۲۱۰ کیلوگرم و نفر دوم ۲۱۵ کیلوگرم و نفر سوم ۲۰۰ کیلوگرم ... وزنه را توانستند بلند کنند.

برای پیداکردن نتایج بهتر، جدول بالا را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب نشان می‌دهیم :

$\{(۱,۲۱۰),(۲,۲۱۵),(۳,۲۰۰),(۴,۲۲۰),(۵,۲۲۵),$
$(۶,۲۴۰),(۷,۲۳۰),(۸,۲۳۷/۵)\}$

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم، که آیا مجموعه زوج مرتب بالا، تابعی را بیان می‌کند؟ با کمی دقّت می‌بینیم که این مجموعه زوج مرتب، تابعی را نشان می‌دهد، به طوری که دامنهٔ تابع مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ و برد تابع مجموعه $\{۲۱۰,۲۱۵,۲۰۰,۲۲۰,۲۲۵,۲۴۰,۲۳۰,۲۳۷/۵\}$ است.

اینک اعداد $۲۱۰,۲۱۵,۲۰۰,۲۲۰,۲۲۵,۲۴۰,۲۳۰,۲۳۷/۵$ را یک دنباله می‌گوییم. این دنباله شامل (۸) عدد است که مربوط به ۸ نفر وزنه بردار است. هریک از وزنه‌برداران به یک عدد از دنبالهٔ بالا مربوط شده‌اند. می‌توان گفت که یک تناظر یک به یک بین وزنه‌بردارها و وزنه‌های برداشته شده توسط آنها وجود دارد. چون تعداد جمله‌های این دنباله ۸ تاست، لذا به آن دنبالهٔ متناهی می‌گوییم. چنانچه تعداد جمله‌های یک دنباله، بی‌شمار باشد، آن را دنباله نامتناهی می‌گوییم. برای شناخت بهتر دنباله‌ها به مطالب زیر توجه کنید :

تعریف ۱: مجموعهٔ $N_K = \{۱,۲,۳,...,k\}, k \in N$ را قطعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا k گوییم، مثلاً مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ را قطعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا ۸ می‌گوییم.

تعریف ۲: برد هر تابع تعریف شده در قطعه‌ای ازاعداد طبیعی یک دنباله متناهی (با پایان) می‌سازد برای درک بیشتر به مثالهای زیر نگاه کنید :

مثال ۱: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n) = ۲n \\ N \to R \end{cases}, n < ۹, n \in N$ را

درنظر می‌گیریم. بُرد این تابع مجموعهٔ $\{۲,۴,۶,...,۱۶\}$ است. اعداد ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ را یک دنبالهٔ متناهی می‌گوییم.

مثال ۲: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n) = ۵n \\ N \to R \end{cases}, n < ۸, n \in N$ را

---
[1] ـ sequence

درنظر می‌گیریم. برد این تابع، مجموعهٔ $\{5,10,15,\ldots,35\}$ است.

اعداد ۳۵ و ۳۰ و ۲۵ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۵ را یک دنباله متناهی اعداد طبیعی مضرب ۵ کوچکتر از ۴۰ می‌گوییم. حال به صورت کامل دنباله را تعریف می‌کنیم :

تعریف ۳: به مجموعه‌ای از اعداد که چنان مرتب شوند که با مجموعه عددهای طبیعی یا قطعه‌ای از آنها در تناظر یک به یک باشد، یک دنباله گفته می‌شود.

تعریف ۴: یک دنباله تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن باشد. به هریک از مقادیر برد این تابع، یک جملهٔ دنباله گفته می‌شود. چنانچه دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. دنبالهٔ حاصل از آن را دنباله نامتناهی می‌گویند.

از این به بعد هرجا کلمهٔ دنباله به‌کار می‌رود، منظور دنباله نامتناهی است. حال به مثالهای زیر دقت کنید.

مثال ۱: تابع $a:N \to R$ با ضابطه $a(n)=\frac{1}{n}$ را درنظر می‌گیریم. $n \in N$ این تابع بنا به تعریف (۴) یک دنباله را بیان می‌کند ؛ یعنی مقادیر بُرد این تابع، جمله‌های دنباله را تشکیل می‌دهند. با قرار دادن اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n و ... در معادله تابع $a(n)=\frac{1}{n}$ جمله‌های دنباله به دست می‌آید :

$$a(1)=1\ ,\ a(2)=\frac{1}{2}\ ,\ a(3)=\frac{1}{3}\ ,\ldots,\ a(n)=\frac{1}{n},\ldots$$

بنابراین، اعداد $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ را یک دنباله می‌گوییم.

توجه داشته باشید که جمله اوّل دنباله را با a_1 و جمله دوم دنباله را با a_2 و جمله سوم دنباله را با a_3،... و جمله (n) ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم و خود دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\frac{n}{n+2} \\ N \longrightarrow R \end{cases}$، $n \in N$ را در نظر می‌گیریم. برد این تابع مجموعهٔ $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\ldots,\frac{n}{n+2},\ldots\right\}$ است، بنابراین اعداد $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\ldots,\frac{n}{n+2},\ldots$ را یک دنباله می‌گوییم.

مثال ۳: تابع a با ضابطهٔ $\begin{cases} a(n)=5^{n-1} \\ N \to R \end{cases}$، $n \in N$ را درنظر می‌گیریم. برد این تابع مجموعهٔ $\{1,5,25,\ldots,5^{n-1},\ldots\}$ است، لذا اعداد $1,5,25,\ldots,5^{n-1},\ldots$ را دنباله می‌گوییم.

همان‌طوری‌که در مثال ۲ گفته شد، $a_1=1$ و $a_2=5$ و $a_3=25$ و ... و $a_n=5^{n-1}$ و ... است.

۲ ــ جملهٔ عمومی دنباله: گفتیم که جمله (n)ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم، این جمله را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامیم. اگر جمله عمومی یک دنباله معلوم باشد، کلیهٔ جمله‌های دنباله از روی جمله عمومی دنباله، با قرار دادن $n=1,2,3,\ldots$ معلوم می‌شود.

مثال: اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$، $n \in N$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت :

$$n=1 \Rightarrow a_1=0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{5}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{2}{7}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4=\frac{3}{9}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5=\frac{4}{11}$$

در نتیجه اعداد $0,\frac{1}{5},\frac{2}{7},\frac{3}{9},\frac{4}{11},\ldots,\frac{n-1}{2n+1},\ldots$ را یک دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$ می‌گوییم.

توجه: گاهی، دنباله را با یک رابطه بین جمله (n)ام و جمله (n−1)ام یا با یک رابطه بین جمله (n)ام و جمله‌های پیش از آن تعریف می‌کنند. مثلاً دنباله: $a_1=3$، $a_n=a_{n-1}+3$ که در آن

$$n=1 \Rightarrow a_1=3$$

$$n=2 \Rightarrow a_2=a_1+3=3+3=6$$

$$n=3 \Rightarrow a_3=a_2+3=6+3=9$$

$$n=4 \Rightarrow a_4=a_3+3=9+3=12$$

به همین ترتیب، کلیه جمله‌های دنباله مشخص می‌شود.

رابطهٔ $a_1=3$، $a_n=a_{n-1}+3$ را رابطهٔ **بازگشت** یا رابطه **بازگشتی** می‌گویند.

دنباله : $a_2=a_1=1$ ، $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$، برای $n \geq 3$ دنباله معروف **فیبوناتچی** است. پس از این در مورد این دنباله، مطالبی خواهیم گفت.

دیدید که اگر جمله عمومی دنباله‌ای معلوم باشد یا رابطه بازگشت در یک دنباله مطرح باشد، جمله‌های دنباله از روی آنها با قراردادن $n=1,2,3,\dots$ به دست می‌آید. حال پرسش مهم زیر مطرح می‌شود :

پرسش ۱: با داشتن چند جمله اولیه یک دنباله نامتناهی، می‌توانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم؟

پاسخ: پاسخ این پرسش گاهی مثبت و گاهی منفی است. یعنی در دست داشتن چند جمله اول یک دنبالهٔ نامتناهی، برای تعریف دنباله و تعیین جمله عمومی آن کافی نیست، زیرا در چنین مسأله‌ای باید یک دستور استقرایی ساده و سازگار با جمله‌های دنباله یافت و اگر نتوانیم چنین دستوری را بیابیم، یافتن جمله عمومی مقدور نیست. مانند دنباله عددهای اوّل و دنباله رقمهای اعشاری عدد π که در هر دو، یافتن جمله عمومی مقدور نیست.

حال به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال۱: جمله عمومی دنباله $\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{5}{15},\frac{7}{20},\dots$ را بیابید.

حل: با کمی دقّت متوجه می‌شویم که صورت این کسرها، اعداد طبیعی فرد و مخرج این کسرها مضرب‌های (۵) اعداد طبیعی است، پس ظاهراً جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_n=\frac{2n-1}{5n}$ می‌تواند باشد.

حال پرسش دیگری را مطرح می‌کنیم :

پرسش۲: آیا جمله عمومی بالا تنها جمله عمومی این دنباله است؟

پاسخ: پاسخ این پرسش منفی است و می‌توان جمله‌های عمومی دیگری یافت که چهار جمله اول آن $\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{5}{15},\frac{7}{20}$ باشد، مثلاً دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{2n-1}{5n}+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$، که چهار جمله اوّل دنباله با این جملهٔ عمومی، در واقع همان چهار جمله بالاست، زیرا :

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$$
$$n=2\Rightarrow a_2=\frac{3}{10}$$
$$n=3\Rightarrow a_3=\frac{5}{15}$$
$$n=4\Rightarrow a_4=\frac{7}{20}$$

ولی جملهٔ پنجم آن $a_5=\frac{9}{25}+24$ که با جمله پنجم دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{2n-1}{5n}$ که مساوی $(\frac{9}{25})$ است، متفاوت است.

بنابراین اگرچند جملهٔ اولیه از یک دنباله معلوم باشد و بتوانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم. نمی‌توان گفت که این تنها جمله عمومی به دست آمده است. دنباله می‌تواند جمله‌های عمومی دیگری هم داشته باشد، ولی در این نوع مسایل، یافتن ساده‌ترین جملهٔ عمومی مورد نظر است.

مثال ۲: چند جملهٔ اولّیه دنباله‌ای به صورت $\frac{2}{7},\frac{5}{11},\frac{10}{15},\frac{17}{19}$ است. ساده‌ترین جمله عمومی این دنباله را بیابید.

حل: اگر با دقت، اعداد صورت کسرها را درنظر بگیریم می‌بینیم که صورت کسرها به شکل (۱+ مربع عدد آن جمله) می‌باشد، ازاینجا نتیجه می‌گیریم که صورت کسر جملهٔ عمومی، می‌تواند به شکل (n^2+1) باشد.

دربارهٔ اعداد مخرج : اعداد مخرج یک تصاعد عددی[1] می‌سازند که جمله اوّل آن ۷ و قدر نسبت آن ۴ است، پس می‌توان نوشت :

$$\begin{cases}t_1=7\\ d=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_n=t_1+(n-1)d\\ t_n=7+4(n-1)\end{cases}\Rightarrow t_n=4n+3$$

پس مخرج کسر جمله عمومی، به شکل $(4n+3)$ می‌تواند باشد. در نتیجه ساده‌ترین جملهٔ عمومی دنباله فوق به شکل $a_n=\frac{n^2+1}{4n+3}$ است.

مسایل:

مسأله ۱: ده جمله اوّل دنباله فیبوناتچی را بنویسید.

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\qquad n\geq 3$$
$$a_1=a_2=1$$
$$n=3\Rightarrow a_3=a_2+a_1=1+1=2$$
$$n=4\Rightarrow a_4=a_3+a_2=2+1=3$$
$$n=5\Rightarrow a_5=a_4+a_3=3+2=5$$
$$n=6\Rightarrow a_6=a_5+a_4=5+3=8$$
$$n=7\Rightarrow a_7=a_6+a_5=8+5=13$$

۱ــ در آینده در مورد تصاعدها بحث خواهیم کرد.

$n=۸ \Rightarrow a_۸ = a_۷ + a_۶ = ۱۳+۸ = ۲۱$

$n=۹ \Rightarrow a_۹ = a_۸ + a_۷ = ۲۱+۱۳ = ۳۴$

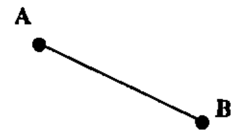
$n=۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = a_۹ + a_۸ = ۳۴+۲۱ = ۵۵$

نتیجه : $۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,...$

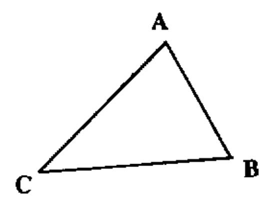
مسأله ۲ : n نقطه متمایز در یک صفحه داریم که هیچ سه نقطه آن بر یک استقامت نیستند. اگر a_n تعداد پاره‌خط‌های متمایزی باشد که این نقاط را به هم وصل می‌کند، پنج جمله اول این دنباله را بنویسید و ساده‌ترین جمله عمومی آن را بیابید.

حل: با یک نقطه پاره خط تشکیل نمی‌شود، پس : $a_۱ = ۰$

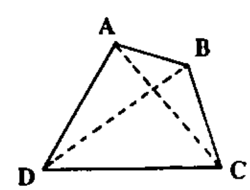
با دو نقطه یک پاره‌خط تشکیل می‌شود، پس : $a_۲ = ۱$



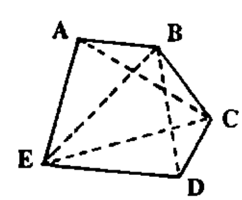
با سه نقطه غیرواقع بر یک استقامت سه پاره‌خط تشکیل می‌شود (مانند مثلث)، پس : $a_۳ = ۳$



با چهار نقطه که سه به سه غیرواقع بر یک استقامت باشند، شش پاره‌خط تشکیل می‌شود (چهارضلعی با دو قطر)، پس: $a_۴ = ۶$



با پنج نقطه که سه به سه غیرواقع بر یک استقامت باشند، ۱۰ پاره‌خط تشکیل می‌شود (پنج ضلعی محدّب با قطرهای آن)، پس : $a_۵ = ۱۰$



در نتیجه پنج جمله اوّل این دنباله عبارت است از : ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ و ۰.

حال می‌خواهیم جمله عمومی این دنباله را پیدا کنیم.

چون جمله اول دنباله، صفر است، بنابراین در جملهٔ عمومی باید عامل $(n-۱)$ داشته باشیم با کمی دقت و بررسی متوجه می‌شویم که جمله عمومی می‌تواند به صورت $\frac{n(n-۱)}{۲}$ باشد.

در مورد جملهٔ عمومی این دنباله کمی بحث کنیم. اگر n تعداد اضلاع n ضلعی محدب واقع در یک صفحه باشد، می‌توان گفت که در این دنباله، اگر $n=۳$ ، آن‌گاه یک مثلث تشکیل می‌شود ؛ اگر $n=۴$ آن‌گاه یک چهارضلعی محدّب تشکیل می‌شود و اگر $n=۵$ ، آن‌گاه یک پنج ضلعی محدب تشکیل می‌شود و در حالت کلی اگر n نقطه متمایز داشته باشیم که هیچ سه نقطه آن بر یک استقامت نباشند، یک n ضلعی محدّب تشکیل می‌شود، می‌خواهیم مجموع تعداد اضلاع و تعداد قطرهای آن را بیابیم. n ضلعی محدب دارای n ضلع و $\frac{n(n-۳)}{۲}$ قطر است. پس :

$$\text{مجموع اضلاع و قطرها} = n + \frac{n(n-۳)}{۲}$$

$$= \frac{۲n + n(n-۳)}{۲} = \frac{n^۲ - n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین مجموع تعداد کل اضلاع و قطرها در یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است که همان جملهٔ عمومی دنباله مورد بحث است.

مسأله ۳: دنباله با جمله عمومی $a_n n^۲ - n$ مفروض است. عدد (۷۲) و عدد (۱۲۵) نسبت به جمله‌های این دنباله چه وضعی دارند؟

حل: چنین عمل می‌کنیم

$$n^۲ - n = ۷۲ \Rightarrow n^۲ - n - ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (n-۹)(n+۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -۸ & \text{غیرقابل قبول} \\ n = ۹ & \Rightarrow \end{cases}$$

پس عدد (۷۲) جمله نهم این دنباله است.

$$n^۲ - n - ۱۲۵ = ۰ \Rightarrow n = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۴(۱۲۵)}}{۲}$$

$$=\frac{۱\pm\sqrt{۵۰۱}}{۲}=\frac{۱\pm ۲۲/۳۸}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=\frac{۱-۲۲/۳۸}{۲}=-۱۰/۶۹ & \text{قابل قبول نیست} \\ n=\frac{۱+۲۲/۳۸}{۲}=۱۱/۶۹ \end{cases}$$

(۱۱/۶۹) بین (۱۱) و (۱۲) است، نتیجه می‌گیریم که عدد (۱۲۵) بین جمله‌های مرتبه یازدهم و دوازدهم است.

مسأله ۴: نخستین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{۲n}{n^۲+۳}$ که کوچکتر از $(\frac{۱}{۲۰})$ باشد کدام است؟

حل:

$$\frac{۲n}{n^۲+۳}<\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰}-\frac{۲n}{n^۲+۳}>۰\Rightarrow\frac{n^۲+۳-۴۰n}{۲۰(n^۲+۳)}>۰$$

$$\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳>۰\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳=۰\Rightarrow$$

$n=۳۹/۹۲$ یا $n=۰/۰۸$

$\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳>۰\Rightarrow n>۳۹/۹۲$ یا $n<۰/۰۸$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=۴۰$ در نتیجه، جملهٔ چهلم.

زیرا $\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵$ $\quad a_{۴۰}=\frac{۸۰}{۱۶۰۳}=۰/۰۴۹<\frac{۱}{۲۰}$

تمرین‌ها

۱ ــ پنج جمله اولیه دنباله $a_n=۲-۳a_{n-۱}$ با فرض $a_۱=۲$ را بنویسید.

۲ ــ دنبالهٔ $\left\{\frac{۲n-۱}{n^۲}\right\}$ مفروض است پنج جمله آن را بیابید، نمودار این پنج جمله را در صفحه محورهای مختصات نشان دهید.

۳ ــ در روی محیط دایره‌ای، n نقطه متمایز وجود دارد. دنباله تعداد وترهای متمایز را تشکیل دهید و جمله عمومی آن را بنویسید.

۴ ــ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع (۱) مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع را به هم وصل کنیم، مثلث جدیدی حاصل می‌شود، اگر وسط‌های اضلاع مثلث جدید را به هم وصل کنیم، مثلث سومی حاصل می‌شود و این عمل را بارها تکرار می‌کنیم.

الف : دنباله محیطهای مثلثها را بنویسید.

ب : دنباله ارتفاعهای مثلثها را بنویسید.

ج : دنباله مساحتهای مثلثها را بنویسید.

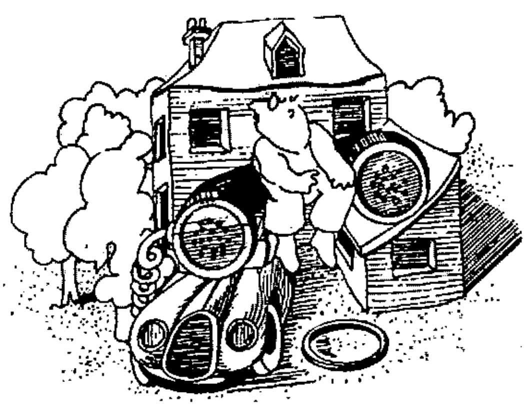
د : دنباله مساحتهای دایره‌های محیطی مثلثها را بنویسید.



تفریح اندیشه ۱

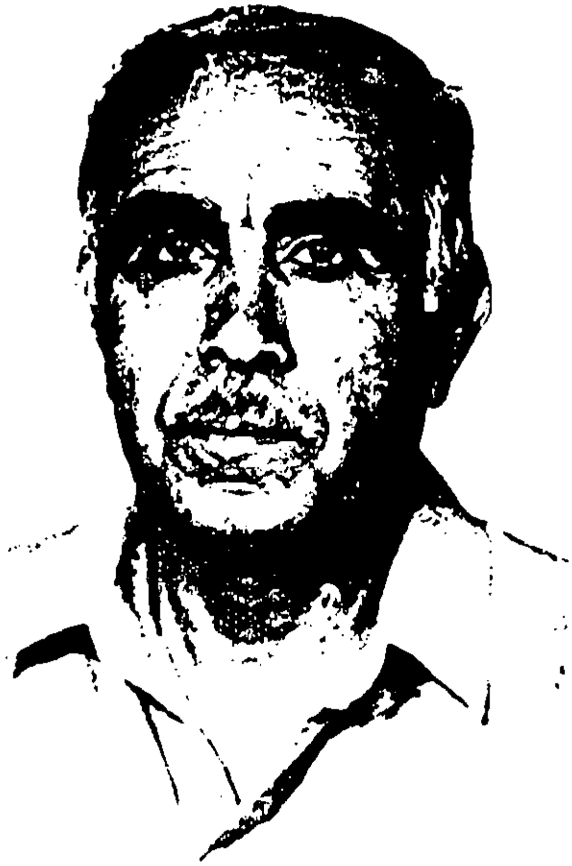
در شهری از هر ۱۰۰ نفر ۸۵ تن ازدواج کرده‌اند، ۷۰ نفر تلفن، ۷۵ نفر اتومبیل و ۸۰ نفر خانه دارند.

تعیین کنید در این شهر از هر صد نفر چند نفر هم ازدواج کرده‌اند و هم صاحب خانه، تلفن و اتومبیل هستند؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



در باغ تجربه‌ها

نشستی با استاد عبدالحسین مصحفی

□ **شرح حال، سابقهٔ تدریس و سمتهای رسمی خود را شرح دهید؟**

■ در اسفند ۱۳۰۳ در شهر کرمان، در خانه‌ای از محلهٔ مسجد گنج به‌دنیا آمده‌ام. در کودکی خواندن قرآن را آموختم و پس از تحصیلات رسمی (شش سال دورهٔ ابتدایی و سه سال سیکل اول متوسطه) امتحان نهایی سیکل اوّل متوسطه را در ۱۳۲۰ گذراندم و در همان سال در همان مدرسهٔ ملی که از آنجا فارغ‌التحصیل شده بودم به معلمی گمارده شدم. این مدرسهٔ ملّی که دبیرستان شهاب نام داشت، از نخستین مدرسه‌هایی به‌شمار می‌آمد که برای آموزش به روش جدید در کرمان تأسیس شده بود و از یک دبستان شش کلاسی و از یک سیکل اوّل متوسطهٔ سه کلاسی تشکیل می‌شد. چند سالی را به تناوب یا به معلمی در آن مدرسه یا به شغل صحافی و کتابفروشی گذراندم. در سال ۱۳۲۷ امتحان نهایی پنجم متوسطه را به‌صورت داوطلب گذراندم و با وجود تکفل خانواده، داوطلب خدمت نظام وظیفه شدم. شش ماه این خدمت را در دانشکدهٔ افسری تهران و یک سال آن را با درجهٔ ستوان دوم توپخانه به پایان بردم. محل خدمتم بنا بر نمره‌هایی که آورده بودم مشهد افتاد که آن را با خاش معاوضه کردم. ضمن خدمت افسری، درسهای سال ششم ریاضی را نزد خودم آموختم و در ۱۳۳۰ امتحان نهایی دیپلم ریاضی را به‌صورت داوطلب در تهران گذراندم. در همان سال در امتحان ورودی رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران و رشتهٔ دبیری دانشسرای عالی ایران پذیرفته شدم و در سال ۱۳۳۳ گواهینامهٔ لیسانس هر یک از این دو مؤسسهٔ عالی را دریافت داشتم و برای خدمت دبیری یزد را برگزیدم.

هشت سال در دبیرستانهای شهرستان یزد و در دانشسرا و در کلاسهای تربیت معلم آنجا، به تدریس ریاضیات اشتغال داشتم. در سال ۱۳۴۱ به تهران منتقل شدم و سمتهای رسمی که داشته‌ام چنین بوده است:

۱۳۴۱ تا ۱۳۴۴ دبیر دبیرستانهای ناحیهٔ چهار تهران.

۱۳۴۴ تا ۱۳۴۷ کارشناس ریاضی برنامه‌ها در ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌های وزارت آموزش و پرورش

۱۳۴۷ تا ۱۳۵۲ نمایندهٔ وزارت آموزش و پرورش در شرکت چاپ‌وتوزیع کتابهای درسی

۱۳۵۲ تا بهمن ۱۳۵۷ کارشناس مسئول ریاضی در سازمان کتابهای درسی ایران

اسفند ۱۳۵۷ تا آبان ۱۳۵۸ مدیرکل سازمان کتابهای درسی ایران و سرپرست ادارهٔ کل تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی.

آبان ۱۳۵۸ بنا به درخواست شخصی بازنشسته شدم.

پس از بازنشستگی به غیر از سه سال که با مرکز نشر دانشگاهی در کار ویراستاری یک دوره کتابهای ریاضی پیش‌دانشگاهی همکاری داشتم، عمدهٔ وقتم را به ترجمه و نگارش نوشتارها یا کتابهایی در زمینهٔ ریاضی و در زمینهٔ کامپیوتر می‌گذرانم.

در ۱۳۳۷ در یزد ازدواج کرده‌ام. همسرم نیز فرهنگی و حاصل ازدواج ما دو فرزند پسر است.

در ۱۳۵۲ با استفاده از بورس واگذاری دولت بلژیک یک دوره بررسی و مطالعه دربارهٔ ریاضی جدید را در آن کشور گذراندم. دوباره در دو دانشگاه فرانسه برای گرفتن دکترای از نوع تروازیم سیکل اقدام کردم. هر دو بار در مصاحبه پذیرفته شدم و ثبت نام هم کردم، اما از آن‌رو که می‌باید سه سال به‌طور مرتب در کلاس حضور می‌داشتم و در نتیجه در انتشار مجلهٔ یکان وقفه ایجاد می‌شد از دنبال کردن کار خودداری کردم.

چند ترم تحصیلی تدریس روشهای آموزش ریاضی و بررسی کتابهای درسی را در دانشگاه ابوریحان و در دانشگاه مامازن به‌عهده داشتم. در آغاز و تأسیس انجمن معلمان ریاضی ایران [در سال ۱۳۴۳] به عضویت هیأت مدیرهٔ موقت و پس از تصویب اساسنامهٔ آن به عضویت هیأت اجرایی انجمن انتخاب شدم که این همکاری تا سال ۱۳۴۸ ادامه داشت.

در چند سال آخر اقامتم در یزد خبرنگار فرهنگی روزنامهٔ کیهان بودم و نوشتارهایی در زمینهٔ فرهنگ یزد و دربارهٔ شخصیتهای فرهنگی آنجا فراهم آوردم و در آن روزنامه به چاپ رساندم.

در سالهای ۱۳۴۱ و ۱۳۴۲ هم که به تهران منتقل شده بودم با نشریه‌ای علمی که باشگاه مهرگان منتشر می‌کرد همکاری داشتم.

□ در مورد تألیفات و ترجمه‌های خود مطالبی را عنوان کنید.

■ ۱) *انتشار مجلهٔ ریاضی یکان*

در سال ۱۳۴۱ امتیاز انتشار مجله‌ای ریاضی را درخواست کردم. به‌دنبال آن در جلسهٔ آبان ۱۳۴۲ کمیسیون مطبوعات وزارت کشور با امتیاز مجلهٔ ریاضی یکان به‌نام من موافقت کرد. نخستین شمارهٔ این مجله در بهمن ۱۳۴۲ منتشر شد؛ که بیش از حد انتظار با استقبال روبه‌رو شد و سه بار تجدید چاپ شد. پس از آن هم این مجله به‌طور مرتب تا ۱۱۸ شمارهٔ ماهانه و هر سال همراه با شماره‌ای ویژهٔ امتحانهای نهایی و کنکور و همراه با شماره‌ای برای دانش‌آموزان سال آخر سیکل اوّل متوسطه انتشار یافت. سرانجام در سال ۱۳۵۶ از ادامهٔ انتشار آن باز ماندم. دربارهٔ این مجله و اثرش در گسترش ریاضیات در ایران و دربارهٔ تحوّلی که در آموزش ریاضی در ایران به‌وجود آورد، صاحب‌نظران بسیار سخن گفته‌اند و آن را در ترازوی سنجش قرار داده‌اند.

مجلهٔ یکان بدون هیچ وابستگی و بدون دریافت هرگونه کمک مادی منتشر می‌شد و هزینهٔ سنگین آن کلاً از راه تکفروشی و حق اشتراک تأمین می‌شد. دلیل توقف انتشار آن هم تنها آن بود که دیگر توانایی ادامهٔ کار را نداشتم. پس از انقلاب هم به توصیهٔ مؤکد شهیدرجایی و به تشویق بعضی از ریاضی دوستان، تقاضای تجدید امتیاز مجله را کردم که تصویب هم شد، اما باز هم توانایی لازم برای دنبال کردن کار را نداشته‌ام.

۲) *نوشتارها*

هر شماره از مجلهٔ یکان، از دو بخش عمده تشکیل می‌شد. یک بخش مجموعه‌ای از نوشتارها و بخش دیگر مجموعه‌ای از مسأله‌های گوناگون بود. از نوشتارهای هر شماره، دست‌کم دو یا سه عددشان به قلم خودم بود که بیشتر بدون ذکر نام چاپ می‌شد. تعداد این نوشتارها روی‌هم بیش از دویست خواهد بود. به غیر از این نوشتارها، برای چند مجلهٔ علمی و ریاضی نیز نوشتارهایی ترجمه کرده یا نگاشته‌ام که تعداد چاپ شده‌های آنها اکنون به هفتادوشش مقاله رسیده است. این نوشتارها عموماً در زمینهٔ ریاضی و کامپیوتر بوده‌اند. مبادی کامپیوتر را در یک دورهٔ سه ماهه و برنامه‌نویسی به زبان کوبول را نیز در یک دورهٔ سه ماهه در سازمان مدیریت فرا گرفتم و پس از آن از راه مطالعهٔ کتابهایی به زبانهای انگلیسی یا فرانسه، توانسته‌ام به دانستنیهای بیشتری در زمینهٔ دانشهای کامپیوتری دست یابم.

۳) *کتابها*

الف) کتابهایی که ترجمهٔ آنها به صورت مقاله‌های پی‌درپی در مجله‌های یکان به چاپ رسیده است:

راهنمای حل مسأله‌های مقدماتی هندسه ــ بیان جدید ریاضیات مقدماتی ــ نجوم و کیهانشناسی ــ مسأله‌های حل نشدهٔ ریاضی ــ داستانهای تفننی ریاضی ــ هندسهٔ مقدماتی به زبان ریاضی جدید ــ آمار مقدماتی ــ احتمال مقدماتی ــ راهنمای حل مسأله‌های ترسیمی هندسه ــ چگونگی حل سادهٔ مسأله‌های ریاضی ــ نظریهٔ مجموعه‌ها به روش برنامه‌ای ــ استلزام به‌روش برنامه‌ای ــ با ریاضیات آشتی کنید ــ بازآموزی هندسه (که به‌صورت مستقل نیز چاپ شده است).

ب) کتابهایی که به‌صورت مستقل چاپ شده‌اند و بعضی از آنها تا بیش از ده بار تجدید چاپ شده‌اند: راهنمای ریاضیات متوسطه ــ رسم فنی برای سال ششم رشتهٔ ریاضی ــ ریاضیات برای سال اوّل دانشسرای راهنمایی ــ روش آموزش ریاضی ــ بازآموزی و باز شناخت هندسه (ترجمه) ــ تصاعدها و لگاریتم ــ عبارتهای جبری ــ منطق‌واستدلال ریاضی ــ ورزیدگی در ریاضیات (ترجمه) ــ المپیادهای ریاضی بلژیک (ترجمه) ــ مسایل مسابقه‌های ریاضی امریکا، جلد چهارم (ترجمه) ــ زودآموزی BASIC (ترجمه و تألیف) ــ ریاضیات پیشنیاز کامپیوتر (ترجمه) ــ داستانواره‌های ریاضی (ترجمه آمادهٔ چاپ) ــ زودشناسی دستگاه کامپیوتر ــ رام کردن و پرورش مسأله‌های ریاضی ــ قبله‌شناسی با روش مشاهده و محاسبه (چاپ نشده).

□ استاد اگر خاطراتی از دوران کودکی، نوجوانی، جوانی و دوران تحصیل خود به یاد دارید، بیان بفرمایید.

■ **۱) *خاطراتی از دوران کودکی و نوجوانی***

دوران زندگی هر کس مجموعه‌ای از خاطره‌های تلخ و شیرین است که مگر برای خودش برای دیگران جاذبه‌ای ندارد و بازگو کردن آنها خالی از لطف و بدون فایده است.

از تلخترین خاطره‌های من روزی است که به هنگام درس دادن در کلاس، خبر درگذشت پدرم را به من اطلاع دادند. من که فرزند ارشد خانواده بودم، آن موقع فقط هجده سال داشتم از شیرین‌ترین خاطره‌هایم هم روزی است که پس از چندین ماه انتظار، همکارانی که به نیابت من به خواستگاری دختری از یک خانوادهٔ یزدی رفته بودند، اطلاع دادند که جواب موافق دریافت کرده‌اند. یزدیها روی مسأله ازدواج، بویژه اگر طرف غیر یزدی باشد، بسیار سختگیرند.

۲) *خاطره‌هایی از دبستان و دبیرستان*

وقتی سال ششم ابتدایی را می‌گذراندم، در بازدیدی که رئیس فرهنگ استان از کلاس ما داشت، دربارهٔ مخروط و ارتفاع و مولد آن از من پرسشهایی کرد که همه را به خوبی پاسخ گفتم و افزودم که بین ارتفاع و مولّد و شعاع قاعده رابطهٔ فیثاغورس برقرار است. این قضیه را سه کلاس بالاتر می‌آموختند و رئیس فرهنگ از اینکه من آن را می‌دانستم بسیار متعجب شد و مرا خیلی مورد تشویق قرار داد. چند ماه بعد به مناسبت اینکه در امتحان نهایی شاگرد اوّل مدرسه شده بودم، از همان رئیس فرهنگ یک کتاب به‌عنوان جایزه دریافت داشتم.

پس از پایان خدمت نظام وظیفه به تهران آمدم و خود را برای امتحان نهایی سال ششم ریاضی آماده می‌کردم و در ضمن برای تأمین هزینهٔ زندگی در یکی دو آموزشگاه شبانه درس می‌دادم عجیب آنکه در یکی از آنها درسهایی از ششم ریاضی را هم برای تنی چند از دانش‌آموزان دبیرستان بازگو می‌کردم و سؤالهای امتحانی سالهای قبل را برایشان حل می‌کردم. آنها راضی بودند و من هم آمادگی بیشتری برای امتحان به‌دست می‌آوردم، ضمن آنکه بخشی از هزینهٔ زندگی‌ام هم تأمین می‌شد. عجیب آنکه با یکی از این دانش‌آموزان در موقع امتحان هم‌حوزه شدیم. ابتدا او گمان کرد که من به جای کس دیگر امتحان می‌دهم و من برای رفع این سوءظن، ماجرا را برایش شرح دادم. صمیمیتی بین ما برقرار شد و بعدها دانش‌آموزانی از آشنایان و خویشان خود را برای گرفتن درس خصوصی به من معرفی می‌کرد.

۳) *خاطره‌هایی از دانشگاه*

همزمان با آغاز تحصیل من در دانشگاه، خانوادهٔ ما نیز به تهران منتقل شد و من و یک برادر کوچکتر، که در یک کتابفروشی کار می‌کرد، با هم می‌بایید از عهدهٔ هزینهٔ خانواده برمی‌آمدیم و کمک هزینهٔ تحصیلی که دانشسرای عالی می‌داد کافی نبود.

□ کدام‌یک از معلمان روی شما تأثیر بیشتری گذاشته است و چرا؟

■ در دورهٔ ابتدایی، معلمان ورزیده و کارآمدی نداشتیم. در آن موقع، برخلاف امروز، مدرسه‌های ملی از نظر آموزشی

چندان مجهز نبودند. در دورهٔ سیکل اوّل متوسطه هم معلمی که تدریس تقریباً همهٔ درسهای ما را به‌عهده داشت، تازه از دانشسرای مقدماتی فارغ‌التحصیل شده و برای تدریس در دبستانها تربیت شده بود. سیکل دوم متوسطه را هم که مدرسه نرفته‌ام. از استادان دانشگاه، پروفسور فاطمی، دکتر هشترودی و دکتر هوشیار، از جمله شخصیتهایی بودند که بیش از دیگران بر روی دانشجویان تأثیر می‌گذاشتند.

□ کدام یک از دبیرستانها محل مناسبتری برای تدریس بوده‌اند و چرا؟

■ یک دبیرستان وقتی برای یک معلم محل مناسبی برای تدریس است که هم مسئولان آنجا و هم دانش‌آموزان آنجا به بنیهٔ علمی و به بی‌غرضی آن معلم اعتقاد و اعتماد داشته باشند. وقتی چنین باشد، دانش‌آموزان شوق به یادگیری از خود بروز می‌دهند و معلم هم تشویق می‌شود که تدریسی خوب ارائه دهد. دبیرستانهای یزد و بویژه دبیرستان ایرانشهر اِنجا برای من چنین وضعی را داشتند. اگر مسئولان یک آموزشگاه اهداف خاصی را دنبال کنند که معلم به آن هدفها آگاه نباشد یا اینکه آن را در شأن مقام خود نبیند، و اگر بین مسئولان و بین معلمان چند دستگی باشد، ارائهٔ صحیح درس، هر چند هم که معلم بی‌غرض و کارآمد باشد، میسر نخواهد بود.

□ از شاگردان بازیگوش خود چه خاطراتی دارید و چگونه آنها را آرام کرده‌اید؟

■ دانش‌آموزی که بازیگوشی می‌کند، اگر از جانبی تحریک نشده باشد، بدان علت است که یا درس معلم برای او جاذبهٔ لازم را ندارد؛ یا بهرهٔ هوشی بالاتری دارد و درس را زودتر از دیگران فهمیده است، یا کلاً به تحصیل بی‌علاقه است، یا می‌داند که آن درس را نزد معلم خصوصی خود یاد می‌گیرد، و یا علتهای دیگری در کار است. در هر حال باید علت را دانست و مناسب با آن چاره کرد. معطل و بلاتکلیف گذاشتن شاگردان در سرکلاس، آنان را به بازیگوشی وامی‌دارد. معلم اگر پس از درس دادن، بلافاصله از یکی دو دانش‌آموز بخواهد تا همان درس را بازگو کنند، هم به بهتر فهمیدن درس کمک می‌شود و هم دانش‌آموزان را وامی‌دارد که همهٔ توجهشان به درس باشد.

□ از شاگردان باهوش خود چه خاطراتی دارید و آیا بعضی از شاگردان شما به مراتب بالای علمی رسیده‌اند؟

■ اگر خوب فهمیدن درس، خوب مسأله حل کردن و خوب دانستن همهٔ درسها را ملاک باهوشی بدانیم، با شاگردان باهوش به تعداد زیاد روبه‌رو بوده‌ام. مهم آن است که یک چنین شاگردی، به باهوش بودن خود نبالد و به دیگران فخر نفروشد. یک شاگرد که به باهوشی مشهور شود، تصورش این می‌شود که باید هر پرسش یا هر مسأله‌ای را بدون درنگ پاسخ دهد که گاه اشتباههایی فاحش از او سرمی‌زند و او را سرافکنده می‌سازد. علَم کردن یک شاگرد به باهوشی و به بی‌هوشی برای هردوی آنها خطرآفرین است.

هر معلم شاگردانی سراغ دارد که به مقامها و به مرتبه‌های بالای علمی و اجتماعی دست یافته‌اند. این شاگردان در طول تحصیل خود با معلمان زیادی سروکار داشته‌اند و اساس کار تلاشهای خود آنان بوده است و نمی‌شود سهم همهٔ این معلمان را در موفقیتهای آن شاگردان متوجه تنها یکی از آن معلمان کرد. در این باره خود این شاگردان موفق باید اظهار نظر کنند.

چه بسا که یک معلم با یک رفتار و تشویق بجا و مناسب، دانش‌آموزی را به راه موفقیت کشانده است و چه بسا که یک معلم با یک رفتار و با یک گفتهٔ نابجا و نامناسب دانش‌آموزی را از تحصیل یا از درس خاص دلزده کرده است. از شاگردان یک معلم بعضی به مقامهای بالای علمی می‌رسند و بعضی تحصیل را نیمه تمام رها می‌کنند، باید دید که آن معلم در هر یک از این دو مورد تا چه اندازه سهم داشته است.

□ به نظر شما وضع تدریس ریاضیات در قدیم چگونه بوده و در حال حاضر چگونه است؟

■ قدیم را باید به چه دوره‌ای اطلاق کرد؟ اگر سرآغاز برپایی مدرسه‌ها به سبک جدید، یعنی از زمان تأسیس دارالفنون به این سمت را در نظر بگیریم ــ مگر در دورهٔ ابتدایی ــ تدریس ریاضیات تاکنون وضعی تقریباً یکسان داشته است. معلم درس می‌دهد، مسأله و مثالهایی را برای نمونه حل می‌کند، و تمرینها و مسأله‌هایی را هم برای تمرین می‌دهد. هدف از تحصیل، قبولی در امتحانها، گرفتن گواهینامه و استفاده از



مزیتهای قانونی آن بوده است. در این میان معلم نقش اساسی را داشته است. گاهی هم معلمانی به مصداق شعر

«حافظ وظیفهٔ تو دعا کردن است و بس
دربند آن مباش که نشنید یا شنید»

بر آن بوده‌اند که هر چه زودتر برنامه را به پایان برسانند. آنها حل تمرینها و مسأله‌ها را هم به‌صورت استنسیل در دسترس شاگردان می‌گذارند و شاگردان را به امید خدا و به سعی و کوشش خودشان واگذار می‌کنند. معلمانی هم بوده و هستند که همهٔ سعی و کوششان در تفهیم درست و دقیق درس و در جهت عمقی یادگرفتن شاگردان است. امروزه هم که روش آزمونهای چند گزینه‌ای معمول شده است، سعی دانش‌آموزان تنها در آن جهت است که در تست زدن مهارت به‌دست آورند. یک معلم هر چند هم عاشق کارش باشد، پیش از آن باید زندگی‌اش تأمین باشد.

□ وضع تألیف کتابهای ریاضی را چگونه می‌دانید؟

■ از زمان رسوخ فرهنگ جدید اروپایی در ایران، کتابهای درسی ریاضی یا ترجمهٔ کامل از کتابهای درسی اروپایی (در سابق عموماً فرانسه) بوده یا تلفیقی از آنچه پیش از این ترجمه شده است. گاه تألیف کتاب درسی آزاد بوده و گاه سازمانی دولتی آن را در انحصار داشته است. در این باره گفتنی بسیار است و نه تنها خود یک مقاله بلکه دنباله‌ای از چند مقاله خواهد شد. گاه یکی دو نفر مؤلف با همکاری مستمر خود یک سری کتاب خوب ارائه داده‌اند که انسجام منطقی مطالب و مفاهیم محفوظ بوده و گاه گروهی از مؤلفان، هرکدام کتابی، و حتی گاهی هرکدام فصلی از یک کتاب را با شتاب‌زدگی فراهم آورده‌اند که نه تنها از انسجام منطقی برخوردار نبوده بلکه آشفتگیهایی را در وضع تدریس و دردسرهایی را هم برای دانش‌آموزان و معلمان در پی داشته است. در جریان وضع کتابهای درسی کنونی نبوده‌ام و آنها را ندیده‌ام.

□ استاد! برای این که شاگردی در ریاضیات موفق باشد، باید چه کارهایی انجام دهد؟

■ ریاضیات کلاً فهمیدنی است. یک شاگرد در فراگیری ریاضیات، آن‌گاه موفق است که مفهومها را به‌خوبی و عمقی بفهمد و حل مسأله‌ها را با فکر و با ابتکار خود از عهده برآید. ریاضیات به آنچه در کتابهای درسی آمده است محدود نمی‌شود. باید فراتر از آن مطالعه کرد، کتابهای جنب درسی، مجله‌ها و مهمتر اینکه کتابهای تازه تألیف به زبانهای دیگر را نیز باید یافت و بررسی کرد.

□ یک کتاب درسی خوب، باید شامل چه ویژگیهایی باشد؟

■ در تألیف کتابهای درسی به چندین نکته باید توجه شود: نخست آنکه هر یک از کتابها با کتابهای پایه‌های قبل و بعد از خود پیوستگی و همخوانی لازم را داشته باشد به گونه‌ای که دورهٔ کامل این کتابها یک دستگاه ریاضی از نظر منطقی منسجم را ارائه کنند. دیگر آنکه باید با شرایط سیاسی و اجتماعی کشور و با سنتهای قومی و ملّی سازگاری داشته باشد. اگر کارکرد یک دوره کتابهای درسی در یک کشور یا در بخشی از یک کشور موفق به‌شمار آمده باشند، نمی‌شود پذیرفت که در کشوری دیگر هم چنین وضع مطلوبی داشته باشند. در یک جا کلاسها با ابزارهای گوناگون آموزشی مجهزند و در جای دیگر حتی تخته سیاه و گچ هم در دسترس نیست. سوم اینکه معلمان باید از قبل با کتابها و با روشهای تدریس آنها آشنایی لازم را به‌دست آورده باشند. مهمتر آنکه متن کتاب باید با استعداد اکثریت متوسط دانش‌آموزان درخور باشد.

□ آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می‌دانید و اگر لازم‌اند، چه مشخصاتی باید داشته باشند؟

■ ریاضیات، همپای سایر دانشها و فنها در حال پیشرفت است. روزآمد کردن کتابهای درسی، دشواریهایی فنی و آموزشی را در پی دارد. کتابها و مجله‌های کمک درسی می‌توانند کار روزآمد کردن ریاضیات را از عهده برآیند. نکتهٔ دیگر آنکه در تألیف کتابهای درسی استعداد متوسط دانش‌آموزان در نظر گرفته می‌شود. به کمک کتابها و مجله‌های جنبی می‌توان نیازهای علمی دانش‌آموزان با استعدادهای بالاتر از سطح متوسط را برآورده ساخت و برای دانش‌آموزان با استعدادهای پایین‌تر از سطح متوسط می‌توان مطلب را به‌گونهٔ ساده‌تر بازگو و تشریح کرد.

□ یک ریاضیدان، غیر از ریاضیات باید از چه علومی آگاهی داشته باشد؟

■ یک ایرانی که بخواهد ریاضیدان بشود، نه تنها لازم است که در زبان مادری خود فارسی تبحر داشته باشد تا بتواند متنهای ریاضی را به درستی بفهمد، بلکه باید زبان عربی را برای درک و فهم ریاضیات کهن این سرزمین و زبان انگلیسی را برای درک و فهم ریاضیات روز نیز به‌خوبی بداند و افزون بر آن با دانشهای کامپیوتری به اندازهٔ کافی آشنایی داشته باشد. امروزه ریاضیات و کامپیوتر چنان در هم گره خورده‌اند که فراگیری هر یک مستلزم داشتن تبحر در دیگری است.

□ جنابعالی غیر از ریاضی در چه مواردی تبحر دارید؟

■ کاملاً اغراق است که گفته شود در ریاضیات تبحر دارم. سطح اطلاعات ریاضی‌ام مقدماتی و در حد پیش‌دانشگاهی است. شوق و ذوقی به ریاضیات دارم و دوست دارم دانسته‌هایم را در دسترس دیگران بگذارم. فرانسه و انگلیسی را تنها تا حد درک متنهای ریاضی به این زبانها می‌دانم و متنهای کهن ریاضیات به زبان عربی را تا حدّی و با دشواری می‌توانم بفهمم.

□ استاد! در خاتمه چنانچه رهنمودی به نظرتان می‌رسد، بفرمایید.

■ الف) دست‌اندرکاران آموزش ریاضی اعم از مسئولان اجرایی، برنامه‌ریزان و نویسندگان کتابهای درسی، و بویژه معلمان، باید این نکتهٔ مهم را در نظر داشته باشند که آموزش ریاضی به انتقال دانستنیها خلاصه نمی‌شود؛ یک جنبهٔ مهم آن پرورش اندیشمندانی با ذهنهای خلاق است. در هر مرحله از آموزش و سنجش باید به این جنبهٔ خلاقیت ذهنها توجه جدی مبذول شود.

ب) در آموزش ریاضی (و در آموزش هر درس دیگر) معلم رکن اساسی است و مهمترین نقش را به‌عهده دارد. اگر زندگی او تأمین نباشد و از این بابت آرامش خاطر نداشته باشد، ایفای نقش خویش را به گونهٔ شایسته و بایسته نمی‌تواند از عهده برآید.

ج) جوانان با استعدادهای درخشان، منحصراً آنها نیستند که در آزمونهای ورودی مدرسه‌های خاص پذیرفته می‌شوند. در گوشه‌وکنار کشور، در آبادیهای دور دست، و حتی در شهرهای بزرگ، جوانانی هستند که با داشتن استعدادهایی عالی، به علت کم بضاعتی خانواده‌هایشان به مدرسه و به محیط آموزش راه ندارند. اینان باید شناسایی بشوند و امکان آموزششان فراهم آید.

د) شعار جهانی «همگانی کردن ریاضیات» آنگاه تحقق می‌یابد که در کنار گسترش و تجهیز مؤسسه‌های آموزشی، از نویسندگان کتابهای ریاضی و از ناشران این گونه کتابها و همچنین از صاحبان نشریه‌ها و مجله‌های ریاضی حمایتهای جدّی لازم به‌عمل آید و موجبات دلگرمی آنان به ادامهٔ کار فراهم شود.



ساقه و برگ

● دکترعین‌الله پاشا
دانشگاه تربیت معلم

نمودارها نقشی اساسی در درک مفاهیم دارند و فهم عمیقتر و روشنتری از شرایط موجود به ما می‌دهند. نمودارها و حالت کلی‌تر آن، یعنی شکلها، درواقع نوعی زبان ابتدایی برای برقراری ارتباط و انتقال مفاهیم بوده‌اند. به همین سبب است که معمولاً آغاز ارائه هر مفهومی با شکل و نمودار آغاز می‌شود و کم‌کم که مفاهیم جایگاه خود را در ذهن باز کردند، مطالعه و تحقیق به‌صورت مجردتر ادامه می‌یابد. در مبحث آمار، برای روشنتر شدن ساختمان داده‌ها و درنهایت تجسم توزیع جامعه از نمودارها استفاده می‌کنیم. هریک از نمودارها ویژگیهایی دارند و حتی برخی برای نوع خاصی از شیرها مناسبترند. در مباحث مقدماتی آمار با نمودارهایی از قبیل چندبر فراوانی، مستطیلی، میله‌ای، و دایره‌ای آشنا شده‌ایم. این نمودارها، در یک نگاه می‌توانند ایده‌های کلّی دربارهٔ جامعه را دراختیار بیننده بگذارند. رسالت بیشتر نمودارهای رایج درهمین‌جا به پایان می‌رسد. اگر بخواهیم اطلاعات بیشتری دربارهٔ جامعه و یا نمونه به‌دست آوریم، لازم است محاسباتی روی داده‌ها و جدول فراوانی انجام دهیم. در این نوع نمودار سعی شده است که با حفظ رسالتهای نمودارهای رایج (مثلاً میله‌ای) بتوان از نمودار استفاده‌های دیگری نیز برد. درواقع، دراین نوع نمودار، داده‌ها کنارگذاشته نمی‌شوند، بلکه به نوعی سامان‌دهی می‌شوند که هم کار نمودارها را انجام می‌دهند و هم برای برخی محاسبات دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این نوع نمودارها با عنوان نمودار ساقه‌و برگ در کتابهای درسی توضیح داده شده است که با چند مثال سعی می‌کنیم ایده‌های موجود در آن را روشنتر کنیم.

مثال: یک نمودار ساقه و برگ برای داده‌های زیر رسم کنید :

۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۱، ۱۴، ۱۲، ۲، ۵، ۶، ۸،
۳۷، ۳۵، ۳۲، ۳۱، ۲۶، ۲۶، ۲۵، ۲۲، ۲۱، ۲۰، ۲۰، ۲۱

حل: با افزودن ۰ به سمت چپ عددهای یک رقمی، تمام داده‌ها دورقمی خواهند شد.

برخی از این داده‌ها در فاصلهٔ ۰ تا ۹ و برخی دیگر در فاصله ۱۰ تا ۱۹و تعدادی در فاصلهٔ۲۰ تا ۳۹ و بقیه در فاصله ۳۰ تا ۴۰ قرار دارند. بنابراین ساقه را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت :

۰
۱
۲
۳

حال به تشکیل برگها می‌پردازیم؛ روی ساقه در محل ۰ داده‌های یک رقمی قرار می‌گیرند، پس درمحل ۰ روی ساقه برگ زیر را داریم:

۰	۲۵۶۸

داده‌ها را در برگها از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم. آنچه که در بالا آمده است، نمایش داده‌های ۲، ۵، ۶، و ۸ است. به همین ترتیب می‌توانیم سایر برگها را نیز تشکیل دهیم.

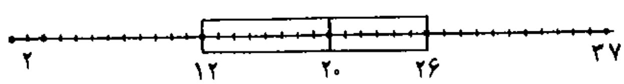
نتیجه نهایی به‌صورت زیر است:

۰	۲۵۶۸
۱	۱۲۲۳۴۵
۲	۰۰۱۱۲۵۶۶
۳	۱۲۵۷

از روی این نمودار معلوم می‌شود که بیشترین داده‌ها در فاصله ۲۰ تا ۲۹ قرار دارند، به همین دلیل است که برگ مربوطه در محل ۲ از همه بلندتر است. درفاصلهٔ ۰ تا ۹ و ۳۰ تا ۳۹ تعداد داده‌ها با هم برابرند. دامنهٔ تغییرات این داده‌ها عبارت است از ۳۵ = ۲ − ۳۷ کوچکترین داده (۲ ۰) وبزرگترین‌داده(۷ ۳) است. میانهٔ این داده‌ها را به راحتی می‌توان حساب کرد، تعداد داده‌ها برابر ۲۲ است، پس میانه برابر میانگین دو داده‌ای است که در وسط قرار گرفته‌اند. یعنی میانه برابر میانگین یازدهمین و دوازدهمین داده است، و از آنجا که داده‌ها به ترتیب روی ساقه و برگها قرار گرفته‌اند، پیدا کردن این دو داده به آسانی انجام می‌شود:

$$\text{میانه}=\tilde{X}=\frac{۲۰+۲۰}{۲}=۲۰$$

میانه داده‌های کمتر از ۲۰ نیز به راحتی از این نمودار برابر K به‌دست می‌آید. میانه داده‌های بیشتر از ۲۰ نیز برابر ۲۶ می‌باشد. با داشتن این اطلاعات می‌توانیم نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را نیز رسم کنیم:



از این نمودار معلوم می‌شود که داده‌ها در سمت راستِ میانه به هم نزدیکتر و درسمت چپ میانه ازهم دورترند.

از نمودار ساقه و برگ، دو بریدگی و فاصلهٔ مشخص بین داده‌ها مشاهده می‌شود. یکی از این بریدگیها فاصلهٔ از ۱۵ تا ۲۰ است، دراین فاصله هیچ داده‌ای نیست، بریدگی دیگر فاصله از ۲۶ تا ۳۱ است.

مثال: نمودار ساقه و برگ و همچنین نمودار جعبه‌ای داده‌های زیر را رسم کنید:

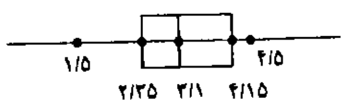
۲/۸ و ۲/۵ و ۲/۴ و ۱/۶ و ۱/۷ و ۳/۲ و ۱/۵
۲/۶ و ۳/۴ و ۳/۵ و ۳/۸ و ۱/۶ و ۳/۲ و ۳/۱
۴/۴ و ۴/۵ و ۴/۳ و ۲/۶ و ۴/۴ و ۴/۲ و ۴/۱

حل: برای رهایی ازاعشارها، قرارداد می‌کنیم که اعداد را بدون اعشار بنویسیم.

مثلاً به‌جای ۳/۲، می‌نویسیم ۳۲. با این تغییر، ساقه عبارت خواهد بود از ۱ و ۲ و ۳ و ۴. درنتیجه نمودار به‌صورت زیر شکل می‌گیرد:

۱	۵۶۶۷
۲	۴۴۵۶۶۸
۳	۱۲۴۵۸
۴	۱۲۳۴۴۵

این نمودار نشان می‌دهد که داده‌ها تقریباً به‌طور مساوی در فاصله‌های ۱ تا۲، ۲ تا۳، ۳ تا۴ توزیع شده‌اند. میانهٔ داده‌ها عبارت است از ۳۱. میانهٔ داده‌های کمتر از ۳۱ برابر ۲۳/۵ و میانهٔ داده‌های بالاتراز ۳۱ برابر ۴۱/۵ و یا به معیار اصلی داده‌های اوّلیه، میانهٔ کل برابر ۳/۱ و میانهٔ داده‌های بیش از ۳/۱ برابر ۴/۱۵ ومیانهٔ داده‌های کمتر از ۳/۱ برابر ۲/۳۵ است. نمودار جعبه‌ای به شکل زیر خواهد بود:



بنابراین تراکم داده‌ها در سمت چپ میانه بیشتر است.

یادآوری

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، هر نموداری مناسب نوعی از داده‌هاست، مثلاً اگر متغیر مورد مطالعهٔ شما، رنگ چشم انسان باشد، نمودار میله‌ای، مستطیلی و یا چندبر فراوانی برای آن مناسب نیست و اصلاً کاربرد و تفسیری دراین باره ندارند. نمودار مناسب این‌گونه داده‌ها، نمودار دایره‌ای است. ولی اگر متغیر مورد مطالعه، قد دانش‌آموزان باشد، نمودار مستطیلی و یا چندبر فراوانی نمودار مناسبی است. اگر داده‌ها به گونه‌ای باشند

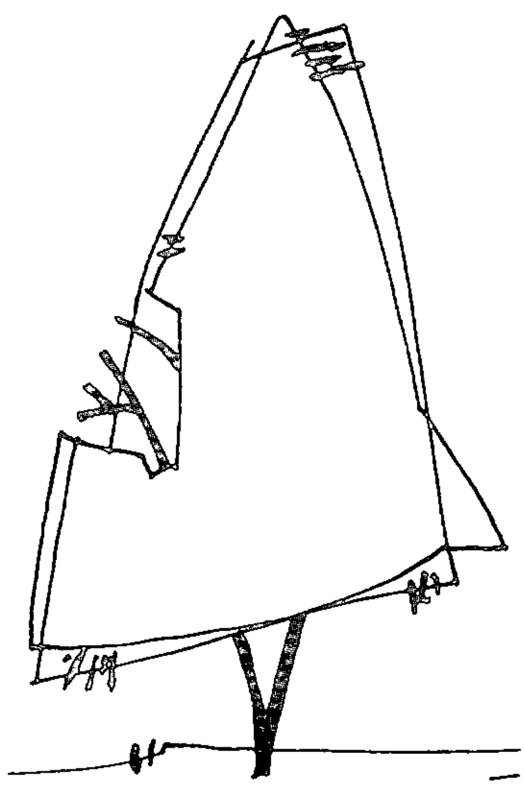
که نتوان یک ساقهٔ مشخص و مناسب برای آن تشخیص داد، نمودار ساقه و برگ مناسب نخواهد بود، مثلاً اگر داده‌ها به صورت زیر باشند:

۱۲، ۱۶/۷۵، ۱۳/۱، ۱۷، ...

در اینجا اگر ساقه را ۱ بگیریم، آن‌گاه برای نمایش ۱۶/۷۵ مشکل داریم، زیرا در برگها ارقام معمولاً از یک نوع خواهند بود. اگر بخواهیم برگ این ساقه را به شکل زیر بنویسیم:

۱ ۲۳۸۶/۷۵۷

نمی‌توان به درستی تشخیص داد که بُرد ممیزها تا کجاست و همچنین این طرز نوشتن باعث می‌شود که این برگ به‌طور کاذب بزرگتر جلوه‌کند و تفسیر غلط از داده‌ها در اختیار ما بگذارد. بنابراین اگر نتوانیم داده‌ها را یک شکل کنیم، مثلاً هم بادو رقم اعشار و ارقام صحیح برابر، (مثلاً ... ، ۱/۴۵، ۱/۶۳، ۱/۷۰) نمودار ساقه و برگ مناسب نخواهد بود.





تفریح اندیشه ۲

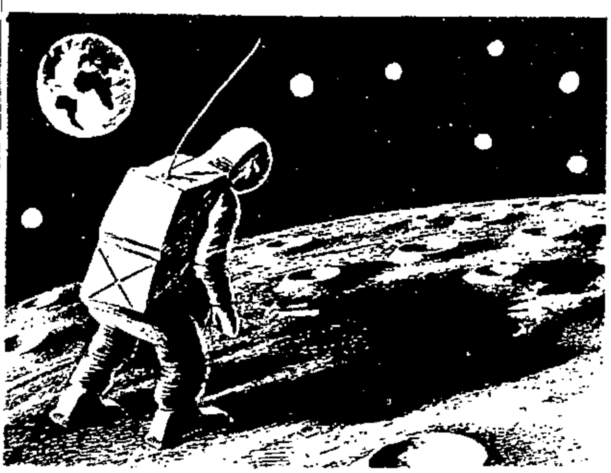
مسافرت به سیّاره‌ای دیگر

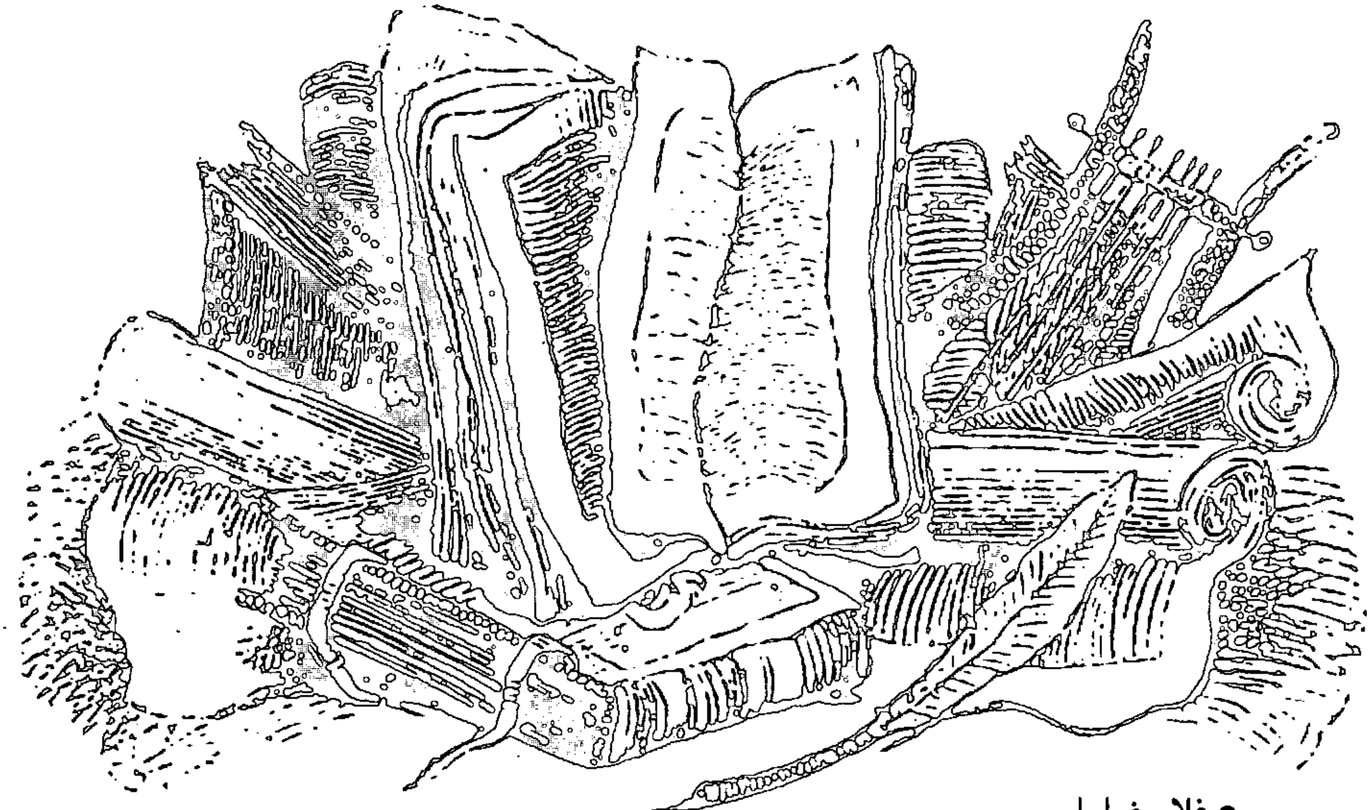
سیارهٔ توپسیس "Topsis" از این لحاظ غیر متعارف است که هر نیمکرهٔ آن مخروط دوّاری به ارتفاع ۳۰۰۰ کیلومتر و شعاع قاعدهٔ ۴۰۰۰ کیلومتر است. دو مخروط یاد شده قاعده به قاعده چنان به هم وصل شده‌اند که استوا دایرهٔ قاعده و فاصلهٔ قائم بین قطبها ۶۰۰۰ کیلومتر است.

از آنجا که روزهای سفر در این سیاره خیلی طولانی نیستند، و شما به عنوان یک آدم زمینی، ممکن است در ابتدا و در حرکت به دور این سیاره، با دشواریهایی روبه‌رو شوید، مسأله‌ای آورده‌ایم که برای مشخص کردن دستگاه جهت‌یابی آنها مفید است.

A و B دو شهرند که بر استوا و به فاصلهٔ ۱۸۰ درجه از یکدیگر قرار گرفته‌اند. کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین آنها چیست؟

جواب در صفحهٔ ۸۸





● غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۲)

شمارهٔ ۲۷ مجلهٔ یکان را ورق می‌زنیم. بهای این شماره با ۵۶ صفحه مطلب، همچنان ۲۰ ریال است. مجله همچنان اعضای هیأت تحریریه و سردبیر ندارد و اغلب کارهای آن از جمله نوشتن غالب مقالات آن را صاحب امتیاز و مدیر مسئول آن انجام می‌دهد. و در آن غیر از مطالب ریاضی از مسایل فیزیک و شیمی نیز می‌توان خبر گرفت.

در سرمقالهٔ مجله، با عنوان **دبیرستانهای خاص** چنین آمده است که :

«عدم توجه دستگاه آموزشی در بهبود وضع دبیرستانهای دولتی و سهل‌انگاری یا عدم توانایی در تکمیل کادر آموزشی آنها بین معلومات محصلین این مدارس و محصلین مدارس ملی (یعنی، غیر انتفاعی فعلی) اختلاف سطحی پدید آورده است. اجرای برنامه‌های خاص در دبیرستانهای ملی (اشاره به مادهٔ واحد، مصوّب هزار و صد و دوازدهمین جلسهٔ شورای عالی فرهنگ، ۴۴/۱۱/۲۴، که طبق آن اجازه می‌دهد برنامهٔ جامع کمیسیون خاص در دبیرستانهایی که آمادگی دارند اجرا شود) این اختلاف سطح را بیشتر خواهد کرد و این خود نسبت به اکثریت محصلین که استطاعت مالی برای تحصیل در مدارس خاص را ندارند ظلمی فاحش خواهد بود.»

مجلهٔ یکان مقالاتی دارد با عنوان «خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان» که نویسندهٔ آنها دکتر **محسن هشترودی**[1] است. در این شماره، مرحوم هشترودی یادی از کنگرهٔ مسکو در ۱۹۳۵ کرده است و طی آن می‌نویسد :

«این کنگره آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان قبل از جنگ جهانی دوم بود[2]. شبی پس از پایان جلسهٔ رشتهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی، **کارتان** فقید (**الی کارتان** بزرگ) و اسخوتن «Schowten» (که هم اکنون رئیس مرکز ریاضی **آمستردام** است) و **هرمان وایل**"Hermann Weyl" و دسته‌ای از محققین در حسابهای تانسوری و نظریهٔ التصاقها گفتگو می‌کردند. کوچه‌های مسکو در نزدیکی کرملین همگی تقریباً رو به کرملین ره می‌برند، گویی متمرکزند. وایل فقید این سؤال را عنوان کرد که : «آیا هندسهٔ مقیاسی وجود دارد که ژئودزیکهای آن (اقصرفاصله، در اینجا باید اشاره کرد که در تمام فضاهای مقیاسی ژئودزیکها و خطوط مستقیم بر هم منطبق نیستند، یعنی، بین دو نقطه، یک خط مستقیم و یک منحنی اقصرفاصله وجود دارد که از هم متمایزند) همه متمرکز باشند؟»

آن شب، پس از جدا شدن این عده از هم، اسخوتن شبانه این التصاق را پیدا کرد که هم‌اکنون به نام او در روسیهٔ شوروی

به **التصاق اسخوتن** معروف است. عجیب است که در ممالک غربی، گاهی این التصاق را به نام التصاق مسکو می‌نامند.

نویسندهٔ این سطور قریب ۱۵ سال پیش، خواص محرم این التصاق را تعیین کرد و مقارن همان زمان **آندره لیشنرویچ**، استاد **کلژدوفرانس** نیز ثابت کرد که بین فضاهای نقطه‌ای (فضاهایی که با نقطه معرفی می‌شوند نه با نقطه و یک امتداد یا با نقطه و یک سطح) تنها فضایی که به سیستمهای غیر هلنوم مکانیک تحلیلی مرتبط است، همین التصاق نیمه متقارن اسخوتن است. این التصاق را نیمه متقارن می‌نامند زیرا به پیچش فضا از روی یک حامل تنها و به کمک تانسور اصلی معین می‌شود (بدیهی است که این فضا فضایی عادی نیست، یعنی، دارای انحناست، پیچش فضا انحنای مربوط به انتقال مبدأ مختصات است.)

نظیر این امر در بسیاری از کنگره‌ها اتفاق افتاده است که مسأله‌ای در جلسه‌ای از رشته‌های کنگره یا حتی در خارج از جلسه مطرح شده و یک شبه توسط یکی از ریاضیدانان مقتدر حل گردیده است .

مجله قسمت ثابتی دارد به نام «از هر جایی یادداشتی» که در آن چنانچه از نامش پیداست به مطالب گوناگون و شنیدنی می‌پردازد. در این شماره، یعنی شمارهٔ ۲۷، در این صفحه و تحت عنوان **زیج چیست؟** از گاهنامهٔ ۱۳۰۹ سید **جلال‌الدین طهرانی**، چنین می‌خوانیم :

«در اصطلاح علمای هیأت و نجوم، **زیج** عبارت است از جدولی که کمیت حرکات سیّارات در آنها ضبط شده بنابر آنکه سیارات به گرد شمس مدارات مستدیرتامّه [۳] بپیمایند. چه بدین فرض، مقدار حرکت هر سیاره را در هر لحظه می‌توان تعیین نمود و برای آنکه مواقع محسوبهٔ سیارات مطابق با مرصود شود [۴]، اصلاحات در جداول قائل شده‌اند و برای آن اصلاحات نیز جداولی وضع نمودند موسوم به تعدیلات (اصلاح حرکت مابین مدار دایره و بیضی) —

خلاصه، زیج کتابی است که حاوی جداول راجع به حرکات سیارات و تعدیلات باشد که بتوان در هر وقت، موقع حقیقی سیاره‌ای را از روی آن جداول تعیین نمود.»

در بخش ثابت سرگرمیهای ریاضی، معمایی داریم با عنوان **اختلاط چای** از **سام لوید** ؛ معماپرداز نابغه، که در آن چنین آمده است :

«یک تاجر چینی دو صندوق مکعب شکل با ابعاد مختلف چای را خریداری کرد. صندوق اوّل محتوی چای سبز و صندوق دوم محتوی چای سیاه بود. بعد از آنکه چایها را مخلوط کرد، توانست بیست و دو بستهٔ مکعب شکل از نوع چای مخلوط فراهم آورد. نسبت اختلاط دو چای را تعیین کنید.»

اشاره‌ها:

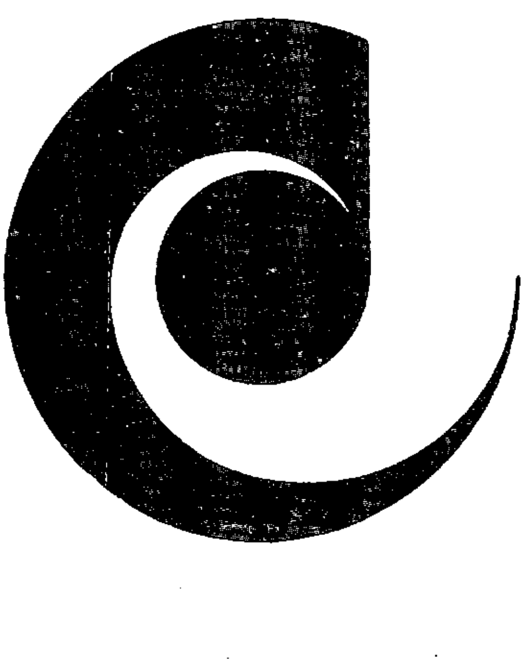
۱. دکتر محسن هشترودی، استاد ارجمند ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران بود، اما وقایع زمانه استاد را از کار اصلی‌اش بازداشت و به‌کار مصاحبه با مجله‌های آن زمان وادار کرد و بازده کار استاد را به حداقل رساند.

۲. این موضوع نشان می‌دهد که چگونه اوضاع اجتماعی می‌تواند بر وضعیت علمی اثر گذارد. در این باره به این چند بیت سعدی نیز که از قصیده‌ای است در مدح **صاحب دیوان** توجه کنید :

به هیچ خلق نباید که قصه‌پردازی	مگر به صاحب دیوان عالم عادل
نه زان سبب که مکانی و منصبی دارد	بدین قدر نتوان گفت مرد را فاضل
از آن سبب که دل و دست وی همی باشد	چو ابر بر همه عالم به رحمتی شامل
ز بس که اهل هنر را بزرگ کرد و نواخت	بسی نماند که هر ناقصی شود کامل

۳. یعنی دایرهٔ کامل، نه مسیر متعارفشان که می‌دانیم بیضی است.

۴. یعنی محاسبات با تجربه بخواند.





آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۱۹)

●حمیدرضا امیری

از کتاب:
Multiple choice tests in abvanced mathematics

TEST 3 SECTION I

Time allowed: 1¼ hours

(Twenty Questions) Questions 1–20

1. $\frac{d}{dx}(e^{\cos x}) =$

A $e^{\cos x}$

B $e^{\cos x} \sin x$

C $-e^{\cos x} \sin x$

D $e^{\sin x}$

E $e^{\sin x} \cos x$

تست ۳ بخش ۱

وقت ۱$\frac{1}{4}$ ساعت

سؤالهای ۱ الی ۲۰ (بیست سؤال)

۱. حاصل $\frac{d}{dx}(e^{\cos x})$ کدام است؟

۱) $e^{\cos x}$ ۲) $e^{\cos x} \sin x$ ۳) $-e^{\cos x} \sin x$

۴) $e^{\sin x}$ ۵) $e^{\sin x} \cos x$

2. The gradient of the straight line with equation $ax + by = c$, where a and b are non zero, is

A a/b

B $-a/b$

C b/a

D $-b/a$

E c

۲. ضریب زاویهٔ خط به معادلهٔ $ax + by = c$ وقتی که a و b ناصفرند، برابر است با:

۱) $\frac{a}{b}$ ۲) $-\frac{a}{b}$ ۳) $\frac{b}{a}$ ۴) $-\frac{b}{a}$ ۵) c

3. $\sum_{r=1}^{n} (2r - 1) =$

A n^2

B $n^2 - 1$

C $n^2 + n - 1$

D $n^2 + 2n$

E $n^2 + n$

۳. حاصل $\sum_{r=1}^{n}(2r-1)$ کدام است؟

۱) n^2 ۲) n^2-1 ۳) n^2+n-1
۴) n^2+2n ۵) n^2+n

4. The number of arrangements which can be made using all the letters of the word RAPIDS, if the vowels are never separated, is

A 30

B 60

C 120

D 240

E 720

۴. تعداد جایگشتهایی که می‌توان با همهٔ حروف کلمهٔ RAPIDS ساخت، به شرط آن که حروف صدادار همواره کنار هم باشند.

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰ ۵) ۷۲۰

5. $\int \frac{1+3x^2}{x} dx =$

A $\frac{x+x^3}{x}$ + constant

B $-\frac{1}{x^2}+3$ + constant

C $x^3+\ln x$ + constant

D $3+\ln x$ + constant

E $\frac{3}{2}x^2+\ln x$ + constant

۵. حاصل $\int \frac{1+3x^2}{x} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{x+x^3}{x}+c$ ۲) $-\frac{1}{x^2}+3+c$
۳) $x^3+\ln x+c$ ۴) $3+\ln x+c$
۵) $\frac{3}{2}x^2+\ln x+c$

6. The principal value of the argument of the complex number $-1-i\sqrt{3}$ is

A $-\frac{2\pi}{3}$

B $-\frac{5\pi}{6}$

C $\frac{2\pi}{3}$

D $\frac{5\pi}{6}$

E $-\frac{\pi}{3}$

۶. مقدار اصلیِ آرگومان عددِ مختلط $-1-i\sqrt{3}$ عبارت است از:

۱) $\frac{-2\pi}{3}$ ۲) $\frac{-5\pi}{6}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$ ۵) $-\frac{\pi}{3}$

7. $y=\sin^{-1}(3x)$.

$\frac{dy}{dx} =$

A $-\frac{3\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$

B $3\cos^{-1}(3x)$

C $\frac{1}{\sqrt{(1-9x^2)}}$

D $\frac{3}{\sqrt{(1-9x^2)}}$

E $\frac{1}{3\sqrt{(1-9x^2)}}$

۷. اگر $y=\sin^{-1}3x$ (در این صورت حاصلِ) $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $-\frac{3\cos 3x}{\sin^2 3x}$ ۲) $3\cos^{-1}3x$
۳) $\frac{1}{\sqrt{(1-9x^2)}}$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{(1-9x^2)}}$
۵) $\frac{1}{3\sqrt{(1-9x^2)}}$

8. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$ and $y = 1$ when $x = \pi/2$. Then $y =$

A $e^{(1+\cos x)}$

B $e^{(1-\sin x)}$

C $e^{(-1+\sin x)}$

D $e^{(1-\cos x)}$

E $e^{-\sin x}$

۸. در صورتی که $x = \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $\frac{dy}{dx} + y\cos x = ۰$ و $y = ۱$. بنابراین مقدار y برابر است با

۱) $e^{(1+\cos x)}$ ۲) $e^{(1-\sin x)}$ ۳) $e^{(-1+\sin x)}$

۴) $e^{(1-\cos x)}$ ۵) $e^{-\sin x}$

9. $\cos^2\theta + 3\sin^2\theta \equiv$

A $2 + \cos 2\theta$

B $3 - 2\cos 2\theta$

C $2 - \cos 2\theta$

D $2\cos 2\theta - 1$

E none of the above

۹. حاصل (ساده شدهٔ) عبارت $\cos^{۲}\theta + ۳\sin^{۲}\theta$ برابر است با:

۱) $۲ + \cos ۲\theta$ ۲) $۳ - ۲\cos ۲\theta$

۳) $۲ - \cos ۲\theta$ ۴) $۲\cos ۲\theta - ۱$

۵) هیچ کدام از موارد پیش

10. Which one of the following functions is odd and of period 2?

A $\sin(\pi x/2)$

B $\sin(\pi x)$

C $\cos(\pi x)$

D $x\sin(\pi x)$

E $\sin(\pi x) + \cos(\pi x)$

۱۰. کدام یک از تابعهای زیر، فرد با دورهٔ تناوب ۲ می‌باشند؟

۱) $\sin\frac{\pi x}{۲}$ ۲) $\sin\pi x$ ۳) $\cos\pi x$

۴) $x\sin\pi x$ ۵) $\sin\pi x + \cos\pi x$

11. The arithmetic mean of α and β is 4·5 and their geometric mean is 2. A quadratic equation whose roots are α and β is

A $2x^2 - 9x + 4 = 0$

B $x^2 + 9x + 4 = 0$

C $2x^2 + 9x + 4 = 0$

D $x^2 - 9x + 4 = 0$

E $x^2 + 9x - 4 = 0$

۱۱. میانگین حسابی α و β ، ۴/۵ و میانگین هندسی آنها ۲ است. معادلهٔ درجهٔ دومی که α و β ریشه‌های آن باشند کدام است؟

۱) $۲x^{۲} - ۹x + ۴ = ۰$ ۲) $x^{۲} + ۹x + ۴ = ۰$

۳) $۲x^{۲} + ۹x + ۴ = ۰$ ۴) $x^{۲} - ۹x + ۴ = ۰$

۵) $x^{۲} + ۹x - ۴ = ۰$

12. Given that the real root of the equation

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 13 = 0$$

lies in the interval $[n, n+1]$ where $n \in \mathbb{Z}$, then $n =$

A -2

B -1

C 0

D 1

E 2

۱۲. با فرض آنکه ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۵x - ۱۳ = ۰$ در بازهٔ $[n, n+1]$ قرار داشته باشند و $n \in Z$ در این صورت n برابر است با

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱ ۵) ۲

13. The tangent of the acute angle between the lines $3x - y + 4 = 0$ and $x - 2y + 5 = 0$ is

A 1

B $\frac{7}{5}$

C -1

D 5

E -7

۱۳. تانژانت زاویهٔ حـادهٔ بین دو خط (به مـعـادله‌های) $3x-y+4=0$ و $x-2y+5=0$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) -1 ۴) ۵ ۵) -7

14. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

A $-5\pi/6$

B $-\pi/2$

C $-\pi/6$

D $\pi/2$

E $7\pi/6$

۱۴. حـاصل $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ کـدام است؟

۱) $-5\frac{\pi}{6}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$ ۵) $\frac{7\pi}{6}$

15. The value(s) of p for which the vectors (p**i** + 2**j** − 3p**k**) and (p**i** + **k**) are perpendicular is (are)

A 0 only

B 3 only

C 0 and 3

D 1 and 2

E 1 only

۱۵. مـقـدار (مـقـادیر) P در صـورتی کـه بردارهای $(pi+2j-3pk)$ و $(pi+k)$ برهم عمود باشند کدام است؟

۱) فقط ۰ ۲) فقط ۳ ۳) ۰ و ۳

۴) ۱ و ۲ ۵) فقط ۱

16. Given that
$\ln x = p$, $\ln y = q$, $\ln z = r$,
where $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, then

$\ln\left(\frac{x^a y^b}{z^c}\right) =$

A $\frac{ap + bq}{cr}$

B $p^a + q^b - r^c$

C $\frac{abpq}{cr}$

D $\frac{p^a q^b}{c^r}$

E $ap + bq - cr$

۱۶. با فـرض آنکه $\ln x=p$ و $\ln y=q$ و $\ln z=r$ کـه $x,y,z\in\mathbb{R}^+$، در این صـورت مقـدار $\ln(\frac{x^a y^b}{z^c})$ برابر است با:

۱) $\frac{ap+bq}{cr}$ ۲) $p^a+q^b-r^c$

۳) $\frac{abpq}{cr}$ ۴) $\frac{p^a q^b}{c^r}$

۵) $ap+bq-cr$

17. Given that
$x^3 - ax^2 + bx - c \equiv (x-1)^2(x+1)$,
then

A $a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1$

B $a = -1, \quad b = 1, \quad c = 1$

C $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$

D $a = 3, \quad b = 3, \quad c = 1$

E none of the above

۱۷. هرگاه داشته باشیم

$x^{۳} - ax^{۲} + bx - c \equiv (x-۱)^{۲}(x+۱)$

در این صورت؛

۱) $a=۱ , b=-۱ , c=-۱$

۲) $a=-۱ , b=۱ , c=۱$

۳) $a=۱ , b=-۱ , c=۱$

۴) $a=۳ , b=۳ , c=۱$

۵) هیچ‌کدام از موارد پیش

18. The point P in the Argand diagram represents the complex number $4 + 3i$. The tangent of the angle made by OP with the imaginary axis is

A $\frac{3}{4}$

B $\frac{4}{3}$

C $\frac{3}{5}$

D $\frac{4}{5}$

E $\frac{5}{4}$

۱۸. نقطه P در نمودار آرگان نمایش دهندهٔ عدد مختلط ۳i + ۴ می‌باشد. تانژانت زاویه‌ای که OP با محور موهومی می‌سازد برابر است با

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$ ۵) $\frac{۵}{۴}$

19. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} \cdot \cos x = y \sin x$$

is, P being an arbitrary constant.

A $y \cos x = P$

B $y \sec x = P$

C $y \sin x = P$

D $y = P \cos x$

E $y = P e^{\sec^2 x}$

۱۹. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}.\cos x = y\sin x$ برابر است با (p ثابت دلخواهی است)

۱) $y=\cos x = p$ ۲) $y\sec x = p$

۳) $y=\sin x = p$ ۴) $y = p\cos x$

۵) $y = pe^{\sec^{۲} x}$

20. The complete solution set of the inequality

$$x^2 + 4x + 5 > 0,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\mathbb{R}^+$

B $\{x : x > 5\}$

C $\{x : -1 < x < 5\}$

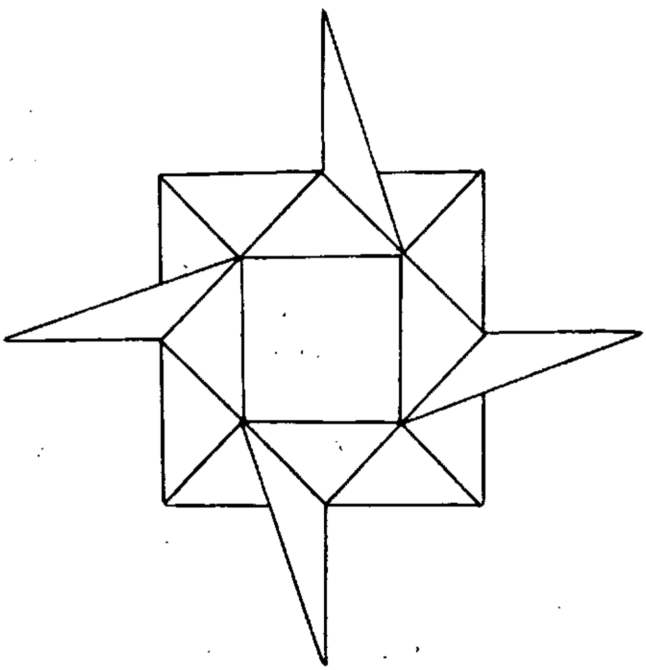
D $\{x : x > 5\} \cup \{x : x < -1\}$

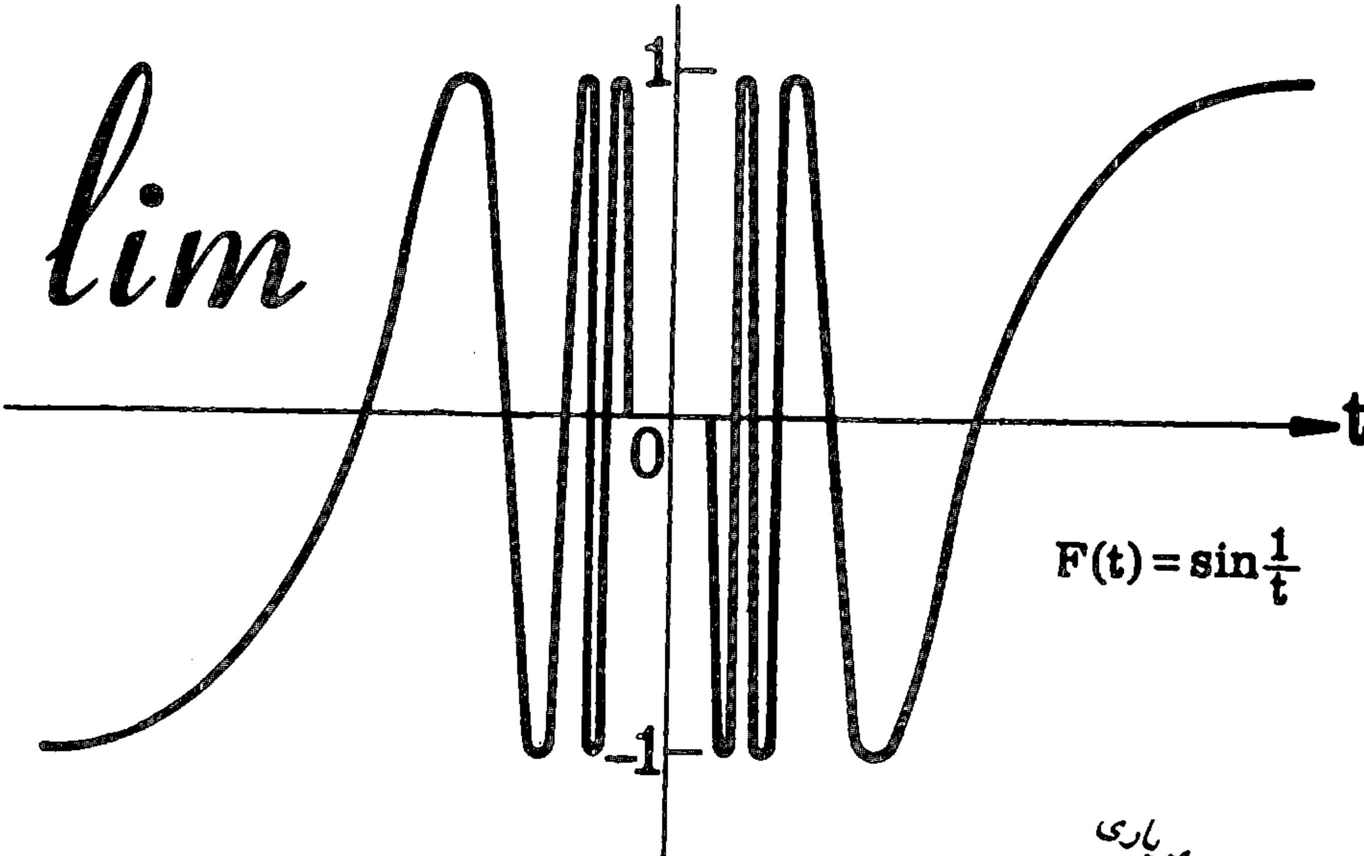
E $\mathbb{R}$

۲۰. اگر $x \in \mathbb{R}$ ، مجموعهٔ کامل پاسخ نابرابری $x^{۲}+۴x+۵>۰$ وقتی $x \in \mathbb{R}$ برابر است با

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\{x:x>۵\}$ ۳) $\{x:-۱<x<۵\}$

۴) $\{x:x>۵\}\cup\{x:x<-۱\}$ ۵) $\mathbb{R}$





● پرویز شهریاری

آموزش مفهوم حدّ در دبیرستان

از زمانی که محاسبهٔ محیط و مساحت دایره، جسم دوار مفهوم عددهای گنگ وارد برنامهٔ ریاضی دبیرستان شد، به ناچار به همراه آنها، داوری دربارهٔ بی‌نهایت کوچکها و روندهای بی‌پایانی که تا بی‌نهایت ادامه دارد مطرح شد. در ضمن، در همین دوره روشن شد که درک مفهومهای دقیق دانش و استدلالی کردن آنها، جز بر پایهٔ آنالیز ریاضی ممکن نیست. به‌همین مناسبت، مفهوم حد و روشهای حدی، که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهومهای مربوط به‌آن دشواریهایی پدید می‌آید، خود را وارد کتابهای درسی دبیرستانی کرد.

ولی از دیرباز، به ویژه در رابطه با محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبهٔ عدد π) و محاسبهٔ سطح و حجم جسمهای دوار، از مفهوم حد، بدون این که نامی از آن برده شود و بدون این که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده است. ارشمیدس که در سدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیست، به‌جای محیط دایره، محیط چندضلعیهای منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره را در نظر گرفت و حد π را به‌تقریب برابر با $۳\frac{۱}{۴}$ به دست آورد. جمشید کاشانی هم در کتاب «رسالة‌المحیطیه» همین راه را دنبال می‌کند؛ و ۳×۲^n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید n را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای ۶۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین باشد، اختلاف بین محیطهای چندضلعیهای محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور n را برابر ۲۸ می‌گیرد؛ در این صورت تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی برابر ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ می‌شود و عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

کاشانی، محیط دایره را برابر با میانگین حسابی محیطهای چندضلعیهای محاطی و محیطی به حساب می‌آورد و، سپس، با تقسیم بر قطر دایره، عدد π را محاسبه می‌کند. روش کاشانی را برای $n=۰$، $n=۱$ و $n=۲$ دنبال کنیم.

برای $n=۰$ با مثلثهای متساوی‌الاضلاع درونی و بیرونی سر و کار داریم. اگر شعاع دایره را برابر واحد فرض کنیم، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن برابر $\sqrt{۳}$ یا به تقریب

۱/۷۳۲ و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره برابر $۲\sqrt{۳}$ و یا به تقریب ۳/۴۶۴ می‌شود. اگر محیط دایره را میانگین حسابی محیطهای دو مثلث بگیریم:

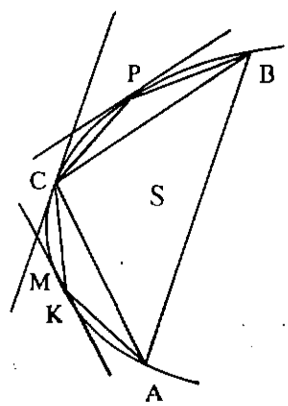
$$\text{محیط دایره} \approx \frac{۳\times۱/۷۳۲+۳\times۳/۴۶۴}{۲}=۷/۷۹۴$$

که اگر به قطر دایره، یعنی ۲، تقسیم کنیم، به عدد ۳/۸۹۷ برای عدد π می‌رسیم که از حقیقت دور است.

برای n = ۱ یعنی ۶ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، محیط ۶ ضلعی محاطی برابر ۶ و محیط شش ضلعی محیطی برابر ۶/۹۲۸ و محیط دایره به تقریب برابر ۶/۴۶۴ به دست می‌آید که با تقسیم بر ۲ (قطر دایره) مقدار تقریبی π برابر ۳/۲۳۲ می‌شود که گرچه نسبت به مقدار قبلی دقیق‌تر است، هنوز با π فاصله دارد.

برای n = ۲ یعنی ۱۲ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، میانگین محیطهای دو چند ضلعی برابر ۶/۳۷۰۴ و برابر π، عدد ۳/۱۸۵۲ به دست می‌آید. می‌بینید هرچه n را بزرگتر کنیم، به مقدار عدد π نزدیکتر می‌شویم.

ارشمیدس از این هم جلوتر می‌رود و مساحت قطعه سهمی را با همین روش حدی محاسبه می‌کند. ارشمیدس، این محاسبه را در رسالهٔ خود به نام «مربع در آوردن سهمی» انجام داده است.



روش ارشمیدس را می‌توان به صورت کوتاه، این‌طور بیان کرد. فرض کنید بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را پیدا کنیم، یعنی مساحت شکلی که بین منحنی سهمی و وتر AB واقع است (شکل را ببینید). مماسی بر سهمی رسم می‌کنیم که موازی وتر سهمی باشد و، سپس، از نقطه تماس C به A و B وصل می‌کنیم تا مثلث ACB به دست آید. در قطعه سهمی‌های تازهٔ AKC و CPB، همان کاری را دنبال می‌کنیم که در قطعه سهمی AMB انجام دادیم. مجموع مساحتهای مثلثهای ACB، AKC و CPB از مساحت قطعه سهمی کمتر است و چهار قطعه سهمی باقی می‌ماند؛ که باید مساحت آنها به مساحت سه مثلث اضافه شود. در این چهار قطعه سهمی هم، همان عمل قبلی را انجام می‌دهیم و چهار مثلث جدید به دست می‌آوریم. اگر این روند را ادامه دهیم، به تدریج مجموع مساحتهای مثلثهای حاصل، به مساحت قطعه سهمی نزدیک می‌شود و، در حد مساحت قطعه سهمی را به ما می‌دهد. ارشمیدس ثابت می‌کند، مساحت مثلث ACB چهار برابر مجموع مساحتهای دو مثلث AKC و CPB است و محیط دربارهٔ مثلثهای بعدی. به این ترتیب، ارشمیدس، برای مساحت قطعه سهمی به دست می‌آورد.

$$S+\frac{۱}{۴}S+\frac{۱}{۱۶}S+\frac{۱}{۶۴}S+\ \dots\ =\frac{۴}{۳}S$$

که در آن، S مساحت مثلث ACB است.

همهٔ این کارها بسیار جالب است، ولی از دو جهت دارای کمبود هستند: ۱) چه پیش می‌آید که با در نظر گرفتن بی‌نهایت جمله، به نتیجه می‌رسیم؟ در اینها کدام خصلت فلسفی و منطقی وجود دارد؟ ۲) در استدلال‌ها دقت منطقی لازم به کار نرفته است و در بخشی از کار به معرفت شهودی متوسل شده‌اند. به زبان روشن‌تر، قانون‌های حاکم بر این‌گونه عمل‌ها تنظیم نشده بود.

برطرف کردن این کمبودها که بیشتر دارای جنبهٔ فلسفی بود، نیاز به دگرگونی در اندیشهٔ اجتماعی و فلسفی در محیطهای روشنفکری داشت و این زمینه را انقلاب کبیر فرانسه فراهم کرد. از یک طرف به دقت در کار اهمیت داده شد، به نحوی که از هیچ مقوله‌ای بدون استدلال و اثبات کامل نگذرند و از طرف دیگر، دیدگاه نسبت به تغییرهای کمیتی و مکانیکی عوض شد و خود انقلاب آموخت که هر تغییر کمیتی، در مرحله‌ای از حرکت خود منجر به تغییر کیفی می‌شود و نتیجه‌ای به بار می‌آورد که شبیه گذشته خود نیست.

□

هنوز بسیاری از پژوهشگران و از جمله بسیاری از نویسندگان تاریخ ریاضیات، بر این عقیده‌اند که اندیشهٔ مربوط به نظریهٔ حد، از آغاز سدهٔ نوزدهم میلادی در کتابهای درسی دبیرستانی وارد شده است. ولی در واقع چنین نیست.

درست است که نماد «Lim» یا «حد» در سال ۱۸۵۳ یعنی در نیمهٔ سدهٔ نوزدهم و به وسیله «ویلیام هامیلتون» ریاضی‌دان و

فیزیکدان ایرلندی وارد در ریاضیات و به تدریج معمول شد، ولی خود مفهوم حد، از خیلی پیش از آن در کتابهای درسی دبیرستانی مورد استفاده قرار می‌گرفت.

در واقع ژان‌دالامبر (Dalember) فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی (۱۷۱۷ ـ ۱۷۷۸ میلادی)، نظریهٔ حد را، که خود در تکامل آن نقش داشت، در کتاب فرهنگ بزرگ خود (دربارهٔ دانش و هنر و پیشه)، که در فاصلهٔ سال‌های ۱۷۵۱ تا ۱۷۷۱ میلادی در پاریس چاپ شد، تعریف کرد، تعریف دالامبر از مفهوم حد چنین است :

«هنگامی کمیتی را حد کمیت دیگر می‌گوییم، که کمیت دوم بتواند به کمیت اول چنان نزدیک شود که فاصله‌اش از آن از هر مقدار مفروضی، هر قدر کوچک و ناچیز، کمتر باشد، در ضمن، کمیت نزدیک شونده به هیچ‌وجه نباید از کمیتی که به آن نزدیک می‌شود تجاوز کند. بنابراین، اختلاف بین این کمیت و کمیت حدی آن، مقداری نامعین است».

و روشن است که این تعریف مربوط به کمیتهای صعودی و یکنواخت است.

نوشته‌های دالامبر، از همان زمان انتشار، در کتاب درسی ریاضیات دبیرستانی نفوذ کرد. یکی از این کتابها، کتاب درسی سیمون لیوویل، برای دبیرستان است.

در تاریخ ریاضیات، نام *سیمون لیوویل* (S.L`Huilier ؛ ۱۷۵۰ـ ۱۸۴۰ میلادی) ریاضیدان سویسی، به خاطر نتیجه‌گیری دقیق علمی خود، شهرت دارد، بین کارهای او می‌توان از پایه‌گذاری آنالیز ریاضی براساس مفهوم حد نام برد. نوشتهٔ لیوویل با عنوان «طرح مقدماتی محاسبهٔ عالی» که در سال ۱۷۸۶ در برلن چاپ شد، در مسابقه‌ای که از طرف، فرهنگستان علوم برلن ترتیب داده شده بود، بهترین شناخته شد. در آن زمان، لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳) رئیس فرهنگستان علوم برلن بود. فعالیت علمی لیوویل و هم کتابهای او با سفارش‌های آموزشی همراه است.

در سال ۱۷۷۳، در لهستان «ادارهٔ آموزش» بنیان گذاشته شد. هدف و برنامهٔ این اداره، فعال کردن آموزش در دبیرستانها بود. در این اداره، بخش کتابخانه ایجاد شد که وظیفه‌اش چاپ کتاب‌های درسی به زبان مادری بود. در ضمن، مسابقه‌ای برای تنظیم کتابهای درسی دبیرستانی ترتیب داده شد.... و سیمون لیوویل برندهٔ کتابهای درسی ریاضیات دبیرستانی شد. کتاب او «مقدمات حساب و هندسه برای دبیرستانها»، در ورشو و در سال ۱۷۷۸ چاپ شد خود لیوویل به لهستان دعوت شد و در آن‌جا به‌عنوان کتابدار و مربی پسر شاهزاده چرتوریسکی (عضو کمیسیون آموزش) مشغول به کار شد. خیلی زود، ترجمه لهستانی کتاب لیوویل هم منتشر شد. ترجمهٔ کتاب را *آندره‌ها ورونسکی* یکی از فعالان تهیه اصطلاح‌های ریاضی در زبان لهستان به عهده گرفت. کتاب درسی حساب در سال ۱۷۷۸ چاپ شد. بعد از دو سال، جلدهای اوّل و دوم کتاب درسی هندسه و در سال ۱۷۸۲ کتاب درسی جبر چاپ شد. کتاب حساب ۱۲ بار، هندسه‌ها ۴ بار و جبر ۳ بار تجدید چاپ شدند.

در این‌جا، کتابهای جبر و هندسهٔ لیوویل را از دیدگاه روش استفاده از نظریهٔ حد بررسی می‌کنیم. کتاب هندسهٔ او تفاوت‌هایی جدیّ با دستگاه اقلیدسی دارد. بررسی شکل‌های متشابه قبل از نسبت‌ها و مثلثات قبل از لگاریتم آمده است. در جلد دوم از توان سوم و ریشهٔ سوم عددها صحبت شده است. مؤلف، توجه زیادی به حل مسأله‌های عملی کرده است. در فصل ۱۱ جلد اول مقدمات «زمین‌سنجی» آمده است. در فصل ۱۲، از کاربرد مثلثات در محاسبه‌های مختلف مربوط به زمین گفتگو کرده است.

لیوویل در کتاب خود، هرجا که توانسته است از مفهوم حد استفاده کرده است. از این دیدگاه، فصل ۱۳ بسیار جالب است. عنوان این فصل چنین است : «به مربع در آوردن دایره یا پیدا کردن مساحت دایره». لیوویل در آغاز می‌گوید : هر چه تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم بیشتر باشد، به دایره شبیه‌تر می‌شوند و نسبت محیطهای آنها، به نسبت شعاع دایره‌های محاطی یا محیطی نزدیک‌تر می‌شود. این قضیه وقتی درست است که به قول لیوویل، «تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم آن‌قدر زیاد باشد که تشخیص آنها از دایره ممکن نباشد، در چنین وضعی، بین شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی، نمی‌توان تفاوتی قائل شد و در واقع، یک شعاع دارند». این استدلال، برخی هندسه‌دانها را قانع کرد که اگر اثبات و استدلالی برای چند ضلعی منتظم درست باشد، برای دایره هم درست است، به شرطی که دایره را همچون چند ضلعی منتظمی در نظر بگیرند که «در آن تعداد ضلعها، از هر عددی بزرگتر باشد» به‌عقیده لیوویل، چنین استدلالهایی نمی‌تواند برای دانش‌آموزان قانع‌کننده باشد : «آنها باید توجه کنند که در این‌جا یک پرسش وجود دارد ؛ زیرا اگر با دقت ارزیابی کنیم، منحنی را نمی‌توان

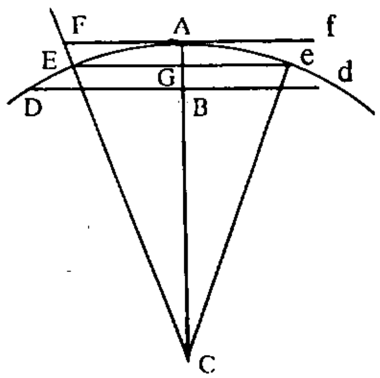
همچون مجموعه‌ای از تعداد بسیاری پاره‌خط‌های راست بسیار کوچک دانست که با هم زاویه می‌سازند». باید مسأله را دقیق‌تر مطرح کرد و این ممکن نیست، مگر به یاری مفهوم حد. آن چه مربوط به «پرسش»، ضمن عبور از چند ضلعی به دایره می‌شود، ما را وامی‌دارد تا به تصوّر عمیق‌تری که لیوویل دربارهٔ «عبور» داشته است پی‌ببریم. در واقع، در این‌جا با تغییری کیفی سر و کار داریم که بعد از یک جریان مداوم تغییرهای کمّی پدید آمده است. باید توجه داشت که بسیاری از مؤلفان کتابهای درسی هندسه از این مفهوم عمیق لیوویل (یعنی تغییر کیفی، درنتیجه یک رشته تغییرهای کمّی) استفاده نکرده‌اند.

لیوویل، طرح خود را با یک پیش قضیه آغاز می‌کند. «همیشه می‌توان ــ گرچه در ذهن ــ یک کمیت را به چنان بخشهای برابری تقسیم کرد که هرکدام از آنها به تنهایی از هر کمیت شناخته شده‌ای کوچکتر باشد». لیوویل، این کمیت را **کمیت مفروض** می‌نامد. فرض کنید بخواهیم کمیت A را چنان به بخشهای برابر تقسیم کنیم که هر کدام از آنها از کمیت مفروض α کوچکتر باشد، عددی پیدا می‌کنیم که از ضرب آن در α، عددی بزرگتر از A به دست آید. فرض کنید این عدد n باشد، یعنی $n\alpha > A$. اگر دو طرف این برابری را بر n تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید: $\frac{A}{n} < \alpha$، همان که می‌خواستیم.

برای مثال فرض کنید کمیتی را به دو بخش برابر تقسیم کنیم، هر بخش را دوباره به دو بخش و غیره؛ و از این راه به بخشی برسیم که از هر مقدار مفروضی که در نظر گرفته‌ایم، کمتر باشد. مؤلف؛ معلم را راهنمایی می‌کند که توجه دانش‌آموز را به این مقدار مفروض (که آن را کمیت نشان شده می‌نامد) جلب کند. این یادآوری مؤلف برای ما اهمیت دارد، زیرا به درک امروزی ما از مفهوم حد (که نقش مقدار مفروض را به اپسیلون می‌دهیم) بسیار نزدیک است.

سپس مؤلف، این قضیه را تنظیم و اثبات می‌کند: «می‌توان دو چند ضلعی منتظم متشابه، یکی را بر دایره محیط و دیگری را در دایره محاط کرد، به نحوی که اختلاف محیطهای آنها، از هر عددی که از قبل نشان شده است، کمتر باشد. مثلاً می‌توان چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی را طوری انتخاب کرد که اختلاف محیطهای آنها، از $\frac{1}{10}$ محیط هر یک از چندضلعیها کمتر باشد». و آن را به این ترتیب ثابت می‌کند.

فرض کنید شعاع دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم کنیم و AB یکی از این بخشها باشد. از نقطهٔ B عمودی بر شعاع رسم



C مرکز دایره‌ای است که کمان DAd کمانی از آن است

می‌کنیم تا محیط دایره را در D و d قطع کند. سپس محیطِ دایره را به ۲، ۴، ۸، ۱۶،... بخش برابر تقسیم می‌کنیم تا جایی که هر بخش از کمان DAd کوچکتر شود. فرض کنید، کمان EAe یکی از این بخشها باشد و فرض کنید کمان $EA = Ae$، پاره‌خط راست Ee را رسم می‌کنیم که البته، بر AC عمود می‌شود. CE و Ce را ادامه می‌دهیم تا مماس بر دایره در نقطهٔ A را در نقطه‌های F و f قطع کند در این صورت Ee و Ff عبارتند از ضلعهای چندضلعیهای منتظم متشابه که اولی در دایره محاط و دومی بر دایره محیط است. محیط این چند ضلعیها را p و P می‌نامیم، در این صورت

$$\frac{p}{P} = \frac{|CG|}{|AC|} \Rightarrow \frac{P-p}{P} = \frac{|AC|-|CG|}{|AC|}$$

و $|AC|-|CG| = |AG|$ ولی

$$|AG| < |AB| = \frac{1}{10}|AC|$$

بنابراین

$$\frac{P-p}{P} < \frac{1}{10} \Rightarrow P-p < \frac{1}{10}P$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$P-p < \frac{1}{10}p$$

مؤلف در یادداشت خود می‌نویسد: «مثال عددی را به این دلیل آوردم که دانش‌آموزان مطلب را بهتر درک کنند، ولی این مثال نمی‌تواند اثباتی کلی و دقیق به حساب آید، زیرا استدلال نباید به عدد نشان شده (در این مثال، عدد $\frac{1}{10}$) بستگی داشته باشد». سپس دو نتیجه، از این قضیه به‌دست می‌آورد:

۱. می‌توان دو چند ضلعی منتظم متشابه، یکی محاط دایره و دیگری محیط بر دایره چنان رسم کرد که، اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از آنها، از هر عدد نشان شده قبلی کوچکتر

باشد. l را محیط دایره بگیرید و فرض کنید :

$P - p < \frac{1}{10} p \quad , \quad P - l < P - p$

یعنی $P - l < \frac{1}{10} p$. ولی $l > p$، پس $P - l < \frac{1}{10} l$.

۲. فرض کنیم، محیط دایره را به صورت یک پاره‌خط راست نشان داده باشیم. می‌توان در دایره یک چندضلعی منتظم محاط و چند ضلعی متشابه آن را بر دایره محیط کرد، به نحوی که، اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از چند ضلعیها، از طول پاره‌خط راستی که به اندازهٔ کافی کوچک باشد، کمتر شود.

α را پاره‌خطی راست با طولی به دلخواه کوچک، می‌گیریم. $|AB| = l$. فرض کنید.

$10\alpha > |AB| \quad , \quad \alpha > \frac{|AB|}{10} = \frac{l}{10}$

دو چند ضلعی منتظم متشابه یکی محاط در دایره و دیگری محیط بر دایره رسم کنیم، به نحوی که داشته باشیم : $P - p < \frac{1}{10} p$ ، آن وقت خواهیم داشت : $P - l < \frac{1}{10} p$ و به‌طور مسلم $P - l < \frac{1}{10}|AB| = \frac{1}{10} l$. ولی $\alpha > \frac{1}{10} l$، بنابراین $P - l < \alpha$.

وقتی تعداد ضلعهای چند ضلعیهای منتظم را ۲ برابر و ۴ برابر کنیم، محیط چند ضلعی محیطی کوچکتر و محیط چندضلعی محاطی بزرگتر می‌شود، ولی محیط دایره مقداری ثابت است. بنابراین اختلاف محیط دایره با محیط هر یک از چند ضلعیها را می‌توان از هر عدد α، که از قبل و به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب شده است، کوچکتر گرفت به این ترتیب، محیط دایره، برابر است با حد محیطهای چند ضلعیهای محاطی و محیطی، به شرطی که تعداد ضلعهای آنها، پشت‌سرهم دو برابر شود.»

سپس، مؤلف، قضیهٔ دوم را ثابت می‌کند : «نسبت محیطهای دو دایره، مثل نسبت شعاعهای آنهاست. و از آن دو نتیجه می‌گیرد :

۱. نسبت محیط دایره به شعاع آن، مقدار ثابتی است که به اندازهٔ محیط دایره بستگی ندارد.

۲. نسبت مساحتهای دو مثلث راست گوشه‌ای که ارتفاع آنها برابر شعاع دو دایره و قاعده‌های آنها، پاره‌خط‌های راستی با طول محیطهای دو دایره باشد، برابر است با نسبت مجذورهای دو شعاع.

قضیه. مساحت دایره، برابر است با مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر با طول شعاع دایره و قاعدهٔ آن، طولی برابر محیط دایره داشته باشد.

اگر مساحت دایره، برابر مساحت این مثلث نباشد، باید از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر شود ؛ یعنی مساحت دایره برابر با مساحت مثلثی می‌شود که ارتفاع آن طولی برابر با شعاع دایره و قاعده‌اش طولی بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره داشته باشد.

فرض کنید طول محیط دایره برابر O و L طول پاره‌خط راستی باشد، بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره، فرض کنید O کوچکتر از L باشد. چندضلعی منتظم محیطی را در نظر می‌گیریم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کوچکتر از اختلاف محیط دایره از L باشد.

$P - O < L - O$

یعنی $L > P$. و این به معنای آن است که مساحت چند ـ ضلعی محیطی کوچکتر از مساحت دایره‌ای است که در آن محاط شده است. و این ممکن نیست.

اگر محیط دایره بزرگتر از طول پاره‌خط راست L باشد، در دایره چندضلعی منتظمی محاط می‌کنیم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کمتر از اختلاف محیط دایره از L باشد. در این صورت $O - p < O - L \Rightarrow p > L$ یعنی مساحت چند ضلعی محاط در دایره بیشتر از مساحت دایره می‌شود ؛ که ممکن نیست.

به این ترتیب، مساحت دایره از مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر شعاع دایره و قاعده‌اش برابر محیط دایره باشد، نه بزرگتر است و نه کوچکتر، یعنی مساحت آن با مساحت دایره برابر است.

در این جا، استدلال لیوویل، اختلاف کمی با استدلال ارشمیدس در کتاب «اندازه‌گیری دایره» و استدلال جمشید کاشانی در «رسالةالمحیطیه» دارد.

لیوویل، حجم استوانه، مخروط و کره را به عنوان حد حجم منشور، هرم و چند وجهی منتظمی که در آنها محاط یا بر آنها محیط شده باشد، به‌دست می‌آورد.

در سال ۱۷۹۸ کتاب «تجربه‌هایی دربارهٔ تکمیل مقدمات هندسه» تألیف *س. ا. گوریه‌وا* منتشر شد. این کتاب هم بر پایه مفهوم حد و روش حدی تنظیم شده بود. اهمیت استدلال‌های *گوریه‌وا* با استدلال‌های ***لیوویل***، چندان تفاوتی ندارد، ولی به هر حال با آن متفاوت است.

لیوویل و *گوریه‌وا*، برای حلّ بسیاری از مسأله‌ها، از این

قضیه استفاده می‌کنند که اگر مقدار ثابت A، بین دو مقدار متغیر x و y باشد: $x < A < y$، و اختلاف بین x و y را بتوان از هر مقدار به دلخواه کوچکی که از قبل معین شده است را کمتر کرد، آن‌وقت مقدار ثابت A برابر است با حد مشترک x و y:

حد $x =$ حد $y = A$

لازم به یادآوری است کــه هواداران روش حـــدی، یعنی *لیـوویل* و *گـوریه‌وا*، به آمـوزش هندسـه با دو دید مـخـتلف می‌نگریستند. *گوریه‌وا*، هندسه را دانشی مستقل از حساب و جبر می‌دانست و به کار بردن حساب و جبر را در آن ضروری نمی‌دید. او می‌نویسد: «... در هندسه مقدماتی، به هیچ‌وجه نباید از ریاضیات محاسبه‌ای استفاده کرد...».

لیوویل، برعکس، هوادار محکم کردن بستگی بین رشته‌های مختلف ریاضیات بود و در هندسه، به فراوانی از حساب و جبر استفاده می‌کرد. جلد اوّل کتاب درسی جبر او شامل ۸ فصل است که در آنها معادله‌های درجه اوّل یک یا چند مجهولی را بررسی کرده است؛ همچنین ریشه گرفتن، کمیتهای اندازه‌ناپذیر، معادله‌های درجه دوم و اندکی مقوله دیوفانتی، در آن مطرح شده است. در ۱۴ فصل جلد دوم، به تصاعدهای عددی، عددهای چندضلعی، ترکیب و تبدیل، بسط دوجمله‌ای با توان طبیـعی، تصاعد هندسی و لگاریتم روش ضریب‌های نامعین، کسرهای مسلسل، تشکیل معـادله با در دست داشتن ریشـه‌های آن در معادله‌های درجه سوم و درجهٔ چهارم آمده است. در این جا هم، *لیوویل* مـثل کتـاب هندسهٔ خـود از روش حدی استـفـاده می‌کند و ضـــمن طرح $\frac{1}{0}$ و $\frac{0}{0}$ می‌نویســـد: «به نظر من همـهٔ دشواری، مربوط به اندیشهٔ تقسیم است». *لیوویل* تعریف حد را، ضمن محاسبهٔ حد کسرها می‌دهد و می‌نویسد: «وقتی اخـتلاف دو کـمیت، معیَن یا مـفروض باشـد، نسـبت آنهـا برابر واحـد نمی‌شود. ولی هر قدر این اختلاف، نسبت به هر یک از دو عدد کمتر باشد و هر قدر خود دو عدد بزرگتر باشند، نسبت آنها به واحد نزدیکتر می‌شود و اختلاف این نسبت با واحد، می‌تواند از هر عدد کوچک دلخواه، کمتر باشد، در این صورت، عدد ۱ حد این نسبت است».

در فصل عددهای چندضلعی، حد نسبت $\frac{3}{n+2}$ را بررسی می‌کند. او این نسبت را به صورت $2-\frac{3}{n+2}$ نشان می‌دهد و، سپس به سمت مقدار حدی می‌رود:

$$\text{حد}\left(2-\frac{3}{n+2}\right)=2$$

او برای محاسبهٔ مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی (که بی‌نهایت جمله دارد)، از همین روش استفاده می‌کند *لیوویل* با در دست داشتن

$$S=\frac{1-a^n}{1-a}$$

می‌نویسد $S=\frac{1}{1-a}-\frac{a^n}{1-a}$ و نشان می‌دهدکه، برای $0<a<1$، کسر دوم با بزرگ شـدن n، کوچک می‌شود و می‌تواند از هر مقدار کوچک دلخواه از قبل تعیین شده‌ای، کوچکتر باشد. بنابراین $\frac{1}{1-a}$ حد مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد هندسی نزولی است.

لیوویل، با استـفـاده از مجـموع جـمله‌های تصاعـد نزولی، مجموع جمله‌های چند رشته‌ای را محاسبه می‌کند. ازجمله؛

$$S'=1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1} \qquad (1)$$

دو طرف برابری (۱) را در x ضرب می‌کند:

$$S'x=x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \qquad (2)$$

سپس، با کم کردن (۲) از (۱) به‌دست می‌آورد

$$S'(1-x)=\left[1+x+x^2+\dots+x^{n-1}\right]-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

از آنجا

$$S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{2x^n}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

اگر $x<1$، آن وقت کسرهای $\frac{x^n}{(1-x)^2}$ و $\frac{nx^n}{1-x}$ با بزرگ شدن n، کوچک می‌شوند، به نحوی که می‌توان n را طوری انتخاب کرد که این دو کسر از هر عدد کوچک از پیش تعیین شده‌ای کوچکتر باشند، بنابراین برای حد مجموع داریم:

$$S'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

با استفاده از این نتیجه، و با همان روش می‌توان حد مجموع

$$S''=1+3x+6x^2+10x^3+\dots+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}x^{n-1}$$

را به دست آورد؛ که برابر است با $\frac{1}{(1-x)^3}$.

در واقع S' و S'' نتیجه‌ای از مشتق S نسبت به x هستند.

در حاشیهٔ تابع

(قسمت پنجم)

● حمیدرضا امیری

تابعهای متناوب

تابع f را متناوب می‌گویند، در صورتی‌که عددی مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد به قسمی که اولاً اگر $x \in D_f$ آنگاه $(x+T)$ و $(x-T)$ نیز عضو D_f بوده و ثانیاً $f(x+T)=f(x)$. کوچکترین عدد مثبتی مانند T (در صورت وجود) که در رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، تناوب اصلی تابع f می‌نامند.

مثال ۱: $\sin x=\sin(x+2k\pi)$ و $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ پس تابعهای سینوس و کسینوس متناوب بوده که 2π کوچکترین عدد مثبتی است که در رابطه‌های فوق صدق می‌کند لذا تناوب اصلی این دو تابع 2π است. (تناوب اصلی $y=\text{tg}x$ و $y=\cot gx$ را بیابید)

مثال ۲: اگر فرض کنیم $f(x)=x-[x]$ ، در این صورت برای هر عدد صحیح مانند n داریم:

$$f(x+n)=(x+n)-[x+n]=(x+n)-([x]+n)=x-[x]=f(x)$$

تناوب اصلی تابع فوق $T=1$ است.

در حالت کلی تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(x)=nx-[nx]$ برابر است با $\frac{1}{|n|}$ ثابت کنید f تابعی متناوب است.

مثال ۳: تابع ثابت با ضابطهٔ $f(x)=k$ نیز تابعی متناوب است، زیرا برای هر عدد حقیقی مانند P همواره $f(x+T)=k=f(x)$ ، اما دورهٔ تناوب ندارد، زیرا کوچکترین عدد حقیقی مثبت که در رابطهٔ فوق صدق کند، وجود ندارد.

نکات و یادآوریهای مهم:

۱ ـ تناوب اصلی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^{2n-1}ax$ و $g(x)=\cos^{2n-1}ax$ ، $\frac{2\pi}{|a|}$ و $h(x)=\text{tg}^n ax$ و $t(x)=\cot g^n ax$ $\quad n\in N$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$.

اثبات: برای تابع f ثابت می‌کنیم $T=\frac{2\pi}{|a|}$

می‌دانیم $\quad \sin^{2n-1}(ax+2k\pi)=\sin^{2n-1}ax \quad (1)$

از طرفی $\quad f(x+T_1)=\sin^{2n-1}a(x+T_1)=\sin^{2n-1}(ax+aT_1) \quad (2)$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) به این نتیجه می‌رسیم که اگر $aT_1=2k\pi$ ، آنگاه $f(x+T_1)=f(x)$ که اگر $aT_1=2k\pi$ خواهیم داشت:

$$aT_1=2k\pi \Rightarrow T_1=\frac{2k\pi}{a} \xrightarrow{k=1} T=\frac{2\pi}{|a|}$$

۲ ــ تناوب اصلی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^{2n} ax$ و $g(x)=\cos^{2n} ax$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$ (اثبات به عهدهٔ خودتان)

۳ ــ اگر تابعی از اعمال جبری روی چند تابع متناوب حاصل شده باشد. کوچکترین مضرب مشترک تناوبهای آن تابعها، تناوب اصلی تابع اصلی را تشکیل می‌دهد.

مثال ۴: اگر $f(x)=\sin^2\frac{4x}{3}+\cos\frac{3x}{2}+tg\frac{3x}{2}$ در این صورت دورهٔ تناوب تابع f را بیابید.

$$T_{\sin^2\frac{4x}{3}}=\frac{\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{4}$$

$$T_{\cos\frac{3x}{2}}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$$

و

$$T_{tg\frac{3x}{2}}=\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3}$$

حال کوچکترین مضرب مشترک $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ را به‌دست می‌آوریم که برای این کار کافی است ک‌مم صورتها و ب‌مم مخرج کسرها را محاسبه کرده و متناظراً کسری تشکیل دهیم،

$$\left.\begin{matrix}\text{ک م م}: 2\pi,3\pi,4\pi=12\pi\\ \text{ب م م}: 3,3,4=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow T=\frac{12\pi}{1}=12\pi$$

تذکر: اگر به کمک فرمولها و رابطه‌های جبری یا مثلثاتی بتوانیم تابع f را ساده‌تر کرده و دورهٔ تناوب کوچکتری بیابیم، آن دورهٔ تناوب کوچکتر به عنوان دورهٔ تناوب شناخته می‌شود. به‌عنوان مثال تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ در ظاهر دارای تناوب اصلی 2π است امّا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $\cos x$ (برای $k,x\neq\frac{k\pi}{2}$ فرد) داریم $f(x)=\frac{tgx+1}{tgx-1}$ که تناوب اصلی سادهٔ شدهٔ آن π می‌باشد.

ــ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی T باشد در این صورت |f| نیز متناوب بوده و معمولاً تناوب اصلی آن یا T و یا $\frac{T}{2}$ خواهد بود که با امتحان کردن به راحتی می‌توان آن را به‌دست آورد. مثلاً تناوب اصلی $f(x)=\sin^2 x+\sin x$، 2π و تناوب اصلی |f| نیز 2π است ولی تناوب اصلی $g(x)=tgx+\cot gx$، π می‌باشد، در صورتی که تناوب اصلی |g|، $\frac{\pi}{2}$ است.

مثال ۵: آیا تابع با ضابطه $f(x)=\cos\pi x+tg2x$ متناوب است؟

$$T_{\cos\pi x}=\frac{2\pi}{\pi}=2\ ,\ T_{tgx}=\frac{\pi}{2}$$

برای $\frac{\pi}{2}$ و ۲، ک‌مم نمی‌توان تعریف کرد پس f متناوب نیست.

مثال ۶: آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos\pi x+3x-[3x]$ متناوب است؟

$$T'_{\cos\pi x}=\frac{2\pi}{\pi}=2\ ,\ T''_{3x-[3x]}=\frac{1}{3}$$

$$\text{ک‌مم}:\ 2,\frac{1}{3}\to T=2$$

۴ ــ یکی از کاربردهای مفهوم تناوب در تابعهای متناوب در رسم چنین تابعهایی است یعنی برای رسم یک تابع متناوب کافی است که ابتدا دورهٔ تناوب تابع را مشخص کرده و فقط نمودار تابع را در یک تناوب اصلی رسم کنیم و در فواصل دیگر این دوره نمودار تابع به همان صورت تکرار می‌شود. مثلاً نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ در هر 2π تکرار می‌شود.

۵ ــ اگر T تناوب اصلی تابع f باشد و k عددی حقیقی، در این صورت $\frac{T}{k}$ تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ f(kx) می‌باشد.

$$f\left[k(x+\frac{T}{k})\right]=f(kx+T)=f(kx)$$

زیرا T دورهٔ تناوب f است.

$$(f(x+T)=f(x)\xrightarrow{x\to kx}f(kx+T)=f(kx)$$

مثال ۷: ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ متناوب است و هر عدد گویای غیرصفر تناوبی برای تابع محسوب می‌شود.

اگر فرض کنیم T_1 عددی گویا باشد در این صورت داریم

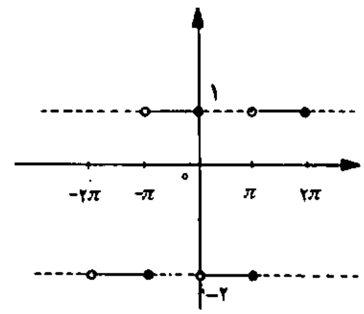
$$I)\ \ x\in Q\Rightarrow(x+T_1)\in Q\Rightarrow f(x+T_1)=1=f(x)$$

$$II)\ \ x\notin Q\Rightarrow(x+T_1)\notin Q\Rightarrow f(x+T_1)=0=f(x)$$

مثال ۸: اگر تابع f با دورهٔ تناوب 2π در فاصله $[-2\pi,0]$ به صورت زیر تعریف شده باشد، نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2 & -2\pi<x\leq-\pi\\ 1 & -\pi<x\leq 0\end{cases}$$

برای رسم چنین تابعی ابتدا در فاصلهٔ تعریف شده تابع را رسم کرده و چون تابع متناوب و تناوب اصلی آن 2π است در فاصله‌های به طول 2π همان نمودار را تکرار می‌کنیم.



۶ ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی T_1 و g نیز تابعی متناوب با تناوب اصلی T_2 باشد، در این صورت fog متناوب با تناوب اصلی T_2 و gof نیز متناوب با تناوب اصلی T_1 است.

طبق فرض داریم: $f(x+T_1)=f(x)$ و $g(x+T_2)=g(x)$

$$(fog)(x+T_2)=f(g(x+T_2))=f(g(x))=(fog)(x)$$

$$(gof)(x+T_1)=g(f(x+T_1))=g(f(x))=(gof)(x)$$

تبصرهٔ مهم: اگر f تابعی متناوب با تناوب اساسی T_1 باشد و $g(x)=\cos x$ یا $g(x)=\sec x$ در این صورت تناوب اساسی تابع (gof) ممکن است $\frac{T}{2}$ باشد.

مثال ۹: اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در این صورت داریم:

$$T_{(\sin x)}=2\pi$$

از طرفی،

$$(gof)(x+\pi)=\cos(\sin(x+\pi))=\cos(-\sin x)=$$
$$\cos(\sin x)=(gof)(x)\Rightarrow T_{(gof)}=\pi$$

۷ ـ تناوب اساسی ۴ تابع با ضابطه‌های زیر، $\frac{\pi}{2a}$ می‌باشد.

الف) $f(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\neq 1$

ب) $f(x)=tg^{2n}ax+\cot g^{2n}ax \quad n\in\mathbb{N}$

ج) $f(x)=|\sin^{n}ax|+|\cos^{n}ax| \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\neq 2$

د) $f(x)=|tg^{n}ax|+|\cot g^{n}ax| \quad n\in\mathbb{N}$

اثبات ب) فرض کنیم تناوب اساسی تابع f برابر با T باشد در این صورت داریم:

$$f(x+T)=tg^{2n}a(x+T)+\cot g^{2n}a(x+T)$$
$$=tg^{2n}(ax+aT)+\cot g^{2n}(ax+aT)$$

حال اگر قرار دهیم $aT=\frac{(2k-1)\pi}{2}$ در این صورت $f(x+T)=f(x)$ خواهد شد زیرا:

$$tg^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\cot g^{2n}ax$$

و

$$\cot g^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=tg^{2n}ax$$

$$\Rightarrow aT=\frac{(2k-1)\pi}{2}\Rightarrow T=\frac{(2k-1)\pi}{2a}\xrightarrow{k=1}T=\frac{\pi}{2a}$$

تمرین

۱ ـ تناوب اصلی هریک از تابعهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=3x-[3x]$

ب) $f(x)=[2x]-2x$

ج) $f(x)=\sin^{3}2x-\cos^{4}3x+tg6x$

د) $f(x)=\sin x\cos x$

هـ) $f(x)=\sin x+\cos x$

و) $f(x)=\sin 2x\cos x$

(در قسمت (و) از تبدیل حاصل ضرب به حاصل جمع استفاده کنید)

۲ ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی ۲ باشد و در فاصلهٔ $[-2,2]$ به صورت زیر تعریف شده باشد. این تابع را در فاصلهٔ $[-6,6]$ رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -2\leq x<0\\ 1 & 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

تثلیث زاویه

(قسمت اول)

●سیامک جعفری

سه مسألهٔ معروف:

تضعیف مکعب، مسأله ترسیم ضلعی از یک مکعب که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد.

تثلیث زاویه، تقسیم یک زاویه مفروض به سه قسمت مساوی به کمک خط کش و پرگار.

تربیع دایره، ساختن مربعی که دارای مساحتی برابر با مساحت دایره مفروض است. جستجوی دامنه‌دار برای یافتن پاسخهای این سه مسأله، بر هندسه یونانی اثر عمیقی گذاشت و به کشفیات بسیاری از جمله مقاطع مخروطی انجامید و بسیاری از منحنیهای درجهٔ سوم و چهارم و منحنیهای متعالی به تنوع فراوانی دست یافت. نتیجه‌ای که مدتها بعد، از آن بدست آمد، پیدایش بخشهایی از نظریه معادلات دربارهٔ **حوزه‌های گویا، اعداد جبری** و **نظریه گروه‌ها** بود.

غیرممکن بودن این سه مسأله با این محدودیت، به کمک خط کش و پرگار تا قرن نوزدهم یعنی متجاوز از ۲۰۰۰ سال بعد از آن که این مسائل متصور گشته بودند، ثابت نشده بود. انجام ترسیمها با این دو وسیله، یکی از دل‌انگیزترین بازیهای ریاضی است و ترسیمهایی که فقط با این دو می‌توان به دست آورد، گاهی مایهٔ شگفتی است.

شما در مطالبی که طی چند قسمت خواهد آمد، با برخی از این غیرممکن‌ها آشنا می‌شوید و خود نیز می‌توانید طراح یکی از آنها باشید. به عنوان مثال، قبل از مطالعه این مختصر با پشتیبانی اطلاعات هندسه کلاسیک به مسأله زیر هجوم ببرید، یافتن مرکز یک دایرهٔ مفروض فقط به کمک خط راست (خط کش غیرمدرج) غیرممکن است. می‌بینید، این نمونه از مسائل همیشه صورت پیچیده‌ای ندارند.

یکی از این مسائل که ریاضیدانان یونانی را از زمانهای دور به خود مشغول داشت، یافتن روشی بود که در آن با استفاده از خط کش و پرگار بتوان یک زاویه مفروض را به سه بخش تقسیم کرد، نشان خواهیم داد که این امر غیرممکن است.

ریاضیات مانند پهنه‌ای گسترده است. براساس آن می‌توان بناهای نوساخت یا بناهای کهنه را از نو پی‌افکند به همین دلیل قضیه‌ها و مسائل در ریاضی همواره حرفهایی برای گفتن دارند. و این امر به زبان، قدرت استدلال و جسارت یک ریاضیدان بستگی دارد.

هیچ مسأله‌ای در ریاضی به طور کامل حل نشده است: حتی قضیه‌هایی که قطعیت آن برای همه محرز است. خلاقیت یک ریاضیدان به تردید داشتن در برهان این مسائل مربوط می‌شود. مسأله ها همیشه قابل بحث و تعمیم هستند و فرصت مناسبی در اختیار دانش‌پژوهان جاه‌طلب می‌گذارند تا با ارائه راه‌حلها و مسائل جدید، نام خود را جاویدان سازند.

اشکال خیلی پیچیده و ساده‌ای طرح و ترسیم شده و به دفتر

مجله‌های ریاضی می‌رسد؛ که مدعیان توانسته‌اند زاویه مفروضی را به کمک خط‌کش و پرگار به‌صد بخش مساوی تقسیم کنند. در این میان حتی برخی از اساتید دانشگاه نیز به چشم می‌خورند و بنده نیز یک‌بار در سال اوّل دانشگاه قربانی این ادعا شدم. در آن زمان فکر می‌کردم، اگر بتوان کمان روبه‌روی زاویه مورد نظر را به کمک خط‌کش و پرگار به صد بخش تقسیم کرد، کار تمام است. کسانی هم بودند که روش مرا می‌پذیرفتند، اما آنها یا فقط توضیحات خودم را گوش می‌دادند و یا تنها به گفتن جملهٔ «خوب‌است» بسنده می‌کردند. اما به‌هنگام گوش دادن به توضیحات نیز فقط به اشاره‌های من به اضلاع و نقاط، نگاه می‌کردند، که مایل بودم هرچه زودتر نتیجه را اعلام کنم.

در این‌جا یادآوری می‌کنیم که غیرممکن در ریاضی با آنچه در میان مردم رایج است، فرق می‌کند. در یک دستگاه ریاضی مشخص، غیرممکن مانند یک تناقض با اصول متعارف یا اصول موضوعه در آن دستگاه ظاهر می‌شود. امر غیرممکن در این دستگاه نسبی نیست. مانند این گزاره که مجموع دو عدد فرد، عددی فرد است و غیرممکن است، جمع آنها زوج باشد. مانند این که بگویید «غیرممکن است حسن بتواند این وزنه را بلند کند» یا «زمانی غیرممکن بود انسان روی کره ماه راه برود.»

در هرحال، باید این دو امر را که یکی نسبی و دیگری قطعی است ازهم جدا کرد. تعداد غیرممکن‌ها در ریاضیات کمتر از ممکن‌ها نیست. شاید بتوان با مثالهایی مسأله را روشن ساخت.

غیرممکن است جمع دو عدد زوج، فرد باشد.

غیرممکن است دایره، دو مرکز داشته باشد.

غیرممکن است دو خط موازی، یکدیگر را قطع کنند.

غیرممکن است دو عدد، دو تا ب.م.م داشته باشند.

هردستگاه ریاضی، چه جبری و چه هندسی، برمبنای اصولی استوار است؛ اصولی که مورد پذیرش در علوم است و به آنها اصول متعارف‌می‌گویند. چنین است که هرچیزی با خودش برابر است. و اصولی که در علم مورد نظر پذیرفته است؛ مانند مجموع زوایای داخلی مثلث که °۱۸۰ است.

در این دستگاه، «عمل» تعریف می‌شود. ادراک یک دستگاه ریاضی به این عمل وابسته است. به‌طور منطقی به کمک اصول و این عمل نتایج نوینی به بارمی‌آید که ساختمان دستگاه ریاضی را بنا می‌کند. هندسهٔ اقلیدسی و غیراقلیدسی، دو نمونه از این دستگاههای ریاضی هستند.

در دستگاه ریاضی مجموعهٔ اعداد طبیعی، اگر سالها جمع کردن میلیونها عدد زوج را تجربه کنید، هرگز جمع دوتای آنها فرد نمی‌شود. امّا اگر دستگاهی بسازید که در آن، هرعدد با تالی بلافصل خود برابر باشد، جمع آنها به ظاهر فرد است (این دستگاه وجود ندارد).

غیرممکن است بتوان با خط‌کش (خط راست) و پرگار، زاویه مفروضی را به سه بخش مساوی تقسیم کرد.

خط‌کش، وسیله‌ای است که تنها برای رسم خط راست، امتداد دادن آن یا اتصال دو نقطه به یکدیگر به‌کار می‌رود.

پرگار، برای رسم دایره یا کمانی از آن است. در این‌جا می‌خواهیم نشان بدهیم که به کمک این دو وسیله به تنهایی نمی‌توان زاویه‌ای را به سه بخش تقسیم کرد.

ابوجعفرخازن، ریاضیدان و منجم ایرانی، بین سالهای ۳۵۰ و ۳۶۰ در نیمهٔ اوّل قرن چهارم، در کتاب خود با عنوان «اصلاح کتاب مخروطات» دربارهٔ مسأله تثلیث زاویه بحث کرده است.

ابوالجود، ریاضیدان ایرانی در نیمه دوم سدهٔ چهارم در حل مسأله، تحقیقاتی داشته و در رساله‌ای به پرسشهای *ابوریحان* بیرونی پاسخ داده است.

ابوالحسن شمسی هروی، ریاضیدان ایرانی که در حدود سدهٔ چهارم می‌زیسته، در رساله‌ای که دربارهٔ تثلیث زاویه تألیف کرده است، راه حلی برای این مسأله بیان می‌کند.

ابوریحان بیرونی، ریاضیدان و منجم ایرانی (۳۶۲ ــ ۴۴۲) از نوابغ روزگار و نمونه کامل هوشمندی، از جمله مفاخر ایران و دنیای دانش و پژوهش است. وی مسألهٔ تثلیث زاویه را به بیش از دوازده مسأله هندسی دیگر، معادل با آن تبدیل کرده است.

صاغانی، منجم و ریاضیدان ایرانی (... ــ ۳۷۹) دو راه حل برای حل مسأله تثلیث زاویه ارائه کرده است. وی بیش از ریاضیدانان دیگر برروی این مسأله کارکرده است.

ابوالوفا بوزجانی، به مسائل حل‌نشدنی کلاسیک هندسی، مانند تثلیث زاویه پرداخته و با کمک تثلیث زاویه، نه ضلعی منتظم را هم می‌سازد و طرز ساختن تقریبی هفت ضلعی منتظم را هم به دست می‌دهد.

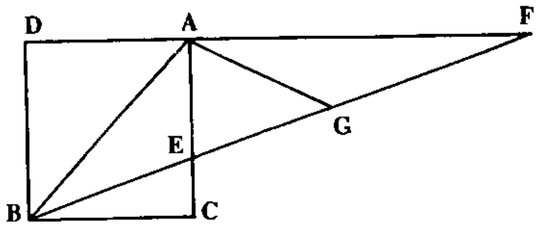
غیاث‌الدین کاشانی، در سدهٔ پانزدهم از تثلیث زاویه، برای تنظیم جدولهای مثلثاتی دقیق که برای محاسبات ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده کرد.

مسألهٔ تثلیث زاویه به یقین دربین سه مسأله مشهور، قابل فهم‌تر از همه است. از آنجا که نصف کردن یک زاویه به کمک پرگار، بسیار ساده است، شگفت‌آور خواهد بود که چرا تثلیث

آن، همین‌قدر آسان نیست.

تقسیم پاره‌خط به چندقسمت مساوی با خط‌کش و پرگار ساده است، و امکان دارد یونانیها نیز به تثلیث زاویه رسیده باشند. شاید نیز در ترسیم نه‌ضلعی منتظم که لزوماً باید یک زاویهٔ ۶۰ درجه را ثلث کرد، به این نتیجه دست یافته باشند.

مسألهٔ میل (Mil)



هر زاویهٔ حاده را می‌توان، زاویه‌ای فرض کرد که قطر مستطیلی مفروض با یکی از اضلاع آن می‌سازد. ما خط BF را طوری رسم کرده‌ایم که $EF = ۲BA$ باشد و G وسط EF است. به سادگی معلوم می‌شود که:

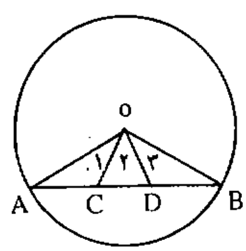
$EG = GF = GA = BA$

$\angle ABG = \angle AGB = \angle GAF + \angle GFA = ۲\angle GFA = ۲\angle GBC$

یعنی خط BEF زاویه $\angle ABC$ را ثلث می‌کند.

در شمارهٔ آینده امتناع مسألهٔ تثلیث زاویه به کمک خط‌کش غیرمدرج و پرگار را بیان خواهیم کرد.

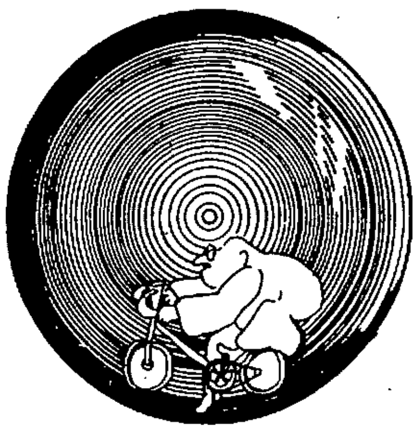
تمرین: در شکل زیر اگر نقاط C و D، وتر AB را بر سه پاره‌خط برابر تقسیم کنند؛ ثابت کنید سه زاویه ۱ و ۲ و ۳ نمی‌توانند باهم برابر باشند.





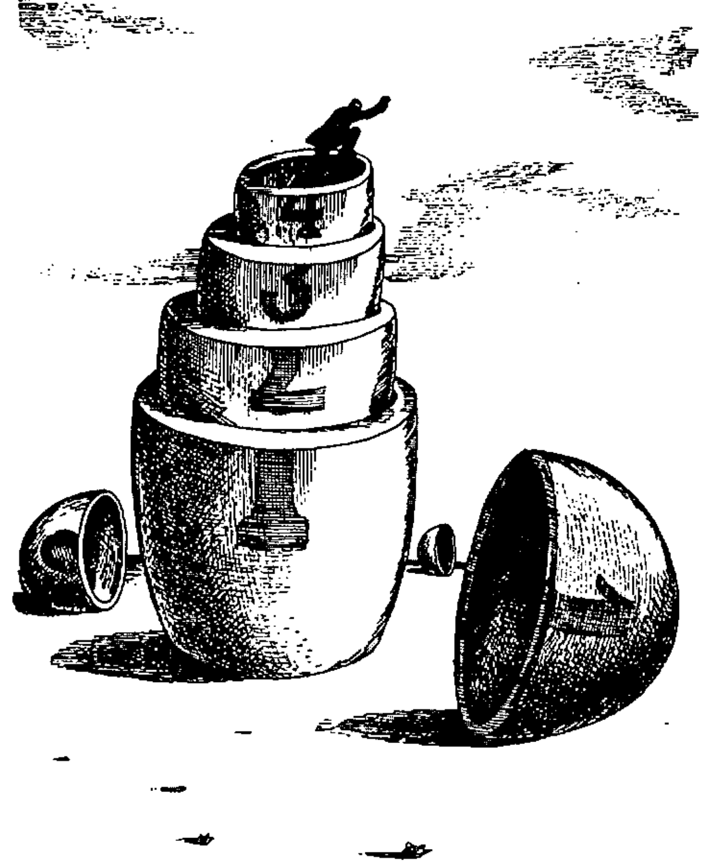
تفریح اندیشه ۳

مهرداد در مسابقهٔ دوچرخه‌سواری که دریک زمین مدور برگزار می‌شد، شرکت جست. او بعداز چند ساعت متوجه شد که پنجمین نفر از شرکت کنندگان که در جلوی او حرکت می‌کرد، به $\frac{۵}{۶}$ سایر شرکت‌کنندگان که پشت سر او قرار داشتند ملحق شده‌است، و با پیوستن او، مجموع شرکت کنندگان تکمیل شد. چند نفر در مسابقه شرکت داشته‌اند؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸



مجموع K عدد طبیعی متوالی اولیه

● میر شهرام صدر

تحصیل ریاضی با حساب ابتدایی آغاز می‌گردد که در آن با اعداد طبیعی و «چهار عمل اصلی» بر آنها آشنا شده‌اید، این اعداد وسیله‌ای برای شمردن و شماره‌گذاری هستند.

همان‌طور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$)[۱] متشکل از اعداد زوج و فرد است، هر عدد طبیعی مضرب ۲ را زوج و هر عدد طبیعی را که مضرب ۲ نباشد، فرد گوییم.

مجموعه اعداد زوج طبیعی را با حرف E[۲] نمایش می‌دهیم:

$E = \{۲, ۴, ۶, ۸, ...\}$

با دقت در جدول:

$(k \in \mathbb{N})$

k	۱	۲	۳	۴ ...	k
۲k	۲×۱=۲	۲×۲=۴	۲×۳=۶	۲×۴=۸	۲k

ملاحظه می‌کنید که مجموعه اعداد زوج طبیعی را می‌توان به صورت $E = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$ نشان داد، یا اینکه k امین عدد زوج طبیعی برابر با ۲k $(k \in \mathbb{N})$ است، به عنوان مثال دهمین عدد زوج طبیعی ۲۰ = ۱۰×۲ یا سی‌امین عدد زوج طبیعی ۶۰ = ۳۰×۲ می‌باشد.

اگر از هر عدد زوج طبیعی یک واحد کم کنیم، یک عدد فرد طبیعی به دست می‌آید، مجموعه اعداد فرد طبیعی را با حرف O[۳] نمایش می‌دهیم:

$O = \{۱, ۳, ۵, ۷, ...\}$

با دقت در جدول:

$(k \in \mathbb{N})$

۲k	۲	۴	۶	۸	... ۲k
۲k − ۱	۲−۱=۱	۴−۱=۳	۶−۱=۵	۸−۱=۷	... ۲k − ۱

می‌بینیم که مجموعه اعداد فرد طبیعی را می‌توان به صورت $O = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$ نشان داد، یا اینکه k امین عدد فرد طبیعی برابر با ۲k − ۱ $(k \in \mathbb{N})$ می‌باشد، برای مثال هشتمین عدد فرد طبیعی ۱۵ = ۱ − ۸×۲ یا سی‌امین عدد فرد طبیعی ۵۹ = ۱ − ۳۰×۲ می‌باشد.

هدف از این مقاله این است که مجموع k عدد طبیعی متوالی اولیه را به دست آوریم، برای این منظور k عدد طبیعی متوالی اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$۱, ۲, ۳, ..., k - ۲, k - ۱, k$

فرض کنیم مجموع این عددها برابر با S باشند:

$S = ۱ + ۲ + ۳ + ... + (k - ۲) + (k - ۱) + k$

اکنون مجموع S را دوبار می‌نویسیم، با این شرط که در سطر دوم، ردیف جمله‌ها برعکس باشند؛ اگر اعداد دو سطر را

---

۱. Natural numbers   ۲. Even   ۳. odd

نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$\begin{aligned} &S=1+2+3+\ldots+(k-2)+(k-1)+k\\ +\ &S=k+(k-1)+(k-2)+\ldots+3+2+1 \end{aligned}$$

$$S+S=(k+1)+(k-1+2)+(k-2+3)+\ldots+(k-2+3)+(k-1+2)+(k+1)$$

$$2S=\underbrace{(k+1)+(k+1)+(k+1)+\ldots+(k+1)+(k+1)+(k+1)}_{\text{مرتبه } k}$$

$$2S=k\times(k+1)$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S=\frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

روایتی درباره ریاضیدان نامی، کارل فردریک گوس (۱۸۵۵ــ ۱۷۷۷) وقتی دانش‌آموز دبستان بود وجود دارد که راه حل فوق را در پاسخ به معلم ریاضی خود برای مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ به کار برد. به عنوان مثال ؛ مجموع ۲۰ عدد طبیعی اولیه متوالی به کمک رابطه (۱) برابر است با :

$$S=1+2+3+\ldots+20=\frac{20(20+1)}{2}=210$$

همچنین مجموع ۱۰۰ عدد طبیعی متوالی اولیه برابر است با :

$$S=1+2+3+\ldots+100=\frac{100(100+1)}{2}=5050$$

به همین ترتیب می‌توان مجموع k عدد زوج طبیعی اولیه را محاسبه کرد، برای این منظور k عدد زوج اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$2,4,6,8,\ldots,(2k-4),(2k-2),2k$$

اکنون اگر مجموع عددهای بالا را برابر با S بگیریم و آن را مانند قبل دوبار بنویسیم، سپس اعداد دو سطر را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$\begin{aligned} &S=2+4+6+\ldots+(2k-4)+(2k-2)+2k\\ &S=2k+(2k-2)+(2k-4)+\ldots+6+4+2 \end{aligned}$$

$$S+S=(2k+2)+(2k-2+4)+(2k-4+6)+\ldots+(2k-4+6)+(2k-2+4)+(2k+2)$$

$$2S=\underbrace{(2k+2)+(2k+2)+(2k+2)+\ldots+(2k+2)+(2k+2)+(2k+2)}_{\text{بار } k}$$

$$2S=k(2k+2)\Rightarrow 2S=2k(k+1)$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S=k(k+1) \qquad (2)$$

به عنوان مثال مجموع پنج عدد زوج اولیه به کمک رابطه (۲) برابر است با :

$$S=2+4+6+8+10=5(5+1)=30$$

همچنین مجموع هفتاد عدد زوج اولیه برابر است با :

$$S=2+4+6+\ldots+140=70(70+1)=4970$$

اگر k عدد فرد طبیعی را به صورت زیر در نظر بگیریم، مشابه با روند قبل می‌توان مجموع k عدد فرد اولیه را به دست آورد :

$$1,3,5,\ldots,(2k-5),(2k-3),2k-1$$

فرض کنیم مجموع این عددها برابر با S باشند، اگر مجموع S را در دو سطر بنویسیم، به طوری که در سطر دوم ترتیب عددها برعکس باشند و اعداد دو سطر را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$\begin{aligned} &S=1+3+5+\ldots+(2k-5)+(2k-3)+(2k-1)\\ &S=(2k-1)+(2k-3)+(2k-5)+\ldots+5+3+1 \end{aligned}$$

$$S+S=(2k-1+1)+(2k-3+3)+(2k-5+5)+\ldots+(5+2k-5)+(3+2k-3)+(1+2k-1)$$

$$2S=\underbrace{2k+2k+2k+\ldots+2k+2k+2k}_{\text{بار } k}$$

$$2S=k\times 2k\Rightarrow 2S=2k^2$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S=k^2 \qquad (3)$$

با توجه به رابطهٔ (۳) ملاحظه می‌کنیم که مجموع k عدد فرد متوالی اولیه برابر با k^2 و مربع کامل است. به عنوان مثال به کمک رابطهٔ (۳) مجموع ۱۵ عدد فرد متوالی اولیه برابر است با :

$$S=1+3+5+\ldots+29=15^2=225$$

همچنین مجموع ۵۰ عدد فرد اولیه برابر است با :

$$S=1+3+5+\ldots+99=50^2=2500$$

منابع:

۱ ــ آنالیز ریاضی ــ دکتر غلامحسین مصاحب
۲ ــ خلاقیت ریاضی. تألیف جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری

شلوار کوتاه موبیوس

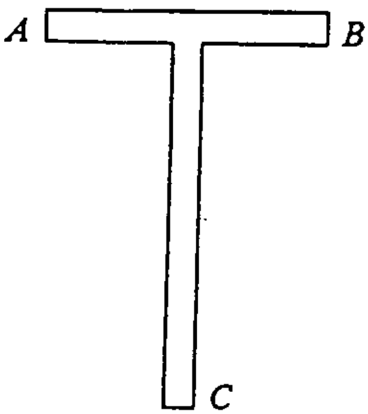
ترجمه: کریم احمدی دلیر

گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تبریز

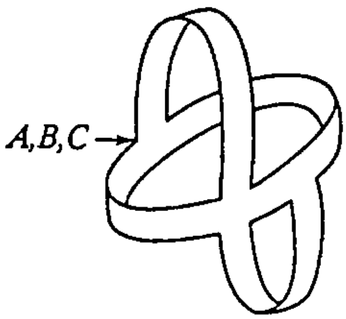
برگردان از مجلهٔ :

"Mathematics Magazine" (vol. 68, No. 2, April 1995)

یکبار به خاطر افراط بیش از حد در «مطالعهٔ بدون تبعیض» مورد-انتقاد قرار گرفتم. در **فرهنگ ریاضیات** اثر آ. بوویه[1] و ام. ژرژ[2] (پاریس، ۱۹۷۹)، در صفحهٔ ۴۷۷ مدخلی تحت عنوان «Slipde Möbius»، که به گورمالین[3] نسبت داده شده است، یافتم. بر طبق Petit Larousse معتبر، لغت فرانسوی «slip» به معنای «شلوار کوتاه» است. این شیء یک رویهٔ یک طرفه است که به نظر می‌رسد در محافل ریاضی آمریکا شناخته شده نباشد.



برای ساختن یک نمونهٔ کاغذی، با یک تکه کاغذ T ـ شکل با دسته‌ای دراز شروع کنید. سر T را جهت ساختن یک حلقه (بدون آن که بپیچانید)، خم کنید و A و B را به هم بچسبانید. C را به طرف بالا از درون حلقه بگذرانید، C را به طرف پایین (بدون آن که بپیچانید) برگردانید و C را به خارج حلقه در AB بچسبانید.



تحقیق کنید که شما یک رویهٔ یک طرفه ساخته‌اید. حال حدس بزنید، که اگر هم حلقه را و هم دستهٔ اولیه را از طول خطوط میانی آنها ببرید، چه اتفاقی می‌افتد. سپس ببینید که آیا می‌توانید چیزی را که حاصل شده دوباره به حالت قبلی برگردانید.

مکاتبهٔ شخصی، مرحوم رالف. پ. باوس، فرزند[4] (۱۹۹۲).

یادداشتها

۱ ـ A.Bouvier

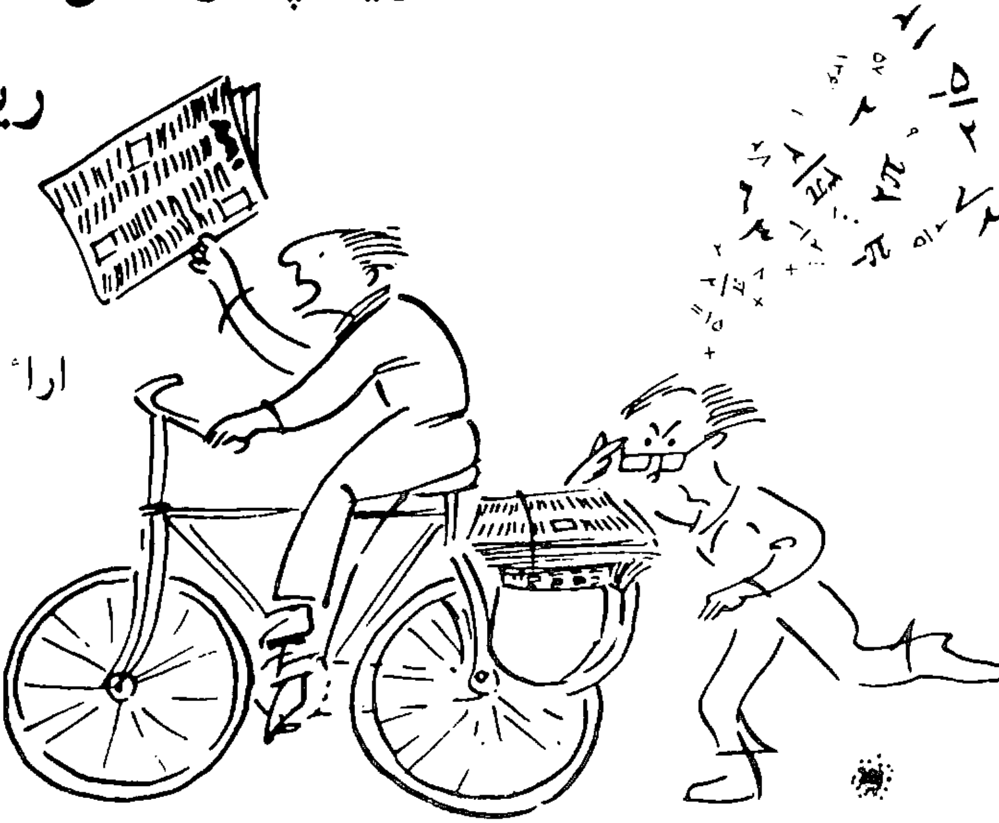
۲ ـ M.George

۳ ـ Gourmalin

۴ ـ The late Ralph P.Boas, Jr.

تاریخچه و نقش مجله‌های آموزشی ریاضی در آموزش ریاضیات

ارائه شده در دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران



● حمیدرضا امیری

● میرشهرام صدر

الف ـ مقدمه

۱ ـ تاریخچه مختصری از مجله‌های ریاضی در ایران

بنا به گفتهٔ پژوهشگر تاریخ ریاضیات، آقای پرویز شهریاری، قدیمی‌ترین نشریهٔ ریاضی «حل‌المسائل ریاضی» است که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی بوده و با رهنمودهای آقای «ناصر هورفر» انتشار می‌یافته است. ناگفته نماند که ما قدیمی‌تر ازاین مجله را نیافته‌ایم.

جلد اول این مجله در ۱۵ دی‌ماه ۱۳۰۶ شمسی، در مطبعهٔ نهضت شرق تهران به‌چاپ رسیده و در اوّل و پانزدهم هرماه منتشر می‌شد. درضمن، دراین مجله بعضی از مسایل امتحانات نهایی ایران و اروپا و... اتخاذ می‌شد. این مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ زرین خط[1] است. دراین مجله با اسامی افراد معروفی نظیر، تقی هورفر، محمدعلی مجتهدی، غلامحسین مصاحب، محمود مهران و محسن هشترودی روبه‌رو می‌شویم.

دومین نشریه: مجله ریاضیات «عالی و مقدماتی» است که درسال ۱۳۰۹ در تهران به‌چاپ رسیده است. مدیر مسؤول و مؤسس آن دکترمصاحب بود. مجله در اوّل و پانزدهم هرماه با چاپ درمطبعه علمی منتشر می‌شد و وجه اشتراکش سالیانه از ۲۵ تا ۴۰ قران (برای محصّلان ۱۰ قران) بود.

نشریهٔ سوم: «گاهنامه» بوده که تحت نظر و مراقبت آقای «هورفر» در سال ۱۳۱۰ چاپ می‌شده است. گاهنامه یعنی سالنامه و تقویم، اگرچه گاهنامه، نشریهٔ ریاضی نبوده ولی بخشی از آن به معرفی ریاضیدانان ایرانی اختصاص داشت. درپایان گاهنامه، برخی از رساله‌های ریاضی ترجمه می‌شد و برخی از سندهای علمی مربوط به دانشمندان ایرانی درج می‌گردید. یکی از این سندها مربوط به *ابوسهل* بیژن‌بن رستم کوهی، اهل طبرستان بوده که در سدهٔ چهارم قمری می‌زیسته و با همکاری مستقیم *ابوالوفای بوزجانی* به رصد و تنظیم جدولهای اخترشناسی مشغول بوده است. این دانشمند ایرانی وسیله‌ای برای رصد خورشید ساخت که بسیار دقیق بود و دوبار به فاصله هر سه ماه، توسط دانشمندان مورد آزمایش قرار گرفت. ترجمهٔ

دومین تأییدنامه دانشمندان به زبان فارسی، در پشت جلد برهان شماره ۱۲(دبیرستان) آمده است. در ضمن، گاهنامه ظاهراً تنها به مدت سه سال به چاپ رسیده است.

چهارمین نشریه : «سخن ادبی» باهمکاری پرویز شهریاری به طبع می‌رسید و بارها بحثهایی درباره آموزش ریاضی در آن آمده است.

پنجمین نشریه : «سخن علمی» به سردبیری آقای پرویز شهریاری در سال ۱۳۴۲ در تهران به چاپ رسیده است، مطالب و مقالات این مجله به‌طور کلی به علم و مباحث آن می‌پرداخت. ولی چون سردبیر این مجله آقای شهریاری بود، مطالبی درباره ریاضی و آموزش ریاضی درآن نوشته می‌شد.

ششمین نشریه : «مجلهٔ یکان» در بهمن ماه ۱۳۴۲ پا به عرصه مطبوعات ایران گذاشت، عنوان کامل مجله «یکان مجلهٔ ریاضیات» بود و صاحب امتیاز، مدیر و سردبیر مجله آقای عبدالحسین مصحفی بودند. بهای هر شماره ۲۰ ریال و هرماه یک‌بار منتشر می‌شد. دراین مجله با اسامی افراد معروفی نظیر دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، حسین آزرم، غلامرضا مسجدی، پرویز شهریاری، محمد حسن رزاقی روبه‌رو می‌شویم. در شمارهٔ ۷ این مجله، مصاحبه‌ای با دکتر محسن هشترودی انجام گرفته است که متن کامل این مصاحبه را در برهان ۱۳، استاد یاسی‌پور در مقالهٔ «تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران» آورده است. درضمن آخرین شماره این مجله (۱۱۸) در سال ۱۳۵۶ به‌چاپ رسید.

هفتمین نشریه : «مجلهٔ آشتی با ریاضیات» در بهار سال ۱۳۵۶ به سردبیری آقای پرویز شهریاری توسط دانشگاه آزاد آن روز پا به عرصهٔ مطبوعات ایران گذاشته است. دو رکن اساسی این مجله، پرداختن به تاریخ ریاضیات و کاربرد ریاضیات است. این مجله در شماره ۲۰ تعطیل شد.

هشتمین نشریه : «مجلهٔ آشنایی با ریاضیات» درسال ۱۳۶۴ به دنبال آشتی با ریاضیات پا به عرصهٔ مطبوعات گذاشت و تقریباً ۸۰ شماره از این دو مجله چاپ گردید، این مجله تا سال ۱۳۷۲ چاپ می‌شد.

نهمین نشریه : «مجله رشد آموزشی ریاضی» است که در سال ۱۳۶۳ اولین شماره آن چاپ شد. این مجله فصلنامه است و بیشتر مخاطبان آن دانشجویان تربیت معلم و معلم‌های ریاضی هستند.

دهمین نشریه : «جنگ ریاضی» است که تاکنون ۱۰ شماره به سردبیری آقای بهزاد منوچهریان به چاپ رسیده است.

یازدهمین نشریه : «مجله ریاضی برهان» در سال ۱۳۷۰ به سردبیری آقای امیری کارخود را آغاز کرد و بیشترین مخاطبان این مجله دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی و معلمهای ریاضی است. در کنار این مجله، در سال ۱۳۷۰، مجلهٔ ریاضی برهان راهنمایی، ابتدا به سردبیری آقای حمیدرضا امیری و سپس به سردبیری آقای خسرو داوودی به طبع رسید. این دو مجله توسط انتشارات مدرسه، وابسته به آموزش و پرورش به‌چاپ می‌رسد.

از نشریه‌های دیگر ریاضی می‌توان از «نشریهٔ ریاضی» «بولتن‌ها و خبرنامه‌های انجمن ریاضی ایران»، مجلهٔ گنجینه (انتشارات فاطمی) و «نشریه‌ها و مجله‌های ریاضی مرکز تحقیقات معلمان» نام برد.

۲ ـ اصولاً ارتباط آموزشی بین یک مجله آموزشی ریاضی با مخاطبان خود یک ارتباط غیرکلامی و اصطلاحاً «مقاله‌ای» است و این یکی از حساسترین جوانب کار است. زیرا مقالات باید به گونه‌ای باشند که مخاطب بدون واسطه بتواند به اهداف آموزشی مقاله رسیده و حداکثر استفاده را ببرد. به اعتقاد ما، مقاله‌ها باید به‌گونه‌ای باشند که ارتباط بین یک مقاله آموزشی و مخاطب آن، ارتباطی مانند معلم و شاگرد در سر کلاس باشد. معلم هنگام تدریس در کلاس، مثالهایی را ارائه می‌کند که آوردن آنها بر روی کاغذ کاری مشکل است، همچنین ممکن است با رفتارش، نوع حرف‌زدنش و مثالهایی که مطرح می‌کند، باعث جذب دانش آموزان شود، اما در یک مقاله، دانش‌آموز حروف و اعداد را می‌بیند.

بنابراین، مقالات باید با زبانی گویا، مطالب را به مخاطب عرضه کرده و ابهامی نداشته باشند، یا اگر دریک مقطع، مبهم باشند، درمقطعی دیگر به گونه‌ای که نوعی آموزش در آن نهفته باشد، جوابگوی آن ابهام باشند. به عنوان مثال اگر در مقاله‌ای عنوان کردیم که تابعی مانند f دارای نقطه ماکزیمم نسبی باشد ؛ درآن نقطه مشتق تابع برابر با صفر است ولی عکس آن برقرار نیست (ایجاد ابهام). باید در قسمت دیگر مقاله این ابهام رفع شود و به مقاله‌های بعدی ارجاع داده نشود و با یک مثال نقض به صورت زیر نشان می‌دهیم که عکس حکم بالا برقرار نیست :

درتابع $f(x)=x^3$ ، $f'(0)=0$ اما در نقطه $x=0$ تابع ماکزیمم ندارد.

مقالات باید به زبان مخاطب و درحد واندازه‌های او نوشته

شوند و همواره از نوعی تازگی و تنوع برخوردار باشند. به بیان دیگر و کاملتر ارتباط بین مجله‌های آموزشی ریاضی و مخاطبان آن می‌بایست ارتباط بین معلم و شاگرد باشد.

۳ ـ این که آیا مجله‌های ریاضی واقعاً تا چه‌حد رسالت خود، یعنی نقش معلم‌گونهٔ خود را توانسته‌اند ایفا کنند، سؤالی است که مخاطبان مجله بهتر و دقیقتر می‌توانند به آن پاسخ بدهند و درواقع بهترین الگوها و خط مشی‌ها از همین بازخوردها به دست می‌آیند وهمواره مجله‌های ریاضی و دست‌اندرکاران آنها را مجاب می‌کند که درمعرض نظرخواهی و ارزشیابی قرار بگیرند.

۴ ـ به اعتقاد ما یکی از عاملهای مؤثر در پیشرفت و پیشبرد اهداف آموزشی، رقابت سالم و سازنده است و این امر درمورد مجله‌های ریاضی و چاپ مقالات از طرف مؤلفان و مترجمین نیز صادق است. لذا اگر تعداد مجله‌های ریاضی درمقاطع مختلف بیشتر باشد، این‌رقابت بیشتر خواهد شد و بی‌تردید کیفیت کار بالا خواهد رفت.

ب ـ ویژگیهای آموزشی از طریق مجله‌های آموزشی ریاضی

۱ ـ از ویژگیهای آموزش از طریق مجله‌های آموزشی ریاضی، در دسترس بودن و فاصله کوتاه زمانی در چاپ آنهاست. بنابراین همواره با سرعت می‌توان تازه‌ترین روشهای آموزشی و مطالب ریاضی را به مخاطبان منتقل کرد. و نیز می‌توان مخاطبان را در جریان آخرین دست‌آوردها، کنفرانسها و رویدادهای مهم ریاضی قرار داد.

۲ ـ درحال‌حاضر، معمولاً تیراژ کتابهای ریاضی ۵ الی ۱۰ هزار نسخه است. در صورتی که مجله‌های ریاضی دارای تیراژ بالاتری هستند و در نتیجه طیف وسیعتری از مخاطبان را پوشش می‌دهند.

۳ ـ علاوه بر آن، اگرمسایل مربوط به هنر گرافیک درمجله‌ها رعایت شود، با بهره جستن از این هنر می‌توان تنوّعی جذّاب ایجاد کرد و مطالب ریاضی را از یکنواختی و خشکی کتابهای ریاضی نجات بخشید. درنتیجه، انگیزه و علاقه برای مطالعه مقالات ریاضی فزونی خواهد یافت.

۴ ـ خواننده مجله با پرداخت مبلغی که معمولاً مقدار آن از قیمت یک کتاب ـ حتی با همان تعداد صفحات مجله ـ کمتر است (بدلیل تیراژ بالای مجله) می‌توانند از چندین مقاله در زمینه‌های مختلف و مسایل سرگرم کننده و متنوع برخوردار باشند.

۵ و ۶ ـ از مهمترین ویژگیهای مجله‌های ریاضی، تشویق خوانندگان و به‌کار گرفتن استعدادهاست و می‌تواند حتی با ذکر یک اسم یا چاپ یک مسأله و یا چاپ یک مقاله، محرکی مفید برای معلمان محسوب شود. این امر بارها تجربه شده و در نامه‌هایی که به دفتر مجله ارسال می‌شود، این‌گونه مطالب بسیار به‌چشم می‌خورد.

تاریخچهٔ مختصری از موضوع درسی، می‌تواند پیش از تدریس دردانش‌آموز ایجاد انگیزه کند، به‌عنوان مثال دررابطه با مشتق می‌توان گفت: نیوتن از درون مکانیک و لایپ از درون هندسه به مفهوم مشتق و دیفرانسیل پی بردند. بااین‌که دانش‌آموزان بدانند که شخصیتهای مهمی مانند اولروفرما دربرهان بعضی قضایا از استقرای ناقص استفاده می‌کردند و گاهی اشتباه می‌کردند. همچنین با زبان ساده (زبان بچه‌ها) در مجله بنویسیم وچند مطلب ریاضی را درحالت بازی و با روش فعالیت به آنها بیاموزیم.

برای این منظور ابتدا باید مطلب درسی را تا آنجا که ممکن است به صورت شهودی مطرح کنیم، سپس بر اساس فعالیت دانش‌آموز، می‌توان آن را در فرآیند حل مسأله یا اثبات قضیه قرار داد. با این روش کاری می‌کنیم که دانش‌آموز، مراحل مختلف حل مسأله را خودش انجام بدهد. این کار باعث می‌شود که دانش‌آموز تا اندازه‌ای درجریان حل مسأله قرار بگیرد و به‌جای تکرار لفظی قضایا، علم را پیش خود بازآفرینی کند، تا این‌که به نتیجه مطلوب برسد.

۷ ـ گاهی اوقات کتابهای درسی به دلیل محدودیت در تعداد صفحات مطالب را به شکل خیلی فشرده عنوان می‌کنند و درنتیجه کمبودهایی درکتابهای درسی به‌چشم می‌خورد که مجله‌های ریاضی با چاپ مقالاتی مستقل یا دنباله‌دار، می‌توانند مطلب مزبور را پوشش داده و تا حد زیادی این خلأها را پر کنند. بعضی از کاربردهای ریاضی مرتبط با رئوس مطالب درسی، باید در مجله مطرح گردد، تا هم دانش‌آموز با مفهوم و طرح درس آشنا شود و هم بداند که ریاضی به‌چه دردی می‌خورد.

درحقیقت، آموزش ریاضی یعنی شیوه‌ای از کار که نخست مفاهیم را به صورت درست و قانع‌کننده در اختیار دانش‌آموزان

قرار دهد و راهی پیدا کنند که درست بودن و قانع‌کننده بودن این راهها را جبران کند. همچنین مجلهٔ ریاضی باید شامل تاریخ و فلسفه ریاضی و سرگرمیهای ریاضی باشد، تا خلأهای موجود در کتابهای درسی را از این طریق جبران کند.

۸ ـ کار دیگر مجله، آشنایی مخاطبان علاقه‌مند با نظریه‌ها و شاخه‌های جدید ریاضی و آخرین دستاوردهای جهانی است.

۹ ـ تعداد شیوه‌های آموزشی خوب، به تعداد معلمان کارآزموده است و هرکس می‌تواند شیوه‌های آموزشی موفق خود را دراختیار دیگران قرار دهد، برای این منظور، از معلمان موفق می‌خواهیم که یک موضوع درسی را درنظر بگیرند و عملکرد خود را سر کلاس با توضیحات، مثالها، تکالیف و غیره گزارش کنند. این کار در مجله برای معلم می‌تواند انتقال یک تجربه باشد، بنابراین معلمان ریاضی بویژه معلمان جوان می‌توانند با مطالعه این تجربه‌ها، روش آموزشی با شیوه دیگری را پیدا کنند که غیر از آنها ولی سازگار با آنها و بدون این که تناقضی با آنها داشته باشند، به‌کار گیرند و سر کلاس از آنها استفاده کنند.

بیشتر مجله‌های ریاضی مشکلات درسی دانش آموزان را رفع می‌کنند و کمتر التفاتی به معلمان دارند. یکی از هدفهای آموزش ریاضی به‌طور قطع آموزش معلمان است، بنابراین اگر قسمتی از مجله را به معلمان اختصاص دهیم و برای آنها بنویسیم، درنتیجه ازاین طریق به طور غیرمستقیم، دانش‌آموزان را هم آموزش داده‌ایم.

همچنین از طریق مصاحبه با پیشکسوتان آموزش ریاضی کشور، می‌توان تجربه‌های مفید آموزشی را انتقال داد.

۱۰ ـ آگاه کردن مخاطبان از فهرست موضوعی آخرین کنفرانسها و رویدادهای ریاضی در داخل و خارج از کشور.

ج ـ نقش مخاطبان در پیشبرد هدفها و هرچه بهتر شدن مجله‌های آموزش ریاضی

۱ ـ بهترین عامل پیشرفت نظرات مخاطبان و اعمال سلیقه‌ها و پیشنهادات آنهاست، چه اینکه صاحبان اصلی مجله ایشان هستند.

۲ ـ مقالات ارسالی به دفتر مجله می‌تواند در فصول مختلف و مقاطع مختلف و بانظر هیأت تحریریه چاپ شود، که خود به‌عنوان پشتوانه‌ای برای مجله است.

۳ ـ با توجه به همه موارد ذکر شده، لزوم راه‌اندازی مجله‌های جدید و پشتیبانی ازمجله‌های موجود به خوبی احساس می‌شود و این امر مهم، عزمی بلند و راسخ و عشقی وافر به امر آموزش را می‌طلبد.

۱. استاد پیشین انجمن خوشنویسان ایران، مرحوم حسن زرّین خط.



ادب ریاضی

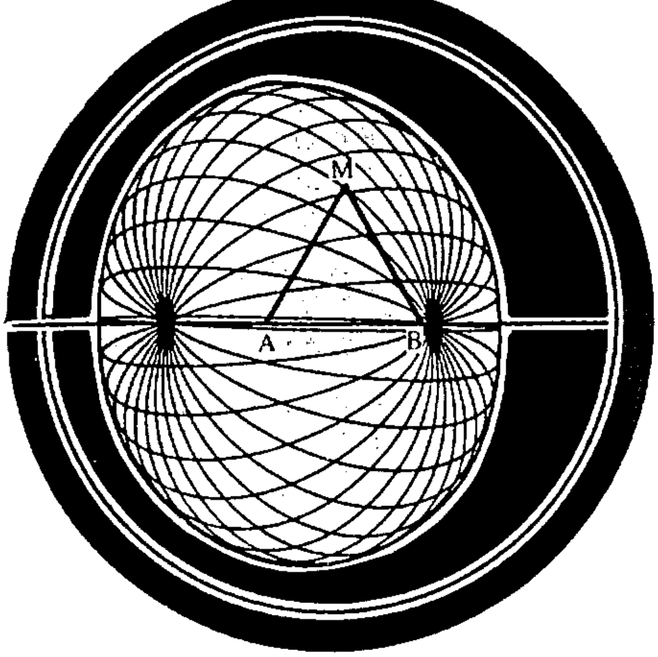
کشور فرانسه هنگام انقلاب در خطر هجوم خارجی بود و مادر وطن با حالی خسته و مجروح فرزندان خود را به کمک می‌طلبید. فریاد برآمد که باید توپ ساخت! باید باروت تهیه کرد! باید شوره از زمین استخراج کرد! و درحالی که **لازار کارنو** مشغول تهیهٔ تشکیلات فتح نظامی بود، **گاسپار مونژ** فتح علمی را تشکیلات می‌داد.

این مرد که فرزند فروشندهٔ دوره‌گردی بود و **هندسهٔ ترسیمی** را اختراع کرد، مانند وطن‌پرست پرشوری فعالیت می‌نمود. وی طبق منویّات کنوانسیون، درصدد تجهیز لشکری مرکب از سیصدهزار نفر برآمد و حال آنکه تمام قورخانه‌ها خالی و انبارها از شوره تهی بود و این ماده را تا آن وقت از هندوستان وارد می‌کردند.

برُنز لازم برای تهیهٔ توپ را از کجا باید تهیه کرد؟ مونژ فریاد برآورد: «زنگها و ناقوسها را آب کنید! شوره از کجا به‌دست آوریم؟ از زمین بکنید و آن وقت ما در ظرف سه روز تمام توپهای شما را پر خواهیم کرد!»

مونژ روزها اوقات خود را به بازرسی قورخانه‌ها و توپ‌ریزیها صرف می‌کرد و شبها کتاب «فن تهیهٔ توپ» را تألیف می‌کرد.

تاریخ علوم، «پی‌یر روسو»



مکان هندسی

قسمت دوازدهم

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

● **محمد هاشم رستمی**

مثال ۱۰ ــ هذلولی به معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۴$ داده شده است. الف ــ این هذلولی را رسم کنید و مختصات مرکز رأسها و کانونهای آن رابیابید. ب ــ مختصات نقطهٔ E مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو رأس A و ′A را پیدا کنید و معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF را بنویسید. پ ــ نقطه‌ای روی هذلولی بالا بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و ′A برابر $۲\sqrt{۲} - ۳$ باشد.

حل ــ الف ــ $x^۲ - y^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow$

$a^۲ = b^۲ = ۴ \Rightarrow$ ، $O(۰,۰)$ مرکز هذلولی

$a = b = ۲ \Rightarrow c = a\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$ ، $A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۰ \end{vmatrix}$ $A'\begin{vmatrix} -۲ \\ ۰ \end{vmatrix}$

$F\begin{vmatrix} ۲\sqrt{۲} \\ ۰ \end{vmatrix}$ $F'\begin{vmatrix} -۲\sqrt{۲} \\ ۰ \end{vmatrix}$

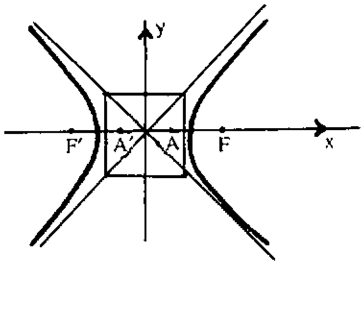
ب ــ بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی داریم :

$\overline{OE}.\overline{OF} = \overline{OA}^۲$

$\Rightarrow OE \times c = a \Rightarrow OE = \frac{a^۲}{c} = \frac{۴}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \Rightarrow$

$E\begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲} \\ ۰ \end{vmatrix}$ ، وسط پاره‌خط EF، $O'\begin{vmatrix} x = \frac{x_E + x_F}{۲} \\ y = ۰ \end{vmatrix}$

$= \frac{\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$



$R = O'E = O'F = a\sqrt{۲} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a = \frac{a\sqrt{۲}}{۴} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴}$
$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ شعاع دایرهٔ به قطر EF .

$(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۲}$
معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF

پ ــ دو نقطهٔ E و F پاره‌خط AA' را به نسبت $۳-۲\sqrt{۲}$ تقسیم می‌کنند. زیرا داریم:

$$\frac{FA}{FA'}=\frac{EA}{EA'}=\frac{c-a}{c+a}=\frac{a\sqrt{۲}-a}{a\sqrt{۲}+a}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}=۳-۲\sqrt{۲}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $۳-۲\sqrt{۲}$ است، دایرهٔ به قطر EF است. لذا نقطهٔ برخورد این دایره با هذلولی را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases}x^۲-y^۲=۴\Rightarrow y^۲=x^۲-۴\\(x-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲+y^۲=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲+x^۲-۴=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x^۲-۳\sqrt{۲}x=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ و } x=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\ x=۰\Rightarrow y^۲=-۴\ ,$$

$$x=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow y^۲=\frac{۹}{۲}-۴=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow M_۱(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}) \text{ و}$$

نقطه‌های جواب مسأله $M_۲(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

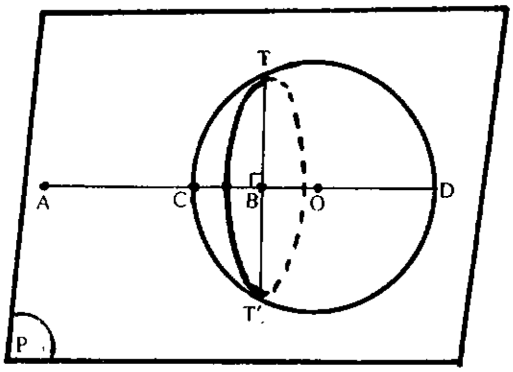
تمرین

۱ ــ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مساوی $\sqrt{۲}$ باشد. شعاع دایرهٔ مکان هندسی و فاصلهٔ مرکز این دایره از نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

۲ ــ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۸ سانتیمتر از یکدیگر در صفحهٔ P داده شده‌اند. الف ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان بیابید که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{۵}{۳}$ تقسیم کنند. دایرهٔ به قطر CD چگونه دایره‌ای است؟

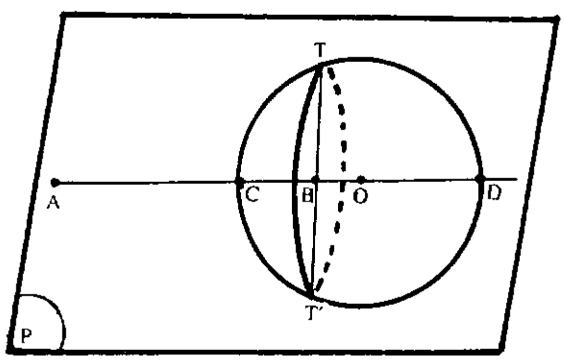
ب ــ نقطه‌ای از صفحهٔ P را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۹۰ درجه دیده شود و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{۵}{۳}$ باشد.

۸ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.



اثبات به روش هندسی ــ صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد در نظر می‌گیریم و در این صفحه روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند. آن‌گاه دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایرهٔ به قطر CD واقع در این صفحه که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، کره‌ای به قطر CD پدید می‌آید، که این کره مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است.

اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ ثابت $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ را در دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر



می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، داریم:

$$A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\ M(x,y,z) \Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \text{ و}$$

$$MB=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

$$\frac{MA}{MB}=K \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}=K \Rightarrow$$

$$k^2(x-x_2)^2+k^2(y-y_2)^2+k^2(z-z_2)^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

پس از ساده کردن معادلهٔ بالا، معادله‌ای به صورت:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(x_1-k^2x_2)}{k^2-1}x+\frac{2(y_1-k^2y_2)}{k^2-1}y+\frac{2(z_1-k^2z_2)}{k^2-1}z+\frac{k^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}{k^2-1}=0 \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید که معادلهٔ یک کره به مرکز نقطهٔ

$$O_1\left(\frac{k^2x_2-x_1}{k^2-1},\frac{k^2y_2-y_1}{k^2-1},\frac{k^2z_2-z_1}{k^2-1}\right)$$

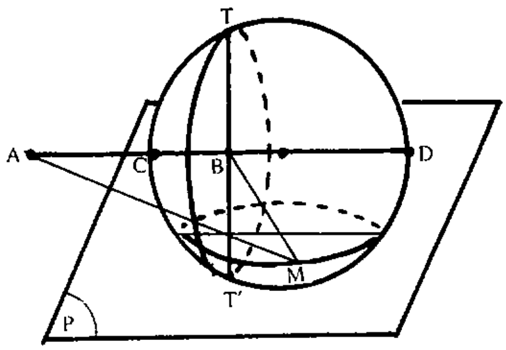
و به شعاع

$$R=\left|\frac{k}{k^2-1}\right|\times\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2-2z_1z_2}$$

است.

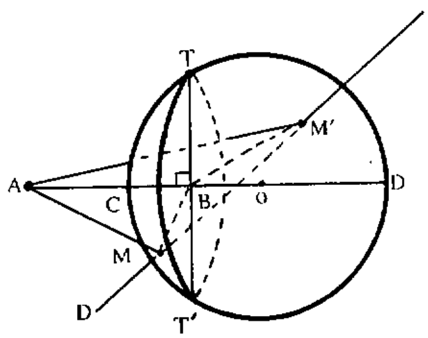
بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ برابر مقدار ثابت K است. در ضمن به کمک یکی از رابطه‌های مربوط به تقسیم توافقی، به‌عنوان مثال به کمک رابطهٔ نیوتن می‌توان ثابت نمود که قطر این کره، پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

مثال ۱ ــ صفحهٔ P و دونقطهٔ A و B غیرواقع بر آن مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت K است.



حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند، این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P جواب مسأله است. در صورتی که کره، صفحه P را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است، و اگر کره بر صفحهٔ P مماس باشد، جواب مسأله یک نقطه (نقطهٔ تماس کره و صفحه) است، و اگر کره، صفحهٔ P را قطع نکند مسأله دارای جواب نیست.

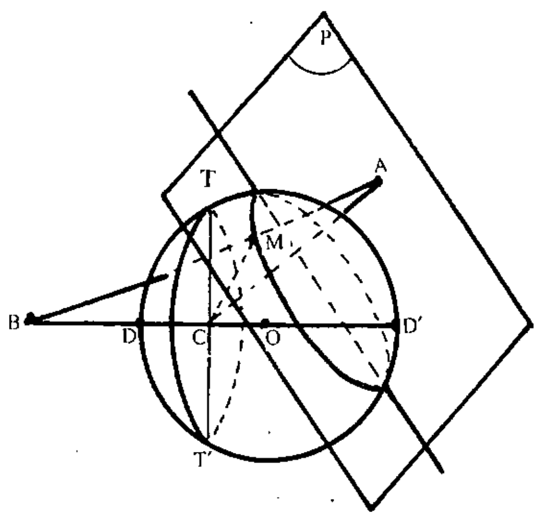
مثال ۲ ــ خط D و دو نقطهٔ A و B غیرواقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B برابر K است، یعنی کرهٔ به قطر CD را چنان که C و D پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کرده‌اند،

رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با خط D جواب مسأله است. مسأله حداکثر ۲ جواب دارد.

مثال ۳ ــ سه نقطهٔ A، B و C مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت K است.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است صفحه P عمود منصف پاره‌خط AB است که این صفحه را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر K می‌باشد، یعنی کرهٔ به قطر DD′ (نقطه‌های D و D′ پاره‌خط BC را به نسبت K تقسیم کرده‌اند) را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AC جواب مسأله است.

مثال ۴ ــ دو نقطهٔ $A(-1,2,0)$ و $B(3,-2,1)$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ است.

حل ــ راه اول: با قرار دادن $(x_1=-1, y_1=2, z_1=0)$ و $(x_2=3, y_2=-2, z_2=1)$ و $k=\sqrt{2}$ در معادلهٔ (۱) (معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است)، معادلهٔ مکان هندسی مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(-1-6)}{2-1}x+\frac{2(2+4)}{2-1}y+\frac{2(0-2)}{2-1}+z$$
$$+\frac{2(9+4+1)-(1+4+0)}{2-1}=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-14x+12y-4z+23=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

راه دوم: فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت داریم:

$$A(-1,2,0),\ B(3,-2,1),\ M(x,y,z),\ k=\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+z^2}\ ,$$
$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$
$$\Rightarrow\frac{MA^2}{MB^2}=k^2\Rightarrow\frac{(x+1)^2+(y-2)^2+z^2}{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}=2\Rightarrow$$
$$2(x-3)^2+2(y+2)^2+2(z-1)^2=$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\Rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-14x+12y-4z+23=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

مثال ۵ ــ الف ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطه $A(2,0,-1)$ و $B(0,3,1)$ برابر $\sqrt{3}$ باشد. ب ــ ثابت کنید که خط $D:\frac{x+1}{1}=\frac{y-\frac{9}{2}}{-2}=\frac{z-2}{2}$ از مرکز کرهٔ مکان هندسی بالا می‌گذرد. پ ــ نقطه‌هایی از خط D را مشخص سازید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{3}$ باشد.

حل ــ الف ــ مکان هندسی خواسته شده کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. معادلهٔ این کره به صورت زیر است:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(x_1-k^2x_2)}{k^2-1}x+\frac{2(y_1-k^2y_2)}{k^2-1}y+$$
$$\frac{2(z_1-k^2z_2)}{k^2-1}+\frac{k^2(x_2^2+y_2^2+z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1)^2}{k^2-1}=0$$
$$A(x_1=2,y_1=0,z_1=-1)\ ,\ B(x_2=0,y_2=3,z_2=1),$$
$$k=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2(2-0)}{3-1}x+\frac{2(0-9)}{3-1}y+$$

$$\frac{2(-1-3)}{3-1}z+\frac{3(0+9+1)-(4+0+1)}{3-1}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x-9y-4z+\frac{25}{2}=0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی مورد نظر

ب ــ مرکز کرهٔ بالا نقطهٔ $O_1(-1,\frac{9}{2},2)$ است که مختصاتش در معادلهٔ خط D صدق می‌کند پس خط D از مرکز کره می‌گذرد.

پ ــ نقطهٔ برخورد خط D و کرهٔ مکان هندسی بالا را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-9y-4z+\frac{25}{2}=0 \\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-\frac{9}{2}}{-2}=\frac{z-2}{2}=t \Rightarrow x=t-1\ , \end{cases}$$

$$y=-2t+\frac{9}{2}\ ,\ z=2t+2$$

$$\Rightarrow (t-1)^2+(-2t+\frac{9}{2})^2+(2t+2)^2+2(t-1)$$

$$-9(-2t+\frac{9}{2})-4(2t+2)+\frac{25}{2}=0$$

$$\Rightarrow 9t^2=\frac{51}{4}\Rightarrow t^2=\frac{51}{36}\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{51}}{6}\Rightarrow M_1(\frac{\sqrt{51}}{6}-1\ ,$$

$$\frac{-\sqrt{51}}{3}+\frac{9}{2},\frac{\sqrt{51}}{3}+2),$$

$$M_2(\frac{-\sqrt{51}}{6}-1,\frac{\sqrt{51}}{3}+\frac{9}{2},\frac{-\sqrt{51}}{3}+2)$$

مثال ۶ ــ دو نقطهٔ $A(-1,2,+1)$ و $B(3,-1,1)$ در دستگاه مختصات $O-xyz$ داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ xoy را پیدا کنید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است، تعیین می‌کنیم و فصل مشترک آن با صفحه xoy به معادلهٔ $z=0$ را به دست می‌آوریم:

$$A(-1,2,1)\ ,B(3,-1,1)\ ,M(x,y,z)\ ,k=2\Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\ ,$$

$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\ ,$$

$$\frac{MA}{MB}=2\Rightarrow\frac{MA^2}{MB^2}=4\Rightarrow MA^2=4MB^2\Rightarrow$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=$$

$$4(x-3)^2+4(y+1)^2+4(z-1)^2\Rightarrow$$

$$3x^2+3y^2+3z^2-26x+12y-6z+38=0$$

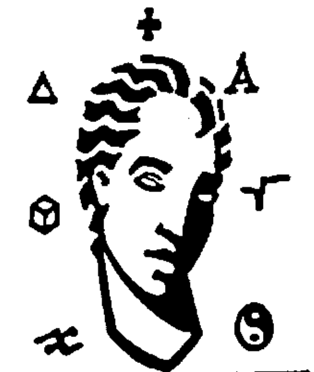
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{26}{3}x+4y-2z+\frac{38}{3}=0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-\frac{26}{3}x+4y-2z+\frac{38}{3}=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{26}{3}x+4y+\frac{38}{3}=0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده.



تفریح اندیشه ۴

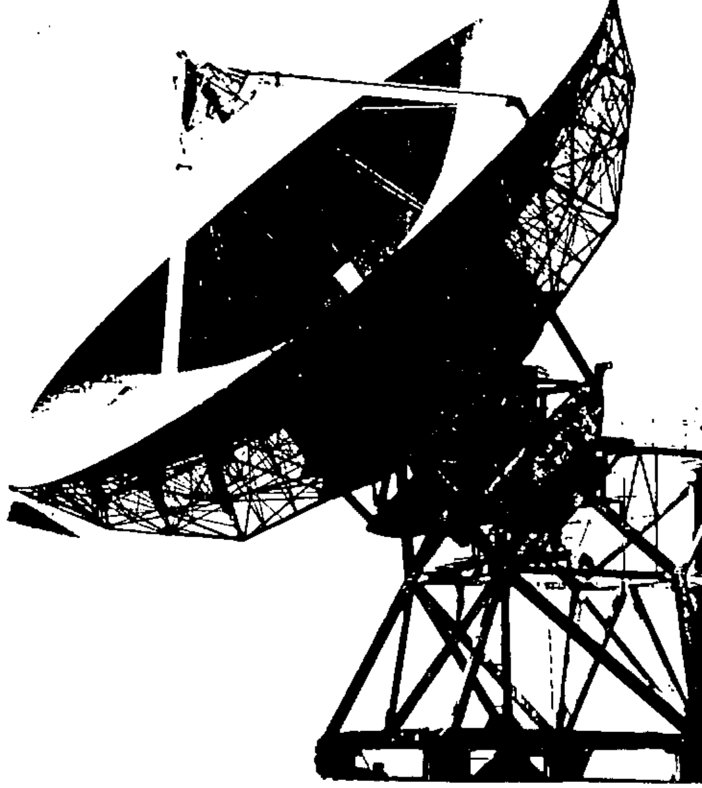
یکی از متصدیان بازی گلف به جای استفاده از تلفن زمین بازی، از زبان اشاره استفاده می‌کرد. مثلاً با یکی از بچه‌ها با تکان دادن پیراهنش حرف می‌زد و در مورد دیگری به جایگاه توپها اشاره می‌کرد.

این وضع در یکی از مسابقات که در آن تلفن نبود به دردش خورد. در این مسابقه مجبور شد از سیستم علامت دادن استفاده کند. او دو پرچم قرمز یک جور، دو پرچم آبی یک جور، و دو پرچم سفید یک جور داشت و آنها را یکی زیر دیگری بدون فاصله بر تیری برافراشت، و به خاطر وضوح کار، هیچ گاه دو پرچم یک رنگ را مجاور هم قرار نداد.

چند علامت متمایز با این سیستم می‌توان فرستاد؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

کاربردهای ریاضیات در فیزیک (موج)



سیدعلاء الدین صلاحی

موج یکی از مهمترین مفاهیم بنیادی علم فیزیک است. از روشهای انتقال انرژی از مکانی به مکان دیگر نیز هست. یعنی هنگامی که هدفی را دنبال کنیم بدین‌مضمون که انرژی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر منتقل گردد بدون آن که ذره‌ای از ماده در بستر مکان جابجا شده باشد یعنی بدون آن که در راستای انتقال انرژی مادهٔ‌ای منتقل یا منتشر شده باشد از این ایده و روش بهره می‌بریم.

موجها اقسام متفاوتی دارند مانند موجهای طولی – موجهای عرضی – موجهای پیچشی و ... و اینها با توجه به جهتهای ارتعاش و انتشار تعریف می‌گردند. به عنوان مثال در موجهای عرضی راستای انتشار و ارتعاش بر یکدیگر عمود هستند یعنی اگر ذرات محیط نوسان کننده در راستای قائم حرکت کنند آنگاه انتشار موج در جهت افقی صورت می‌پذیرد.

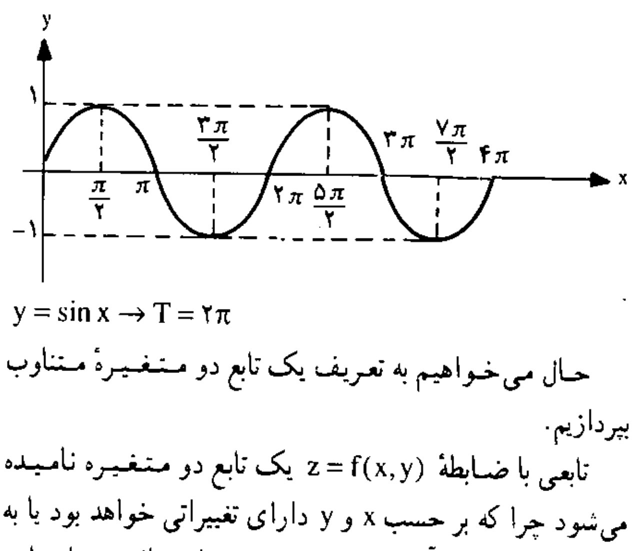
در اینجا می‌خواهیم یک مفهوم و تفسیر و تبیین ریاضی از مفهوم موج مطرح کنیم.

با تعریف تابع متناوب آشنا هستیم. هرگاه تابع f با دامنهٔ تعریف D_f و برد R_f معین و دارای دورهٔ تناوب T باشد باید در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall x \in D_f: \quad x + kT \in D_f \ , \ k \in z \\ \forall x \in D_f: \quad f(x) = f(x+kT), k \in z\end{cases} , T > 0$$

پس حال تابع f با دورهٔ تناوب T تکرار می‌گردد البته باید توجه نمود که مقادیر f(x) تکرار می‌گردند و در هر فاصلهٔ kT از متغیر دقیقاً یک مقدار خواهند داشت مثال روشن این تابع عبارت است از :

$y = \sin x \to T = 2\pi$



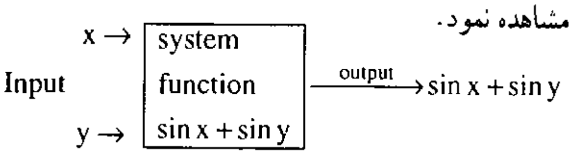
$y = \sin x \to T = 2\pi$

حال می‌خواهیم به تعریف یک تابع دو متغیرهٔ متناوب بپردازیم.

تابعی با ضابطهٔ $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره نامیده می‌شود چرا که بر حسب x و y دارای تغییراتی خواهد بود یا به هر جهت متغیرهای آن x و y هستند به عنوان مثال می‌توان تابع

$$\begin{cases} Z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ Z = f(x,y) = \sin x + \sin y \end{cases}$$

را نام برد و با توجه به شکل مقابل رابطهٔ ورودی خروجی آن را مشاهده نمود.



مثال: $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ y=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow f(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$
$=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$
$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\longrightarrow\frac{3}{2}$

اینک می‌خواهیم تعریفی برای تابع دو متغیرهٔ متناوب با تدقیق کافی ارایه کنیم.

۱ ــ تابع دو متغیره با ضابطهٔ $z=f(x,y)$ را متناوب نسبت به x می‌گوییم هر گاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall x\in D_{f_x}: x+kT_x\in D_{f_x}\ ,k\in z\\ \forall x\in D_{f_x}: f(x,y)=f(x+kT_x,y)\end{cases}\ ,T_x>0$$

در اینجا D_{f_x} دامنهٔ تعریف تابع نسبت به متغیر x است و T_x دورهٔ تناوب نسبت به متغیر x است.

۲ ــ تابع دو متغیره با ضابطهٔ $z=f(x,y)$ را متناوب نسبت به y می‌گوییم هرگاه در دو تعریف زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall y\in D_{f_y}: y+k'T_y\in D_{f_y}\ ,k'\in z\\ \forall y\in D_{f_y}: f(x,y)=f(x,y+k'T_y)\end{cases}\ ,T_y>0$$

در اینجا D_{f_y} دامنهٔ تعریف نسبت به متغیر y است و T_y دورهٔ تناوب نسبت به متغیر y است.

۳ ــ تابع دو متغیره با ضابطهٔ $z=f(x,y)$ را نسبت به هر دو متغیر x و y متناوب گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند.

$$\begin{cases}\forall (x,y)\in D_z: (x+kT_x,y+k'T_y)\in D_z\ :(k,k'\in z)\\ \forall (x,y)\in D_z: f(x,y)=f(x+kT_x,y+k'T_y)\end{cases}\ ,(T_x,T_y)>(0,0)$$

در اینجا D_z دامنهٔ تعریف نسبت به هر دو متغیر x و y است یعنی $(T_x,T_y)=T_{xy}=T$ و $D_z=D_f=(D_{f_x},D_{f_y})$ دورهٔ تناوب تابع دو متغیره x و y است.

یعنی در اینجا چون، هم دامنه $\mathbb{R}^2$ است پس هر عضو در دامنهٔ تعریف یک دوتایی (زوج) مرتب است به شکل (x,y) و چون برد $\mathbb{R}$ است پس هر عضو برد به شکل $Z_\circ\in\mathbb{R}$ است.

نتیجه: بنابراین تا اینجا با یک تابع دو متغیره که نسبت به هر دو متغیر متناوب و دوره‌ای است آشنا شدیم و تعریف آن را بیان کردیم. حال اگر بخواهیم می‌توانیم این مفهوم را باز هم تعمیم داده و به فضای $\mathbb{R}^n$ توسیع دهیم ولی چون در اینجا بحث فیزیکی و طبیعی و محسوس داریم بنابراین تا بستر چهار بعدی فضا ــ زمان می‌توانیم آن را تعمیم دهیم یعنی تابعی چهار متغیره با ضابطهٔ $\Psi=f(x,y,z,t)$ تعریف کنیم و بعد تابع متناوب چهار متغیره را مطابق زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases}\forall (x,y,z,t)\in D_\Psi: (x+k_1T_x,y+k_2T_y,z+k_3T_z,t+k_\circ T_t)\in D_\Psi\ ,k_i\in z\\ \forall (x,y,z,t)\in D_\Psi: f(x,y,z,t)=f(x+k_1T_x,y+k_2T_y,z+k_3T_z,t+k_\circ T_t)\end{cases}$$

به شرط آن که $(T_x,T_y,T_z,T_t)>(0,0,0,0)$.

حال یک تابع چهار متغیره که نسبت به هر چهار متغیر متناوب است در دست داریم. اگر این متغیرها را فضا و زمان در نظر بگیریم می‌توانیم فرم ساده‌تری از این تابع یا نگاشت دهیم.

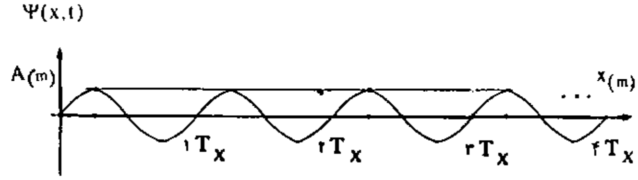
$\psi(\vec{r},t)=f(x,y,z,t)$

پس تعریف متناوب بودن آن نیز به فرم مقابل تبدیل می‌گردد.

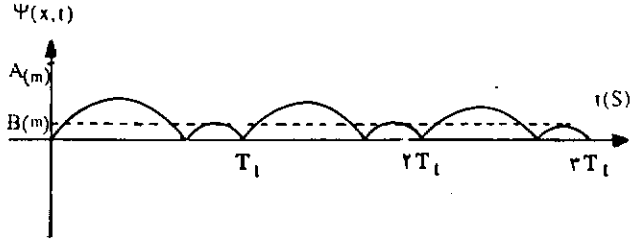
$$\begin{cases}\forall(\vec{r},t)\in D_\Psi: (\vec{r}+k\vec{r}_\circ,t+k'T)\in D_\Psi\\ \forall(\vec{r},t)\in D_\Psi: f(\vec{r},t)=f(\vec{r}+k\vec{r}_\circ,t+k'T)\end{cases}\ \ni k,k'\in z,(\vec{r}_\circ,t)>(\vec{0},0)$$

حال به تعریف الگوی ریاضی موج می‌پردازیم. هر تابع چهار متغیره فضا ــ زمان را که نسبت به متغیرهای فضا و زمان متناوب و دوره‌ای و تکراری باشد، موج یا تابع موج می‌نامیم. پس موج یک حرکت است که نسبت به مکان و زمان در ابعاد مختلف مکان تکراری و دوره‌ای است. پس موج یک حرکت است که در زمان تکرار می‌شود و در هر فاصله T ثانیه مجدداً به وضعیت اول برمی‌گردد و نیز در فضا و مکان نیز تکرار می‌شود یعنی در هر فاصله λ متر مجدداً به وضعیت اول برمی‌گردد اگر بخواهیم یک تعبیر محسوس و تجربی داشته باشیم این گونه مطرح می‌شود که اگر به یک حرکت موجی در یک لحظهٔ خاص از زمان توجه کنیم و از تمام محیط ارتعاش عکس‌برداری کنیم آنگاه متوجه می‌شویم که در آن لحظه و نیز هر لحظهٔ دلخواه دیگر حرکت در محیط تکرار شونده بوده است (البته به شرط آن که طول محیط بیش از چند طول موج باشد) یعنی مثلاً شکل

زیرا خواهیم دید.



و اگر یک دوربین فیلم‌برداری را در نقطه‌ای خاص و دلخواه از محیط ارتعاش فیکس و ثابت کنیم و از آن نقطه فیلم‌برداری کنیم باز هم ناظر و شاهد یک حرکت تکراری و دوره‌ای و متناوب خواهیم بود مثلاً مطابق شکل زیر:



دورهٔ تناوب در بعد زمان را زمان تناوب می‌گوییم و دورهٔ تناوب در بعد مکان را طول موج می‌نامیم به‌طوری خود طول موج دارای سه بعد است یعنی (طولی ـ عرضی ـ ارتفاعی)

$$\begin{cases}\vec{\lambda} = (\lambda_x^{(m)}, \lambda_y^{(m)}, \lambda_z^{(m)}) \\ T_t = T^{(s)}\end{cases} \Rightarrow T = (\vec{\lambda}, T_t)$$

واحد پریود زمانی معمولاً ثانیه و واحد پریود مکانی معمولاً متر است.

اینک به عنوان نمونه مثالی را با هم پاسخ می‌گوییم.

مثال: هرگاه ضابطهٔ $f(x,t) = A\sin(۲x - ۳t)$ نشان دهنده یک موج متحرک در امتداد محور xها باشد (SI) مطلوب است.

الف ـ پریود و طول موج

ب ـ شکل موج در مبدأ زمان بر حسب x و در $t = ۱^s$

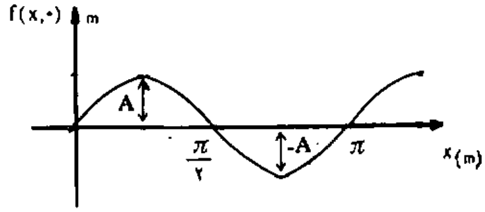
ج ـ شکل موج در مبدأ مکان بر حسب t و در $x = ۱^m$

حل: می‌دانیم که پریود تابع $y = A\sin au$ برابر است با $T_u = \frac{۲\pi}{|a|}$ بنابراین دوره زمانی و مکانی موج فوق عبارتند از:

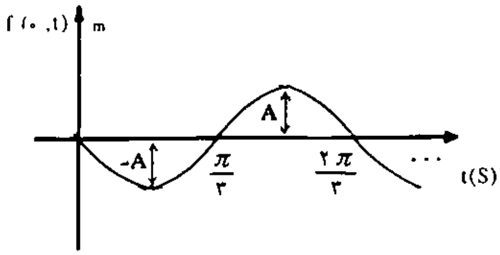
$$f(x,t_\circ) = A\sin(۲x - ۳t_\circ) \rightarrow T_x = \lambda = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi^m$$

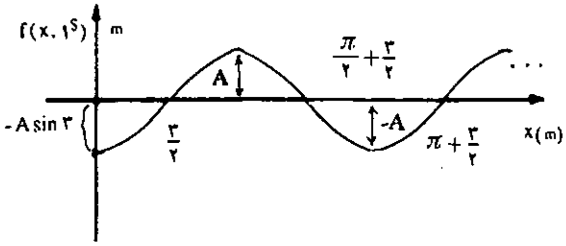
$$f(x_\circ,t) = A\sin(۲x_\circ - ۳t) \rightarrow T_t = T = \frac{۲\pi}{|-۳|} = \frac{۲}{۳}\pi^s$$

مبدأ زمان $t = \circ \Rightarrow f(x, \circ^S) = A\sin ۲x$

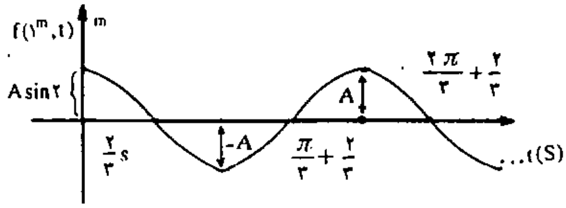


مبدأ مکان $x = \circ \Rightarrow f(\circ^m, t) = A\sin(-۳t) = -A\sin ۳t$





$f(x,۱^s) = A\sin(۲x - ۳)$



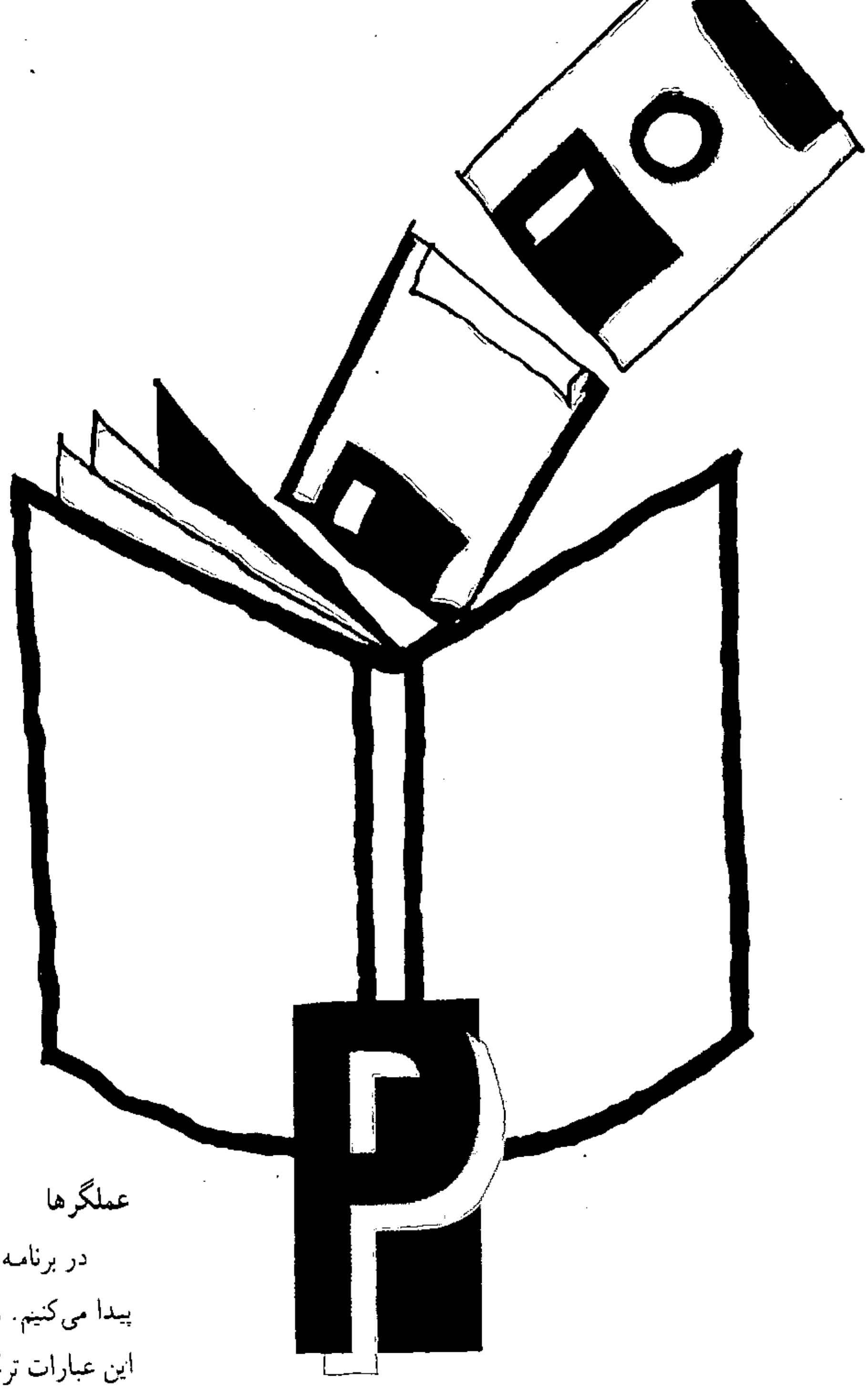
$f(۱^m,t) = A\sin(۲ - ۳t)$

پس موج فوق نسبت به زمان و مکان در حرکت است و این حرکت دوره‌ای و تکراری است.

آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال

(قسمت سوّم)

● محمد رحیم



عملگرها

در برنامه‌نویسی به نوشتن عبارات ریاضی و یا منطقی نیاز پیدا می‌کنیم. این عبارات ممکن است ساده و یا پیچیده باشند. این عبارات ترکیبی از عملگرها[1] و عملوندها[2] هستند. در عبارت a + b به علامت + عملگر و به a و b عملوند می‌گوییم. عملگرها بر روی داده عمل می‌کنند. عملگرها از یک دیدگاه کلی به دو دسته عمده تقسیم‌بندی می‌شوند : الف) عملگرهای دارای یک عملوند (unary) ب) عملگرهای دارای دو عملوند (binary). عملگرهای دارای یک عملوند مانند +، -، Not و @ و عملگرهای دارای دو عملوند مانند +، * و ... هستند. در جدول ۳ توضیحات لازم دربارهٔ عملگرهای دارای یک عملوند آمده است.

از طرف دیگر، عملگرها را نیز می‌توان در دسته‌بندی ۸گانهٔ

نوع حاصل از عمل	نوع عملوند	عمل	عملگر
نوع Integer	نوع Integer	مثبت	+
نوع Real	نوع Real		
نوع Integer	نوع Integer	منفی	–
نوع Real	نوع Real		
نوع Boolean	نوع Boolean	نقیض منطقی	Not
نوع Integer	نوع Integer	نقیض بیتی	
نوع اشاره‌گر	هر نوعی می‌تواند باشد	آدرس	@

جدول ۳ ـ عملگرهای دارای یک عملوند

زیر تقسیم‌بندی کرد :

۱ ـ عملگر تساوی[۳] : جهت جایگزینی یک مقدار در یک متغیر به کار می‌رود، مثلاً a:= –3 و یا a:= b+c یعنی مقادیر –3 و یا b+c در متغیر a نگهداری شوند. عملگر تساوی (:=) روی هر عملوندی به جز عملوندهای از نوع file عمل می‌کند.

۲ ـ عملگرهای محاسباتی[۴] : این عملگرها عبارتند از : +، –، *، /، div و mod. عملگرهای div و mod فقط بر روی عملوندهای از نوع صحیح (مثلاً Integer) عمل می‌کنند و نتیجهٔ حاصل از عمل نیز از نوع صحیح خواهد بود. سایر عملگرهای محاسباتی می‌توانند هم بر روی عملوند صحیح و هم بر روی عملوند اعشاری عمل کنند و نتیجهٔ حاصل از عمل می‌تواند صحیح و یا اعشاری باشد. div برای تقسیم دو عدد صحیح به کار می‌رود و حاصل تقسیم نیز صحیح است، ولی عملگر / برای تقسیم دو عدد صحیح و یا اعشاری به کار می‌رود و حاصل تقسیم همواره اعشاری است. mod برای محاسبهٔ باقیمانده به کار می‌رود.

۳ ـ عملگرهای سطح بیت[۵] : این عملگرها بر روی عملوندهایی از نوع Integer عمل می‌کنند و عبارتند از : not، and، or، xor، shl و shr. توضیحات بیشتر مربوط به این عملگرها در آینده مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۴ ـ عملگرهای نسبی[۶] : این عملگرها برای مقایسهٔ عملوندهایی از نوع Integer، Real، Boolean، char و string (و نیز عملوندهای از نوع ترتیبی) به کار می‌رود. در جدول ۴ این عملگرها به همراه نوع عمل معرفی شده‌اند. این عملگرها معمولاً در دستورات شرطی به کار می‌روند.

عملگر	<	>	=	<=	>=	<>	In
نوع عمل	کوچکتر از	بزرگتر از	مساوی	کوچکتر مساوی	بزرگتر مساوی	نامساوی	تعلق داشتن به

جدول ۴

در مثالهای زیر مقایسه‌های انجام شده را می‌توان در دستورات شرطی به کار برد :

```
x < 5.2              Initial <>'Q'
b * b >= 4 * a * c   'A' <'F'
Number = 500         false < true
```

۵ ـ عملگرهای منطقی[۷] : این عملگرها بر روی عملوندهایی از نوع Boolean عمل می‌کنند. در جدول ۵ این عملگرها به همراه نوع عمل معرفی شده‌اند.

عملگر	Not	And	Or	Xor
نوع عمل	نقیض منطقی	عطف منطقی	یای منطقی	یای انحصاری منطقی

جدول ۵

عملگرهای منطقی را می‌توان در دستورات شرطی به کار برد.

۶ ـ عملگر آدرس[۸] : برای دسترسی به آدرس یک متغیر از عملگر @ که عملگر آدرس است استفاده می‌کنیم. توضیحات بیشتر مربوط به این عملگر در مبحث اشاره‌گرها خواهد آمد.

۷ ـ عملگرهای مجموعه[۹] : با استفاده از این عملگرها می‌توان جمع، تفاضل و فصل مشترک دو مجموعه را به دست آورد. عملگرهای مجموعه +، – و * هستند. توضیحات بیشتر مربوط به این عملگرها در مبحث مجموعه‌ها خواهد آمد.

۸ ــ عملگر رشته[10] : این عملگر بر روی عملوندهایی از نوع رشته عمل می‌کند و سبب به هم چسباندن دو رشته می‌شود. عملگر رشته + است.

تقدم عملگرها[11]

در یک عبارت شرطی و یا محاسباتی ممکن است از انواع عملگرها استفاده شود و بدین لحاظ تقدم محاسبه اهمیت دارد. در جدول ۶ تقدم عملگرها آمده است.

طبقه‌بندی	تقدم	عملگرها
عملگرهای‌با‌یک‌عملوند	اول (بالاترین)	@,Not
عملگرهای ردهٔ *	دوم	*,/,div,mod,and,shl,shr
عملگرهای ردهٔ +	سوم	+,−,or,xor
عملگرهای نسبی	چهارم(پایین‌ترین)	=,<>,<,>,<=,>=,In

جدول ۶

در جدول ۶ تقدم عملگرها از بالا به پایین است و برای عملگرهای هم مرتبه، تقدم عملگرها برحسب واقع شدن آنها در یک عبارت، از چپ به راست است. توجه به این مطلب مهم است که پرانتز می‌تواند تقدم عملگرها را به هم بزند و لذا در یک عبارت، در صورت وجود پرانتز ابتدا عبارت داخل پرانتز محاسبه می‌شود و اگر در یک عبارت دارای چندین پرانتز غیر متداخل باشیم، پرانتزها از سمت چپ محاسبه می‌شوند و در صورتی که پرانتزهای متداخل داشته باشیم ابتدا داخلیترین پرانتز محاسبه می‌شود.

در مثالهای زیر عملکرد بعضی از عملگرها بررسی شده است.

مثال ۱: در این مثال نتایج حاصل از جمع دو عدد صحیح، دو عدد اعشاری و نیز یک عدد صحیح و یک عدد اعشاری آمده است :

$2+3=5$

$2+3.0=5.0$

$2.0+3=5.0$

$2.0+3.0=5.0$

مثال ۲: در این مثال نتایج حاصل از تقسیم اعشاری (/) آمده است :

$7/2=3.5$

$7.0/2=3.5$

$7/2.0=3.5$

$7.0/2.0=3.5$

$12/3=4.0$

مثال ۳: در این مثال نتایج حاصل از تقسیم صحیح (div) و نیز باقیمانده[12] (mod) آمده است :

7DIV2 = 3	7MOD2 = 1
12DIV3 = 4	12MOD3 = 0
0DIV5 = 0	0MOD5 = 0
4DIV5 = 0	4MOD5 = 4
(−8)DIV3 = −2	(−8)MOD3 = −2

مثال ۴ : در این مثال حاصل عبارت $7*10-5MOD3*4+9$ مرحله به مرحله با توجه به تقدم عملگرها که در جدول ۶ آمده به دست می‌آید.

ابتدا اولین عمل ضرب سمت چپ انجام می‌شود و نتیجه چنین است : $70-5MOD3*4+9$

در مرحلهٔ دوم، مشاهده می‌شود که تقدم عملگرهای Mod و * بیشتر از عملگر − است اما چون عملگر Mod نسبت به * جلوتر آمده، بنابراین 5MOD3 پردازش می‌شود و نتیجه چنین است : $70-2*4+9$

در مرحله سوم، چون عملگر * تقدم بیشتری دارد، ابتدا 2*4 محاسبه می‌شود و نتیجه چنین است : $70-8+9$

در مرحله چهارم، مشاهده می‌شود که عملگرهای − و + دارای تقدم مساوی هستند. اما چون پردازش عبارت از سمت چپ انجام می‌شود و عملگر − ابتدا آمده، بنابراین ابتدا 8 − 70 محاسبه می‌شود : $62+9$

و نتیجهٔ نهایی، عبارت است از : 71

مثـال ۵ : برنامهٔ زیر تفاوت عملگرهای / و div را نشان می‌دهد :

```
program Example5;
Var
    A و B: Integer;
    Ratio: Real;
BEGIN
    write ('Enter A و B: ');
    Readln (A و B);
    Ratio: = A div B;
    writeln ('Ratio = ', Ratio);
    Ratio: = A/B;
    writeln ('Ratio = ', Ratio);
END.
```

برنامهٔ فوق ابتدا پیغام می‌دهد که B و A را وارد کنید و سپس کاربر در جواب دستور Readln، مقادیر A و B را وارد می‌کند (مثلاً 3 ،10) و سپس کلید Enter (↵) را می‌زند. ابتدا نتیجهٔ تقسیم صحیح و سپس نتیجهٔ تقسیم اعشاری در خروجی چاپ می‌شود. خروجی برنامه چنین است :

```
Enter A و B:10 3↵
Ratio = 3.000000
Ratio = 3.333333
```

مثـال ۶ : برنامهٔ زیر مقادیر B و A را از طریق دستور Readln از ورودی گرفته و اگر A > B باشد، در آن صورت متغیر Test مقدار True را به خود می‌گیرد و اگر A > B نباشد، متغیر Test مقدار False را نگهداری خواهد کرد و در نهایت مقدار موجود در متغیر Test (True یا False) را در خروجی چاپ می‌کند :

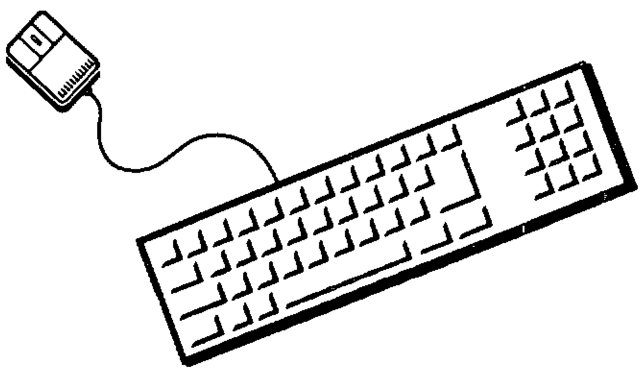
```
program Example6;
Var
    A و B: Integer;
    Test: Boolean;
BEGIN
    write ('Enter A و B: ');
    Readln (A و B);
    Test:= A > B;
    writeln ('Result = ', Test);
END.
```

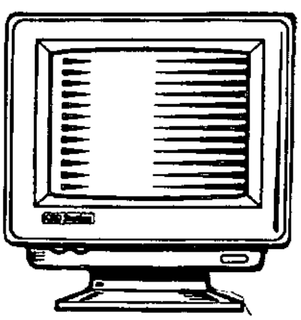
خروجی برنامه بعنوان مثال به صورت زیر است :

```
Enter A و B :  10   3↵
Result = True
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱ـ Operator
۲ـ Operand
۳ـ Assignment
۴ـ Arithmetic
۵ ـ Bitwise
۶ ـ Relational
۷ ـ Logical
۸ ـ Address
۹ ـ Set
۱۰ ـ String
۱۱ ـ Precedence of operators
۱۲ ـ Modulus



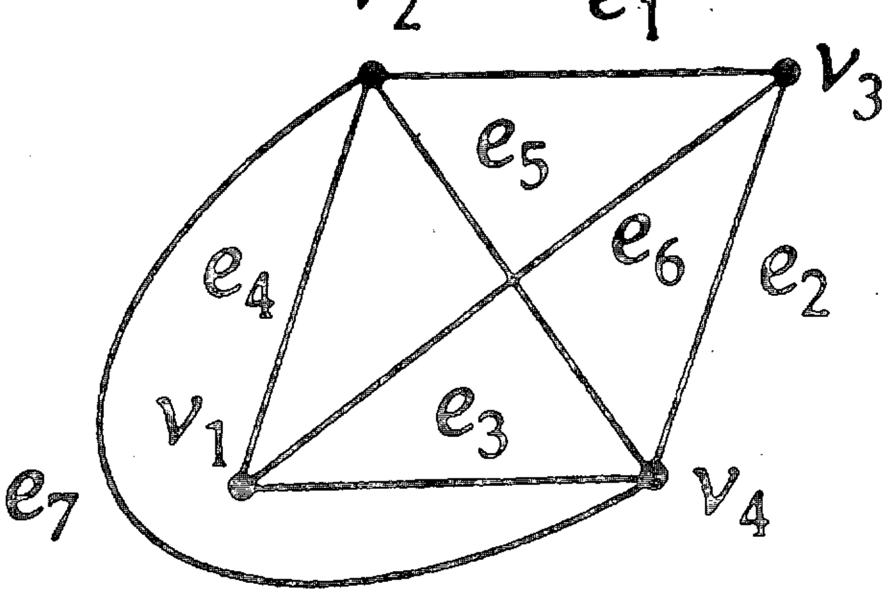


ریاضیات گسسته

قسمت هشتم

RALPH P. GRIMALDI

• ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



قبل از پیشروی بیشتر، به ذکر قاعدهٔ استنتاجی نسبتاً ساده اما مهم می‌پردازیم.

مثال ۲.۲۲

قاعدهٔ استنتاج زیر از ملاحظهٔ این موضوع حاصل می‌شودکه اگر p، q گزاره‌هایی چنان باشند که $p \Leftrightarrow t_0$ و $q \Leftrightarrow t_0$، آن‌گاه $p \wedge q \Leftrightarrow t_0$.

اکنون فرض می‌کنیم گزاره‌های p، q در طرح اثباتی روی دهند. این گزاره‌ها می‌توانند فرضهای داده شده یا نتایج مستخرج از فرضها و / یا از نتایج قبلاً مطرح شده در اثبات باشند. در این صورت دو گزارهٔ p و q را می‌توان، با عنایت به این شرایط، به ترکیب عطفی‌شان، $p \wedge q$، ترکیب کرد و گزارهٔ جدید حاصل را می‌توان در مراحل بعدی ادامهٔ اثبات به‌کار برد.

قاعدهٔ فوق را قاعدهٔ ترکیب عطفی[1] می‌نامیم و آن را به‌صورت جدول شکل زیر چنین می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

کاربرد این قاعده را در مثال ۲.۲۳ توضیح داده‌ایم.

قاعدهٔ استنتاج بعدی ما گاهی با روش عکس نقیض اثبات به‌کار رفته در انفصال نقیض اشتباه می‌شود، زیرا هر دوی آنها از نقیض گزاره‌ای بهره می‌برند. اما، این دو، دو قاعدهٔ متمایزند.

مثال ۲.۲۳

ابتدا به خاطر می‌آوریم که اگر S یک گزاره و $\overline{S} \Rightarrow F_0$ آنگاه گزارهٔ $\overline{S} \Rightarrow F_0$ همواره راست است. بنابراین $\overline{S}$ دروغ و، در نتیجه S راست است.

از استلزام منطقی $\overline{S} \Rightarrow F_0$ قاعدهٔ استنتاج موسوم به *اثبات با استفاده از کاذب یا تناقض*[2]، یا *برهان خلف*[3] را به‌دست می‌آوریم. این قاعده به‌صورت جدول شکل چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} \underline{\overline{S} \Rightarrow F_0} \\ \therefore S \end{array}$$

کاربرد این قاعده را در اثبات زیر به شرح می‌آوریم. اما ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که عدد صحیح n زوج[4] نامیده می‌شود اگر عدد صحیح kای چنان موجود باشد که $n = 2k$. عدد صحیح m فرد[5] نامیده می‌شود اگر عدد صحیح kای چنان موجود باشد که $m = 2k + 1$. عدد حقیقی x به گویا[6] موسوم است اگر $x = a/b$، با a و bی صحیح باشد و $b \neq 0$. اگر عدد حقیقی گویا نباشد آن را گنگ[7] می‌نامیم.

اکنون فرض کنید که مایل به اثبات نتیجهٔ زیریم

S : عدد حقیقی $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

به‌جای سعی در اثبات (مستقیم) این گزاره، (به‌طور غیرمستقیم) مبرهن می‌کنیم که چگونه به‌ازای گزارهٔ rی $\overline{S} \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$. (از اینجاست که به اثبات با استفاده از کاذب گاهی به‌عنوان *اثبات غیرمستقیم*[8] اشاره می‌شود.)

اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد (یعنی، فرض می‌کنیم $\overline{S}$ راست است). در این‌صورت $\sqrt{2} = a/b$، که a و bی آن اعدادی صحیح‌اند و $b \neq 0$، باز فرض می‌کنیم a/b به کوچکترین جملات نوشته شده باشد. بنابراین گزارهٔ زیر را داریم:

r : تنها عدد صحیح و مثبتی که هم a هم b را می‌شمارد ۱ است.

به علت اینکه $2 = (\sqrt{2})^2$، نتیجه می‌شود که $2 = (a/b)^2$، یا $a^2 = 2b^2$. با $a^2 = 2b^2$ درمی‌یابیم که a^2 زوج است؛ اگر a^2 زوج باشد، نتیجه می‌شود که a نیز زوج است. بنابراین، به‌ازای عدد صحیح cای، $a = 2c$. اما با b^2ی زوج، b نیز باید زوج باشد. درنتیجه، اعداد صحیح a، b، ۲ را به‌عنوان دومین مقسوم‌علیه مثبت دارند. بنابراین ۱ تنها عدد صحیح و مثبتی که a و b، هر دو، را می‌شمارد، نیست؛ و این گزارهٔ $\bar{r}$ را به‌دست می‌دهد.

اما چه شد که هم به r هم به $\bar{r}$ (و کاذب $r \wedge \bar{r}$، بنا به قاعدهٔ ترکیب عطفی) منتهی شدیم؟ آنچه که موجب رخ دادن این امر شد این بود که هنگامی که نوشتیم «فرض می‌کنیم که $\sqrt{2}$ گویاست» بر این فرض بودیم که $\bar{S}$ راست است. درنتیجه، فرض مزبور درواقع دروغ است، و بنابراین، نقیض آن، یعنی S، باید راست باشد.

به این ترتیب، به علت $\bar{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$، داریم $\bar{S} \Leftrightarrow F.$. به‌عنوان نتیجه، $S \Leftrightarrow t.$، و این بدان معنی است که $\sqrt{2}$ گنگ است.

در اینجا ارزش دارد که به حالت خاصی از اثبات با استفاده از کاذب، یعنی،

$$\left[\bar{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})\right] \Rightarrow (S \Leftrightarrow t.)$$

توجه کنیم.

فرض می‌کنیم مایل به اثبات قضیهٔ $p \Rightarrow q$ هستیم، با قرار دادن $p \to q$ به‌جای گزارهٔ S فوق، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان $(\overline{p \to q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$ را به‌ازای گزارهٔ rی محقق کرد. در این صورت نتیجه می‌شود که $(p \to q) \Leftrightarrow t.$، یا $p \Rightarrow q$.

حالت خاص اثبات با استفاده از کاذب مزبور را، بنا به

$$(\overline{p \to q}) \Leftrightarrow (\overline{\bar{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q})$$

می‌توان به‌صورت

$$\left[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r})\right] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

نیز بیان کرد.

این حالت در وضعیات بسیاری در سراسر فصول بعدی رخ خواهد داد.

اکنون که پنج قاعدهٔ استنتاج را بررسی کرده‌ایم، آنها را همراه با معرفی چند قاعدهٔ دیگر در جدول ۱۴.۲ به اختصار می‌آوریم.

جدول ۱۴.۲

نام قاعده	استلزام منطقی یا هم‌ارزی منطقی مربوطه	قاعدهٔ استنتاج
قاعدهٔ انفصال (قیاس استثنایی)	$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$	۱. p $p \to q$ $\therefore q$
قانون قیاس	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$	۲. $p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
انفصال نقیض	$[(p \to q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$	۳. $p \to q$ $\bar{q}$ $\therefore \bar{p}$
قانون ترکیب عطفی		۴. p q $\therefore p \wedge q$
اثبات با استفاده از کاذب (برهان خلف)	$(\bar{S} \Rightarrow F.) \Rightarrow (S \Leftrightarrow t.)$	۵. $\bar{S} \Rightarrow F.$ $\therefore S$
حالت خاص اثبات با استفاده از کاذب	$[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F.] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	۵′. $(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F.$ $\therefore p \Rightarrow q$
قاعدهٔ تسهیل عطفی[۹]	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	۶. $p \wedge q$ $\therefore p$
قاعدهٔ بسط فصلی[۱۰]	$p \Rightarrow p \vee q$	۷. p $\therefore p \vee q$
قاعدهٔ قیاس فصلی[۱۱]	$[(p \vee q) \wedge \bar{p}] \Rightarrow q$	۸. $p \vee q$ $\bar{p}$ $\therefore q$
قاعدهٔ اثبات شرطی[۱۲]	$[p \to (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$	۹. $p \wedge q$ $p \to (q \to r)$ $\therefore r$
قاعدهٔ اثبات با استفاده از حالات	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [(p \vee q) \to r]$	۱۰. $p \to r$ $q \to r$ $\therefore (p \vee q) \to r$
قاعدهٔ برهان ذوالوجهین بانی[۱۳]	$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$	۱۱. $p \to q$ $r \to s$ $p \vee r$ $\therefore q \vee s$
قاعدهٔ برهان ذوالوجهین مخرب[۱۴]	$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\bar{q} \vee \bar{s})] \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$	۱۲. $p \to q$ $r \to s$ $\bar{q} \vee \bar{s}$ $\therefore \bar{p} \vee \bar{r}$

چهار مثال بعدی مشخص می‌کند که چگونه قواعد فهرست شده در جدول ۱۴.۲ و نتایج دیگری چون قوانین منطق، در تشکیل اثباتها به‌کار می‌روند.

مثال ۲۴.۲

اولین مثالمان درستی استدلال زیر را مبرهن می‌کند

$$\begin{array}{l} p\to r \\ \bar{p}\to q \\ \underline{q\to s} \\ \therefore \bar{r}\to s \end{array}$$

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p\to r$
فرض	(۲) $q\to s$
فرض	(۳) $\bar{p}\to q$
(۳) و $(\bar{p}\to q)\Leftrightarrow(\bar{\bar{p}}\vee q)\Leftrightarrow(p\vee q)$،	(۴) $p\vee q$

که در آن هم‌ارزی منطقی دوم از قانون نقیض دوگانه نتیجه شده است.

دلایل	مراحل
(۱)، (۲)، (۴) و قاعدهٔ برهان ذوالوجهین بانی	(۵) $r\vee s$
(۵) و $(r\vee s)\Leftrightarrow(\bar{\bar{r}}\vee s)\Leftrightarrow(\bar{r}\to s)$،	(۶) $\therefore \bar{r}\to s$

که در آن قانون نقیض دوگانه در هم‌ارزی منطقی اول به‌کار رفته است.

مثال بعدی تا اندازه‌ای دشوارتر است.

مثال ۲۵.۲

درستی استدلال زیر را تحقیق کنید.

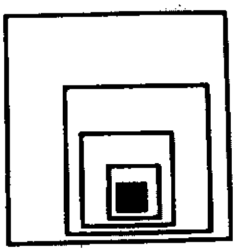
$$\begin{array}{l} p\to q \\ q\to(r\wedge s) \\ \bar{r}\vee(\bar{t}\vee u) \\ \underline{p\wedge t} \\ \therefore u \end{array}$$

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p\to q$
فرض	(۲) $q\to(r\wedge s)$
(۱)، (۲)، و قانون قیاس	(۳) $p\to(r\wedge s)$
فرض	(۴) $p\wedge t$
(۴) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۵) p
(۵)، (۳)، و قاعدهٔ انفصال	(۶) $r\wedge s$
(۶) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۷) r
فرض	(۸) $\bar{r}\vee(\bar{t}\vee u)$
(۸)، و قانون شرکت‌پذیری ۷، و قوانین دومورگان	(۹) $(\overline{r\wedge t})\vee u$
(۴) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۱۰) t
(۷)، (۱۰)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی	(۱۱) $r\wedge t$
(۹)، (۱۱)، و قاعدهٔ قیاسی فصلی	(۱۲) $\therefore u$

یادداشتها :

۱. Rule of Conjunction
۲. Proof by Contradiction
۳. Reductio ad Absurdum
۴. Even
۵. Odd
۶. Rational
۷. Irrational
۸. Indirect proof
۹. Rule of Conjunctive Simplification
۱۰. Rule of Disjunctive Ampilfication
۱۱. Rule of Disjunctive Syllogism
۱۲. Rule of Conditional Proof
۱۳. Rule of the Constructive Dilemma
۱۴. Rule of the Destructive Dilemma

مسائل مسابقه‌ای



۱- ۴ نفر اسامی خود را روی ۴ کارت نوشته و در کیسه‌ای می‌گذارند؛ هر یک به تصادف یک کارت از کیسه برمی‌دارند؛ مطلوب است احتمال آنکه هیچ یک از آنها اسم خود را بیرون نیاورند.

۲- ثابت کنید عمودهایی که از تصویرهای رأسهای یک مثلث بر روی خط راستی، بر ضلعهای روبروی آن رأسها رسم می‌شوند همرسند.



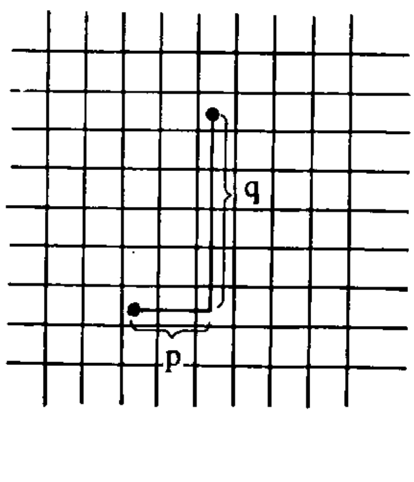
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۰)

حرکت اسب را بر صفحهٔ شطرنج به روش زیر تعدیل کرده‌ایم: اسب در هر حرکت p مربع را به طور افقی و q مربع را به طورقائم، یا q مربع را به‌طور افقی و p مربع را به‌طور قائم می‌پیماید، که در آن p و q اعداد صحیح و مثبت دلخواه مفروض‌اند. صفحهٔ شطرنج مورد بحث نامحدود است.

اگر، بعد از n مرحله، اسب به مکان آغازش باز گردد، آیا درست است که n باید عددی زوج باشد؟



حل:

در حل این مسأله به توصیف دو روش می‌پردازیم.

(الف) روش اوّل از بردارها استفاده می‌کند.

دستگاه مختصات را روی صفحهٔ شطرنج چنان قرار می‌دهیم که مراکز مربعهای واقع بر صفحه دارای مختصات صحیح شوند. مبدأ را به عنوان آغاز حرکت اسب در نظر می‌گیریم. در این صورت اسب، پس از مرحلهٔ اوّل می‌تواند در هر یک از هشت نقطهٔ با بردارهای مکانی زیر برود.

$$\pm\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}p\\-q\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix}$$

بنابراین هر نقطهٔ P یی که اسب در آن قرار گیرد دارای چنین بردار مکانی خواهد بود:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} - b\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}p\\-q\end{pmatrix} - d\begin{pmatrix}p\\-q\end{pmatrix}$$

$$+e\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix} - h\begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix} \qquad (1)$$

که در آن a، b، c، d، e، f، g و h اعدادی صحیح و نامنفی چنان‌اند که

$$S = a+b+c+d+e+f+g+h$$

تعداد مراحل گذر از O به P است.

(۱) دستگاه معادلات زیر را می‌دهد :

$$(a-b)p+(c-d)p+(e-f)q+(g-h)q=x$$
$$(a-b)q-(c-d)q+(e-f)p-(g-h)p=y$$

یعنی

$$\begin{cases} a'p+c'p+e'q+g'q=x \\ a'q-c'q+e'p-g'p=y \end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $a'=a-b$ ، $c'=c-d$ ، $e'=e-f$ ، $g'=g-h$ ، s' ، مجموع a' ، c' ، e' و g' برابر $s-2(b+d+f+h)$ است. در نتیجه s زوج است اگر و تنها اگر s' زوج باشد.

فرض می‌کنیم اسب پس از طی n مرحله به مبدأ باز گردد. در این حال $x=y=0$ و دستگاه معادله‌های (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$(a'+c')p=-(e'+g')q$$
$$(a'-c')q=-(e'-g')p$$

با ضرب معادلهٔ اول دردوم و حذف $p.q\ (p\neq 0\neq q)$ ملاحظه می‌کنیم که

$$(a')^2-(c')^2=(e')^2-(g')^2$$

یا

$$(a')^2-(c')^2-(e')^2+(g')^2=0 \qquad (۳)$$

تمام اعداد $(a')^2-a'$ ، $-(c')^2-c'$ ، $-(e')^2-e'$ و $(g')^2-g'$ زوج‌اند. آنها را، به ترتیب، با $2t$، $2u$، $2v$ و $2w$ نمایش داده (۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$a'+2t+c'+2u+e'+2v+g'+2w=0$$

یا

$$(a'+c'+e'+g')+2(t+u+v+w)=0$$

معادلهٔ اخیر نشان می‌دهد که s' زوج است ؛ در نتیجه s زوج است، و این نشان می‌دهد که اسب می‌تواند تنها پس از حرکتهایی به تعداد زوج به مبدأ باز گردد.

(ب) راه حل دوم از تابعی استفاده می‌کند که بر مجموعهٔ جفتهای (x,y) ی تعریف شده است که x و y آن صحیح‌اند.

مراکز مربعها در دستگاه مختصاتی که در راه حل پیشین معرفی شد دارای مختصات x، y اند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک p و q را با d نمایش داده، اعداد p/d ، q/d را تشکیل می‌دهیم. در این صورت دو امکان وجود دارد :

حالت ۱. p/d و q/d هر دو فردند.

در این حالت طبق قاعدهٔ $f(x,y)=\frac{x}{d}$

تابع f(x,y)ای را برای جمیع جفتهای صحیح (x,y) تعریف می‌کنیم. این تابع دارای این ویژگی است که وقتی اسب یک حرکت از مربع (x,y) به مربع (x',y') انجام می‌دهد، تفاضل $f(x',y')-f(x,y)$ عددی فرد است. (در واقع، x' به صورت $x\pm p$ یا $x\pm q$ است) ؛ بنابراین

$$f(x',y')=\frac{x\pm p}{d}=\frac{x}{d}\pm\frac{p}{b}$$

یا

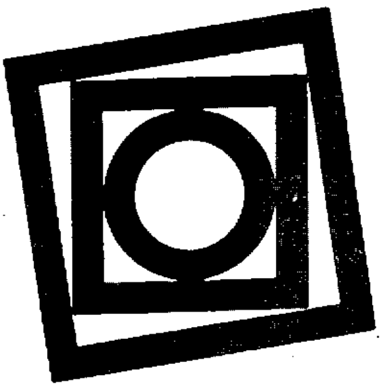
$$f(x',y')=\frac{x\pm q}{d}=\frac{x}{d}\pm\frac{q}{d}$$

یعنی هر دو در منتها الیه چپ ستون قرار می‌گیرند.

حالت ۲. یکی از دو مورد p/d و q/d زوج است. (توجه داشته باشید که هر دو عدد نمی‌توانند زوج باشند زیرا d بزرگترین مقسوم علیه مشترک p و q است.)

در این حالت f را به صورت $f(x,y)=(x+y)d$ تعریف می‌کنیم. باز هم به سادگی اثبات می‌شود که زمانی که اسب یک حرکت از مربع (x,y) به مربع (x',y') انجام دهد تفاضل $f(x',y')-f(x,y)$ عددی فرد است.

اکنون به سراغ اسب‌مان می‌رویم. فرض می‌کنیم، اسب، با آغاز از $(x_0,y_0)=(0,0)$، ابتدا در مربع (x_1,y_1)، سپس در مربع (x_2,y_2) و ... قرار می‌گیرد و پس از n مرحله به $(x_n,y_n)=(0,0)$ باز می‌گردد. مقدار f، پس از هر مرحله، به اندازهٔ عددی فرد تغییر می‌کند. $f(0,0)$ زوج است، بنابراین اگر n فرد باشد، $f(x_n,y_n)$ ؛ باید فرد بوده باشد. اما $f(x_n,y_n)=f(0,0)$ ؛ بنابراین n باید زوج باشد.





آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

نامه‌های پُرمحتوا و محبت‌آمیز شما را دریافت کردیم! از خداوند بزرگ بسیار سپاسگزاریم که توانسته‌ایم، هرچند گامی کوچک، در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما برداریم. هیأت تحریریه مجله، پس از مطالعه فرمهای نظرخواهی و نامه‌های ارسالی شما عزیزان و بحث‌وتبادل‌نظر روی موضوعات زیر توافق نظر داشتند :

۱ ــ با توجه به این که نظام تحصیلی دبیرستان به صورت ترمی برگزار می‌شود، لذا تصمیم بر این گرفته شد در هر سال، شماره اوّل و دوم مجله در نیمسال اول و شماره سوم و چهارم آن در نیمسال دوم چاپ شود.

۲ ــ در این شماره مسایل امتحانات نهایی پایان ترم و در شمارهٔ بعدی ، تستهای تفکیکی کلیه کتابهای ریاضی را با حل تشریحی می‌آوریم.

در میان نامه‌هایی که برای ما ارسال کرده‌اید، با نامه زیر برخورد کردیم، چون این نامه باعث ایجاد انگیزه برای خدمت بیشتر در ما شد، ضمن تشکر از این دو برادر بزرگوار تصمیم گرفتیم که آن را به دلیل علاقه‌مندی بیشتر شما به ریاضی چاپ کنیم.

ما دو پسرخاله به نامهای حاج سیدعظیم حجتی و سیدغلام عبدی از کسبهٔ بازار بزرگ بروجرد هستیم و به ترتیب ۵۷و ۵۵ سال سن داریم. هم‌اکنون هردوی ما یک فروشگاه بزرگ داریم. مدتی است که به ریاضیات علاقه‌مند شده‌ایم و آن را مدیون مجله ریاضی برهان هستیم. امیدواریم در راه خود موفق و مؤیدباشید.

در ضمن ایشان، چند مسأله (با حل آنها) برای ما ارسال کرده‌اند که یکی از آنها را می‌بینیم :

مسأله نابرابری زیر را ثابت کنید :

$$x^{4}+y^{4}+z^{4}\geq x^{2}y^{2}+z^{2}x^{2}+z^{2}y^{2}$$

حل : اگردو طرف نابرابری بالا را در ۲ ضرب کنیم، و همهٔ جمله‌ها را به طرف چپ نابرابری انتقال دهیم، بنابر اثبات بازگشتی، درستی حکم نتیجه می‌شود.

$$(x^{2}-y^{2})^{2}+(y^{2}-z^{2})^{2}+(z^{2}-x^{2})^{2}\geq 0$$

به دلیل حجم بالای نامه‌های ارسالی شما عزیزان و محدودیت صفحات مجله بر آن شدیم که نامه‌های شما را دسته‌بندی کنیم و پاسخی مشترک برای آنها بیاوریم و اسامی فرستندگان نامه‌ها را در مجله چاپ کنیم.

خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان :

آقایان سجاد رحیمی آذر (تبریز)، پویان فاطمی (لرستان)،

رضا شکری (تهران)، رضا بیات تاجور (ملایر)، بهزاد بهنیا (بجنورد)، علی صادقی روشن (تهران)،مهدی درودیان (تهران)، همکار ارجمند، مهدی قدیری (دبیر ریاضی فولادشهر اصفهان)، هادی شریفیان (گنبدکاووس)، شهرام بزکان (دانشجوی کارشناسی فیزیک دانشگاه تهران)، احمد فضلی (شیراز)، آیت رحیم‌زاده (کرمانشاه)، حسن نیشابوری (مشهد مقدس)، رضا محمدخانی (کامیاران)، مهدی حسنی و داود حبری و خانم لیلا طهماسبی (میانه).

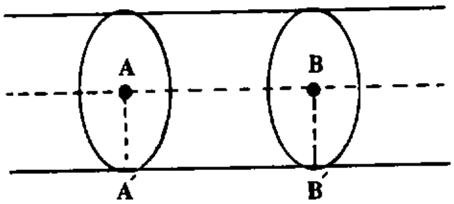
از همگی شما برای ارسال مسائل همراه با حل و مقالهٔ درسی و کمک درسی سپاسگزاریم. از این پس سعی کنید مسائل را خودتان طرح کنید یا دست کم نام منبع مورد استفاده را بنویسید. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد و مقاله های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهیم کرد.

پاسخ به برخی از اشکالات شما عزیزان در زیر آمده است :

آقایان میثم سرور و کاوه هدایتی از مراکز پیش‌دانشگاهی همدان و رشت :

مجموعه خطهایی که دونقطهٔ A و B از آنها به فاصله L باشند، سطح استوانه‌ای دوّاری است که شعاع قاعدهٔ مقطع قائم آن Lاست ــ مقاله‌های مکان هندسی را مطالعه کنید ــ در مورد این مسأله از A و B عمودهای ′AA و ′BB را بر صفحه P فرود می‌آوریم، اگر′A′B موازی AB باشد، خط ′A′B و همه خطهای موازی آن از صفحه P، پاسخ مسأله هستند. در غیراین صورت مسأله جواب ندارد.

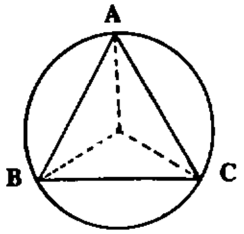
[درضمن راه حلهای پیشنهادی خود را برای ما بفرستید تا اختلاف نظر در مورد این مسأله برطرف شود.]



آقای سیدفرید سیدشیرازی، دانش‌آموز سال سوم رشته ریاضی (تهران) :

از ارسال مسأله هندسه «روش به دست آوردن فرمولی برای مساحت دایره محیطی هر مثلث با داشتن مساحت و دو زاویه از مثلث» همراه با حل سپاسگزاریم در ضمن، راه حل ساده‌تر این مسأله در زیر آمده است.

می‌دانیم مساحت هر مثلث $A\hat{B}C$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



$$S_{A\hat{B}C} = \frac{۱}{۲} bc\sin A = ۲R^{۲} \sin A \sin B \sin C$$

$$\Rightarrow R^{۲} = \frac{S_{A\hat{B}C}}{۲\sin A \sin B \sin C}$$

$$\Rightarrow \pi R^{۲} = S_{\text{دایره}} = \frac{\pi S_{A\hat{B}C}}{۲\sin A \sin B \sin C}$$

$$= \frac{\pi S_{A\hat{B}C}}{\sin ۲A + \sin ۲B + \sin ۲C}$$

آقای هادی شریفیان، دانش‌آموز سال دوم رشته ریاضی (گنبدکاووس)

از ارسال ۹ مسأله با حل متشکریم. از آنجا که مسائل ارسالی شما می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را با حل آورده‌ایم. ما از این پس در بخش پاسخ به نامه‌ها، مسائل و مقاله‌های شما را به طور خلاصه چاپ خواهیم کرد.

معادلهٔ $(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x} + (\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}})^{x} = ۸$ دارای چند جواب حقیقی است؟

حل : اگر دوطرف معادلهٔ فوق را در $(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x}$ ضرب کنیم :

$$۱+\left[(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x}\right]^{۲} = ۸(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x}$$

اگر در معادله بالا قرار دهیم، $t = (\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x}$ خواهیم داشت :

$$t^{۲} - ۸t + ۱ = ۰ \Rightarrow t_{۱} = ۴+\sqrt{۱۵} \ , \ t_{۲} = ۴-\sqrt{۱۵}$$

بنابراین :

$$(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x} = ۴+\sqrt{۱۵} \Rightarrow x = ۲$$

$$(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^{x} = ۴-\sqrt{۱۵} \Rightarrow x = -۲$$

در نتیجه، معادله فوق دارای دو ریشه حقیقی است و مجموعه جواب آن {۲,۲-} می‌باشد.



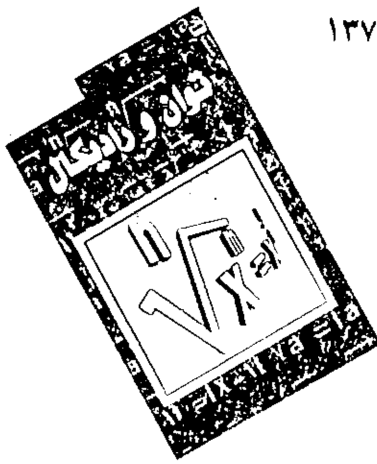
معرفی کتاب

توان و رادیکال

مؤلف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

ناشر: انتشارات مدرسه

چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۶



یازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی که در آن به دو موضوع توان و رادیکال پرداخته شده است. این دو موضوع کاملاً به هم مربوط بوده و همواره دانش‌آموزان از سال اوّل دبیرستان به طور جدّی با آنها سر وکار داشته و در مباحث مختلف ریاضی از این موضوع استفاده می‌شود و مهارت دانش‌آموزان در تجزیه و تحلیل مسائل مربوط به این دو موضوع (توان و رادیکال) توانِ آنها را در مباحث دیگر ریاضی نیز بالا می‌برد. کتاب به صورت خودآموز و بیشتر با تکیه بر حل مسائل متنوع سعی در بالا بردن این مهارت در خواننده داشته و در هر بخش و برای هر فرمول یا رابطه مسائلِ متنوعی حل شده است. کتاب از پرسشهای چهارگزینه‌ای فراوان با حل تشریحی برخوردار است تا دانش‌آموز در این زمینه با نمونهٔ سؤالات کنکورها نیز آشنا شود. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

تابع

تألیف: احمد قندهاری و حمیدرضا امیری

ناشر: انتشارات مدرسه

چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۶



دوازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی که در آن به مفهوم تابع که از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است و دانش‌آموزان از سال اوّل دبیرستان با آن سروکار خواهند داشت پرداخته شده، مؤلفین در این کتاب از دو دیدگاه مفهوم تابع را مورد بررسی قرار داده و تجزیه و تحلیل کرده‌اند، یکی دیدگاه مجموعه‌ای و دیگری دیدگاه جبری. در این کتاب همه چیز راجع به تابع بیان و مورد بررسی قرار گرفته است، از جمله مفهوم، انواع تابعها، خواص تابعها، اعمال جبری روی تابعها، ترکیب تابعها، و ... که در هر مورد به اندازهٔ کافی مثال و مسألهٔ حل شده وجود دارد تا دانش‌آموز بتواند به صورت خودآموز مطلب را درک کند. در انتهای هربخش تمرینهایی برای

دانش‌آموز قرار گرفته و کتاب از دو مجموعه پرسشهای چهارگزینه‌ای با حلِ تشریحی برخوردار است. در فصل آخر کتاب تابعهای معروف از قبیل تابع هموگرافیک، تابع سینوس، تابع درجه ۲ و... مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و همهٔ مواردِ بیان شده در بخشهای قبل روی آنها بررسی شده است. مطالعه و استفاده از این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

ریاضیات پایه ۱

تألیف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
و میرشهرام صدر
ناشر: علوی
چاپ اوّل: تابستان ۱۳۷۶



از آن جا که درس ریاضیِ ۱ نظام جدید متوسطه پایه و اساس ریاضیات سالهای بعد به شمار می‌رود و مهارت درباره حل مسائل مبحثهای مختلف این کتاب مانند، تناظر یک به یک بین دو مجموعه، چندجمله‌ایها و اتحادهای جبری و تجزیه عبارتهای جبری نیاز هر دانش‌آموز در سال اوّل و همچنین در سالهای تحصیلی بعد می‌باشد، لذا مؤلفین این کتاب کوشیده‌اند، با طبقه‌بندی و بیان دقیق مفاهیم و مطالب درسی و حل مثالهای متنوع وگوناگون باعث پرورش قوه حل مسأله در خواننده گردند. همچنین در پایان هر فصل تعدادی مسأله تکمیلی با حل آورده شده است و در پایان کتاب دو بخش موجود می‌باشد که بخش اوّل اختصاص به تستهای ریاضی ۱ با حل تشریحی و قسمت دوم اختصاص به مسائل امتحانی با حل تشریحی یافته است. همچنین در پایان کتاب واژه‌نامه جهت آشنایی دانش‌آموزان با واژه‌های لاتین کتاب ریاضی ۱ آمده است. مطالعه این کتاب به همه دانش‌آموزان، داوطلبان کنکور و دبیران محترم توصیه می‌شود.



اعداد صحیح به خاطر موارد استعمال مکررشان در ریاضیات و زندگی روزمره، مهمترین زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی، و در نتیجه سزاوار توجه مخصوص‌اند، و دو خاصیت بخشپذیری و استقراء دو ویژگی مهم این اعداد به شمار می‌روند.

در علوم کامپیوتری نیز مانند ریاضیات، دانستن صحت آن‌چه که انجام می‌دهیم حیاتی است. به عنوان مثال، در تحلیل الگوریتمی، به دانستن این که الگوریتم مورد بحث، آن‌چه را که انجام دادنش توسط آن مفروض است، انجام می‌دهد علاقه‌مندیم

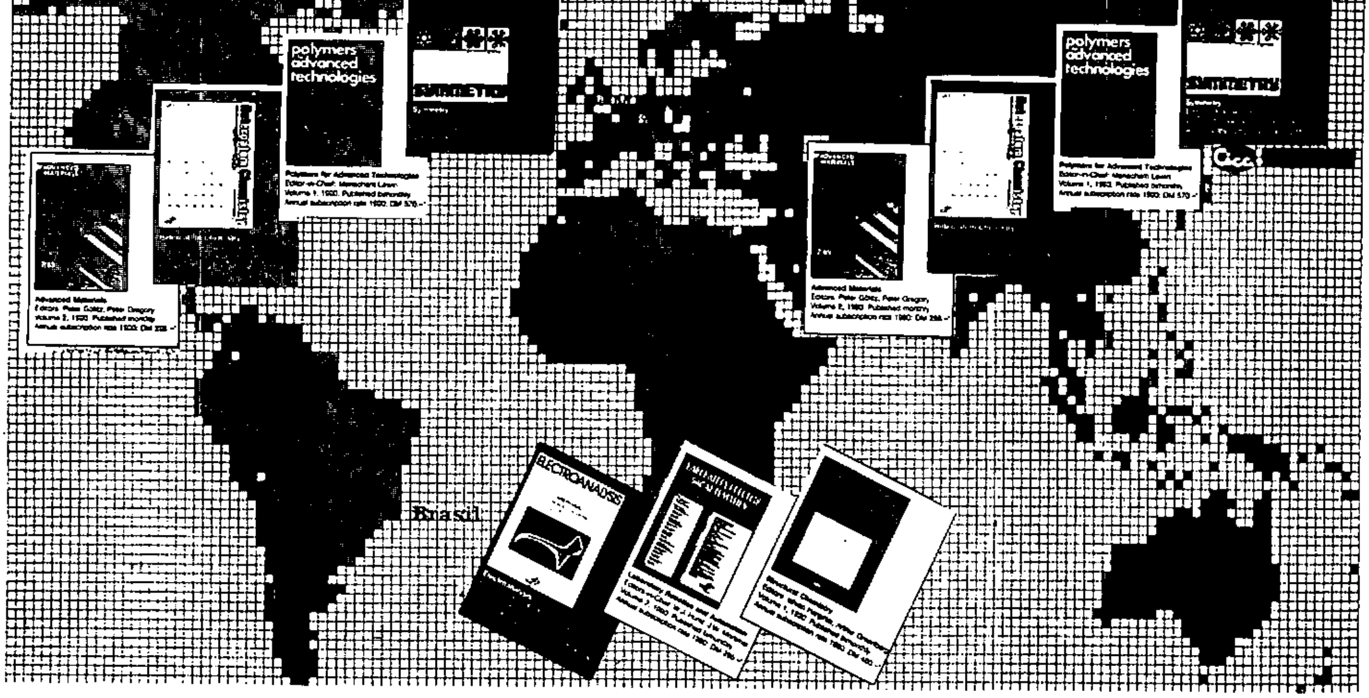
برای به درستی انجام دادن موارد مذکور، اغلب لازم است از صورتهایی که ریاضیات می‌تواند برای تحقیق اینکه گزاره‌هایی که مایلیم در مورد الگوریتمهای مورد بحث تشکیل دهیم صحیح‌اند، به دست دهد، استفاده کنیم.

فرگه، منطق دان آلمانی به پیروی از طرز تفکر کانْت در کتاب مبانی حساب خود می‌نویسد :

حقایق هندسی بر هر چه برای ما از جنبهٔ فضایی قابل درک باشد، حکومت می‌کنند، خواه مستدرکات ما واقعی باشند و خواه محصول تخیل ما.

پرت و پلاهایی که به هنگام هذیان می‌بینیم، قویترین مخترعات افسانه و شعر، جایی که جانوران سخن می‌گویند و ستارگان خاموش می‌مانند، جایی که آدمیان سنگ می‌شوند و درختان آدمی می‌گردند، جایی که آنان که در آب غرق شده‌اند زلف خود را می‌گیرند و خود را از آب بیرون می‌کشند. همه، تا وقتی که قابل درک باشند، تابع اصول هندسی‌اند.

«از: فلسفهٔ ریاضی، ترجمهٔ احمد بیرشک»



مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۰)

قضایای سِوا، مِنلائوس، و اصل سطح (قسمت دوم)

Branko Grünbaum
G.C.Shephard

Mathematics Magazine vol. 68

• ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۲. هندسهٔ آفین و چندضلعیها

به‌خاطر بیاورید که هندسهٔ آفین با ویژگیهای هندسی‌ای سر و کار دارد که ناوردای آفین "affine invariant" هستند، که بدین‌معنی است که تحت تبدیلهای آفین "affinities" (یعنی، تبدیلهای خطی ناتکین ترکیب شده با انتقالها) ناوردا (یا تغییرناپذیر)اند.

از لحاظ هندسی، می‌توان این تبدیلات را به‌صورت دورانها، تقارنها، انتقالها و برشها، یا هر ترکیبی از اینها درنظر گرفت. نسبتهای طولهای واقع بر خطوط موازی و نسبتهای سطحها تحت تبدیلات آفین محفوظ می‌مانند و درنتیجه به هندسهٔ آفین تعلق دارند، درحالی که طولها، زاویه‌ها و سطحها چنین نیستند. همهٔ نتایج ما به هندسهٔ آفین متعلق‌اند، اما به‌طور وضوح در هندسهٔ اقلیدسی محدودتر نیز درست باقی می‌مانند.

مقصود از چندضلعی "polygon" $P = [V_1, V_2, \cdots, V_n]$ دنباله‌ای دوری از $n \geq 3$ نقطهٔ V_i در صفحهٔ آفین، همراه با n قطعه خط بستهٔ $S_i = [V_i, V_{i+1}]$ است. نقاط V_i *رأسهای* P "Vertices" و قطعات S_i *یالهای* P "edges" اند. از اینجا به بعد، همهٔ اندیسهای i به مدول n تحویل می‌شوند آنچنان که در $1 \leq i \leq n$ صدق کنند؛ گذشته از این، برای اجتناب از حالات خاص و تباهیدگیها همواره فرض می‌کنیم رأسهای V_i و V_{i+1} متمایزند. چندضلعی به‌صورت جهتدار درنظر گرفته می‌شود و توسط هرجابگشت دوری رأسها تغییر نمی‌کند؛ اما، ترتیب معکوس رأسها چندضلعی جدید P' ی ایجاد می‌کند، که گفته می‌شود از P و با به *مخالف جهت رفتن* به‌دست آمده است.

چندضلعی با n رأس، و بنابراین n یال، را n ضلعی می‌نامیم. توجه داشته باشید که این چندضلعیها بسیار عمومی‌اند؛ چه ممکن است رأسهای غیرمجاور منطبق باشند و یالها متقاطع شوند یا جزئاً یا کلاً روی هم قرار گیرند. قضایای ما در مورد چندضلعیهایی چنین به‌کار می‌روند. گاهی ضروری می‌شود که محدودیتهای بیشتری بر مکان رأسها اعمال شود. این محدودیتها را هنگام ضرورت متذکر خواهیم شد.

بهتر است که مفهوم V_iV_{i+1}، یعنی *ضلع* "side" چندضلعی را نیز معرفی کنیم؛ این مفهوم خطی است. شامل یال $[V_i, V_{i+1}]$. V_iV_j یـ *قطر* "diagonal" چندضلعی خطی است

که توسط دو رأس نامجاور V_i و V_j از P تعریف می‌شود. این خط اگر، و تنها اگر، V_i و V_j نقاطی متمایز باشند، تعریف می‌شود.

برای نقاط از حروف بزرگ V، X، W، ...، با اندیس یا بدون اندیس، و برای بردارهای مکانی آنها، نسبت به مبدأیی به دلخواه انتخاب شده، از حروف کوچک نظیر آنها، یعنی v، x، y، ... استفاده می‌کنیم. بردارهای مکانی را می‌توان به‌گونه‌ای کاملاً دقیق در هندسه آفین به‌کار برد.

فرض می‌کنیم A، B، C، D چهار نقطه و چنان‌اند که AB موازی CD است. (به عبارت دیگر، سوهای بردارهای $b-a$ و $d-c$ منطبق یا مستقیماً مقابل‌اند). فرض می‌کنیم λ عددی حقیقی، تعریف شده با $\lambda(d-c)=(b-a)$، باشد. در این صورت λ ناوردایی آفین است. این عدد، به‌طور ساده، نسبت طول $[A,B]$ به طول $[C,D]$ است، با علامتی بعلاوه یا منها، بسته به اینکه این قطعه خطها، هم‌سو یا متقابل باشند.

این نسبت را با $\lambda=[AB/CD]$ نمایش خواهیم داد. واضح است که روابطی چون

$$\left[\frac{A\quad B}{C\quad D}\right]=-\left[\frac{B\quad A}{C\quad D}\right]=-\left[\frac{A\quad B}{D\quad C}\right]=\left[\frac{B\quad A}{D\quad C}\right]$$

برقرار، و حذف مجاز است، به‌طوری که، فی‌المثل،

$$\left[\frac{A\quad B}{C\quad D}\right]\cdot\left[\frac{C\quad D}{E\quad F}\right]=\left[\frac{A\quad B}{E\quad F}\right]$$

این ویژگیها مستقیماً از تعاریف ذکر شده نتیجه می‌شوند.

درحالت خاص، اگر نقطهٔ W ای به‌گونه‌ای معین، تعریف شده بر V_iV_{i+1}، ضلعی از چندضلعی P، متمایز از V_i و V_{i+1}، هردو، باشد، در این صورت به $[V_iW/WV_{i+1}]$ به‌عنوان *یال ـ نسبت* "edge - ratio" متناظر با این ضلع اشاره می‌کنیم. به‌گونه‌ای مشابه، اگر W بر قطر V_iV_j واقع شود، آنگاه $[V_iW/WV_j]$ *قطر ـ نسبت* "diagonal - ratio" نامیده می‌شود.

ملاحظاتی مشابه را در مورد سطحها به‌کار می‌بریم. در صفحهٔ اقلیدسی سطح علامتدار $a(A,B,C)$ از مثلث $[A,B,C]$ را مساحت آن (به مفهوم متعارف) درنظر می‌گیریم با علامتی مثبت یا منفی به‌عنوان پیشوند آن. علامت + هنگامی به‌کار می‌رود که مثلث به‌طور مثبت جهتدار باشد، یعنی، رأسهای آن به‌ترتیب پاد ساعتگرد نامگذاری شده باشند، و علامت − زمانی که مثلث به‌طور منفی جهتدار شده باشد؛ یعنی رئوس آن را در سوی ساعتگرد نامیده باشیم. در مورد دو مثلث $[A,B,C]$ و $[D,E,F]$ واقع در صفحه، نسبت سطحهای علامتدارشان، یعنی $a(A,B,C)/a(D,E,F)$، ناوردایی آفین است که با $\lambda=[A\ B\ C/D\ E\ F]$ نمایش داده می‌شود. λ، برحسب بردارهای مکان، با

$$(a\times b+b\times c+c\times a)=\lambda(d\times e+e\times f+f\times d)$$

تعریف می‌شود، که $\times$ آن یک حاصلضرب برداری را مشخص می‌کند. تمام این بردارهای حاصلضرب، از آنجا که جمیع این نقاط در صفحه قرار دارند، موازی‌اند. به‌گونه‌ای هم‌ارز، λ توسط

$$\det\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\lambda\ \det\begin{bmatrix}d_1 & e_1 & f_1\\ d_2 & e_2 & f_2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، که در آن (a_1,a_2) مختصات نقطهٔ A، یعنی، مؤلفه‌های بردار مکانی a هستند، و غیره

از آنجا که جایگشت دوری رأسها سطح را تغییر نمی‌دهد، اما معکوس کردن ترتیب رئوس، تغییردهندهٔ علامت سطح است، روابطی چون رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\left[\frac{A\quad B\quad C}{D\quad E\quad F}\right]=\left[\frac{B\quad C\quad A}{D\quad E\quad F}\right]=\left[\frac{C\quad A\quad B}{D\quad E\quad F}\right]=$$

$$-\left[\frac{B\quad A\quad C}{D\quad E\quad F}\right]=\left[\frac{B\quad C\quad A}{E\quad F\quad D}\right]=\left[\frac{B\quad A\quad C}{E\quad D\quad F}\right]$$

گذشته از این، در اینجا نیز، چون درحالت قطعه خطها، حذف مجاز است، به‌عنوان مثال،

$$\left[\frac{A\quad B\quad C}{D\quad E\quad F}\right]\cdot\left[\frac{D\quad E\quad F}{G\quad H\quad J}\right]=\left[\frac{A\quad B\quad C}{G\quad H\quad J}\right]$$

در این علامت‌نویسی، اصل سطح (۱) را می‌توان به‌صورت اندکی قدرتمندتر

$$\left[\frac{A_1P}{A_2P}\right]=\left[\frac{A_1\ BC}{A_2\ BC}\right]$$

نوشت، که از طولهای علامتدار و سطحهای علامتدار مثلثها بهره‌مند است.

سطح علامتدار "signed area" یک n ضلعی $(n>3)$ را

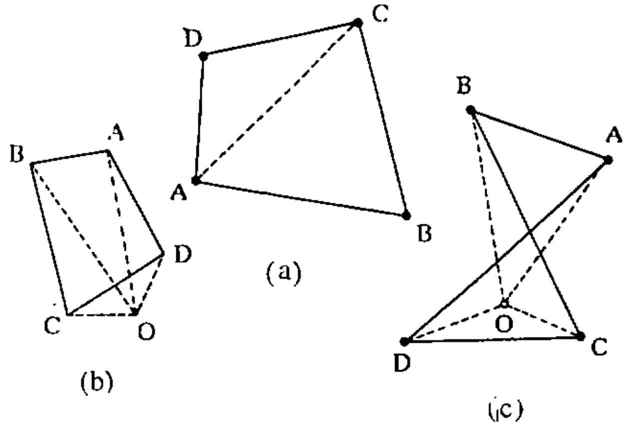
نیز می‌توان تعریف کرد ؛ n ضلعی را به طریقی مثلث‌بندی می‌کنیم، و مثلثهای به‌دست آمده را *بگونه‌ای منطقی* جهت‌بندی می‌کنیم (شکل ۵ را ملاحظه کنید). این‌کار بدین معنی است که هرگاه دو مثلث مثلث‌بندی در یال [B,C] مشترک باشند، آن‌گاه جهت‌بندی آنها چنان باشد که سوهای مخالف بر این یال مشترک ایجاد کند. در این صورت سطح چندضلعی به‌عنوان مجموع سطحهای علامتدار مثلثهای مؤلفه تعریف می‌شود. البته برای اعتبار این تعریف، لازم است که نشان دهیم سطح علامتدار مورد بحث از مثلث‌بندی به‌کار رفته مستقل است. این عمل، محاسبه‌ای معمولی است، و در اینجا به جزئیات آن نمی‌پردازیم. درواقع، اگر چندضلعی مورد بحث را به‌عنوان خمی جهت‌دار تعبیر کنیم، سطح علامتدار آن دقیقاً آن چیزی است که با به‌کار بردن انتگرالهای آشنای حسابان در مورد آن، به‌دست می‌آوریم.

در اینجا از خواننده دعوت می‌کنیم اثباتهای داده شده در فوق را، با استفاده از سطحهای علامتدار و علامت‌نویسی جدید، تعدیل کرده اثباتهای عمومی قضایای مورد بحث قرار گرفته را به‌دست دهد. درحالت خاص، اگر به‌جای (۵)

$$\left[\frac{V_iW_i}{W_{i+1}\ \ V_{i+2}}\right]=\left[\frac{V_iV_{i+1}V_{i+4}}{V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+4}}\right]\times$$

$$\left[\frac{V_iV_{i+1}V_{i+2}V_{i+3}}{V_{i+2}V_{i+3}V_{i+1}}\right] \qquad (5a)$$

به‌کار رود، اثباتی از قضیهٔ *هواهن* به‌دست می‌آید که به تحدّب، سادگی یا جهت پنج‌ضلعی $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5]$ وابسته نیست.

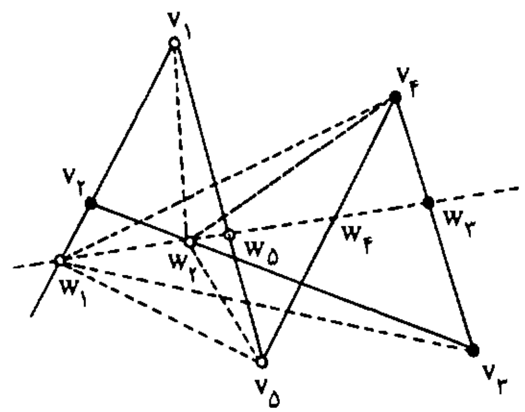


سه مثال از مثلث‌بندی صحیح چهارضلعی [A, B, C, D]. در (a)، چهار زاویه‌ای به دو مثلث [A, B, C] و [A, C, D] مثلث‌بندی شده است. در (b) و (c) مثلثها عبارت‌اند از: [O, A, B]، [O, B, C]، [O, C, D]، [O, D, A].

۳. تعمیمهای قضایای *سِوا* و *مِنِلائوس*

در این بخش و بخش بعدی، نقاط W_i، واقع بر اضلاع یا اقطار یک n ضلعی، را به‌عنوان نقاط تقاطع آنها با سایر خطوط تعریف می‌کنیم. در سراسر مطلب، بدون اشاره‌ای دیگر، فرض می‌کنیم این نقاط موجودند (یعنی، خطوط مورد بحث موازی نیستند) و از رأسها متمایزند (و بنابراین یال ــ نسبت و قطر ــ نسبت‌های مربوطه خوش‌تعریف‌اند). در این بخش با مسایلی از نوع مسأله‌ای که بعد می‌آید سر و کار داریم. بر هر ضلع V_iV_{i+1} از n ضلعی، نقطهٔ W_i، به‌گونه‌ای از لحاظ هندسی معنی دار، تعریف شده است. تحت چه شرایطی می‌توان اظهاری در مورد مقدار حاصلضرب یال ـ نسبتها $[V_iW_i/W_iV_{i+1}]$ مطرح کرد؟ مسایلی مشابه نیزدربارهٔ قطر ـ نسبت‌ها مطرح خواهیم کرد.

اولین دست‌آوردمان از این دست، تعمیم قضیهٔ منلائوس به n ضلعیهاست. این نتیجه، تازه نیست ــ بخش ۵ را ملاحظه کنید. حالت $n = 5$ را در شکل ۶ نشان داده‌ایم.



قضیهٔ منلائوس در پنج‌ضلعی مقرر می‌کند که

$$\left[\frac{V_1\ W_1}{W_1\ V_2}\right]\cdot\left[\frac{V_2\ W_2}{W_2\ V_3}\right]\cdot\left[\frac{V_3\ W_3}{W_3\ V_4}\right]\cdot\left[\frac{V_4\ W_4}{W_4\ V_5}\right]\cdot\left[\frac{V_5\ W_5}{W_5\ V_1}\right]=-1$$

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ منلائوس در n ضلعیها). فرض می‌کنیم $P = [V_1, \cdots, V_n]$ یک n ضلعی و به‌ازای $i = 1, \cdots, n$، قاطعی ضلع V_iV_{i+1} را در W_i قطع کند. در این صورت حاصلضرب یال ــ نسبتها ثابت است، درواقع به‌ازای جمیع n ضلعیهای P،

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+1}}\right]=(-1)^n \qquad (6)$$

در حالتی که n فرد است، حاصلضرب مورد بحث منفی است، که نشان می‌دهد که تعداد فردی از تقاطعات قاطع مورد

بحث با اضلاع V_iV_{i+1}، از n ضلعی، باید برونی "external" باشد، یعنی بر یال $[V_iV_{i+1}]$ واقع نباشد. این موضوع، درحالت $n=3$، واقعیتی آشناست، و به‌عنوان اکسیوم‌پاش "Pasch's axiom" شناخته می‌شود و اگر n زوج باشد، تعداد زوجی (امکاناً صفر) از تقاطعات قاطع با اضلاع n ضلعی باید برونی باشد.

اثبات. دو نقطهٔ دلخواه از نقاط W_i، مثلاً W_1 و W_2 را انتخاب می‌کنیم (شکل ۶ را ملاحظه کنید). در این صورت اصل سطح در مورد مثلثهای با قاعدهٔ $[W_1, W_2]$ می‌دهد

$$\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+1}}\right] = -\left[\frac{V_iW_1W_2}{V_{i+1}W_1W_2}\right]$$

با قرار دادن آن به‌جای هر یک از n عامل سمت چپ (۵)، حاصلضربی از جملاتی به‌دست می‌آوریم که هر یک از آنها خارج قسمت سطوح مثلثهاست، و این حاصلضرب، با انجام عمل حذف، مقدار $(-1)^n$ را می‌دهد که مطلوب است.

تغییر اندکی در این قضیه، آن را به‌جای یالها، در مورد قطرها به‌کار می‌برد. اگر $n>j>1$، و W_i به‌عنوان تقاطع قاطعی با قطر V_iV_{i+j}، به‌ازای $i=1,\dots,n$، تعریف شده باشد، آنگاه

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+j}}\right] = (-1)^n$$

این رابطه را، علی‌رغم تعمیم ظاهری موجود، می‌توان از قضیهٔ ۱ با نامیدن رأسهای V_1، V_2، V_3، .... به‌صورت V_i، V_{i+j}، V_{i+2j}، .... نتیجه گرفت. این شماره‌بندی تازه (اگر j با n اول نباشد) چندضلعی اصلی را به دو یا بیش از دو چندضلعی تقسیم می‌کند، اما این موضوع تأثیری بر نتیجهٔ مورد بحث یا اثبات آن نمی‌گذارد.

ادامه دارد.



ادب ریاضی

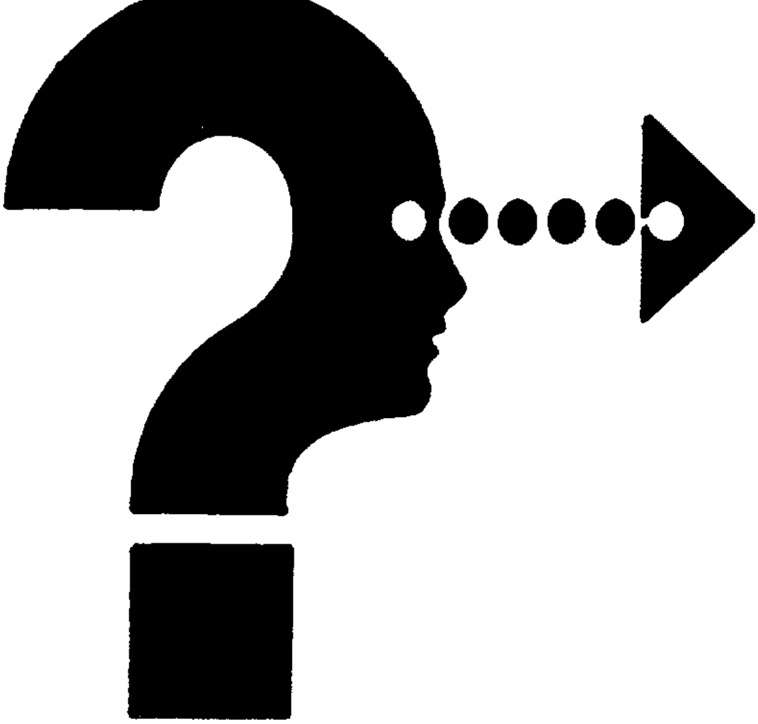
آورده‌اند که وقتی در یکی از شهرهای آلمان حاکمی می‌زیست که از لحاظ درستی ضرب‌المثل بود. دزدان و رهزنان از او ترس بسیار داشتند، و مردان شرافتمند به او صمیمانه احترام می‌گذاشتند. اما روزی اهالی شهر به رازی صاعقه‌آسا پی‌بردندازاین‌قرارکه: حاکم هر شب لباس مبدل می‌پوشید و طپانچه‌ای در جیب می‌گذاشت و آهسته و بی‌سروصدا از خانه خارج می‌شد و مردم را لخت می‌کرد.

داستان ریاضی در اواخر قرن نوزدهم نیز چنین بود. از بیست قرن پیش تا این زمان، مردم در مقابل ریاضیات سر تعظیم فرود می‌آوردند و به آن ایمان فوق‌العاده داشتند. اما ناگهان اصل اقلیدس ضعف گریه‌آوری از خود نشان داد و مفهوم قدیمی اتصال با سروصدای بسیار فرو ریخت و نابود شد، و قلمرو آشنای اعداد معمولی توسط بهمنی از اعداد اصم و اندازه نگرفتنی خرد شد و بنایی که این‌قدر مورد احترام و پرستش بود، ترکها و شکافهای بزرگ برداشت.

و اما، فقط بنای معظم ریاضیات نبود که گرفتار خرابی و ویرانی می‌گردید، تمام قصر بزرگ علوم به این حال دچار بود.

تاریخ علوم. پی‌یر روسو





مسائل برای حل

سؤالات امتحانات هماهنگ استانی و کشوری

سؤالات امتحان هماهنگ درس هندسه (۱) نظام جدید آموزش متوسطه شهر تهران خرداد ماه ۱۳۷۶

۱ ــ نقطهٔ M را روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A در نظر بگیرید.

الف) مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو ساق مثلث را به‌دست آورید.

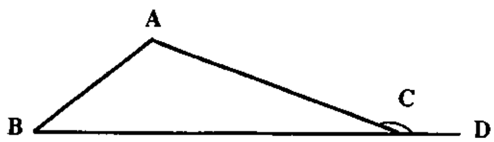
ب) M را روی قاعده جابجا کنید و مجدداً فاصلهٔ M را از دو ساق مثلث به‌دست آورید.

ج) آیا مجموع فاصله‌ها از دو ساق مثلث به مکان نقطهٔ M روی قاعده مثلث بستگی دارد؟

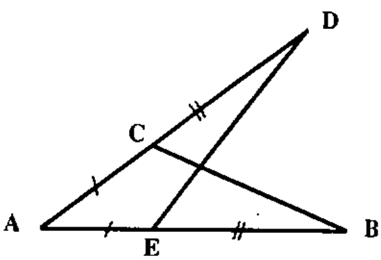
د) اگر M بر روی BC به یکی از رئوس B یا C خیلی نزدیک شود چه اتفاقی می‌افتد؟

۲ ــ نشان دهید که در مثلث ABC، (شکل زیر)

$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$



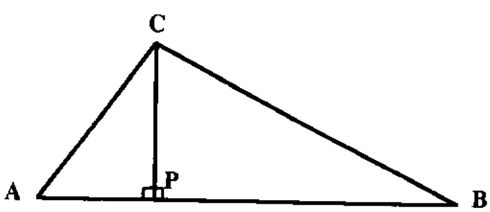
۳ ــ در شکل زیر با فرض $CD = EB$ و $AC = AE$ ثابت کنید $BC = DE$



۴ ــ **قضیه)** اگر در مثلث ABC ، $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ و $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

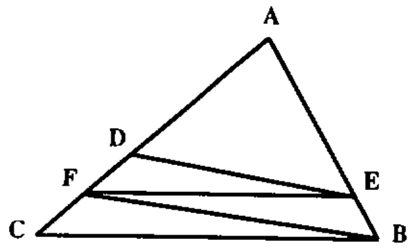
۵ ــ فرض کنید ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که در رأس C قائمه است از C پاره خط CP را بر AB عمود می‌کنیم، ثابت کنید:

الف) $PC^2 = AP.PB$ ب) $AC^2 = AP.AB$



۶ ــ در مثلث ABC ، در شکل زیر DE با FB موازی است و EF با BC با دوبار استفاده از قضیهٔ تالس ثابت کنید :

$$\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$$



۷ ــ طول ضلعهای مثلث ABC به ترتیب ۷ و ۹ و ۱۴ سانتیمتر است و مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است. اگر طول بزرگترین ضلع مثلث PQR مساوی ۲۱ سانتیمتر باشد، محیط مثلث PQR را بهدست آورید.

۸ ــ در دو مثلث متشابه ثابت کنید نسبت میانههای نظیر در آنها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۹ ــ نسبت اندازهٔ مساحتهای دو مثلث متشابه $\frac{۳۶}{۲۵}$ است. با ذکر دلیل نسبت محیطهای آنها را به دست آورید.

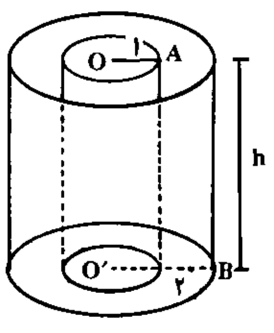
۱۰ ــ اگر طول قطر مکعب را نصف کنیم، طول هر یال آن چه تغییری میکند؟

۱۱ ــ در یک منشور قائم که قاعدهٔ آن مثلث متساویالاضلاعی به طول ضلع ۴ سانتیمتر و ارتفاع منشور ۶ سانتیمتر میباشد. مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۱۲ ــ دو استوانه قائم که مرکز قاعدههای آنها یکی است، را در نظر بگیرید با توجه به شکل :

الف) نسبت مساحت کل استوانه بزرگتر به مساحت کل استوانهٔ کوچکتر را بیابید. O′B = ۲ و OA = ۱

ب) حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.



۱۳ ــ مساحت کل یک نیمکره 6π سانتیمتر مربع است شعاع و حجم کره را بیابید.

سؤالات امتحان هماهنگ درس هندسه (۲) نظام جدید آموزش متوسطه شهر تهران ـ خردادماه ۱۳۷۶

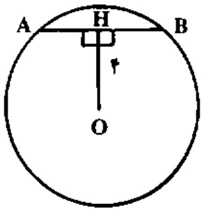
۱ ــ مکان هندسی نقطهای در فضا که از یک پارهخط به فاصلهٔ ۳ باشد را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید و بیان کنید.

۲ ــ قضیه) ثابت کنید سه نیمساز داخلی هر مثلث همرسند.

۳ ــ با استفاده از برهان غیرمستقیم ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و ضلع سوم مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویهٔ بین دو ضلع از دو مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

۴ ــ از مثلث ABC ضلعهای AB = ۳ و AC = ۴ و AH = ۲/۵ (ارتفاع وارد بر ضلع BC) معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۵ ــ در دایره C (۵ و o) شکل زیر OH = ۴ است طول وتر AB را بدست آورید.

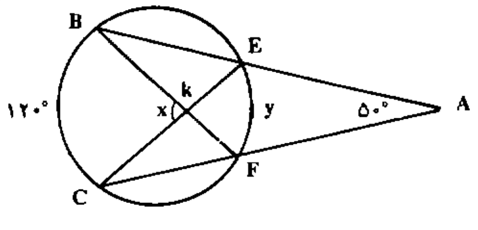


۶ ــ زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایره C(O, R) برابر °۶۰ است طول پاره خط OA و طول مماسها را بدست آورید.

۷ ــ در شکل زیر x و y را حساب کنید.

$y=\widehat{EF}$

$x=B\hat{K}C$



۸ــ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تجانس یک ایزومتری است.

ب) بازتاب مرکزی شیب را حفظ می‌کند.

ج) دوران طول پاره‌خط را حفظ نمی‌کند.

د) انتقال اندازهٔ مساحت شکل را ثابت نگه می‌دارد.

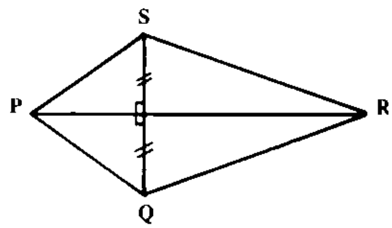
۹ــ خط به معادلهٔ: $x+2y-6=0$ مفروض است. معادلهٔ خط تصویر را تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ بیابید.

۱۰ــ تبدیل $T(x,y)=(x-1,y+2)$ و نقاط $B\begin{vmatrix}4\\1\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ مفروضند.

معادلهٔ خط $B'C'$ تصویر BC را بیابید.

نشان دهید $BC=B'C'$ آیا چهارضلعی $BB'C'C$ متوازی‌الاضلاع است؟ چرا؟

۱۱ــ در شکل زیر PR عمود منصف QS است. به کمک ویژگیهای تبدیلات ثابت کنید: $S\hat{P}R=Q\hat{P}R$



۱۲ــ قضیه) اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن دو صفحه موازی است.

۱۳ــ اولاً دو خط متنافر را تعریف کنید.

ثانیاً دو خط متنافر d' و d مفروضند، صفحه‌ای مشخص کنید که خط d' را شامل باشد و با خط d موازی باشد.

سؤالات امتحان هماهنگ درس ریاضی (۲) نظام جدید آموزش متوسطه شهر تهران ـ خرداد ماه ۱۳۷۶

۱ــ نقاط $A(0,3)$ و $B(3,-1)$ و $C(-3,-1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. مطلوب است:

الف) مختصات M وسط پاره‌خط BC

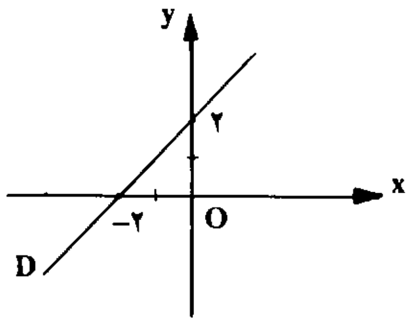
ب) محاسبه طول پاره خط AB

۲ــ نمودار هر یک از معادلات زیر را در دو دستگاه جدای محورهای مختصات رسم کنید.

الف) $xy+x^2=x$ ب) $y=|2x|$

۳ــ الف) در شکل زیر معادله خط D را بنویسید.

ب) فاصلهٔ نقطه $A(2,3)$ از خط به معادلهٔ: $3x-4y=4$ را بیابید.

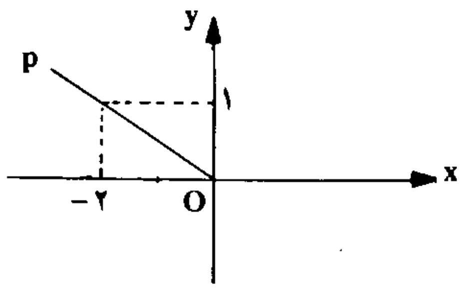


۴ــ الف) حاصل عبارت زیر را به صورت رادیکال ساده‌شده بنویسید.

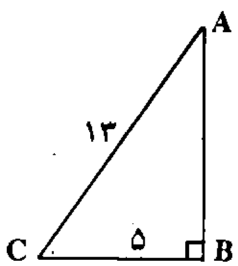
$$\sqrt{5}(6+\sqrt{20})-(10-3\sqrt{5})^2=$$

ب) مخرج کسر $\frac{3\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}$ را گویا کنید. $(x\geq 0)$

۵ــ در شکل زیر زاویهٔ θ و نقطهٔ P مشخص شده است. مطلوب است: $\sin\theta$ و $\cos\theta$



۶ــ در مثلث قائم الزاویه شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه A را محاسبه کنید.



۷ــ درستی تساوی $2-\sin^2\theta=\cos^2\theta.(2+\tan^2\theta)$ را بررسی کنید.

۸ ــ الف) نمودار سهمی $y=(x-۴)^۲$ را رسم کنید.

ب) مختصات رأس سهمی را بیابید.

۹ ــ الف) معادله $\frac{x-۱}{۴}=\frac{x+۵}{۳}-\frac{x+۳}{۲}$ را حل کنید.

ب) نصف عددی را به پنج اضافه می‌کنیم پنج برابر آن عدد به‌دست می‌آید. آن عدد را بیابید. (از روش معادله حل کنید.)

۱۰ ــ الف) مقدار a را چنان بیابید که $x=۲$ یک جواب معادله $x^۲+ax+۲=۰$ باشد.

ب) معادلهٔ : $x^۲-۳x+۲=۰$ را حل کنید.

۱۱ ــ الف) معادلهٔ $x^۲=۲x-۱$ را از طریق رسم حل کنید.

ب) در معادله $x^۲-mx+۴=۰$ مقدار m را چنان بیابید که معادله ریشه مضاعف داشته باشد.

۱۲ ــ الف) نامعادلهٔ : $۲x-۳\geq\frac{۵}{۲}x+۱$ را حل کنید.

ب) در مجموعه جواب نامعادله $۳x+b<۰$ به ازای چه‌مقادیری از b مقدار x منفی می‌شود؟

سؤالات امتحان نهایی درس ریاضی (۵) نظام جدید آموزش متوسطه ـ دی ماه ۱۳۷۵

۱ ــ با استفاده از تعریف فاصله عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $]-۱.۲[\cap[۱.۴[$

ب) $]-۱.۲]\cup]۲.۴]$

۲ ــ دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x+۱}{\sqrt{۲x-۶}}$

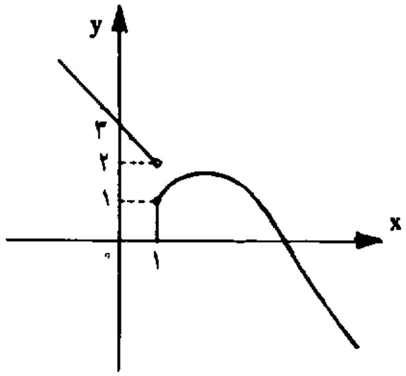
ب) $y=\log(x-۴)$

ج) $y=\cot g(x-\frac{\pi}{۴})$

۳ ــ اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۳x^۲-۵$ باشد $(fog)(x)$ را به‌دست آورید.

۴ ــ اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{۳-x}$ باشد مطلوب‌است $(\frac{f}{g})(x)$ و دامنه آن.

۵ ــ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ حدهای زیر را به‌دست آورید.



الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$

ج) $\lim_{x\to ۰} f(x)$

د) $f(۱)=$

۶ ــ حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to -۱}\frac{۳x^۲+۵x+۲}{x^۲-۱}$

ب) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{۲\sin x}$

ج) $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-}\tan^۳ x$

د) $\lim_{x\to +\infty}\frac{۵x+۱}{۳x+\sqrt{x^۲-۱}}$

هـ) $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$

۷ ــ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{۲-x} & x\neq ۲\\ ۲a+۱ & x=۲\end{cases}$ در $x=۲$ **پیوسته** باشد مقدار a را بدست آورید.

۸ ــ اگر $f(x+۲)=\frac{۳x+۵}{۴x-۶}$ باشد $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

۹ ــ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۵ & x>۰\\ ۵ & x=۰\\ x^۲-۳x+۵ & x<۰\end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

۱۰ ــ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن لازم نیست)

الف) $y=\frac{۲x-۱}{x^۳+۲x^۲}$

ب) $y=\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}}$

ج) $y=\cos^۳\sqrt{x}$

د) $y=(۵x^۲-۶x)^۴$

۱۱ ــ با استفاده از مشتق جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=x^۳-۳x$ را رسم کنید.

۱۲ ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x^۳+۳x^۲+۵x+۲$ را در نقطه عطف منحنی بنویسید.

۱۳ ــ آهنگ تغییرات حجم مکعبی به ضلع x سانتیمتر را نسبت به تغییرات x به‌دست آورید، هرگاه x از ۳ به ۵ سانتیمتر تغییر کند. آهنگ لحظه‌ای تغییرات حجم را در $x=۳$ پیدا کنید.

سؤالات امتحان نهایی درس جبر و احتمال نظام جدید آموزش متوسطه ـ دی ماه ۱۳۷۵

۱ ــ برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۲\times۵}+\frac{۱}{۵\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۱}+\cdots+\frac{۱}{(۳n-۱)(۳n+۲)}=\frac{n}{۲(۳n+۲)}$$

۲ ــ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل‌ضرب دو عدد فرد، همواره یک عدد فرد است.

۳ ــ فرض کنیم $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ دو عدد گنگ باشند با استفاده از استدلال برهان خلف ثابت کنید $(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})$ گنگ است.

۴ ــ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروضند. ثابت کنید حداقل فاصلهٔ دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{۲}$ است.

۵ ــ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

الف) $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

ب) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

۶ ــ اولاً حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه را تعریف کنید. ثانیاً با یک مثال نقض نشان دهید که ضرب دکارتی خاصیت جابجایی ندارد.

۷ ــ رابطهٔ R روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(۰,۰)\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow ad-bc=۰$$

اولاً نشان دهید R یک رابطهٔ هم ارزی است ثانیاً دسته هم‌ارزی $[(۲,۳)]$ را معین کرده و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۸ ــ مطلوب است باقی ماندهٔ $۱۳۷۵^{۱۳۷۵}$ بر ۷.

۹ ــ یک سکهٔ سالم را ۳ بار می‌اندازیم مطلوب است:

الف) فضای نمونه‌ای این تجربهٔ تصادفی

ب) پیشامد A آن که اقلاً دوبار «رو» بیاید.

ج) پیشامد B آن که فقط دو بار «پشت» بیاید.

د) پیشامد $A'\cap B$ را مشخص کنید.

۱۰ ــ یک سکهٔ سالم را ۱۰ بار می‌اندازیم.

الف) احتمال آن را حساب کنید ۵ بار رو بیاید.

ب) احتمال آن را حساب کنید که ۵ بار رو نیاید.

۱۱ ــ تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچکتر از ۴ باشد P(A) را بیابید.

۱۲ ــ دو عدد حقیقی به طور تصادفی در فاصلهٔ $[-۲,۲]$ انتخاب می‌کنیم احتمال آن که مجموع مربعات آن دو عدد کوچکتر یا مساوی یک باشد را بیابید.

۱۳ ــ فرض کنید C ،B ،A پیشامدهای دوبه‌دو مستقل بوده ثابت کنید اگر A با $(B\cap C)$ مستقل باشند آنگاه A با $(B\cup C)$ نیز مستقل هستند.

۱۴ ــ ریشه‌های $Z^۳-۱=۰$ را پیدا کرده و نمایش هندسی آن را رسم کنید $(Z\in\mathbb{C})$

سؤالات امتحان هماهنگ کشوری درس ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی ـ خردادماه ۱۳۷۶

۱ ــ گراف $G=(V,E)$ با $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,bc,be,bd,cd\}$ مفروض است:

الف) نمودار G را رسم کنید.

ب) رأسهای گراف G که با رأس C مجاورند مشخص کنید.

ج) یک یال نام ببرید که با حذف آن از G گراف حاصل

درخت باشد.

۲ ــ ثابت کنید تعداد رئوس فرد هر گراف زوج است.

۳ ــ اولاً ماتریس مجاورت گراف ۲- منتظم از مرتبه ۴ را بنویسید. ثانیاً اگر A ماتریس مجاورت گراف ۲- منتظم مرتبه ۴ باشد رابطهٔ بین مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^۲$ و اندازهٔ گراف متناظر آن را بنویسید.

۴ ــ اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند و $a|b$ و $b|a$ ثابت کنید : $a = \pm b$

۵ ــ اگر عدد صحیح n نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه ثابت کنید : $n = ۶q + ۱$ یا $n = ۶q + ۵$ $(q \in Z)$

۶ ــ اولاً تعریف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح را بنویسید.

ثانیاً اگر a و b و m و n اعداد صحیح باشند به طوری که $ma + nb = ۱$ ثابت کنید a و b نسبت به هم اولند.

۷ ــ اولاً m بر چه عددی بخش‌پذیر باشد تا معادله $۲۱x + ۳۹y = ۲m$ در Z جواب داشته باشد. ثانیاً معادله فوق را به ازاء $m = ۲۱$ در Z حل کنید.

۸ ــ رابطهٔ R در مجموعه $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ تعریف شده است، اگر $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ ماتریس متناظر با رابطه R باشد و $M^۲ << M$ آنگاه ثابت کنید R خاصیت ترایائی دارد.

۹ ــ اولاً چند عدد n رقمی با ارقام ۱ و۲ و ۳ می‌توان نوشت؟ $(n \geq ۳)$

ثانیاً در چند تا از اعداد n رقمی فوق هر یک از ارقام ۱ و ۲ و ۳ حداقل یک بار به کار رفته است؟

۱۰ ــ فرض کنیم شخصی مبلغ $a_۰$ را نزد بانکی سپرده می‌گذارد. اگر در پایان هر سال $\frac{۱}{۶}$ موجودی او در ابتدای همان سال به سرمایه‌اش اضافه گردد و a_n سرمایه او در پایان سال nام باشد :

اولاً نشان دهید a_n در رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = \frac{۷}{۶} a_n$ صدق می‌کند.

ثانیاً اگر $a_۰ = ۱۰^۶$ آنگاه a_n را بر حسب n به‌دست آورید.

۱۱ ــ اگر P یک تابع احتمال بر مجموعه پیشامدهای فضای نمونه‌ای S باشد اصول موضوعه کولموگوروف (اصول موضوعه احتمال) را برای تابع P بنویسید.

۱۲ ــ فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، ثابت کنید :

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(B').P(A|B')$$

(احتمال پیشامدهای B و ′B مثبت هستند)

۱۳ ــ خانوادهٔ ۳ فرزندی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، متغیر تصادفی را تعداد فرزندان پسر تعریف می‌کنیم.

اولاً مقادیری را که متغیر تصادفی اختیار می‌کند، بنویسید.

ثانیاً اگر احتمال تولد پسر با دختر برابر باشد جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی را رسم کنید.

۱۴ ــ جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است :

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P_i	$\frac{۱}{۶}a^۲$	$\frac{۱}{۲}a^۲$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۳}a^۲$

اولاً a را پیدا کنید.

ثانیاً به ازای $a = \frac{۱}{۲}$ نمودار میله‌ای جدول توزیع احتمال را رسم نموده و امید X را محاسبه کنید.

سؤالات امتحانات هماهنگ کشوری درس هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش‌دانشگاهی دی‌ماه ۱۳۷۵

۱ ــ برای سه بردار a و b و c اگر $a + b + c = ۰$ آنگاه نشان دهید : $a \times b = b \times c = c \times a$

۲ ــ نقاط $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۱,۲)$ و بردار $\vec{v}(۰,۱,-۱)$ مفروضند، تصویر بردار $\vec{AB}$ را بر امتداد بردار $\vec{v}$ تعیین کنید.

۳ ــ معادله صفحه گذرا از نقطه تلاقی دو خط

$$\frac{x-۳}{۲} = \frac{y-۵}{۳} = \frac{z-۲}{۳} \quad و \quad \begin{cases} x = ۳t + ۴ \\ y = ۵t + ۷ \\ z = ۲t + ۱ \end{cases}$$

و عمود بر بردار $\vec{N}(-۲,۳,۴)$ را بنویسید.

۴ ــ معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-۱,۲,۳)$ گذشته و موازی فصل مشترک دو صفحه $P: x + y + ۴z = ۶$ و $P': x - y + ۲z = ۱۰$ باشد.

۵ ــ در تساوی ماتریسی زیر مقدار x را پیدا کنید :

$$[۱ \ ۲ \ x] \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

۶ــ با استفاده از ویژگیهای دترمینان و بدون بسط تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix} = ۲(x+y+z)^۳$$

۷ــ ثابت کنید اگر $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی یک به‌یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ یک نگاشت خطی است.

۸ــ ثابت کنید اگر $g:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ و $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ نگاشتهای خطی باشند آنگاه fog نیز خطی است.

۹ــ اگر $A = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ باشند ثابت کنید هرعضو $\mathbb{R}^۳$ به‌طور منحصر بفرد به‌صورت ترکیب خطی عناصر A نوشته می شود.

۱۰ــ دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را به روش وارون ماتریس ضرایب حل کنید :

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۴ \\ ۲x_۱ - x_۲ - x_۳ = -۱ \\ x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ = ۱ \end{cases}$$

۱۱ــ تعریف امتداد ویژه برای نگاشت خطیf را بنویسید آنگاه مقادیر ویژه برای نگاشت f با ماتریس وابسته $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ محاسبه کنید، سپس امتداد ویژه برای مقدار ویژه مثبت را به‌دست آورید.

۱۲ــ در یک به‌یک و پوشا بودن نگاشت خطی f با ماتریس وابسته $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ تحقیق کرده و بُعد تصویرf را بیابید.

سؤالات امتحانات هماهنگ کشوری درس حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ پیش‌دانشگاهی دی‌ماه ۱۳۷۵

۱ــ اگر $۰ < a < ۱$ ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ < a^n \le a$.

۲ــ ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_۱ = \sqrt{۳}$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۳a_n + ۴}$ کراندار و صعودی است و سپس حد آن‌را به‌دست آورید.

۳ــ الف : آیا سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \log \frac{۳k+۱}{k+۴}$ همگراست؟ چرا؟

ب : ثابت کنید سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۲^{k+۱} - ۳^k}{۵^{k+۲}}$ همگراست و مقدار آن‌را به‌دست آورید.

۴ــ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید :

$\lim_{x\to ۲}(x^۲ + ۵x - ۱۰) = ۴$.

۵ــ تابع حقیقی $f(x) = \begin{cases} x+۱ & \text{گویا } x \\ x & \text{اصم } x \end{cases}$ مفروض است اگر a عددی گویا باشد، ثابت کنیدf در a حد ندارد.

۶ــ تابع $f(x) = (x-۱)(x-۲)(x-۳) + x^۲$ مفروض است :

الف) نشان دهید که معادله $f(x) = ۰$ در بازهٔ $[۰,۱]$ دارای ریشه است.

ب) نشان دهید که خط $y = \sqrt{۱۷}$ نمودار تابع f را دربازهٔ $[۲,۳]$ قطع می‌کند.

۷ــ مطلوب است معادلات خطوط مجانبهای منحنی $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۱} - x$.

۸ــ **قضیه** : هرگاه g در x=a مشتق‌پذیر باشد و $g(a) \neq ۰$ آنگاه $\frac{۱}{g}$ در x=a مشتق‌پذیر است و $(\frac{۱}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^۲}$.

۹ــ تابع
$$f(x) = \begin{cases} \tan x & ۰ \le x \le \frac{\pi}{۴} \\ a\sin ۲x + b\cos ۲x + c & x > \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$
در $x = \frac{\pi}{۴}$ مشتق مرتبه دوم دارد a و b و c را به‌دست آورید.

۱۰ــ تابع $f(x) = x^۳ + x - ۶$ مفروض است از نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر نمودار تابع معکوسf خطی بر نمودار تابع معکوس مماس رسم می‌کنیم شیب خط را به‌دست آورید.

۱۱ــ اگر متحرکی روی نمودار $۴x^۲ - ۹y^۲ = ۷$ $(x > ۰)$ به‌گونه‌ای حرکت کند که آهنگ افزایش مؤلفه x آن ۹ متر بر ثانیه باشد وقتی $y = ۱$ آهنگ تغییرات مؤلفه y آن‌را به‌دست آورید.

۱۲ــ الف) آیا تابع $f(x) = \sin ۲\pi x + ۳\cos ۵x$ متناوب است؟ چرا؟

ب) معادله مثلثاتی $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید.

سؤالات امتحان هماهنگ کشوری درس حساب دیفرانسیل وانتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی خردادماه ۱۳۷۶

۱ ــ با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید اگر $0<a<b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

۲ ــ تابع باضابطه زیر را به‌صورت چند ضابطه‌ای نوشته و نقاط بحرانی آن‌را در صورت وجود بیابید.

$$f(x)=|x^2-1|+1$$

۳ ــ جدول رفتار و نمودار تابع با ضابطه زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$$y=\frac{1}{\cos x} \qquad [0, 2\pi]$$

۴ ــ حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

۵ ــ مقدار تقریب اضافی مساحت محصور بین منحنی با ضابطه زیر را با محور xها دربازهٔ $[-1,1]$ برای $n=4$ به‌دست آورید:

$$y=1-x^2$$

۶ ــ **قضیه)** اگر تابع f دربازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $c\in\mathbb{R}$ موجود است به‌قسمی که $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$

۷ ــ انتگرال معین زیر را حساب کنید

$$\int^1 |1-2x|[2x]dx$$

۸ ــ دامنه تعریف و مشتق تابع با ضابطه زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=\ln(1-x^2)+e^{\sqrt{x}}$$

۹ ــ معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_3^{\log_2^{x^2-1}}=1$$

۱۰ ــ اگر $\log_2 = 0/301$ باشد $\log_5$ را محاسبه کنید.

۱۱ ــ انتگرال‌های نامعین مقابل را به‌دست آورید.

$$A=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad B=\int\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$$

۱۲ ــ طول منحنی تابع با ضابطه زیر را دربازه [۳و۰] به‌دست آورید:

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

سؤالات امتحان هماهنگ کشوری درس ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی دی‌ماه ۱۳۷۵

۱ ــ مقدار k را طوری تعیین کنید که سه خط $y=-3x+1$ و $y=x-3$ و $kx+(k-1)y=3$ متقارب باشند.

۲ ــ جواب دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=14 \\ 3x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

را در صورت وجود به روش حذفی گاوس (گاوس ــ جردن) حل کنید.

۳ ــ جمله پنجم بسط دوجمله‌ای $(x+2x^3)^7$ را حساب کنید.

۴ ــ اگر $|2x-3|\le 7$ باشد حدود x را تعیین کنید.

۵ ــ ثابت کنید که دنبالهٔ $u_n=\frac{2n^2+7}{n^2+3}$ از پایین کراندار است.

۶ ــ معادلات زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید:

الف: $(13^x)^{x+3}-\frac{1}{169}=0$

ب: $\ln(2x-1)+\ln(x-1)=\ln 91-\ln 13$

۷ ــ تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}+2$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

۸ ــ منحنی مسطح (C) به معادلهٔ $y=\sqrt{4x^2+8x+5}$ مفروض است مجانب آن‌را به‌دست آورید.

۹ ــ مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-5}{1-x-2x^2}e^{3x}$

۱۰ ــ معادله خط قائم برمنحنی نمایش تابع $y=e^{3x+6}$ در نقطهٔ متناظر با $x=-2$ را به‌دست آورید.

۱۱ ــ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف : $x^2y^3 = x^4 - y^5 - 3$

ب : $y = Ln(5-3x)^2$

۱۲ ــ فرض کنیم $y = x^2$ باشد Δy و dy را برای وقتی که $x = 2$ و $dx = \Delta x = 0/1$ مقایسه کنید.

۱۳ ــ دیفرانسیل توابع زیر را حساب کنید.

الف : $y = \frac{1}{4}\sin(\frac{4\pi x - 1}{2})$

ب : $y = x\cos^{-1}x$

۱۴ ــ درکشت معیّنی، آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر تعداد آنها در سه ساعت، سه‌برابر شود و در پایان ۱۲ ساعت تعداد باکتری ۱۰ میلیون باشد، در آغاز چند باکتری داشته‌ایم.

۱۵ ــ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع‌را $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60$ بر بازه $[0,2]$ محاسبه کنید.

۱۶ ــ تابع $y = 3x - x^3$ داده شده است.

الف : نقاط بحرانی تابع را بیابید.

ب : بازه‌هایی را که تابع درآنها صعودی یا نزولی هستند، مشخص کنید.

سؤالات امتحانات هماهنگ کشوری درس ریاضی عمومی۲ پیش‌دانشگاهی خرداد ماه ۱۳۷۶

۱ ــ جدول زیر برای ۴۰ داده آماری تشکیل شده است. فراوانی و درصد فراوانی و مرکز هر دسته را به‌دست آورید.

دسته‌ها	فراوانی نسبی
۲۰ ــ ۲۴	۰/۰۵
۲۴ ــ ۲۸	۰/۲
۲۸ ــ ۳۲	۰/۳۵
۳۲ ــ ۳۶	۰/۲۵
۳۶ ــ ۴۰	۰/۱۵

۲ ــ واریانس و انحراف معیار داده‌های ۲۹ و ۲۴ و ۲۷ و ۲۳ و ۲۲ را محاسبه کنید.

۳ ــ فرض کنید احتمال انتقال یک نوع بیماری از فرد ناقل به فرد مستعد برابر ۰/۳ باشد. اگر ۷ نفر مستعد با فرد ناقل ملاقات کنند احتمال آن‌که ۵ نفر به این بیماری مبتلا شوند چقدر است؟

۴ ــ در توزیع زیر امید ریاضی برابر ۵ می‌باشد. مقدار K را به‌دست آورید.

X	۱	۳	۷	K
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

۵ ــ ثابت کنید نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 3x^2 + 1$ مرکز تقارن آن است.

۶ ــ منحنی نمایش تابع $y = \frac{2x}{x+1}$ را رسم کنید.

۷ ــ نزدیکترین نقطه روی هذلولی $x^2 - 2y^2 = 5$ به نقطهٔ $A(0,2)$ را به‌دست آورید.

۸ ــ مقدار K را طوری تعیین کنید که معادله $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + k = 0$ دایره‌ای به شعاع ۴ را مشخص کند.

۹ ــ یک سهمی به معادله $y^2 - 6y - 8x - 7 = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی آن.

۱۰ ــ معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(4,2)$ و $F'(-8,2)$ کانونهای آن و خروج ازمرکز آن $\frac{2}{3}$ باشد.

۱۱ ــ با استفاده از نمودار $f(x) = |2 - x| - 3|$ مقدار $\int_5 f(x)dx$ را حساب کنید.

۱۲ ــ $\int \frac{x^5 - 3x^3 + 2}{x^3}dx$ را حساب کنید.

۱۳ ــ ناحیه‌ای محدود به نمودار تابع $y = \sqrt{2x+1}$، محور xها و دوخط $x = 1$ و $x = 4$ می‌باشد این ناحیه را به‌طور کامل حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم جسمی را که بدین‌گونه حاصل می‌شود، حساب کنید.

۱۴ ــ تابع اولیه F از تابع f با ضابطهٔ $f(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$ را که در شرایط اولیه $F(0) = 6$ صدق کند، به‌دست آورید.

حل مسأله‌های برهان شماره ۲۲

حل مسایل ریاضیات ۲

۱ـ

$$۲m^۲x+۶m+۴=۶mx-۴x$$
$$\Rightarrow (۲m^۲-۶m+۴)x=-۶m-۴$$
$$x=\frac{-۲(۳m+۲)}{۲(m^۲-۳m+۲)} \text{ و } m^۲-۳m+۲=۰$$
$$\Rightarrow (m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow m=۱\ ;\ m=۲$$

بنابراین به‌ازای $m=۱$ و $m=۲$ معادله جواب ندارد.

۲ـ با توجه به معادلهٔ $x^۲-x-m^۲=۰$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=۱ \\ x_۱x_۲=-m^۲ \end{cases}$$
$$P=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲-x_۱x_۲}{x_۱^۳+x_۲^۳}=\frac{x_۱^۲-x_۱x_۲+x_۲^۲}{(x_۱+x_۲)(x_۱^۲-x_۱x_۲+x_۲^۲)}$$
$$\Rightarrow P=\frac{۱}{x_۱+x_۲}=\frac{۱}{۱}=۱ \Rightarrow P=۱$$

۳ـ عبارتهای $x^۲+۲$ و $(x^۲-۱)^۴$ نامنفی هستند، بنابراین:

$$۷x+۱۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲ \text{ و}$$
$$(x^۲-۱)^۴=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$
$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = \{x\in \mathbb{R} \mid x\geq -۲ ،\ x=\pm ۱\}$$

۴ـ

$$mm'=-۱ \quad \text{(شرط عمود بودن)}$$
$$m=-\frac{p}{q} \text{ و } m'=-\frac{۱}{p}\ :$$
$$mm'=(-\frac{p}{q})(-\frac{۱}{p})=\frac{۱}{q}=-۱ \Rightarrow q=-۱$$
$$\text{و } A(۱,-۲)\ :\ p(۱)+(-۱)(-۲)=۱ \Rightarrow p=-۱$$

۵ـ برای این‌که نقطهٔ P در ناحیهٔ چهارم واقع باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x_P>۰ \\ y_P<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶m-۱۲>۰ \\ ۴m-۱۲<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۲ \\ m<۳ \end{cases} \Rightarrow ۲<m<۳$$

۶ـ اگر θ زاویه‌ای باشد که خط مورد نظر با محور xها می‌سازد:

$$\tan\theta=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۷+۶}{-۶+۷}=-۱ \Rightarrow \theta=\frac{۳\pi}{۴}$$

۷ـ می‌دانیم:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$

بنابراین:

$$-۲=\frac{m-۱+۲+۳}{۳} \Rightarrow m+۴=-۶ \Rightarrow m=-۱۰$$
$$۱=\frac{۲-۱+m-n}{۳} \Rightarrow m-n+۱=۳ \Rightarrow n=m-۲$$
$$\Rightarrow n=-۱۲$$

حل مسایل ریاضیات ۴

۱ـ

$$\bar{x}=\frac{۸+۱۲+۱۴+۱۶+۲۲+۲۴}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$$

$$S^۲=\frac{(۸-۱۶)^۲+(۱۲-۱۶)^۲+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۶-۱۶)^۲+(۲۲-۱۶)^۲+(۲۴-۱۶)^۲}{۶}$$
$$S^۲=\frac{۹۲}{۳}$$
$$\Rightarrow \text{(انحراف معیار)}\ S=\sqrt{\frac{۹۲}{۳}}$$

۲ـ

$$P=\frac{\left[\log(\tan ۱^\circ)+\log(\tan ۲^\circ)+\cdots+\log(\tan ۸۹^\circ)\right]+\tan ۴۵^\circ}{(\tan ۱^\circ)(\tan ۲^\circ)\cdots(\tan ۸۹^\circ)}$$

با توجه به برابریهای $\tan ۸۹^\circ=\cot ۱^\circ$ ، $\tan ۸۸^\circ=\cot ۲^\circ$ و...، می‌توان نوشت:

$$P=\frac{\left[\log(\tan ۱^\circ\cdot\tan ۲^\circ\cdots\tan ۸۹^\circ)\right]+\tan ۴۵^\circ}{(\tan ۱^\circ\cot ۱^\circ)(\tan ۲^\circ\cot ۲^\circ)\cdots\tan ۴۵^\circ}$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan x\cot x=۱$ و برابری $\tan ۴۵^\circ=۱$:

$$P=\frac{\log(۱)+۱}{۱}=\frac{۰+۱}{۱} \Rightarrow P=۱$$

۳ـ با استفاده از اتحاد: $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$ می‌توان نوشت:

$$۲=\frac{\tan x+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}\tan x} \Rightarrow ۲-\frac{۲}{۳}\tan x=\tan x+\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۳}\tan x=\frac{۵}{۳} \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۴ـ می‌دانیم اگر $A+B+C=۰$ ، آن‌گاه:

$$A+B=-C \Rightarrow \tan(A+B)=-\tan C$$

$\Rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

بنابراین از فرض $\tan 6x=\tan 4x+\tan 2x$ یا $\tan 6x+\tan(-4x)+\tan(-2x)=0$ و با توجه به مجموع زوایا که صفر است:

$6x-4x-2x=0$

نتیجه می‌شود:

$P=\tan 2x\tan 4x\tan 6x=\tan(-2x)\tan(-4x)\tan 6x$

$=\tan(-2x)+\tan(-4x)+\tan 6x=0\Rightarrow P=0$

۵ــ واضح است که $a_1=s_1$ (جملهٔ اول تصاعد عددی)

$s_n=3n^2-4n$ و $n=1:\ s_1=3-4=-1\Rightarrow a_1=-1$

و همچنین $d=\underbrace{s_2-s_1}_{\text{جملهٔ دوم}}-a_1$ (قدر نسبت تصاعد عددی) و یا:

$d=s_2-2a_1\Rightarrow d=4-2(-1)=6\Rightarrow d=6$

$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_{11}=-1+10(6)=59$

$a_{11}=59$ (جملهٔ یازدهم تصاعد عددی)

۶ــ

$a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$ (جملهٔ عمومی تصاعد هندسی) و $a_1=\frac{1}{3^0}=\frac{1}{1}=1$

$a_2=\frac{1}{3^{2-1}}=\frac{1}{3}$ و $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$ (قدر نسبت) و

$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ (حد مجموع)

۷ــ

$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+2\\-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$

$|\vec{w}|=|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\vec{u}\times\vec{v}=[-3\ \ -1]\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=[-6+1]=-5$

۸ــ یک n ضلعی دارای n رأس می‌باشد و قطر n ضلعی از وصل هر دو رأس غیر مجاور n ضلعی به‌دست می‌آید. بنابراین این مسأله درواقع یک ترکیب ۲ از n است، ولی رابطهٔ $C(n,2)$ رأسهای مجاور هم را نیز شامل می‌شود. پس باید حالتهایی را که رأسهای مجاور انتخاب می‌شوند را از مقدار $C(n,2)$ کم کنیم. واضح است که وقتی دو رأس مجاور انتخاب می‌شوند از وصل آنها به یکدیگر یک ضلع n ضلعی پدید می‌آید؛ پس، تعداد حالاتی که دو رأس مجاور انتخاب می‌شوند برابر تعداد اضلاع n ضلعی یعنی برابر n است؛ درنتیجه تعداد قطرهای n ضلعی برابر $C(n,2)-n$ است:

$C(n,2)-n=\frac{n!}{(n-2)!2!}-n=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!}-n$

$=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$

حل مسأله‌های ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

۱ــ خیر امکان ندارد، زیرا اگر در کلاس ۲۱ نفری هر دانش‌آموز بخواهد به‌تنهایی با ۷ نفر از همکلاسیهای خود دوست صمیمی باشد درواقع گرافی تولید می‌شود با ۲۱ رأس که از هر رأس آن ۷ یال عبور می‌کند که در این صورت داریم، $\sum_{i=1}^{21}\deg v_i=147$ که ۱۴۷ عددی فرد است و این با قضیه در تناقض است زیرا باید مجموع درجه‌های رأسهای یک گراف عددی زوج باشد.

۲ــ می‌خواهیم ثابت کنیم اگر گرافی دور اویلری داشته باشد هر رأس آن گراف درجهٔ زوج دارد. اگر گراف G یک دور اویلری داشته باشد و V رأس دلخواهی از G باشد، ثابت می‌کنیم درجهٔ V زوج است. از طرفی چون دور اویلری شامل هر یال G است پس شامل همهٔ یالهایی است که از V عبور می‌کنند. و چون باید از هر یال فقط یک بار عبور کنیم پس هر یال که با V برخورد دارد فقط یک‌بار در این دور (دور اویلری) پیموده می‌شود، بنابراین هر بار که به رأس V می‌رسیم از یالی باید بگذریم که قبلاً از آن عبور نکرده باشیم پس هر یال ورودی یک یال خروجی منحصر بفرد برای خودش دارد پس درجهٔ V باید مضربی از ۲ باشد.

عکس نقیض مطلب فوق که معادل با آن است به‌صورت زیر بیان می‌شود:

«اگر درجهٔ بعضی از رأسهای یک گراف فرد باشد آنگاه آن گراف هیچ دور اویلری ندارد» بنابراین در مسألهٔ معروف پل‌های کونیگسبرگ چون در مدل گراف مربوط به آن، رأس از درجهٔ فرد وجود دارد، نمی‌توان در آن دور اویلری یافت!

۳ــ برای مشخص کردن دو رقم سمت راست یک عدد باید هم‌نهشتی آن عدد به سنج ۱۰۰ را بررسی کنیم:

$A=\sum_{k=1}^{21}k!=1!+2!+3!+4!+\cdots+21!$

$5!\overset{100}{\equiv}20$ و $6!\overset{100}{\equiv}20$ و $7!\overset{100}{\equiv}40$ و $8!\overset{100}{\equiv}20$

$9!\overset{100}{\equiv}80$ و $10!\overset{100}{\equiv}0$ و $\forall k\ge10,\ k!\overset{100}{\equiv}0$

$\Rightarrow A\overset{100}{\equiv}1+2+6+24+20+20+40+20+80\overset{100}{\equiv}13$

۴ــ برای اینکه ثابت کنیم $A=a^{n+4}-a^n$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است کافی است ثابت کنیم بر ۶ و ۵ بخش‌پذیر است. (توجه داریم که حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۶ است)

$A=a^n(a^4-1)=a^{n-1}\times a\times(a-1)(a+1)(a^2+1)$

چون $(a-1)a(a+1)$ حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی است پس مضرب ۶ بوده و لذا A بر ۶ بخش‌پذیر است.

$6|a(a-1)(a+1)\Rightarrow 6|a^{n-1}\times a\times(a-1)(a+1)(a^2+1)=A$

برای بخش‌پذیری بر ۵ از قضیهٔ فرما استفاده می‌کنیم (اگر p اول و $p\nmid a$ در این صورت $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$)

اگر $5|a\Rightarrow 5|a^n\Rightarrow 5|a^n(a^4-1)=A$

اگر $5\nmid a\Rightarrow a^{5-1}=a^4\overset{5}{\equiv}1\Rightarrow 5|(a^4-1)\Rightarrow 5|a^n(a^4-1)=A$

۵ــ هر جملهٔ بسط $(x+y+z+t)^{14}$ به‌صورت $x^ay^bz^ct^d$ می‌باشد که در آن $a+b+c+d=14$ پس تعداد جمله‌های این بسط برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $a+b+c+d=14$ یعنی، $\binom{14+4-1}{4-1}=\binom{17}{3}$

۶ــ تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=11$ با دو شرط $x_1>1$ و $x_2>3$ برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+x_3=11-2-4$ یعنی $\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}$. زیرا:

$x_1>1\Rightarrow x_1\ge2\Rightarrow x_1-2\ge0$

و

$x_2>3\Rightarrow x_2\ge4\Rightarrow x_2-4\ge0$

اگر فرض کنیم $x_1-2=y_1$ و $x_2-4=y_2$ در این صورت $x_1=y_1+2$ و $x_2=y_2+4$ پس

$x_1+x_2+x_3=11\Rightarrow(y_1+2)+(y_2+4)+x_3=11$

$\Rightarrow y_1+y_2+x_3=11-2-4=5$

۷ــ معادلهٔ مشخصهٔ رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ عبارت است از $x^2-8x+16=0$ که $r=4$ ریشهٔ مضاعف آن است. بنابراین:

$a_n=(c+d_n)\times4^n$

$\begin{cases}a_0=4c\\ a_1=(c+d)\times4\end{cases}$ و $\Rightarrow\begin{cases}4c=0\\ 4\times(c+d)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ d=2\end{cases}$

$\Rightarrow a_n=(2n)\times4^n=n(2^{2n+1})$

۸ــ تعداد اعضای فضای نمونه در قرار دادن n مهره به تصادف داخل N ظرف برابر است با: $n(s)=N\times N\times\cdots\times N=N^n$.

حال برای اینکه k مهره در ظرف u_1 قرار بگیرد باید k مهره را از میان n مهره انتخاب کنیم که این‌کار به $\binom{n}{k}$ طریق امکان‌پذیر است. حال می‌بایست $(n-k)$ مهرهٔ باقی‌مانده را درون $(N-1)$ ظرف باقی مانده قرار دهیم که به $(N-1)^{n-k}$ طریق ممکن است پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P=\frac{\binom{n}{k}\times(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

۹ــ اگر $f_X(x)=a(\frac{1}{3})^x$ و $x=0,1,2,\cdots$ در این صورت باید $\sum f_X(x)=1$ پس:

$\sum_{x=0}^{\infty}a(\frac{1}{3})^x=1\Rightarrow a\left[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{9})+\cdots\right]=1$

$\Rightarrow a\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1\Rightarrow a=\frac{2}{3}$

حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ــ $f(x)=x^2|x|+1\quad 0\le x\le2$

با توجه به اینکه $x\ge0$ بنابراین $|x|=x$ درنتیجه

$f(x)=x^3+1\quad 0\le x\le2$

$f'(x)=3x^2\ge0\Rightarrow$ f همواره صعودی است.

بنابراین $f(0)=1$ می‌نیمم مطلق و نسبی و $f(2)=9$ ماکزیمم مطلق و نسبی تابع می‌باشد بعلاوه نقطه $x=0$ نقطه بحرانی تابع است.

۲ــ الف) قضیه مقدار میانگین: اگر تابع حقیقی f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه نقطه‌ای مانند $a<c<b$ وجود دارد به طوری که

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ب) در مسأله باید شرط $0<a<b$ را درنظر بگیریم یعنی a و b دو عدد مثبت باشند. تابع $f(x)=\text{Arctg}x$ بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و بر فاصله (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین نقطه $a<c<b$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ داریم:

$f(x)=\text{Arctg}x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow\frac{1}{1+c^2}=\frac{\text{Arctg}b-\text{Arctg}a}{b-a}\quad(I)$

$0<a<c<b\Rightarrow a^2<c^2<b^2\Rightarrow1+a^2<1+c^2<1+b^2$

$\Rightarrow\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+a^2}$

$$(I) \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{Arctgb - Arctga}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < Arctgb - Arctga < \frac{b-a}{1+a^2}$$

۳ ــ الف ــ رسم نمودار $f(x)=x^2(x+2)^3$

$f(x)=x^2(x+2)^3 \quad D_f=\mathbb{R} \quad R_f=\mathbb{R}$

مجانب افقی ندارد زیرا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

مجانب مایل ندارد زیرا $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x(x+2)^3=\pm\infty$

مجانب قائم ندارد.

جدول تغییرات:

$f(x)=x^2(x+2)^3$

$f'(x)=x(x+2)^2(5x+4) \Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

x	−∞		−۲		−۴/۵		۰		+∞
f′(x)		+		+		−		+	
f(x)		↗	۰	↗	۱/۱ Max	↘	۰ Min	↗	

x	y
±∞	±∞
−۲	۰
−۴/۵ (اکسترمم نسبی)	۱/۱
۰ (اکسترمم نسبی)	۰
−۱/۶	۰/۲
−۰/۳	۰/۴

نقاط عطف

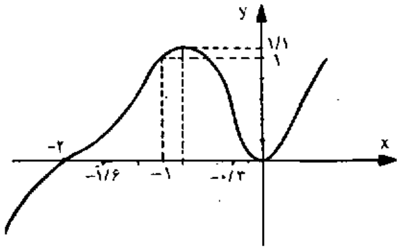
$f'(x)=x(x+2)^2(5x+4)$

$f''(x)=(x+2)(20x^2+32x+8) \Rightarrow f''(x)=0$

$\Rightarrow (x+2)(20x^2+32x+8)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 5x^2+8x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-0/3 \\ x=-1/6 \end{cases}$$ طول نقاط عطف

x	−∞		−۲		−۱/۶		−۰/۳		+∞
f″(x)		−		+		−		+	
		∩	۰	∪	۰/۲	∩	۰/۴	∪	



ب ــ رسم نمودار $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3} \quad D_f=\mathbb{R}$

محاسبه برد تابع

$y=\frac{x^2+x}{x^2+x+3} \Rightarrow yx^2+yx+3y=x^2+x$

$\Rightarrow (y-1)x^2+(y-1)x+3y=0$

$\Delta\geq 0 \Rightarrow (y-1)^2-4(y-1)\times 3y\geq 0$

$\Rightarrow -(y-1)(11y+1)\geq 0 \Rightarrow (y-1)(11y+1)\leq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{11}\leq y\leq 1 \Rightarrow R_f=\left[-\frac{1}{11},1\right]$

مجانب افقی دارد و

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2+x+3}=1$$

$y=1$ مجانب افقی تابع است.

مجانب مایل ندارد زیرا تابع مجانب افقی دارد.

مجانب قائم ندارد زیرا مخرج کسر ریشه ندارد.

جدول تغییرات:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 6x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	−∞			−۱/۲			+∞
f′(x)		−	−		+	+	
f(x)		↘	↘	Min	↗	↗	

x	y
±∞	۱
−۱/۲	−۱/۱۱
۰	۰
−۱	۰

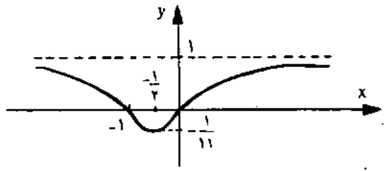
نقاط عطف

$$f'(x)=\frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-18x^2-18x+12}{(x^2+x+3)^3} \Rightarrow f''(x)=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+3x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x\cong 0/5 \\ x=-1/5 \end{cases}$$ طول نقاط عطف

x	−∞		−۱/۵		۰/۵		+∞
f″(x)		−		+		−	
		∩		∪		∩	



۴ ــ برای محاسبه این حدود از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{4+n^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=Arctgx\Big|_0^1$$

$$=Arctg(1)-Arctg(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

ب) $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+\dots+e^{-\frac{n}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{-\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}+1=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

۵ ــ

الف) $$\lim_{x\to+\infty}\log_{x-2}(2x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(2x+1)}{Ln(x-2)}\overset{Hop}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2x+1}}{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-2)}{2x+1}=1$$

ب) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)Ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{Ln(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{Ln(1-x)}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\frac{-1}{1-x}}=\lim_{x\to 0}e^x(1-x)=1$$

ج) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{Ln(1-x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-Ln(1-x)}{xLn(1-x)}$$

$$\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{-1}{1-x}}{Ln(1-x)-\frac{x}{1-x}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2-x}{(1-x)Ln(1-x)-x}=-\infty$$

۶ ــ روش جزء به جزء برای محاسبه یک انتگرال نامعین به شکل زیر است.

الف) $\int udv=uv-\int vdu$

$$\int xLnxdx=\frac{1}{2}x^2Lnx-\int\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}x^2Lnx-\frac{1}{4}x^2+c$$

$$\begin{cases} u=Lnx \\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{e^xe^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{1-(1-e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}}e^xdx$$

$$=\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\int\sqrt{1-e^{2x}}\,e^xdx$$

انتگرال‌های بالا را جداگانه حساب می‌کنیم

$$\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=$$

$$=\begin{cases} e^x=u \\ du=e^xdx \end{cases}$$

$Arcsin\,u+c=Arcsin(e^x)+c$

$$I=\int\sqrt{1-e^{2x}}\,e^xdx \qquad \begin{cases} e^x=u \\ du=e^xdx \end{cases}$$

$$I=\int\sqrt{1-u^2}\,du \qquad \begin{cases} u=\sin\theta \\ du=\cos\theta d\theta \end{cases}$$

$$=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}Arcsin\,u+\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}$$

$$=\frac{1}{2}Arcsin(e^x)+\frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}}$$

حال برای محاسبه انتگرال داریم :

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \int \sqrt{1-e^{2x}}\,e^x dx =$$

$$\text{Arcsin}(e^x) - \frac12 \text{Arcsin}(e^x) - \frac12 e^x\sqrt{1-e^{2x}} =$$

$$\frac12 \text{Arcsin}(e^x) - \frac12 e^x \sqrt{1-e^{2x}}$$

ج) $I=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1} = \int \frac{2udu}{u^2+u+1} =$

$$\begin{cases} u=\sqrt{x}\\ x=u^2 \\ dx=2udu\end{cases}$$

$$I=\int\frac{2udu}{(u+\frac12)^2+\frac34} = \int \frac{(2v-1)dv}{v^2+\frac34}$$

$$\begin{cases}u+\frac12=v\\du=dv\\2u=2v-1\end{cases}$$

$$I=\int\frac{2vdv}{v^2+\frac34} - \int \frac{dv}{\frac34(\frac{4v^2}{3}+1)}$$

$$=\text{Ln}(v^2+\frac34) - \frac43\int\frac{dv}{(\frac{2v}{\sqrt3})^2+1}$$

$$=\text{Ln}(v^2+\frac34)-\frac{2}{\sqrt3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt3}dv}{(\frac{2v}{\sqrt3})^2+1}$$

$$=\text{Ln}(v^2+\frac34)-\frac{2}{\sqrt3}\text{Arctg}(\frac{2v}{\sqrt3})+c$$

$$=\text{Ln}(u^2+u+1)-\frac{2}{\sqrt3}\text{Arctg}(\frac{2u+1}{\sqrt3})+c$$

$$=\text{Ln}(x+\sqrt x+1)-\frac{2}{\sqrt3}\text{Arctg}(\frac{2\sqrt x+1}{\sqrt3})+c$$

۷ــ برای محاسبه طول منحنی $x^{\frac23}+y^{\frac23}=4$ ابتدا این منحنی را به شکل پارامتری تبدیل می‌کنیم اگر قرار دهیم $\begin{cases}x=8\cos^3\theta\\y=8\sin^3\theta\end{cases}$ با $0\le\theta\le2\pi$ آنگاه منحنی فوق به شکل پارامتری تبدیل می‌شود.

بنابر فرمول داریم :

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$$

$$\begin{cases}x=8\cos^3\theta\\y=8\sin^3\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{d\theta}=-24\cos^2\theta\sin\theta\\\frac{dy}{d\theta}=24\sin^2\theta\cos\theta\end{cases}$$

$$\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}=$$

$$\sqrt{24^2\cos^4\theta\sin^2\theta+24^2\sin^4\theta\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{24^2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=24|\sin\theta\cos\theta|$$

برای محاسبه طول منحنی $x^{\frac23}+y^{\frac23}=4$ چون منحنی فوق نسبت به محور xها و محور yها و مبدأ مختصات متقارن است بنابراین طول این منحنی را در فاصله $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ حساب می‌کنیم و آن را چهار برابر می‌کنیم یعنی :

$$S=4\int_0^{\frac\pi2}24\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 48\sin^2\theta\Big|_0^{\frac\pi2}=48$$

۸ــ $\begin{cases}y=\sqrt{4-x^2}\\y=1\end{cases}\Rightarrow 1=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow1=4-x^2$

$$\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt3$$

اگر $y_1=\sqrt{4-x^2}$ و $y_2=1$ آنگاه :

$$V=\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}\pi(y_1^2-y_2^2)dx$$

$$V=\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}\pi(3-x^2)dx=\pi(3x-\frac13x^3)\Big|_{-\sqrt3}^{\sqrt3}$$

$$=\pi[(3\sqrt3-\sqrt3)-(-3\sqrt3+\sqrt3)]=4\pi\sqrt3$$

۹ــ

$$\begin{cases}y=x-x^2\\y=2x-2\end{cases}\Rightarrow x-x^2=2x-2\Rightarrow$$

$$x^2+x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=1\end{cases}$$

اگر $y_1=x-x^2$ و $y_2=2x-2$ باشد آنگاه

$$S=\left|\int_{-2}^1(y_1-y_2)dx\right|=\left|\int_{-2}^1(x-x^2-2x+2)dx\right|$$

$$=\left|\int_{-2}^1(-x-x^2+2)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-2}^1\right|$$

$$=\left|(-\frac12-\frac13+2)-(-2+\frac83-4)\right|$$

$$=\left|\frac76+\frac{10}{3}\right|=\left|\frac{7+20}{6}\right|=\frac{27}{6}=\frac92$$

حل مسائل حسابان ۲

۱ــ می‌دانیم اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز می‌باشد. بنابراین در حل این مسأله می‌توان از پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در نقطه $x=0$ استفاده کرد.

چون f در $x=0$ پیوسته است بنابراین:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{x\to0}(\frac x2+\sqrt{ax+b})=\sqrt b$$

$$\Rightarrow a=\sqrt b \quad (I)$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(a\cos x+b\sin x)=a$$

از طرفی f در $x=0$ مشتق‌پذیر است بنابراین $f'_+(0)=f'_-(0)$ داریم :

$$f'(x)=\begin{cases}\frac12+\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} & x\ge0\\ -a\sin x+b\cos x & x<0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\frac12+\frac{a}{2\sqrt{0+b}}=\frac12+\frac{a}{2\sqrt b}$$

$$\Rightarrow \frac12+\frac{a}{2\sqrt b}=b \quad (II)$$

$$f'_-(0)=-a\sin0+b\cos0=b$$

$$\begin{cases}a=\sqrt b\\ \frac12+\frac{a}{2\sqrt b}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\sqrt b}=1\\\frac12+\frac{a}{2\sqrt b}=b\end{cases}\Rightarrow\frac12+\frac12=b$$

$$\Rightarrow b=1\Rightarrow a=\sqrt b\Rightarrow a=1$$

۲ــ می‌دانیم مرکز تقارن هر تابع چندجمله‌ای درجه سوم روی نمودار آن قرار دارد بنابراین $f(-1)=1$ داریم :

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$f(-1)=1\Rightarrow -1+a-b+c=1\Rightarrow a-b+c=2 \quad (I)$$

بعلاوه می‌دانیم طول نقطه مرکز تقارن هر تابع چند جمله‌ای درجه سوم همان طول نقطه عطف تابع است و طول نقطه عطف هر تابع درجه سوم $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ برابر با $x=\frac{-B}{3A}$ بنابراین :

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$x=\frac{-B}{3A}\Rightarrow -1=\frac{-a}{3}\Rightarrow a=3$$

چون خط مماس در نقطه $x=0$ بر خط $2y-x=1$ عمود است. در نتیجه ضریب زاویه خط مماس یعنی $m=f'(0)$ و ضریب زاویه خط $2y-x=1$ یعنی $m'=\frac12$ در معادله $mm'=-1$ صدق می‌کنند.

داریم :

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$m=f'(0)\Rightarrow m=b \quad , \quad m'=\frac12$$

$$mm'=-1\Rightarrow\frac12b=-1\Rightarrow b=-2$$

بنابر (I) داریم :

$$a-b+c=2\Rightarrow 3+2+c=2\Rightarrow c=-3$$

۳ــ (الف) برای آن که تابع حقیقی f در نقطه x_0 بر محور xها مماس باشد، باید داشته باشیم $f(x_0)=f'(x_0)=0$ درنتیجه ریشه‌هایی از دستگاه $\begin{cases}f(x)=0\\f'(x)=0\end{cases}$ که در دامنه تابع f قرار دارند نقاطی هستند که نمودار f در آن نقاط بر محور x ها مماس است. حال داریم :

$$f(x)=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(b-a)\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$\begin{cases}f(x)=0\\f'(x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b\sin x+a=0\\(b-a)\cos x=0\end{cases}$$

$(b-a)\cos x=0\Rightarrow b-a=0$ یا $\cos x=0$

اگر $b-a=0$ آنگاه $b=a$ در این صورت داریم :

$$f(x)=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1}=\frac{b(\sin x+1)}{\sin x+1}=b$$

تابع $f(x)=b$ در حالت $b=0$ بر محور xها منطبق است. و در حالت $b\neq0$ هیچگاه بر محور xها مماس نیست. پس $b-a\neq0$ اگر $\cos x=0$ آنگاه داریم $x=k\pi+\frac\pi2$ از

$$b\sin x+a=0\Rightarrow b\sin(k\pi+\frac\pi2)+a=0\Rightarrow$$

$$b(-1)^k+a=0$$

$\Rightarrow b+a=0$ یا $a-b=0\overset{a-b\neq0}{\Longrightarrow}b+a=0\Rightarrow b=-a$

بنابراین برای هر $b\in\mathbb{R}$ و $b\neq0$ و $a=-b$ داریم :

$$f(x)=\frac{b\sin x+a}{\sin x+1}=\frac{b\sin x-b}{\sin x+1}\Rightarrow f(x)=b\frac{\sin x-1}{\sin x+1}$$

این تابع همواره در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ بر محور xها مماس است.

ب) رسم نمودار $f(x)=\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}$ در فاصله $0\le x\le 2\pi$

۱) مجانب افقی ندارد زیرا حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to\pm\infty$ وجود ندارد.

۲) مجانب مایل ندارد زیرا حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to\pm\infty$ وجود ندارد.

۳) مجانب قائم دارد و داریم:

$$\sin x+1=0\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow \left\{x=\frac{3\pi}{2}\right.$$ مجانب قائم.

۴) جدول تغییرات:

$$f(x)=\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$ غیرقابل قبول

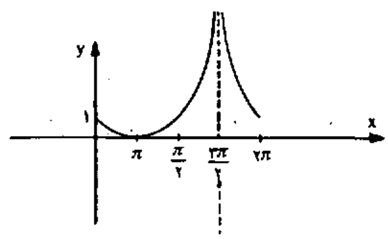
چون $x=\frac{3\pi}{2}$ در دامنه تابع f قرار ندارد در نتیجه مقادیر تابع را در نزدیکی این نقطه به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x>\frac{3\pi}{2}}}\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}}\frac{-\sin x+1}{\sin x+1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	Min	↗	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
2π	1



۴ـ $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2+2x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	1
			Max		Min		

نقاط اکسترمم نسبی عبارتند از: $\text{Min}\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $\text{Max}\begin{vmatrix}-2\\ \frac{4}{3}\end{vmatrix}$ که این نقاط همان ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع نیز می‌باشند. بعلاوه این نقاط همان نقاط بحرانی تابع نیز می‌باشند.

۵ـ الف) دامنه: $f(x)=\text{Arctg}\left[\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x})\right]$

$$\begin{cases}\frac{1-x}{1+x}>0\\ 1+x\neq 0\end{cases}\Rightarrow -1<x<1\Rightarrow D_f=(-1,1)$$

بُرد: چون برای هر $-1<x<1$ همواره

$$-\infty<y=\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x})<+\infty$$

بنابراین

$$R_f=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

ب) $f(x)=\text{Arctg}(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))$

نقطه تماس $x=0\Rightarrow f(0)=\text{Arctg}(\text{Ln}1)=0\Rightarrow P\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))}{1+(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{(\frac{1-x}{1+x})}}{1+(\text{Ln}(\frac{1-x}{1+x}))^2}$$

$$f'(0)=\frac{\frac{-2}{1}}{1+(\text{Ln}1)^2}=-2$$

و $-2=f'(0)=$ ضریب زاویه خط مماس

$\frac{-1}{f'(0)}=\frac{1}{2}=$ ضریب زاویه خط قائم

معادله خط مماس: $y-0=-2(x-0)$

$$\Rightarrow y=-2x$$

معادله خط قائم: $\Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-0)$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

۶ـ الف)

$$f(x)=\text{Arccos}(\frac{2-x}{2+x})$$

۱) دامنه:

$$-1\le\frac{2-x}{2+x}\le 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{2-x}{2+x}\le 1\\ \frac{2-x}{2+x}\ge -1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{-2x}{2+x}\le 0\\ \frac{4}{2+x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-2x}{2+x}\le 0\\ 2+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x\le 0\\ 2+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x>-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\ge 0\Rightarrow D_f=[0,+\infty]$$

۲) بُرد تابع عبارت است از $R_f=[0,\pi]$

۳) مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\text{Arccos}(\frac{2-x}{2+x})=\text{Arccos}(-1)=\pi$$

مجانب افقی $\Rightarrow y=\pi$

۴) مجانب مایل ندارد زیرا مجانب افقی دارد

۵) مجانب قائم ندارد، زیرا: $2+x=0\Rightarrow x=-2$

چون $x=-2$ در دامنه f قرار ندارد، پس مجانب قائم ندارد.

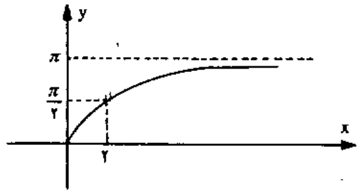
۶) جدول تغییرات:

$$f(x)=\text{Arccos}(\frac{2-x}{2+x})\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{4}{(2+x)^2}}{\sqrt{1-(\frac{2-x}{2+x})^2}}>0$$

بنابراین تابع f همواره صعودی است. بنابراین نقاط بحرانی ندارد.

x	0				$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	↗	↗	π

x	y
0	0
2	$\frac{\pi}{2}$
$+\infty$	π



ب) $f(x)=\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})$

۱) دامنه: $\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

۲) بُرد $R_f=\mathbb{R}$

۳) مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=\text{Ln}(1)=0$$

بنابراین $y=0$ مجانب افقی است.

۴) مجانب مایل ندارد.

۵) مجانب قائم دارد: می‌دانیم مجانبهای قائم یک تابع لگاریتمی در صورت وجود می‌توانند در صفرهای لگاریتم و یا در نقاطی که لگاریتم نامتناهی شود رخ می‌دهند. بنابراین مجانبهای قائم این تابع عبارتند از:

$$\frac{x+1}{x-1}=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$$

مجانبهای قائم $\Rightarrow x=\pm 1$

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

مقادیر تابع را در نزدیکی مجانبهای قائم به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}}\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\ x>1}}\text{Ln}(\frac{x+1}{x-1})=+\infty$$

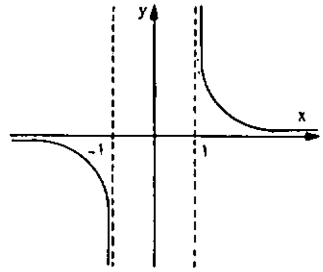
x	y
$\pm\infty$	0
-1	$-\infty$
1	$+\infty$

۶) جدول تغییرات:

$$f'(x)=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{(\frac{x+1}{x-1})}<0$$

تابع همواره نزولی است.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		▨		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	0



۷ـ

$\text{Arccos}\,x=\pi-\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} \qquad -1\le x\le 0$

$y=\text{Arccos}\,x \Rightarrow x=\cos y$

$y=\text{Arccos}\,x \ ,\ -1\le x\le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\le y\le \pi \Rightarrow$

$0\le \pi-y\le \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sin y$

$$\begin{cases}\sin y=\sqrt{1-x^2}\\ \frac{\pi}{2}\le y\le \pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin(\pi-y)=\sqrt{1-x^2}\\ 0\le \pi-y\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow \pi-y=\text{Arcsin}(\sqrt{1-x^2})$

$\Rightarrow y=\pi-\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \cos x=\pi-\text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$

۸ـ

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)^{\sqrt{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{\sqrt{x+1}}{2x}}=e^0=1$

ب) $\lim\limits_{x\to1^+}x^{\frac{1}{x-1}}$ $\begin{cases}\frac{1}{x-1}=u\\ x-1=\frac{1}{u}\\ x=1+\frac{1}{u}\\ x\to1^+\\ u\to+\infty\end{cases}$ $=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$

۹ـ

الف) $y=(\sin x)^{1+tgx}\Rightarrow Lny=(1+tgx)Ln(\sin x)$

$\Rightarrow \frac{y'}{y}=(1+tg^2x)Ln(\sin x)+(1+tgx)\frac{\cos x}{\sin x}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y}=(1+tg^2x)Ln(\sin x)+\cot gx(1+tgx)$

$\Rightarrow y'=(\sin x)^{1+tgx}\times$

$\left[(1+tg^2x)Ln(\sin x)+\cot gx(1+tgx)\right]$

ب) $y=\frac{xe^x}{1+xe^x}\Rightarrow y'$

$=\frac{(e^x+xe^x)(1+xe^x)-(xe^x+e^x)xe^x}{(1+xe^x)^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{e^x+xe^{2x}+xe^x+x^2e^{2x}-x^2e^{2x}-xe^{2x}}{(1+xe^x)^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{e^x+xe^x}{(1+xe^x)^2}\Rightarrow y'=\frac{(x+1)e^x}{(1+xe^x)^2}$

ج) $y=\int_0^{\sin x}\frac{dt}{1-t^2}\Rightarrow y'=\frac{1}{1-\sin^2x}\times\cos x\Rightarrow$

$y'=\frac{\cos x}{\cos^2x}\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow y'=\sec x$

د) $y=\int_1^{tgx}\frac{\cos 2t}{1+t^2}dt\Rightarrow y'=\frac{\cos(tgx)}{1+tg^2x}\times(1+tg^2x)$

$\Rightarrow y'=\cos(tgx)$

۱۰ـ اولاً: $M\begin{vmatrix}x=1+2\cos\theta\\ y=2+\sin\theta\end{vmatrix} \quad 0\le\theta\le2\pi$

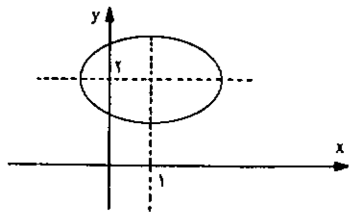
$$\begin{cases}x-1=2\cos\theta\\ y-2=\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\cos\theta\\ y-2=\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

یک بیضی به مرکز $O\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ می‌باشد

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$

ثانیاً:

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\quad O\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$



ثالثاً:

$\theta=\frac{\pi}{6} \qquad P\begin{vmatrix}x_0=1+\cos\frac{\pi}{6}\\ y_0=2+\sin\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}\Rightarrow P\begin{vmatrix}1+\sqrt{3}\\ \frac{5}{2}\end{vmatrix}$ نقطه تماس

می‌دانیم معادله خط مماس بر بیضی $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ در نقطه $\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ برابر با:

$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2}=1$

بنابراین معادله خط مماس این بیضی در نقطه $P\begin{vmatrix}1+\sqrt{3}\\ \frac{5}{2}\end{vmatrix}$ به صورت زیر است:

$\frac{(1+\sqrt{3}-1)(x-1)}{4}+\frac{(\frac{5}{2}-2)(y-2)}{1}=1$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}(x-1)}{4}+\frac{y-2}{2}=1$

$\Rightarrow \sqrt{3}x+2y=8+\sqrt{3}$

همچنین معادله خط قائم بر بیضی $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ در نقطه $\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ به صورت زیر است:

$\frac{a^2(x-h)}{x_0-h}-\frac{b^2(y-k)}{y_0-k}=c^2$

حال معادلهٔ خط قائم براین بیضی درنقطه $P\begin{vmatrix}1+\sqrt{3}\\ \frac{5}{2}\end{vmatrix}$ در زیر آمده است:

$\begin{matrix}a=2\\ b=1\end{matrix}\Rightarrow c^2=a^2-b^2=4-1\Rightarrow c^2=3$

$\frac{4(x-1)}{1+\sqrt{3}-1}-\frac{1(y-2)}{\frac{5}{2}-2}=3\Rightarrow\frac{4(x-1)}{\sqrt{3}}-\frac{2(y-2)}{1}=3$

$\Rightarrow 4x-2\sqrt{3}y=4-\sqrt{3}$

۱۱ـ الف) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{x}\right]x^2dx=?$

$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\Rightarrow 2<\frac{1}{x}<3\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]=2$

$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{x}\right]x^2dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{27}\right)$

ب) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4(1+\frac{x^2}{4})}=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{\frac{1}{2}dx}{1+(\frac{x}{2})^2}=$

$\frac{1}{2}\text{Arctg}(\frac{x}{2})\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[\text{Arctg}(1)-\text{Arctg}(-1)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{4}$

ج)

$\int_{-1}^{5}\frac{|x-3|-4}{2}dx=\int_{-1}^{3}\frac{|x-3|-4}{2}dx+\int_{3}^{5}\frac{|x-3|-4}{2}dx=$

$=\int_{-1}^{3}\frac{-x+3-4}{2}dx+\int_{3}^{5}\frac{x-3-4}{2}dx=\int_{-1}^{3}\frac{-x-1}{2}dx+$

$\int_{3}^{5}\frac{x-7}{2}dx=\left[-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{3}+\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{2}x\right]_{3}^{5}$

$=\left[(-\frac{9}{4}-\frac{3}{2})-(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})\right]+\left[(\frac{25}{4}-\frac{35}{2})-(\frac{9}{4}-\frac{21}{2})\right]$

$=\frac{-16}{4}-\frac{12}{4}=-4-3=-7$

حل مسایل ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ـ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ؛ بنابراین $f'(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی x وجود دارد. پس f روی بازه بسته $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ پیوسته و بر بازه باز $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ مشتق پذیر است، در ضمن $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{3}{4}$ دراین صورت لااقل یک عدد $c\in(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ وجود دارد به‌طوری که $f'(c)=0$.

$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow C=0\in(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

۲ـ $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$

$f'(x)=4x^3+4x^2-8x$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ و $x=-2$ و $x=1$ نقاط بحرانی f

$f''(x)=12x^2+8x-8$

$f''(0)=-8<0\Rightarrow$ f درنقطه $x=0$ یک ماکسیمم نسبی دارد

f درنقطه $x=-2$ یک مینیمم نسبی دارد $\Leftarrow f''(-2)=24>0$

f درنقطه $x=1$ یک مینیمم نسبی دارد $\Leftarrow f''(1)=12>0$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ و $x=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
		تقعرمنحنی رو به بالا		تقعرمنحنی رو به پایین		تقعرمنحنی رو به بالا	

۳ــ الف) $y=\frac{-1+x}{x+2}$

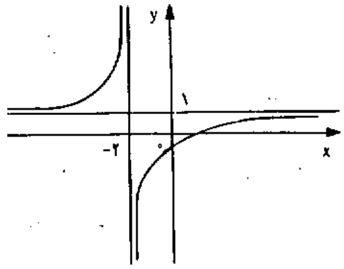
$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ x+2\to 0\end{cases} \Rightarrow x=-2$ مجانب قائم

$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to 1\end{cases} \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

$y'=\frac{3}{(x+2)^2}>0 \Rightarrow$ تابع فوق همواره صعودی است.

$\begin{cases} x=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2} \\ y=0\Rightarrow x=1\end{cases}$ «محل برخورد منحنی با محورهای مختصات»

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	$+\infty$
y'	+	+	+	+	+	
y	1 ↗	4 ↗	$+\infty$ | $-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↗	0 ↗	1



ب) $y=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$

$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ x\to 0\end{cases} \Rightarrow x=0$ مجانب قائم

$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to 1\end{cases} \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

$y'=\frac{6x+6}{x^4}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=0\end{vmatrix}$

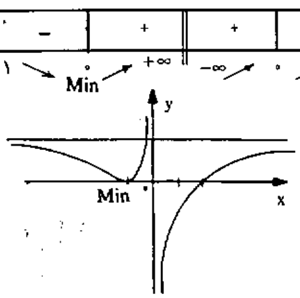
$y=0 \Rightarrow x^3-3x-2=0 \Rightarrow (x^3-x)+(-2x-2)=0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=0\end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x=2 \\ y=0\end{vmatrix}$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	−	+	+	+	
y	1 ↘	Min ↗	$+\infty$ || $-\infty$ ↗	0 ↗	1



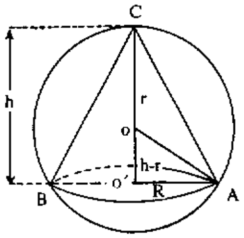
۴ــ می‌دانیم که حجم مخروط به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$ (معادله اولیه) است، از طرفی طبق شکل زیر در مثلث oAo' داریم:

$R^2=r^2-(h-r)^2 \Rightarrow R^2=2rh-h^2$ (معادله ثانویه)

بنابراین:

$V(h)=\frac{1}{3}\pi(2rh-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(2rh^2-h^3)$

$V'(h)=\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi(4rh-3h^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} h=0 & \text{غیرقابل قبول} \\ h=\frac{4}{3}r & \text{قابل قبول}\end{cases}$

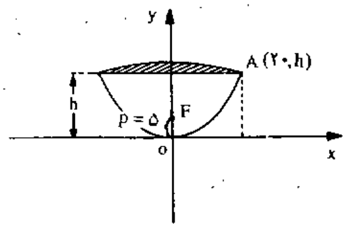


چون $V''(h)=\frac{1}{3}\pi(4r-6h)$ و $V''(\frac{4}{3}r)=-\frac{4}{3}\pi r<0$

در نتیجه $h=\frac{4}{3}r$ ماکسیمم ارتفاع است.

$h=\frac{4}{3}r \Rightarrow R^2=2r\times\frac{4}{3}r-\frac{16}{9}r^2=\frac{8}{9}r^2$

مخروط $V=\frac{1}{3}\pi\times\frac{8}{9}r^2\times\frac{4}{3}r=\frac{32}{81}\pi r^3$



۵ــ سهمی فوق را طوری روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم که رأس آن واقع بر مبداء مختصات و محور تقارن سهمی دقیقاً محور yها و دهانه سهمی به‌طرف بالا باشد، بنابراین معادله سهمی فوق به صورت $x^2=4py$ است. از طرفی نقطه $A(20,h)$ متعلق به سهمی است و چون $P=5$ داریم:

$x^2=4py \Rightarrow 20^2=4\times5\times h \Rightarrow h=20$

۶ــ اگر مرکز هذلولی را نقطه S درنظر بگیریم، چون S وسط پاره‌خط FF' است:

$S\begin{vmatrix} x_s=\frac{6-4}{2}=1 \\ y_s=\frac{-3-3}{2}=-3\end{vmatrix}$ و $C=SF=\sqrt{(6-1)^2+(-3+3)^2}=5$

ازطرفی می‌دانیم شیب خط مجانب $m=\frac{b}{a}$ بنابراین:

$m=\frac{4}{3}=\frac{b}{a} \Rightarrow a=\frac{4}{3}b$

$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a=\frac{3}{4}b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ a=\frac{3}{4}b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4\end{cases}$

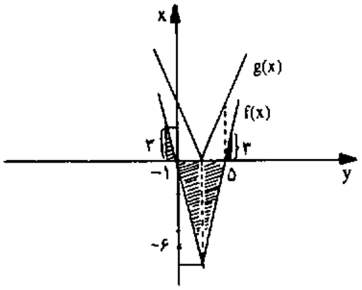
چون محور هذلولی موازی محور طولها است، بنابراین معادله هذلولی به‌صورت $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ است:

پس هذلولی فوق به معادله $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$ می‌باشد.

۷ــ برای رسم نمودار تابع با ضابطه $f(x)=|6-3x|-6$: ابتدا تابع باضابطه $g(x)=|6-3x|$ را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس نمودار آن را در امتداد محور yها ۶ واحد به‌طرف پایین می‌آوریم:

$6-3x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$

x	0	2	4
y	6	0	6



با توجه به شکل بالا ملاحظه می‌کنیم:

$\int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx$

$\int_{-1}^{0}(|6-3x|-6)dx=\frac{1\times3}{2}=\frac{3}{2}$

$\int_{0}^{2}(|6-3x|-6)dx=\frac{6\times2}{2}=6$

$\int_{4}^{5}(|6-3x|-6)dx=\frac{1\times3}{2}=\frac{3}{2}$

$\int_{2}^{4}(|6-3x|-6)dx=\frac{6\times2}{2}=6$

مقدار انتگرال موردنظر با توجه به این‌که علامت مساحتهای زیر محور طولها: منفی و علامت مساحتهای بالای محور طولها: مثبت است به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\int_{-1}^{5}(|6-3x|-6)dx=\frac{3}{2}+(-6)+(-6)+\frac{3}{2}=-9$

۸ــ

$V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$

$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^{-5}dx$

با تغییر متغیر زیر داریم:

$\begin{cases} u=\sin x+\cos x \\ du=(\cos x-\sin x)dx\end{cases}$

$V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}u^{-5}du=(-\frac{\pi}{4}u^{4})\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{4}(\sin x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{8}$

۹ــ $P(x=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

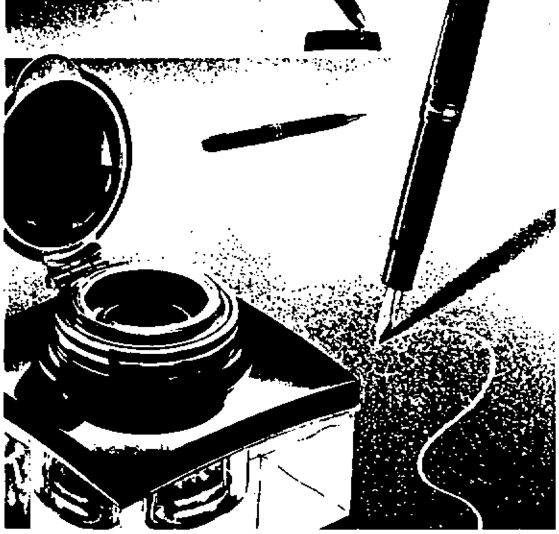
$P=\frac{7}{10}, n=5, k=3 \Rightarrow p(x=3)=\binom{5}{3}\times(\frac{7}{10})^3\times$

$(\frac{3}{10})^2=\frac{7^3\times3^2}{10^5}$

۱۰ــ $E(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$

$E(x)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4$

$\Rightarrow 0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+k\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}=\frac{70}{42}\Rightarrow k=2$



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

طبق آمار از هر ۱۰۰ نفر:

ازدواج نکرده‌اند	۱۰۰ − ۸۵ = ۱۵
تلفن ندارند	۱۰۰ − ۷۰ = ۳۰
اتومبیل ندارند	۱۰۰ − ۷۵ = ۲۵
خانه ندارند	۱۰۰ − ۸۰ = ۲۰

پس مجموع کسانی که لااقل یکی از امکانات فوق را ندارند، حداکثر برابر است با:

۱۵ + ۳۰ + ۲۵ + ۲۰ = ۹۰

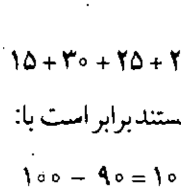
درنتیجه تعداد افرادی که دارای همهٔ امکانات بالا هستند برابر است با:

۱۰۰ − ۹۰ = ۱۰ نفر

پاسخ ۲:

اگر یک نیمکره را برداشته، برش مستقیمی از قاعده تا رأس آن انجام دهید، خواهید توانست رویهٔ جانبی مخروط مورد بحث را مسطح قرار دهید. (آیا تاکنون کلاه بوقی درست کرده‌اید؟) شکل مسطح تشکیل شده دایره‌ای است که قطاعی از آن حذف شده است. (شکل زیر را ملاحظه کنید.) شعاع این دایره، طول برش (سهم مخروط) است، $\Delta = 5000$.

زاویهٔ مرکزی قطاع حذف شده $\frac{L-R}{L}\times 360$ (که در آن R شعاع قاعدهٔ مخروط است)، یا $\frac{360}{5}$ است.



در شکل، A و B دو نقطه از استوا به فاصلهٔ °۱۸۰ اند و محاسبهٔ فاصلهٔ مستقیم‌الخط بین آنها به اندازهٔ ۹/۵۱۱ کیلومتر مشکل نیست.

این مقدار کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو شهر A و B است. اگر روی هر یک از دو قطب بروید، فاصلهٔ طی شده ۱۰۰۰۰ کیلومتر، و دور استوا بیش از ۱۲۵۰۰ کیلومتر می‌شود. و زمانی که مسیر مستقیم‌الخط را اختیار کنید چهار راه، در هر نیمکره دو راه دارید.

پاسخ ۳:

چون میدان مسابقه به شکل دایره است، مسابقه‌دهندگانی که در جلوی مهرداد قرار دارند، مانند آنهایی هستند که در پشت سر او واقع شده‌اند، به این معنی که همهٔ مسابقه‌دهندگان به استثنای مهرداد را تشکیل می‌دهند. در نتیجه:

$$\frac{1}{5}+\frac{5}{6}=\frac{31}{30}$$

پس، تعداد شرکت کنندگان را ۳۰ نفر می‌بیند و با خود او مجموع شرکت کنندگان مسابقه ۳۱ نفر می‌باشند.

پاسخ ۴:

با استفاده از ۱ پرچم ۳ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۲ پرچم ۶ = ۲ × ۳ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۳ پرچم ۱۲ = ۲ × ۶ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۴ پرچم ۲۴ = ۲ × ۱۲ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۵ پرچم ۴۸ = ۲ × ۲۴ علامت متمایز موجودند.
با استفاده از ۶ پرچم ۹۶ = ۲ × ۴۸ علامت متمایز موجودند.
۱۸۹ علامت متفاوت

اما، از ۴۸ علامت مربوط به ۵ پرچم، ۱۲ = ۱ × ۲ × ۱ × ۲ × ۳ مورد به ۳ پرچم از یک رنگ نیاز دارد، و از ۹۶ علامت مربوط به ۶ پرچم ۶۶ مورد موجودند که نمی‌توانند تنها با ۲ پرچم از هر رنگ انجام شوند. با کم کردن این مقادیر ۱۱۱ علامت متمایز ممکن باقی می‌ماند.

Borhan

In the name of God

Vol. 7 No. 3

Serial numbers: 23 winter 1998

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publicatios. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning high school education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 38. Sepand Street, Sepahbod ghrany Ave, Tehran, Iran, Post code: 14155/1949

Contents:

ابن صلاح همدانی

ابوالفتوح احمدبن محمد بن سَریّ نجم الدین همدانی
ریاضیدان و فیلسوف و طبیب مسلمان ایرانی (؟-۵۴۸ هـ.ق)

اصلاً اهل همدان و از خاندانی بوده که همگی اهل علم و اصالت بوده‌اند. وی در بغداد پرورش یافت و بعداً به دمشق رفت و تاآخر عمر در آن شهر، با عزت و منزلت می‌زیست و به سال ۵۴۸ درگذشت.

ابن صلاح در فلسفه و علوم ریاضی مهارت و تبحّر داشته و طبیبی حاذق بوده است. از عنوان‌های تألیفاتش پیداست که بخصوص در ریاضیات صاحب نظر بوده و مسائل دقیق و مشکلی را که در آثار متقدمان خود می‌دیده مورد بحث و انتقاد قرار می‌داده است. متأسفانه تا کنون هیچ یک از تألیفات وی مورد نقّادی علمی واقع نشده است.

* برخی آثار ریاضی موجود وی:

۱. رساله‌ای است مربوط به مسائلی دربارهٔ مقالهٔ هفتم کتاب اصول اقلیدس.

۲. رساله‌ای است در بررسی کتاب «فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی‌الاصول و شرح معانیه» تألیف ابن‌هیثم مصری است.

۳. رساله‌ای است در توضیح اشتباه ابن هیثم دربارهٔ شکل اول از مقالهٔ دهم اصول اقلیدس

شکل اول از مقالهٔ دهم کتاب اصول اقلیدس قضیهٔ زیر است:

«دو مقدار نامتساوی $A>B$ را در نظر می‌گیریم. اگر از مقدار A مقداری بزرگتر از نصف آن را کم کنیم و سپس از باقیمانده نیز مقداری بزرگتر از نصفش را کم کنیم و این عمل را ادامه دهیم وقتی خواهد رسید که آخرین باقیمانده کوچکتر از B شود.»

۴. این مقاله دربارهٔ کشف شبهه‌ای است که، دربارهٔ شکل چهاردهم از مقالهٔ دوازدهم کتاب اصول اقلیدس، برای جمعی از کسانی که با ریاضیات سروکار دارند روی داده است.

شکل چهاردهم از مقالهٔ دوازدهم اصول اقلیدس مسألهٔ زیر است:

«دو کرهٔ متحدالمرکز مفروض‌اند. می‌خواهیم در کرهٔ بزرگتر یک چند وجهی محاط کنیم که وجوه آن با کرهٔ کوچکتر تماس نداشته باشد.»

۵. این مقاله در ردّ بر مقدمات مقاله‌ای است که ابوسهل کوهی دربارهٔ عدد پی نوشته و آن را مساوی با $۳\frac{۱}{۷}$ دانسته است.

۶. این کتاب دربارهٔ چگونگی تصویر کردن کره بر صفحه است و از آن یک نسخهٔ خطی در استانبول و یک نسخه در کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران با عنوان فی معرفة الاسطرلاب و سه نسخه در کتابخانهٔ مجلس موجود است.

۷. حاشیه بر کتاب ایضاح البرهان علی حساب الخطأین، تألیف جابربن ابراهیم.

۸. یک رساله نیز دربارهٔ دو مسألهٔ هندسی از وی در لیدن موجود است. مسألهٔ اول آن این است: می‌خواهیم مثلثی در یک دایره محاط کنیم که مجموع اضلاعش مساوی با قطر آن دایره باشد. و مسألهٔ دوم آن مربوط است به مساحت کره.

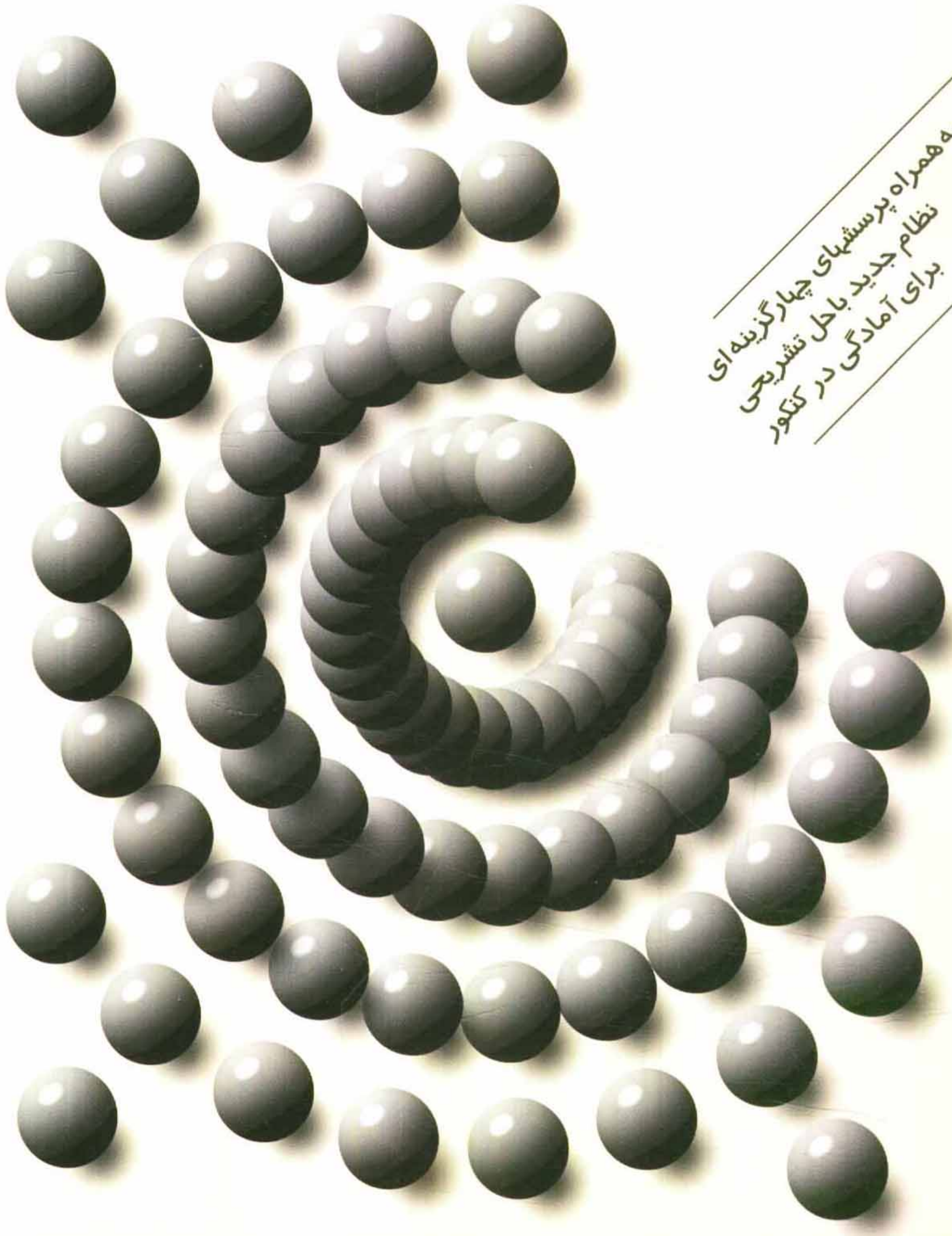
مجله ریاضی

برهان

۲۴

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هفتم ، شماره چهارم، بهار ۱۳۷۷ ، بها ۲۰۰۰ ریال



به همراه پرسشهای چهارگزینه‌ای نظام جدید با حل تشریحی برای آمادگی در کنکور

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هفتم، بهار ۱۳۷۷، شمارهٔ چهارم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۸۸۴۹۹۰۴ ، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ ، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

این محرّم و صفر است که اسلام را، زنده نگه داشته است.

(امام خمینی ره)

در طول تاریخ اسلام، همواره مذهب مقدّس شیعه، مورد تهاجم و مظلومیّت قرار گرفته است. هر جا، دَم از پیروی علی و آل علی علیهم السّلام بوده است، دشمنان اهل‌بیت به عناوین گوناگون، قصد ضربه زدن به پیکر اسلام و نابود ساختن آن را داشته و دارند، که این گونه عداوت و دشمنی با اسلام و پیامبر اسلام و خاندان پاکنهاد آن حضرت ـ صلی‌الله علیه و آله ـ تاکنون هم ادامه دارد.

آنان به کوچکترین بهانه‌ای، قصد خلع سلاح امّت مسلمان و انقلابی ما را دارند. راستی، مگر سلاح ما چیست؟!

آیا چیزی جز ایمان به حقّ و حقیقت است؟ مگر نه با همین ایمان و باور، هشت سال دفاع مقدّس را پیروزمندانه پشت سر گذاشتیم؟

در دوران جنگ، امّت شهیدپرور ایران، با همهٔ توان جنگیدند؛ چه آنان که در خطّ مقدم جبهه با شعار «الله‌اکبر» به قلب دشمن حمله می‌بردند و چه آنان که در پشت جبهه، تدارکات و پشتیبانی رزمندگان اسلام را بر دوش می‌کشیدند.

به راستی که شهرهای ما، جبهه و هر خانه‌ای، خاکریزی شده بود تا دشمنِ یاری شده از سوی ابرقدرتها را از پای درآورند؛ و بحق می‌توان گفت که الگوی برجسته و بارز این همه ایثار و مقاومت، حضرت سیّدالشهدا ـ علیه السلام ـ و اهل بیت پاک و یاران باوفای آن حضرت هستند؛ و اگر چنین ادّعا کنیم که پیروزی ما، مدیونِ باور به «الله» و پیروی این الگوها و زاییدهٔ یکپارچگی و همدلی دوران جنگ می‌باشد، سخن به گزافه نگفته‌ایم.

امّا، شما ای عزیزان دانش‌آموز! هوشیار باشید که دشمن از مکر و حیله‌های جدید و نو دست برنداشته است و با سلاحهای مرئی، نامرئی و پیشرفتهٔ خود، سعی بر بمباران اعتقادات، ایمان، وحدت و ایثار ما را دارد و پی در پی بر حمله‌های تهاجمی خود با به کارگیری بمبهای خوشه‌ای ماهواره، رگبار فیلمهای ویدئویی، مینهای ضدنفرِ کتابی و موسیقیهای مبتذل گوش خراشِ خود، می‌افزاید. این، هشداری است بس بزرگ به جامعهٔ جوان و در حال رشد میهن اسلامی ما، که همهٔ اقشار آن، اعم از پدران، مادران، معلّمان، مدیران، دانش‌آموزان و ... باید احساس وظیفه کنیم و برای حفظ دستاوردهای عظیم این تحوّل بزرگ و بی‌نظیر، خط مقدّمِ جبههٔ فکر و اندیشه را رها نکنیم؛ و ـ ان شاء الله ـ با استمداد از حضرت ولیّ‌عصر ـ عجل‌اللّه تعالی فرجه الشریف ـ و رهنمودهای مقام معظم رهبری، حمله‌های فرهنگی دشمن را خنثی خواهیم کرد، که «ما پیروزیم».

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۴)



● پرویز شهریاری

«...وآن که فرموده که مولانا بدرالدین، ریاضیات نیک می‌داند، در ریاضیات بی‌مسأله، چند از اقلیدس به یاد دارد و قطعاً به عمل در نمی‌تواند آورد. چنان است که کسی بعضی قواعد نحوی یاد دارد و هیچ ترکیب عربی نتواند کرد. چون مولانا بدرالدین سخنی چند از اقلیدس گفته باشد، او پنداشته که ریاضیات می‌داند...»

از نامهٔ جمشید کاشانی به پدرش

غیاث‌الدین جمشید *کاشانی*، یکی از بزرگترین ریاضیدانان و اخترشناسان ایرانی است که در زمان حکومت تیموریان می‌زیسته و به خواست *الغ‌بیگ*، نوهٔ تیمور، به سمرقند رفته و با یاری چند ریاضیدان و اخترشناس دیگر، رصدخانهٔ بزرگ سمرقند را بنیان نهاده است. نوشته‌هایی از جمشید کاشانی، باقی‌مانده است که توان بی‌اندازهٔ او را در حل مسأله‌های ریاضی به خوبی نشان می‌دهد. همچنین نامه‌ای از کاشانی، که از سمرقند به پدرش در کاشان نوشته و یکی از پر ارزش‌ترین اثرهای ماندگار در تاریخ دانش است. به ظاهر، پدر جمشید، از بدرالدین نامی، به عنوان یک ریاضیدان یاد کرده است که پسرش جمشید، در پاسخ او، این چند سطر را نوشته است. اگر سخن کاشانی را به زبان ساده امروزی درآوریم، چنین گفته است: اگر کسی تنها برخی قضیه‌ها و دستورهای ریاضی را بداند و نتواند، مسأله‌های تازه‌ای که در ریاضیات و یا حالتهای کاربردی آن در برابر او قرار می‌گیرد، حل کند، ریاضیدان نیست. ریاضیدان کسی است که از عهدهٔ حل مسأله‌های تازه برآید.

ولی برای این که بتوان مسأله‌های تازهٔ ریاضی را حل کرد، پیش از هر چیز، باید با روشهای حل مسأله آشنا بود. این روشها، چندان زیادند که برای تجزیه و تحلیل همهٔ آنها، باید صفحه‌های زیادی را سیاه کرد. ولی نیازی به چنین بحث طولانی نداریم، به‌ویژه که در دورهٔ دبیرستان، با بسیاری از این روشها آشنا شده‌اید و ضمن حل مسأله، کاربردهای آنها را فراگرفته‌اید. در مقاله‌های گذشته هم، برخی از این روشها را به یاد آورده‌ایم و دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم. در این جا، تنها از چند روش مبنایی، که به کار استدلال منطقی در ریاضیات می‌خورند، نام می‌بریم و با ذکر مثال، با نحوهٔ کاربرد آنها در حل مسأله‌های ریاضی آشنا می‌شویم.

۱§. شباهت مسأله با مسأله‌های ساده‌تر

مسأله‌ای در برابر شماست که راه حل آن را نمی‌دانید در برابر خود، این پرسشها را قرار دهید و تلاش کنید که پاسخ آنها را پیدا کنید آیا این مسأله، حالت یا حالتهای خاصی دارد؟ آیا

مسأله‌ای ساده‌تر که با این مسأله شباهت داشته باشد، به یادتان می‌آید؟ آیا می‌توانید با رسم شکلهای مختلف یا با آزمایش عددهای مختلف، مسأله را عینی‌تر و ملموس‌تر کنید؟ ... پرسشهایی از این‌گونه، می‌تواند شما را با مسأله آشناتر کند، به‌جز آن، مسأله‌های دیگری در برابر شما قرار گیرد که از مسأله اصلی ساده‌تر و احتمال حل آنها بیشتر است. و بعد، اگر این مسأله یا مسأله‌های ساده‌تر را حل کردید، از خود بپرسید: آیا می‌توان از همین راه حل، یا راه حلی شبیه آن، مسألهٔ اصلی را حل کرد؟ در راه حل مسأله ساده‌تر، چه تغییری بدهیم تا بتواند برای حل مسألهٔ ما مفید باشد؟ و ...

البته، در پیدا کردن مسأله‌های مشابه و یا به اصطلاح «شبیه‌سازی» باید هشیار بود. هر شباهتی ما را به نتیجه نمی‌رساند؛ تنها شبیه بودن نمی‌تواند پایه‌ای برای نتیجه‌گیری باشد. بهتر است این نکته را از زبان یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان سدهٔ بیستم بشنویم.

آلکساندر خین‌چین (۱۸۹۴ ــ ۱۹۵۹ میلادی)، ریاضیدان بزرگ، مربی برجسته و عضو فرهنگستان علوم اتحاد شوروی، در زمینهٔ تابعهای با متغیر حقیقی، تابعهای اندازه‌پذیر، تعمیم مفهوم دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ متری عددها، موفقیتهای چشمگیری به دست آورد، ولی شهرت اصلی او، به خاطر پایه‌گذاشتن نظریهٔ تازهٔ احتمال بود. در همایشی که در سال ۱۹۶۰، در برکلی امریکا، با شرکت گروه بزرگی از ریاضیدانان جهان، برای بحث در نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی تشکیل شده بود، نشست ویژه‌ای به یاد خین‌چین اختصاص دادند و نقش او را در پیشرفت دانش گرامی داشتند.

آلکساندر خین‌چین، در یکی از مقاله‌های خود، با عنوان «نقش تربیتی درس‌های ریاضیات» می‌نویسد:

> «... نتیجه‌گیری از راه شباهت ــ چه در دانشهای تجربی و چه در زندگی روزمره ــ روش معمولی و قانونی، برای کشف قانون‌مندی‌های تازه است. اگر فرض کنیم، طبیعت شناسی متوجه شود، همهٔ گونه‌هایی که دارای نشانه‌های A و B هستند و تاکنون به آنها برخورده‌اند، در ضمن دارای نشانهٔ C هم هستند، آن وقت اگر گونهٔ تازه‌ای را پیدا کند که نشانه‌های A و B در آن وجود داشته باشد، به طور طبیعی نتیجه می‌گیرد که این گونهٔ تازه هم دارای نشانهٔ C است. این گونه نتیجه‌گیری از راه شباهت، موقعی قانع کننده‌تر می‌شود که افزون بر آزمایش، نوعی ملاحظهٔ نظری هم در این باره وجود داشته باشد که همراهی C با A و B تصادفی نیست و زمینه‌ای در خود این نشانه‌ها و یا در جای دیگری دارد (و بیشتر، می‌توان چنین ملاحظه نظری را پیدا کرد).

تنها در ریاضیات، بر ضرورت این امر تأکید می‌شود که: این ملاحظهٔ نظری را باید، تا آخر و به طور کامل، ثابت کرد. باید با دقت کامل ثابت کنیم، وجود نشانه‌های A و B، همیشه به معنای وجود نشانهٔ C است، و اگر نتوانیم چنین اثباتی را پیدا کنیم، حق نداریم از روی نشانه‌های A و B، وجود نشانهٔ C را نتیجه بگیریم. ولی در حالت اول (یعنی وقتی این قضیه ثابت شود که «C نتیجه‌ای است از A و B»)، کاربرد ساده این قضیه را دیگر نمی‌توان «نتیجه‌گیری از راه شباهت» نامید. بنابراین، می‌توان گفت که در ریاضیات، نتیجه‌گیری از راه شباهت، به طورکلی منع شده است [و این، البته به معنای بی‌اعتباری نتیجه‌گیری‌های بزرگی که از راه تجربه به دست آمده‌اند، نیست]، در حالی که در دانش‌های تجربی و فعالیتهای عملی، نتیجه‌گیری از راه شباهت، نقشی عظیم دارد و یکی از عمده‌ترین و اساسی‌ترین روش‌ها، برای پیدا کردن قانون‌مندیهای تازه است.

به این ترتیب، دوباره در برابر پرسشی قرار می‌گیریم: در این رابطه، چه می‌توان کرد تا درس‌های ریاضیات، برای فرهنگ عمومی تفکر، نقشی تربیت کننده داشته باشد؟ پاسخ روشن است: تربیت ریاضی ذهن و خو گرفتن به این موضوع که: نتیجه‌گیری و پایهٔ شباهت، تنها می‌تواند در خدمت روش‌های آزمایشی باشد و به خودی خود هیچ‌گونه نیروی استدلالی ندارد، به ناچار آدمی را وامی‌دارد تا در زمینه‌های دیگر اندیشه هم با احتیاط بیشتر نسبت به این گونه استنباط‌ها روبه‌رو شود و به یاد بیاورد که در هیچ حالتی، نمی‌توان بدون دقت کافی و بدون پیدا کردن نشانه‌های اساسی دیگر، تنها براساس شباهت داوری کرد.

هر کدام از ما، این ویژگی اندیشهٔ ریاضی را آزمایش کرده‌ایم و دریافته‌ایم که این تأثیر، چگونه موجب بالا رفتن «فرهنگ *اندیشیدن*» ما شده است. برخورد انتقادی با نتیجه‌گیری‌هایی که براساس شباهت به دست می‌آیند، یکی از بهترین و مهمترین نشانه‌ها، برای تشخیص اندیشهٔ رشد

یافتهٔ علمی از اندیشهٔ سطحی و ساده لوحانه است؛ و دانش ریاضی خواستگاهی مناسب برای تربیت اندیشهٔ ابتدایی و تکامل آن به سمت اندیشهٔ علمی است.

اگر بخواهیم، توصیه‌های خین‌چین را در نظر داشته باشیم، باید به یک نکته اساسی توجه کنیم که در مسأله‌های ریاضی، «شباهت» می‌تواند وسیله و راهنمای ما برای کشف مسأله‌های تازه و یا احتمال وجود یک ویژگی در یک شکل یا یک دستور باشد، ولی نمی‌تواند جانشین استدلال شود. در ریاضیات، برای پذیرفتن یک ویژگی یا یک قاعده، باید وجود و درستی آن، با استدلال منطقی ثابت شود.

به هر حال، «شباهت» یکی از انگیزه‌هایی است که می‌تواند ذهن جستجوگر را در جهت‌های گوناگون، به اندیشه وادارد و موجبی برای کشف‌های تازه و روشهای ساده‌تر باشد. **یوهان کپلر** می‌گفت:

> «... من بیش از هر چیز، به شباهت‌ها، که بهترین معلمان من بوده‌اند، ارج می‌گذارم. آنها به همهٔ رازهای طبیعت آگاهی دارند و به‌ویژه در هندسه، نباید نسبت به آنها بی‌اعتنا بود...»

به مثالی از جبر توجه کنیم: آیا می‌توانیم از یک عبارت جبری جذر بگیریم. روش جذر گرفتن از عددهای طبیعی را می‌دانیم. آیا عبارت جبری، با عدد شباهتی دارد؟ وقتی با عدد طبیعی ۲۳۷۱۶ سر و کار داریم، می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$۲۳۷۱۶ = ۲\times۱۰^۴ + ۳\times۱۰^۳ + ۷\times۱۰^۲ + ۱\times۱۰ + ۶$$

در واقع، از آن جا که عددنویسی ما در مبنای ۱۰ است، توانستیم عدد را به صورت ضرب رقم‌ها در توان‌های ۱۰ بنویسیم، اگر همین عدد ۲۳۷۱۶ را در عددنویسی به مبنای ۹ به ما داده بودند، آن وقت به این صورت در می‌آمد:

$$(۲۳۷۱۶)_۹ = ۲\times۹^۴ + ۳\times۹^۳ + ۷\times۹^۲ + ۱\times۹ + ۶$$

اکنون، اگر مبنای عددنویسی را x بگیریم، باید بنویسیم:

$$(۲۳۷۱۶)_x = ۲x^۴ + ۳x^۳ + ۷x^۲ + x + ۶$$

پس، می‌توان عبارت جبری را (اگر شامل یک مجهول باشد)، عددی در مبنای آن مجهول به حساب آورد، ولی در این‌جا، یعنی پذیرفتن عبارت جبری به عنوان تعمیم مفهوم عدد، نکته‌های تازه‌ای وجود دارد که باید به آنها توجه کرد:

۱) در عدد طبیعی، هر یک از رقم‌ها از مبنای عددنویسی کوچکترند، در حالی که در عبارت جبری، مقدار ضریب‌ها، می‌توانند از مقدار x (که به جای مبنا پذیرفته‌ایم) بزرگتر باشد؛

۲) در عددنویسی عادی، رقم‌ها، عددهایی درست و مثبت‌اند؛ در حالی که در عبارت جبری، ضریب‌ها می‌توانند منفی، کسری یا گنگ باشند.

همین دو نکته موجب می‌شود که، اگر بخواهیم از یک عبارت جبری، در شباهت با حساب و به کار گرفتن همان روش جذر گرفتن از عددهای طبیعی، جذر بگیریم، باید متوجه برخی اختلاف‌ها باشیم، از آن جمله:

۱) از عبارت جبری، وقتی می‌توان به شیوهٔ حساب جذر گرفت که از درجهٔ زوج باشد. در جبر از عبارت‌های با درجهٔ فرد (درجهٔ سوم، پنجم و غیره) نمی‌توان جذر گرفت.

۲) بهتر است در حالتی به فکر استفاده از روش حسابی، برای جذر گرفتن از عبارت‌های جبری بیفتیم، که ضریب بزرگترین درجه، مجذور کامل و سایر ضریب‌ها، عددهایی درست (مثبت، منفی یا صفر) باشند، اگرچه حالت‌هایی پیش می‌آید که با ضریب‌های کسری یا گنگ هم بتوان جذر گرفت.

مثال ۱: این معادلهٔ درجهٔ چهارم را حل کنید:

$$۹x^۴ - ۱۲x^۳ + ۱۰x^۲ - ۴x - ۲۸۸ = ۰$$

آزمایش می‌کنیم، شاید به یاری جذر گرفتن از عبارت درجهٔ چهارم سمت چپ برابری، روزنه‌ای برای حل معادله پیدا شود. به‌این ترتیب:

$\sqrt{۹x^۴ - ۱۲x^۳ + ۱۰x^۲ - ۴x - ۲۸۸}$	$۳x^۲ - ۲x + ۱$
$-۹x^۴$	$۶x^۲ - ۲x$
	$-۲x$
$-۱۲x^۳ + ۱۰x^۲$	$۶x^۲ - ۴x + ۱$
$۱۲x^۳ - ۴x^۲$	۱
$۶x^۲ - ۴x - ۲۸۸$	
$-۶x^۲ + ۴x - ۱$	
-۲۸۹	

اگر دقت کنید، کاملاً شبیه جذر گرفتن از عدد، عمل کردیم: جذر $۹x^۴$ برابر $۳x^۲$ می‌شود، مجذور $۳x^۲$ را از عبارت اصلی کم کردیم و دو جملهٔ بعدی را پایین آوردیم. نخستین جملهٔ دوجمله‌ای $-۱۲x^۳ + ۱۰x^۲$ را بر دو برابر $۳x^۲$، یعنی $۶x^۲$،

تقسیم کردیم، نتیجهٔ تقسیم، یعنی $-2x$ را پهلوی $6x^2$ نوشتیم و حاصل ضرب عبارتی که به دست می‌آید، در $-2x$ را از دوجمله‌ای $-12x^3+10x^2$ کم کردیم و دو جملهٔ دیگر از عبارت اصلی را پایین آوردیم و ...

جذر عبارت، برابر $3x^2-2x+1$ و باقی‌مانده جذر برابر -289 می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$9x^4-12x^3+10x^2-4x-288=$$
$$=(3x^2-2x+1)^2-289=$$
$$=(3x^2-2x-16)(3x^2-2x+18)$$

عبارت درجهٔ چهارم، به صورت ضرب دو عبارت درجهٔ دوم تجزیه شد و، بنابراین، معادلهٔ درجهٔ چهارم قابل حل است. معادلهٔ درجهٔ چهارم، دو ریشهٔ حقیقی و دو ریشه موهومی دارد. ریشه‌های حقیقی معادله -2 و $\frac{8}{3}$ اند.

البته، حالتهایی وجود دارد که با وجود ضریب‌های گنگ (یا کسری) و با وجود این که ضریب بزرگترین درجهٔ عبارت جبری، مجذور کامل نیست، بتوان همین روش را به کار برد.

مثال ۲: این معادله را حل کنید:

$$2x^4-2\sqrt{2}x^3-(4\sqrt{2}-1)x^2-4x-5=0$$

اگر از عبارت سمت چپ برابری جذر بگیریم، به عبارت $\sqrt{2}x^2+x-2$ و باقی ماندهٔ -9 می‌رسیم، یعنی

$$2x^4-2\sqrt{2}x^3-(4\sqrt{2}-1)x^2-4x-5$$
$$=(\sqrt{2}x^2+x-2)^2-9=(\sqrt{2}x^2+x+1)(\sqrt{2}x^2+x-5)$$

عبارت درجهٔ چهارم به صورت ضرب دو عبارت درجهٔ دوم تجزیه شد که یکی از آنها، ریشه‌های موهومی و دیگری ریشه‌های حقیقی دارد و به سادگی قابل محاسبه‌اند.

مثال ۳: این معادله را حل کنید:

$$x^4-2ax^3+a^2x^2-1=0$$

برای حل این معادله، به گونهٔ دیگری از «شباهت» استفاده می‌کنیم. معادله، نسبت به x از درجهٔ چهارم است، ولی نسبت به a از درجهٔ دوم، نسبت به a منظم می‌کنیم؛ البته به شرطی از این راه به نتیجه می‌رسیم که، معادلهٔ درجهٔ دوم نسبت به مجهول a، ریشه‌های گویا داشته باشد:

$$x^2a^2-2x^3a+x^4-1=0$$

که برای ریشه‌های آن به دست می‌آید:

$$a=\frac{x^2+1}{x}\ ,\ a=\frac{x^2-1}{x}$$

و بنابراین، به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2-ax+1=0\ ,\ x^2-ax-1=0$$

که، پیدا کردن ریشه‌های آنها و یا بحث دربارهٔ وجود ریشه‌های حقیقی در آن‌ها، دشوار نیست.

گاهی چنین روشهای مشابهی ما را به جاهای جالب‌تر می‌کشاند. به این مثال توجه کنید:

مثال ۴: این معادلهٔ درجه سوم را حل کنید:

$$x^3-(2\sqrt{5}+1)x^2+(6+\sqrt{5})x-\sqrt{5}-1=0$$

معادله از درجهٔ سوم است. پارامتری هم وجود ندارد که، به‌احتمالی، نسبت به پارامتر قابل حل باشد... ولی اگر $\sqrt{5}$ را a بگیریم و در ضریب x، عدد ۶ را برابر ۱+۵، یعنی a^2+1 به‌حساب آوریم، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a+1)x-a-1=0$$

که نسبت به a، از درجهٔ دوم و به صورت زیر است:

$$xa^2-(2x^2-x+1)a+(x^3-x^2+x-1)=0$$

این معادله، ریشه‌های گویا دارد و مقدارهای a، بر حسب x، چنین می‌شود:

$$a=x-1\ ,\ a=\frac{x^2+1}{x}$$

که اگر، به جای a، مقدارش $\sqrt{5}$ را بگذاریم:

$$x=\sqrt{5}+1\ ,\ x^2-\sqrt{5}x+1=0$$

پاسخ: $x_1=\sqrt{5}+1\ ,\ x_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ ,\ x_3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

ولی استفاده از شباهت، بیش از هرجا برای کشف و حل مسأله‌ها یا قضیه‌های هندسهٔ فضایی به درد می‌خورد. وقتی قضیه‌ای یا مسأله‌ای دربارهٔ مثلث، در برابر ما باشد، می‌توان اندیشید که «شبیه فضایی» این قضیه یا مسأله، به‌چه صورتی در می‌آید! در این جا چند مسألهٔ مشابه را آورده‌ایم (در هندسهٔ روی صفحه و در هندسهٔ فضایی)؛ دربارهٔ اثبات یا حل آنها (چه مسألهٔ روی صفحه و چه مسألهٔ فضایی شبیه آن) بیندیشید و تلاش کنید که استدلال لازم را پیدا کنید.

مثال ۵: اگر r طول شعاع دایرهٔ محاطی و h_1، h_2، h_3، طول ارتفاع‌های یک مثلث باشند، داریم:

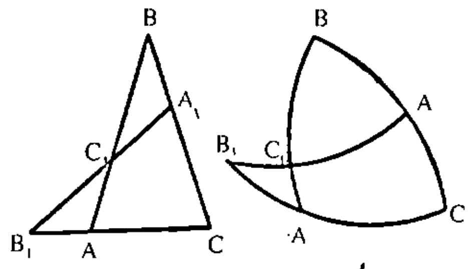
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

اکنون یک چهار وجهی در نظر می‌گیریم، طول شعاع کرهٔ

محاطی آن را r و طول ارتفاع‌های چهار وجهی را h_1، h_2، h_3، h_4، فرض می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

مثال ۶: قضیهٔ منه‌لائوس در صفحه و در فضا. مثلث ABC را روی صفحه (شکل ۱ــ a) و مثلث کروی ABC را روی سطح کره (شکل ۱ ــ b) در نظر می‌گیریم (مثلث کروی، مثلثی است که، ضلع‌های آن، کمان‌هایی از دایره‌های عظیمهٔ کره باشد).



a) شکل ۱ b)

نقطه‌های A_1 و B_1 و C_1 را، به ترتیب، روی ضلعهای BC، AC و AB و یا امتداد آنها انتخاب کرده‌ایم. برای این‌که سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1، در حالت صفحه، روی یک خط راست و در حالت فضایی، روی کمانی از یک دایرهٔ عظیمه باشند، باید داشته باشیم:

برای مثلث روی صفحه:

$$\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$$

(و یا برابری‌های مشابه آن)؛

برای مثلث کروی:

$$\frac{\sin\widehat{CA_1}}{\sin\widehat{A_1B}}\cdot\frac{\sin\widehat{AC_1}}{\sin\widehat{C_1B}}=\frac{\sin\widehat{CB}}{\sin\widehat{B_1A}}$$

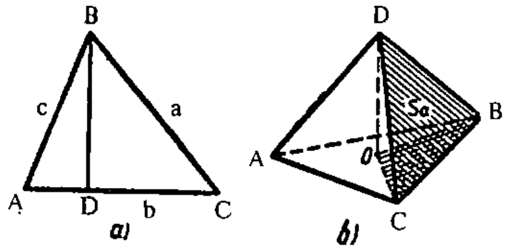
مثال ۷: هرم ABCD را متناظر با مثلث ABC می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$|BC|=a\ ,\ |AC|=b\ ,\ |AB|=c$

در این صورت داریم:

$a\cos\hat{B}+b\cos\hat{A}=c$

اکنون، اگر S_a را مساحت وجه روبه‌رو به رأس A، S_b را مساحت وجه روبه‌رو به رأس B و غیره، در چهار وجهی، فرض



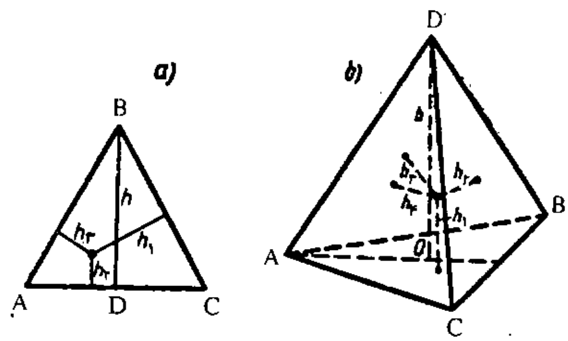
شکل ۲

کنیم (شکل ۲)، در ضمن زاویه‌های دو وجهی هرم را در یال‌های BC، AC و AB به ترتیب، برابر α، β و γ بگیریم، داریم:

$S_a.\cos\alpha+S_b.\cos\beta+S_c.\cos\gamma=S_d$

مثال ۸: اگر h_1، h_2 و h_3 فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی از درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا سه ضلع آن و h طول ارتفاع مثلث باشد، داریم:

$h_1+h_2+h_3=h$



شکل ۳

به همین ترتیب، اگر h_1، h_2، h_3 و h_4 را فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی از درون چهاروجهی منتظم تا وجه‌های آن، و h را طول ارتفاع آن بگیریم، داریم (شکل ۳):

$h_1+h_2+h_3+h_4=h$

مثال ۹: چهارضلعی روی صفحه را می‌توان، به مفهومی یک شش ضلعی دانست، به شرطی که دو قطر چهار ضلعی را هم، دو ضلع رو به‌روی آن به حساب آوریم. در این صورت، چهار وجهی، یک شش ضلعی فضایی می‌شود و به مفهومی، می‌توان آن را مشابه چهار ضلعیِ روی صفحه دانست و این دو قضیهٔ شبیه هم را خواهیم داشت:

قضیهٔ مربوط به صفحه برای چهار ضلعی: برای این که

قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع روبه‌روی آن، با مجموع مجذورهای طول‌های دو ضلع روبه‌روی دیگر، برابر باشند.

قضیهٔ روی صفحه‌برای شش ضلعی: برای این که دو ضلع روبه‌رو در یک شش ضلعی، بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که، مجموع مجذورهای طول‌های هر دو ضلع روبه‌روی دیگر، با هم برابر باشند.

قضیهٔ فضایی برای چهار وجهی: برای این که دو یال روبه‌رو در یک چهار وجهی بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که، مجموع مجذورهای طول‌های هر دو یال روبه‌روی دیگر، با هم برابر باشند.

مثال ۱۰: در مثلث ABC، طول ضلع‌های روبه‌رو به‌رأس‌های A، B و C را، به ترتیب، a، b و c می‌گیریم. در این صورت داریم (رابطهٔ کسینوس‌ها در مثلث):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

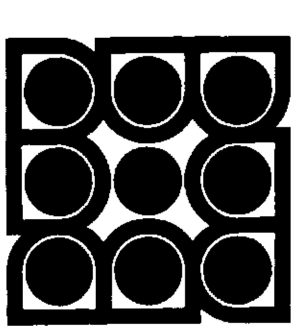
اکنون در چهاروجهی ABCD فرض می‌کنیم:

$$S_{BCD} = S_1 ,\ S_{ACD} = S_2 ,\ S_{ABD} = S_3 ,\ S_{ABC} = S_4$$

در ضمن، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های AC، AD و AB را، α، β و γ می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha - 2S_2S_4\cos\beta - 2S_3S_4\cos\gamma$$

تا بعد ...





تفریح اندیشه ۱

پیک

این معما، معمایی کلاسیک در جبر است که در بسیاری از کتابها آمده و به دوران باستان باز می‌گردد. اگر آن را پیش از این ندیده‌اید، اکنون به آن توجه کنید.

پیکی از عقب ارتش متحرکی، ۱۰۰ کیلومتر به جلو حرکت می‌کند، پیام را می‌رساند، و بلافاصله به عقب برمی‌گردد و درمی‌یابد که ۱۰۰ کیلومتر جلوتر از نقطهٔ آغاز است.

مجموعاً چه‌قدر حرکت کرده است؟ البته، سرعت حرکت ارتش و پیک، همواره ثابت بوده است.

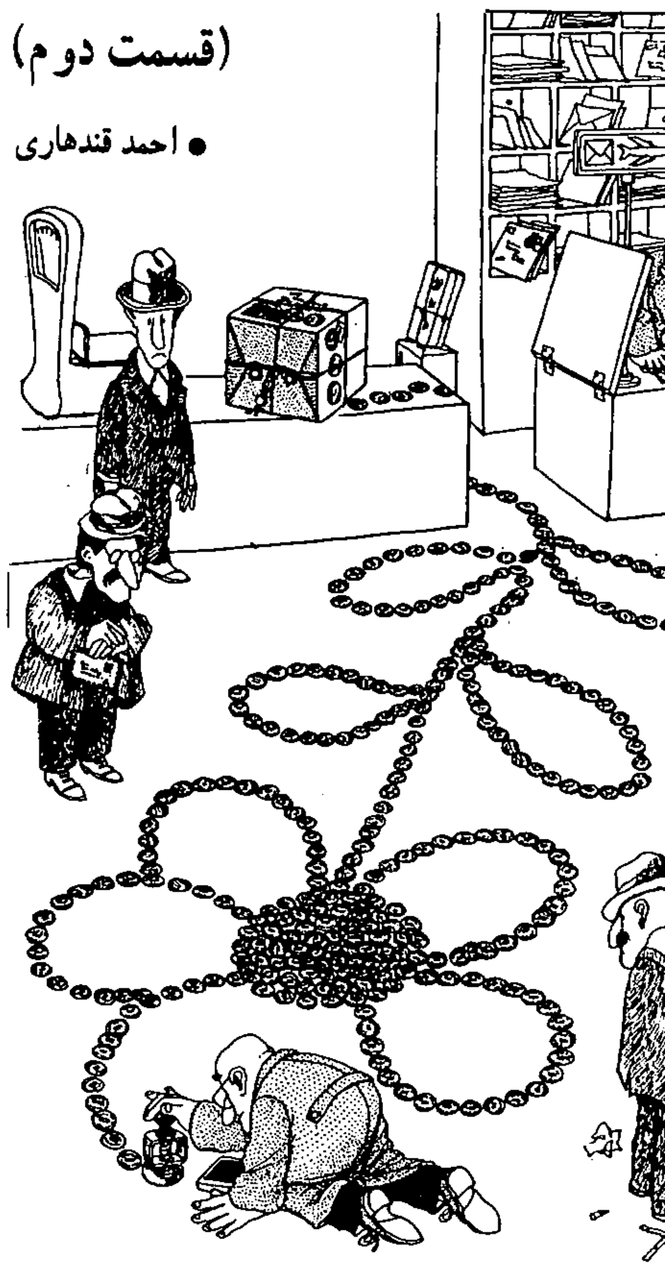


جواب در صفحهٔ ۸۸

دنباله

(قسمت دوم)

● احمد قندهاری



دنباله‌ها یکی از مفاهیم اساسی آنالیز است. زیرا دنباله‌ها تابعهای ساده‌ای هستند که دامنه تعریف (حوزه تعریف) آنها مجموعه اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، این تابعهای ساده می‌توانند مفهوم حدّ را دقیقاً نشان دهند.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=۲n-۵ \\ N\to R \end{cases}$, $n\in N$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع می‌توان نوشت.

$a_۱=-۳$

$a_۲=-۱$

$a_۳=۱$

$a_۴=۳$

$a_n=۲n-۵$

....

ملاحظه می‌کنیم که مجموعه $n\in N$ ، $\{-۳,-۱,۱,۳,...,۲n-۵,...\}$ برد این تابع است.

اعداد بی‌پایان $-۳,-۱,۱,۳,...,۲n-۵,...$ را یک دنباله نامتناهی گوییم، به‌طوری که قبلاً گفته شد، یک دنبالهٔ نامتناهی، مجموعه برد تابعی است که دامنه آن مجموعه N و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

تابع a با ضابطهٔ $\begin{cases} a(n)=\frac{۱}{n} \\ N\to R \end{cases}$, $n\in N$ را در نظر می‌گیریم.

برد این تابع مجموعه $\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},...,\frac{۱}{n},...\right\}$, $n\in N$ است.

اعداد $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},...,\frac{۱}{n},...$ را یک دنباله نامتناهی گوییم. همان طوری که قبلاً گفته شد. اگر دامنه تعریف این گونه تابعها، قطعه‌ای از مجموعهٔ N باشد، آن گاه برد تابع یک دنباله متناهی خواهد شد. مثلاً تابع با ضابطه

$$\begin{cases} a(n)=۲n+۵ \\ N\to R\ ,\ n\in N\ ,\ n<۶۳ \end{cases}$$

برد این تابع مجموعهٔ $\{۷,۹,۱۱,...,۱۲۹\}$ است، اعداد $۷,۹,۱۱,...,۱۲۹$ را یک دنباله متناهی گوییم.

پس به طور خلاصه :

برد تابع a از N به R را یک دنباله نامتناهی گوییم.

مانند توابع زیر $n\in N$

۱) $\begin{cases} a(n)=۵n-۱ \\ N\to R \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a(n)=۲n+۳ \\ N\to R \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+۴} \\ N\to R \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a(n)=\sqrt{n(n+۱)} \\ N\to R \end{cases}$

توجه: از این به بعد هر جا دنباله‌ای مطرح می‌شود، منظور دنباله نامتناهی است مگر آن که قید متناهی بیان شود.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n+۱}{۲n-۱} \\ N\to R \end{cases}$ $n\in N$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع داریم:

$a_۱=\frac{۲}{۱}=۲$

$a_۲=\frac{۳}{۳}=۱$

$a_۳=\frac{۴}{۵}$

....

$a_n=\frac{n+۱}{۲n-۱}$

....

قبلاً گفتیم که جمله اول دنباله را با $a_۱$ و جمله دوم دنباله را با $a_۲$ و جمله سوم دنباله را با $a_۳$ و ... و جمله (n)ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم و ... و این دنباله را چنین نشان می‌دهیم. $a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_n,\dots$ سه نقطه‌ای که بعد از a_n در اعداد بالا نوشتیم، به این منظور است که تعداد جملات این دنباله نامتناهی است.

قبلاً گفتیم جمله عمومی دنباله را با a_n و خود دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم پس می‌توان نوشت:

$$\{a_n\}=۲,۱,\frac{۴}{۵},\dots,\frac{n+۱}{۲n-۱},\dots$$

مثال: تصاعد عددی نوعی دنباله است، مانند تصاعد عددی زیر:

$$\begin{cases} a_۱=۵ \\ d=۷ \end{cases} \Rightarrow a_n=a_۱+(n-۱)d=۵+(n-۱)\times ۷=۷n-۲$$

اعداد $۵,۱۲,۱۹,\dots,۷n-۲,\dots$ را یک دنباله گوییم.

مثال: تصاعد هندسی نوعی دنباله است، مانند تصاعد هندسی زیر:

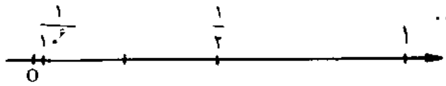
$$\begin{cases} a_۱=۳ \\ q=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a_q=a_۱q^{n-۱}=۳(\frac{۱}{۲})^{n-۱}=\frac{۳}{۲^{n-۱}}$$

در نتیجه اعداد $۳,\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴},\dots,\frac{۳}{۲^{n-۱}},\dots$ یک دنباله است.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{۱}{n} \\ N\to R \end{cases}$, $n\in N$ را در نظر می‌گیریم:

$$\{a_n\}=۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\dots\frac{۱}{n},\dots$$

جملات این دنباله به تدریج به عدد صفر نزدیک می‌شود، یعنی هر چه n بزرگتر باشد جمله nامی به صفر نزدیکتر است. مسلماً تمام جملات دنباله به صفر خیلی نزدیک نیست مثلاً اگر $n>۱۰$ ، آن گاه $a_n<\frac{۱}{۱۰}$ ، اگر $n>۱۰۰$ ، $a_n<\frac{۱}{۱۰۰}$ اگر $n=۱۰^۶$ ، آنگاه: $a_n<\frac{۱}{۱۰^۶}$ یعنی $a_n<\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$ می‌توان گفت اگر ۱۰۰۰۰۰۰ جملات اولیه این دنباله را کنار بگذاریم، بقیه جملات دنباله که تعدادشان نامتناهی است، همگی در بازه $I=(۰,\frac{۱}{۱۰^۶})$ قرار دارند یعنی $a_{۱۰^۶+۱}\in I$ و $a_{۱۰^۶+۲}\in I$ و $a_{۱۰^۶+۳}\in I$ و ...



در اینجا می‌گوییم وقتی n بزرگ و بزرگتر شود مثلاً اگر $n>۱۰^۶$ ، آنگاه $۰<a_n<\frac{۱}{۱۰^۶}$ و اگر $n>۱۰^{۶۰}$ ، آنگاه $۰<a_n<\frac{۱}{۱۰^{۶۰}}$.

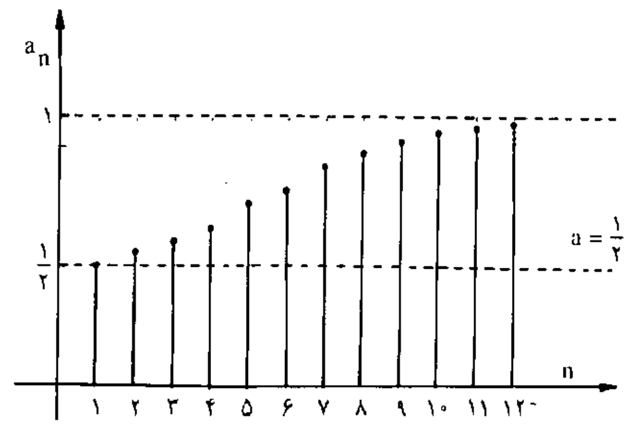
ملاحظه می‌کنیم وقتی n از عدد بزرگی مانند $۱۰^{۶۰}$ بزرگتر شود، بقیه جملات دنباله که تعدادشان بی‌نهایت است در بازه $(۰,\frac{۱}{۱۰^{۶۰}})$ قرار می‌گیرند و عدد $\frac{۱}{۱۰^{۶۰}}$ خیلی خیلی به صفر نزدیک می‌شود و در اینجا می‌گوییم حدّ دنباله صفر است.

مثال: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+۱} \\ N\to R \end{cases}$, $n\in N$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$a_۱=\frac{۱}{۲}$, $a_۲=\frac{۲}{۳}$, $a_۳=\frac{۳}{۴}$, $a_۴=\frac{۴}{۵}$, $a_۵=\frac{۵}{۶}$,
$a_۶=\frac{۶}{۷}$, $a_۷=\frac{۷}{۸}$, $a_۸=\frac{۸}{۹}$, $a_۹=\frac{۹}{۱۰}$, $a_{۱۰}=\frac{۱۰}{۱۱}$,
$a_{۱۱}=\frac{۱۱}{۱۲}$, $a_{۱۲}=\frac{۱۲}{۱۳}$, ...

و می‌دانیم که اعداد $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$ را یک دنباله می‌نامیم و می‌توان آن را به صورت زوج مرتب $\{(1,\frac{1}{2}),(2,\frac{2}{3}),(3,\frac{3}{4}),\dots\}$ نشان داد.

حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



در این نمودار ملاحظه می‌کنیم، هر قدر n بزرگتر شود، جملات دنباله به عدد (۱) نزدیکتر می‌شوند. می‌توانیم a_n را به عدد (۱) خیلی نزدیک کنیم به شرطی که عدد (n) را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم.

مثلاً اگر $n=100$، آنگاه $a_{100}=\frac{100}{101}=0/990099$ و اگر $n=500$، آنگاه $a_{500}=\frac{500}{501}=0/9980039$ و اگر $n=1000$، آنگاه $a_{1000}=\frac{1000}{1001}=0/9990009$ خواهد شد. از این نوشته‌ها دو نتیجه می‌گیریم.

نتیجه اول: می‌توان گفت: اگر $n>100$، آنگاه بقیه جملات دنباله نزدیک عدد (۱) تجمع می‌کنند یا بقیه جملات دنباله در همسایگی عدد (۱) گرد هم می‌آیند. در این شرایط می‌گوییم این دنباله در عدد (۱) همگرا است.

نتیجه دوم: بیان دیگر نتیجه اول است و می‌توان گفت: حد دنباله عدد (۱) است و می‌نویسیم؛ $n\in N$ و

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\right.$$

در این دنباله، همه جملات از عدد (۱) کوچکترند. اکنون می‌خواهیم a_n را به اندازه‌ای به عدد (۱) نزدیک کنیم تا اختلاف بین عدد (۱) و a_n از $\frac{1}{1000}$ کمتر باشد یعنی $1-a_n<\frac{1}{1000}$ ، در این صورت (n) را چه عددی باید انتخاب کنیم؟

به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$1-a_n<\frac{1}{1000}\Rightarrow 1-\frac{n}{n+1}<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{n+1-n}{n+1}<\frac{1}{1000}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1000}\Rightarrow n+1>1000\Rightarrow n>999\Rightarrow n\geq 1000$$

پس اگر $n\geq 1000$ انتخاب شود، آنگاه a_n به قدری به عدد (۱) نزدیک می‌شود که $1-a_n<\frac{1}{1000}$.

می‌دانیم (ε) عدد مثبت کوچکی است، حال اگر بخواهیم a_n را به عدد (۱) به قدری نزدیک کنیم تا $1-a_n<\varepsilon$، در این صورت (n) را چه عددی باید انتخاب کنیم. نظیر عملیات قبل را تکرار می‌کنیم.

$$1-a_n<\varepsilon\Rightarrow 1-\frac{n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n+1-n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$
$$\Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

می‌دانیم $\varepsilon>0$، ممکن است عدد $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ عددی اعشاری باشد مسلماً عدد $[\frac{1}{\varepsilon}-1]$ ([ ] نماد جزء صحیح است[1]) عدد صحیح است که ممکن است کوچکتر از $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ باشد ولی عدد $[\frac{1}{\varepsilon}]=[\frac{1}{\varepsilon}-1]+1$ بزرگتر از $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ است.

اگر $M\in N$ و $M=[\frac{1}{\varepsilon}]$ آن گاه می‌توان نوشت:

$$n>M\Rightarrow 1-a_n<\varepsilon$$

پس می‌توان گفت؛ برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $M\in N$ وجود دارد که:

$$n>M\Rightarrow 1-a_n<\varepsilon$$

حال می‌گوییم حدّ این دنباله عدد (۱) است و می‌نویسیم:

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\right.$$

در این صورت می‌گوییم دنباله $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ به عدد (۱) همگرا است.

توجه کنید دنباله‌ای را همگرا گوییم که حدّ جمله عمومی آن وقتی $n\to\infty$ برابر عددی مانند $L\in R$ باشد بعداً به‌صورت دقیق‌تر همگرایی تعریف می‌شود.

حال دنباله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\{a_n\} = ۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \dots, \frac{n+۱}{n}, \dots$$

جمله عمومی این دنباله $a_n = \frac{n+۱}{n}$

$$n = ۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = \frac{۱۱}{۱۰} = ۱/۱$$

$$n = ۵۰ \Rightarrow a_{۵۰} = \frac{۵۱}{۵۰} = ۱/۰۲$$

$$n = ۱۰۰ \Rightarrow a_{۱۰۰} = \frac{۱۰۱}{۱۰۰} = ۱/۰۱$$

$$n = ۱۰۰۰ \Rightarrow a_{۱۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱} = ۱/۰۰۱$$

حدس می‌زنیم که حدّ این دنباله نیز عدد (۱) است. حال ثابت می‌کنیم که این حدس درست است، جملات این دنباله همگی از عدد (۱) بزرگترند.

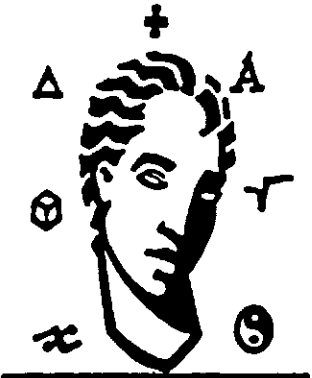
می‌خواهیم a_n را به عدد (۱) آن قدر نزدیک کنیم تا $a_n - ۱ < \varepsilon$ ، در این صورت n را چه عددی باید انتخاب کنیم؟ می‌نویسیم :

$$a_n - ۱ < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱}{n} - ۱ < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱-n}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow$$ اگر $M \in N \ , \ M = [\frac{۱}{\varepsilon}] + ۱$

می‌توان گفت : برای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند M وجود دارد که $n > M \Rightarrow a_n - ۱ < \varepsilon$

۱ـ نماد [x] را متأسفانه در بعضی از کتابها (براکت x) نوشته‌اند در حالی که براکت به معنی پرانتز یا کروشه است عبارت (جزء صحیح) هم فارسی است و هم مفهوم ریاضی را می‌رساند.

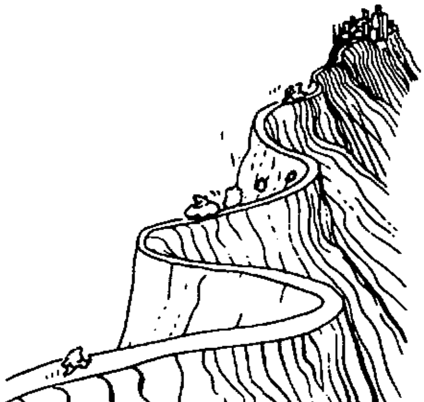


تفریح اندیشه ۲

مهرداد، علی و کیوان در یک زمان و از یک محلّ حرکت می‌کنند تا به شهری واقع در ۸ کیلومتری آنجا برسند.

مهرداد پیاده می‌رود و علی، کیوان را با اتومبیلش می‌برد. پس از مدتی کیوان از اتومبیل پیاده می‌شود و بقیهٔ راه را پیاده طی می‌کند، آن‌گاه علی به طرف مهرداد برمی‌گردد و او را سوار اتومبیل می‌کند و به شهر می‌رساند. هر سه دوست در یک زمان به مقصد می‌رسند.

مهرداد و کیوان در پیاده روی سرعتی یکسان برابر ۶ کیلومتر در ساعت دارند، و اتومبیل هم با سرعت ثابت ۳۰ کیلومتر در ساعت راه را طی کرده‌است. این مسافرت چند ساعت به طول انجامیده است؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



• **غلامرضا یاسی‌پور**

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۳)

شمارهٔ ۲۷ مجلهٔ یکان را ورق می‌زنیم. در مقالهٔ «**مسائل حل نشدهٔ ریاضی**» ترجمهٔ **عبدالحسین مصحفی** چنین آورده شده است که :

«شاید حالا دیگر قبول کنید که بعضی احکام که در ظاهر امر مسلم به نظر می‌رسند در حقیقت مسائل مشکلی هستند. اصل اقلیدس، یعنی، اصل مربوط به خطوط متوازی از جملهٔ اینهاست. هندسهٔ اقلیدس مبتنی بر اصولی است که دوران درازی همچون حقایق مسلم به نظر می‌رسیدند. هر انسان واجد قوهٔ متفکره‌ای بر خود فرض می‌دانست که این اصول را به صورت حقایق مسلّم قبول کند.

اما اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی، که مربوط به خطوط متوازی است، به سادگی اصول دیگر قابل قبول نبود. بنا به این اصل می‌پذیریم که از نقطهٔ خارج خط بیش از یک خط به موازات آن نمی‌توان رسم کرد. برای محققین این فکر پیش آمد که، اگر این اصل درست باشد، باید بتوان آن را از اصول دیگری **نتیجه گرفت**، یعنی، آن را به صورت یک **قضیه** اثبات کرد. ریاضیدانها در طی چندین قرن کوشیدند تا این مسألهٔ مهیج را حل کنند[۱]، اما توفیقی به دست نیاوردند. اصل پنجم در حقیقت یک اصل بود و از اصول دیگر استخراج نمی‌شد.

این اُستنباط که بیش از یک قرن قدمت دارد، زمانی حاصل شد که متوجه شدند که باید مسأله را به نحو دیگری مطرح کنند، یعنی به این صورت که، اگر این اصل است باید بتوان آن را با اصل دیگری جانشین کرد، و هندسهٔ از نوع دیگری، با همان استحکام هندسهٔ اقلیدسی بنا نهاد. این موضوع به حقیقت پیوست. آنچه در مدت دو هزار سال، فعالیت مربوط به حل مسأله را تباه ساخته بود، ابا، یا به عبارت دیگر ناتوانی، از درک هندسه‌های غیر اقلیدسی بود. به این ترتیب، ناگهان سد برداشته شد و پیشروی سریع به عمل آمد.

اشکال عمدهٔ بعضی از مسایل حل نشده‌ای که مدتهای مدیدی اذهان را به خود مشغول داشته، چگونگی طرح آن بوده است ؛ به عبارت دیگر مسأله به گونه‌ای طرح شده که حل آن را غیر ممکن ساخته است.

اغلب، تغییر طرح یک مسأله به چنان حل ساده‌ای منجر شده که این سؤال را پیش آورده است که : چرا تاکنون این راه حل به ذهن کسی خطور نکرده است؟

حدود سی سال می‌گذرد[۲] که **کورت گودل**[۳] با ارائهٔ مسایل حل نشدهٔ از نوع جدید، جهان ریاضی را مبهوت کرده است.

قبلاً چنین می‌دانستند (و این خود استنباطی خطا بود) که

می‌توانند صحیح یا ناصحیح بودن یک قضیهٔ ریاضی را ثابت کنند. اما گودل نشان داد که قضیه‌های واقعی‌ای از ریاضیات وجود دارد که ممکن است صحیح باشند یا غلط، اما وسیله‌ای وجود ندارد که بتوان صحیح یا غلط بودن آنها را کشف کرد.

مسائلی از این نوع را که داشتن یا نداشتن جواب برای آنها قطعی نیست **غیرقطعی**[۴] می‌نامند. ریاضیدانها عقیده دارند که با مسایل لاینحل از آن نوع که گودل عنوان کرده است، به ندرت مواجه می‌شوند و طرح یک چنین مسائلی به سادگی انجام نمی‌پذیرد.»

مجله مطلب ثابت دیگری دارد با عنوان: «بی آنکه عصبانی شوید این مسأله را حل کنید» و در شمارهٔ ۲۷ خود این مسأله را آورده است:

«جوانی سوار بر قایق، سربالایی رودخانه‌ای را طی می‌کرد. در عبور از زیر یک پل، بطری نیمه پر آبی که بر دماغهٔ قایق گذاشته بود، در اثر تکان قایق و اصابت به پل به آب افتاد. جوان بیست دقیقه بعد از گذشتن از پل، متوجه مفقود شدن بطری خود شد، دور زد و در جهت جریان آب و بدون تغییر سرعت قایق به جستجوی بطری به راه افتاد. از زیر پل عبور کرد و درست در فاصلهٔ یک کیلومتری پل بطری را از آب گرفت. اگر زمان دور زدن قایق را نادیده بگیریم، می‌توانید بگویید سرعت جریان آب رودخانه چه‌قدر بوده است؟»

در اینجا به بررسی‌مان از شمارهٔ ۲۷ مجلهٔ یکان خاتمه می‌دهیم و پس از آوردن پاسخهای دو معمایی که صورتشان را در اینجا آوردیم و جوابشان را از شمارهٔ ۲۸ یکان برگرفته‌ایم، مقاله را ختم می‌کنیم:

«**پاسخ اختلاط چای:** یک مکعب به یال ۱۷/۲۹۹ و یک مکعب به یال ۲۵/۴۶۹ سانتیمتر رویهم حجمی برابر با ۲۱۶۹۷/۷۹۴۴۱۸۶۰۸ سانتیمتر مکعب خواهند داشت که دقیقاً برابر است با مجموع حجمهای ۲۲ مکعب با یال ۹/۹۵۴ سانتیمتر.

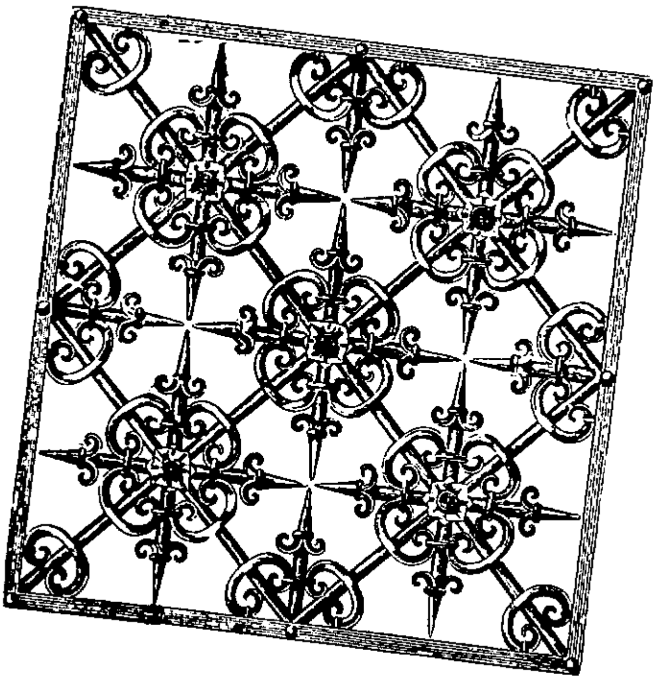
بنابراین نسبت اختلاط چای سیاه و چای سبز برابر است با ۱۷/۲۹۹ به ۲۵/۴۶۹.

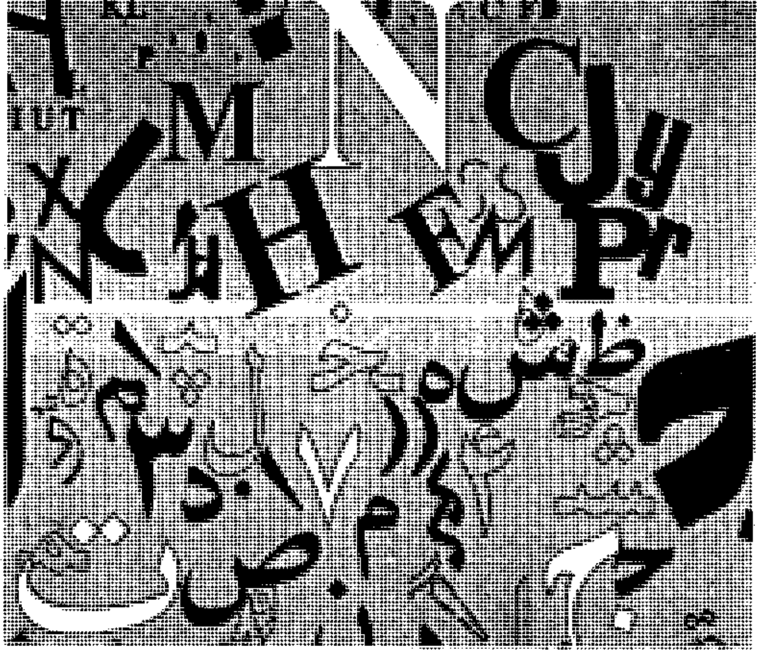
پاسخ معمای جوان قایق سوار: چون سرعت قایق نسبت به آب تغییر نمی‌کند، می‌توانیم آب را ساکن فرض کنیم (و در مقابل، خشکی مثلاً پل را نسبت به آن متحرک در نظر بگیریم).

اگر قایق بر سطح آب ساکن یک دریاچه حرکت می‌کرد و بطری ــ که بر لبهٔ قایق قرار داشت ــ به آب می‌افتاد، در این صورت بطری در همان محل سقوط ثابت باقی می‌ماند و اگر قایق سوار ۲۰ دقیقه بعد از سقوط بطری متوجه آن می‌شد، زمان لازم برای برگشت او تا محل بطری نیز برابر ۲۰ دقیقه می‌شد. بنابراین بطری ۴۰ دقیقه در سطح آب باقی مانده است و در این مدت، پل به اندازهٔ یک کیلومتر نسبت به آب جابه‌جا شده است. بنابراین سرعت پل نسبت به آب (یعنی، سرعت آب رودخانه نسبت به پل) برابر است با یک کیلومتر در ۴۰ دقیقه که می‌شود ۱/۵ کیلومتر در ساعت.»

---

۱. از جمله حکیم عمر خیام، شاعر و ریاضیدان معروف ایرانی.
۲. اکنون ۶۰ سال
۳. منطق‌دان بزرگ آلمانی و واضع نظریهٔ تشخیص‌ناپذیری (تصمیم ناپذیری) در منطق ریاضی.
۴. یا تشخیص‌ناپذیر.





آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۰)

● حمیدرضا امیری

از کتاب: **Multiple choice tests in advanced mathematics**

Test 4

Time allowed: 1¼ hours

SECTION I

(Twenty questions) Questions 1–20

تست ۴

وقت $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ الی ۲۰ (بیست سؤال)

1. $p^x q^{2x} = r^3$, where $p, q, r \in \mathbb{R}^+$
$x =$

A $\frac{3 \ln r}{\ln p + 2 \ln q}$ B $\frac{\ln r}{\ln p + \ln q}$

C $\frac{1}{3}(3 \ln r - \ln p - 2 \ln q)$

D $\frac{3 \ln r}{2 \ln (pq)}$ E $\frac{r}{(pq^2)^{1/3}}$

۱. در صورتی که $p^x q^{۲x} = r^۳$ و $p, q, r \in \mathbb{R}^+$، x برابر است با:

۱) $\frac{۳ \ln r}{\ln p + ۲ \ln q}$ ۲) $\frac{\ln r}{\ln p + \ln q}$

۳) $\frac{۱}{۳}(۳ \ln r - \ln p - ۲ \ln q)$

۴) $\frac{۳ \ln r}{۲ \ln (pq)}$ ۵) $\frac{r}{(pq^۲)^{\frac{۱}{۳}}}$

2. $z = \frac{3 - 2i}{2 - 3i}$
$|z^*| =$

A 13 B $\sqrt{13}$ C $\frac{2}{3}$ D $\frac{3}{2}$ E 1

۲. اگر $Z = \frac{۳ - ۲i}{۲ - ۳i}$؛ در این صورت، مقدار $|Z^*|$ برابر است با:

۱) ۱۳ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ ۵) ۱

3. The first 3 terms of the expansion of $(1 - 2x)^{-1/2}$ in ascending powers of x are

A $1, +x, -\frac{3}{2}x^2$ B $1, -x, -\frac{1}{2}x^2$

C $1, +x, -\frac{1}{2}x^2$ D $1, +x, +\frac{3}{2}x^2$

E $1, -x, +\frac{3}{2}x^2$

۳. اولین ۳ جملهٔ بسط $(۱-۲x)^{-\frac{۱}{۲}}$ در قوای صعودی برحسب x، عبارتند از:

۱) $۱, +x, -\frac{۳}{۲}x^۲$ ۲) $۱, -x, -\frac{۱}{۲}x^۲$

۳) $۱, +x, -\frac{۱}{۲}x^۲$ ۴) $۱, +x, +\frac{۳}{۲}x^۲$

۵) $۱, -x, \frac{۳}{۲}x^۲$

4. Given that α and β are the roots of the equation
$$px^2 + qx + r = 0,$$
where $pqr \neq 0$, then
$$\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^2} =$$

A $\frac{pq}{r^2}$ B $-\frac{pq}{r^2}$ C $\frac{q^2 - 2pr}{r^2}$

D $\frac{q^2 + 2pr}{r^2}$ E $-\frac{q}{r}$

۴. با فرض آن‌که α و β ریشه‌های معادلهٔ $px^۲+qx+r=۰$ بوده به طوری که $pqr\neq۰$، در این صورت، حاصل $\frac{۱}{\alpha^۲\beta}+\frac{۱}{\alpha\beta^۲}$ برابر است با:

۱) $\frac{pq}{r^۲}$ ۲) $-\frac{pq}{r^۲}$

۳) $\frac{q^۲-۲pr}{r^۲}$ ۴) $\frac{q^۲+۲pr}{r^۲}$

۵) $-\frac{q}{r}$

5. Given that $f(x) = e^{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^+$, then $f^{-1}(x) =$

A e^{-x^3} B e^{1/x^3} C $(\ln x)^{1/3}$

D $\frac{1}{3}\ln x$ E $\ln(x^{1/3})$

۵. با فرض آن‌که $f(x)=e^{x^۳}$ و $x\in\mathbb{R}^+$، در این صورت، حاصل $f^{-۱}(x)$ برابر است با:

۱) $e^{-x^۳}$ ۲) $e^{\frac{۱}{x^۳}}$

۳) $(\ln x)^{\frac{۱}{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{۳}\ln x$

۵) $\ln(x^{\frac{۱}{۳}})$

6. $y = x^2\cos x$.
$$\frac{dy}{dx} =$$

A $2x\cos x$ B $-x^2\sin x$

C $x^2\cos x - 2x\sin x$ D $2x\cos x + x^2\sin x$

E $2x\cos x - x^2\sin x$

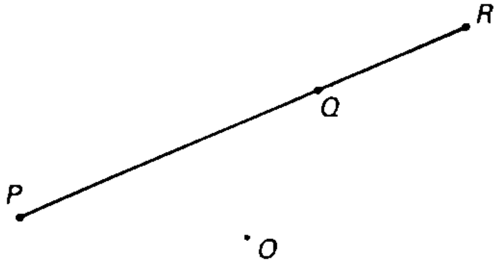
۶. اگر $y=x^۲\cos x$، حاصل $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $۲x\cos x$ ۲) $-x^۲\sin x$

۳) $x^۲\cos x-۲x\sin x$ ۴) $۲x\cos x+x^۲\sin x$

۵) $۲x\cos x-x^۲\sin x$

7.



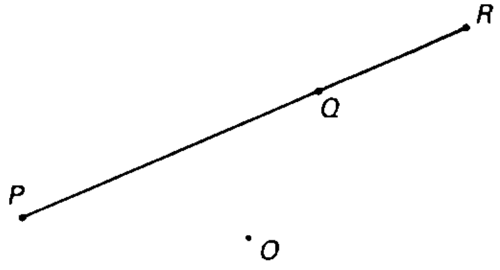
PQR is a straight line and $PQ = 2QR$.
$\overrightarrow{OQ} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OR} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
$\overrightarrow{OP} =$

A $-\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ B $7\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

C $4\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ D $-4\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

E $-7\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

۷. PQR خط راستی است و $PQ=۲QR$. (در صورتی که) $\overrightarrow{OQ}=۳i-۲j$ و $\overrightarrow{OR}=i+۳j$، مقدار $\overrightarrow{OP}$ برابر است با:



۱) $-i+۸j$ ۲) $۷i-۱۲j$

۳) $۴i-۱۰j$ ۴) $-۴i+۱۰j$

۵) $-۷i+۱۲j$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{(9-4x^2)}}\,dx =$

A $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ + constant

B $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ + constant

C $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ + constant

D $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ + constant

E $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ + constant

۸. حاصل $\int \frac{۱}{\sqrt{(۹-۴x^۲)}}dx$ برابر است با :

۱) $\frac{۱}{۳}\sin^{-۱}(\frac{۳x}{۲})+c$

۲) $\frac{۱}{۳}\sin^{-۱}(\frac{۲x}{۲})+c$

۳) $\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{۳x}{۲})+c$

۴) $\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{۲x}{۳})+c$

۵) $\sin^{-۱}(\frac{۲x}{۳})+c$

9. The point (− 1, 3) is at one end of a diameter of the circle whose equation is
$$(x-3)^2+y^2=25.$$
The coordinates of the other end of this diameter are

A (7, − 3) B (7, 3)

C (9, 3) D (6, − 3)

E (1, − 3)

۹. نقطهٔ (۱,۳−) در انتهای قطری از دایره به معادلهٔ $(x-۳)^۲+y^۲=۲۵$ قرار دارد. مختصات انتهای دیگر این قطر برابر است با :

۱) (۷,−۳) ۲) (۷,۳)

۳) (۹,۳) ۴) (۶,−۳)

۵) (۱,−۳)

10. The complete set of values of x for which
$$15x^2 \leqslant 12 - 11x,$$
where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x \leqslant -\frac{4}{3}\} \cup \{x : x \geqslant \frac{3}{5}\}$

B $\{x : x \leqslant -\frac{3}{5}\} \cup \{x : x \geqslant \frac{4}{3}\}$

C $\{x : -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{5}\}$

D $\{x : -\frac{3}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\}$

E $\{x : \frac{3}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\}$

۱۰. مجموعهٔ تمام مقادیر x برای (نابرابری) $۱۵x^۲ \le ۱۲-۱۱x$ که $x \in \mathbb{R}$، برابر است با :

۱) $\{x: x \le -\frac{۴}{۳}\} \cup \{x: x \ge \frac{۳}{۵}\}$

۲) $\{x: x \le -\frac{۳}{۵}\} \cup \{x: x \ge \frac{۴}{۳}\}$

۳) $\{x: -\frac{۴}{۳} \le x \le \frac{۳}{۵}\}$

۴) $\{x: -\frac{۳}{۵} \le x \le \frac{۴}{۳}\}$

۵) $\{x: \frac{۳}{۵} \le x \le \frac{۴}{۳}\}$

11. The lengths of the sides of a triangle are in the ratios 6 : 5 : 4. Then the cosine of the largest angle of the triangle is

A $-\frac{3}{4}$ B $-\frac{1}{8}$ C $\frac{1}{8}$ D $\frac{9}{16}$ E $\frac{3}{4}$

۱۱. طول ضلعهای مثلثی دارای نسبتهای ۴ :۵ :۶ هستند. در این صورت، کسینوس بزرگترین زاویهٔ این مثلث برابر است با :

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$ ۵) $\frac{۳}{۴}$

12. Given that 3 is an approximation to the real root of the equation $f(x) = 0$, where

$$f(x) \equiv x^3 - x^2 - 19,$$

the next approximation obtained by the Newton–Raphson process is

A $2\frac{8}{9}$ **B** $3\frac{1}{9}$ **C** $3\frac{1}{10}$ **D** $2\frac{9}{10}$

E none of the above

۱۲. با فرض آن‌که ۳ یک تقریب برای ریشهٔ حقیقی معادلهٔ f(x) = ۰، باشد که f(x) ≡ x^۳ − x^۲ − ۱۹، نزدیکترین تقریب (که در معادلهٔ فوق صدق کند) توسط روش نیوتن ـ رافسون، برابر است با:

۱) ۲ ۸/۹ ۲) ۳ ۱/۹ ۳) ۳ ۱/۱۰ ۴) ۲ ۹/۱۰

۵) هیچ یک از موارد قبل

13. $\frac{i^{47}}{i^{29}} =$

A -1 **B** 1 **C** $-i$ **D** i **E** i^{-1}

۱۳. حاصل $\frac{i^{47}}{i^{29}}$ برابر است با:

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) i− ۴) i ۵) i^{-1}

14. Given that $(x + 1)$ and $(x - 2)$ are both factors of $(x^3 + ax^2 - 5x + b)$, where a and b are constants, then

A $a = -1,\ b = 5$ **B** $a = 1,\ b = -5$

C $a = -2,\ b = 10$ **D** $a = 2,\ b = -6$

E $a = -2,\ b = 6$

۱۴. با فرض آن‌که (x+۱) و (x−۲) هر دو عاملهای (x^۳ + ax^۲ − ۵x + b) باشند، که a و b ثابتهایی هستند، در این صورت:

۱) a = −۱ و b = ۵ ۲) a = ۱ و b = −۵

۳) a = −۲ و b = ۱۰ ۴) a = ۲ و b = −۶

۵) a = −۲ و b = ۶

15. The sum to infinity of the geometric series

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots$$

is

A $\frac{3}{10}$ **B** $\frac{3}{8}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{9}{10}$ **E** $\frac{1}{4}$

۱۵. حاصل جمع نامتناهی سری هندسی $\frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^5 - \dots$ برابر است با:

۱) ۳/۱۰ ۲) ۳/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۹/۱۰ ۵) ۱/۴

16. Which one of the following curves does *not* have a point of inflexion at $x = 0$?

A $y = \sin x$ **B** $y = \tan x$

C $y = x^4$ **D** $y = x^3$

E $y = x^3 - x$

۱۶. کدام یک از منحنیهای زیر، فاقد نقطهٔ عطف در x = ۰ می‌باشند؟

۱) y = sin x ۲) y = tgx

۳) $y = x^4$ ۴) $y = x^3$

۵) $y = x^3 - x$

17. A solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 2x$$

is

A e^{x^2} **B** $e^{x^2} - 1$ **C** $e^{x^2} + 1$

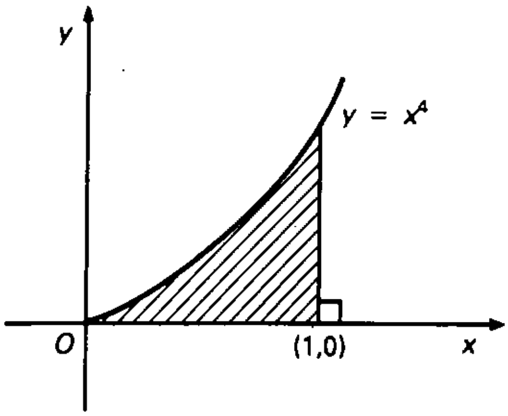
D $2e^{x^2} + 2$ **E** xe^{x^2}

۱۷. یک جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = 2xy + 2x$ برابر است با:

۱) e^{x^2} ۲) $e^{x^2} - 1$ ۳) $e^{x^2} + 1$

۴) $2e^{x^2} + 2$ ۵) xe^{x^2}

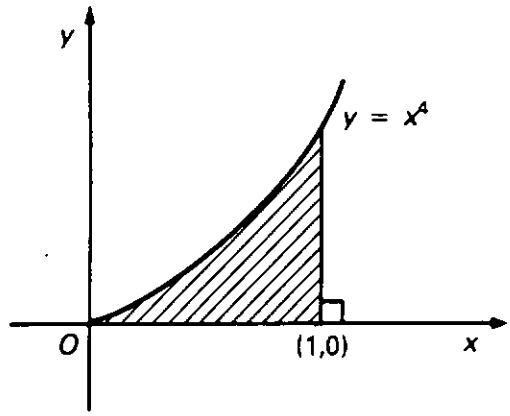
18.



The volume, in cubic units, of the solid generated when the shaded region is rotated completely about Oy is

A $\pi/9$ B $\pi/3$ C $2\pi/3$ D $\pi/15$ E $8\pi/9$

.۱۸



حجم (در واحد مکعب) جسم تولید شده، حاصل از دوران کامل ناحیهٔ هاشور خورده، حول محور oy برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{۹}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۵}$ ۵) $\frac{۸\pi}{۹}$

19. $2\cos 2\theta \cos 4\theta \equiv$

A $\cos 2\theta - \cos 6\theta$ B $\cos 2\theta + \cos 6\theta$

C $\cos 6\theta - \cos 2\theta$ D $\sin 6\theta - \sin 2\theta$

E $\sin 6\theta + \sin 2\theta$

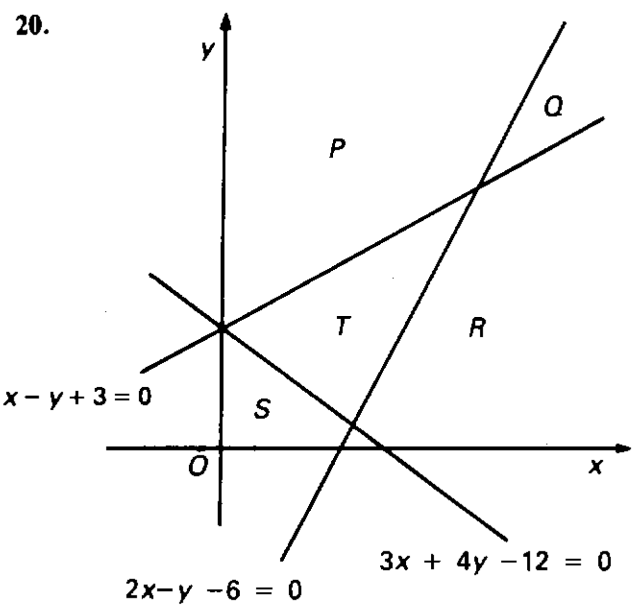
۱۹. حاصل $۲\cos ۲\theta \cos ۴\theta$ برابر است با :

۱) $\cos ۲\theta - \cos ۶\theta$ ۲) $\cos ۲\theta + \cos ۶\theta$

۳) $\cos ۶\theta - \cos ۲\theta$ ۴) $\sin ۶\theta - \sin ۲\theta$

۵) $\sin ۶\theta + \sin ۲\theta$

20.

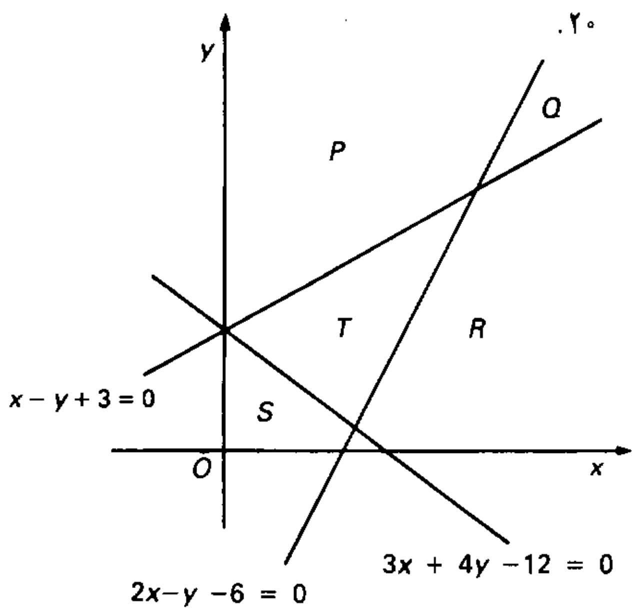


In which one of the labelled regions does the point with coordinates (4, 3) lie?

A P B Q C R

D S E T

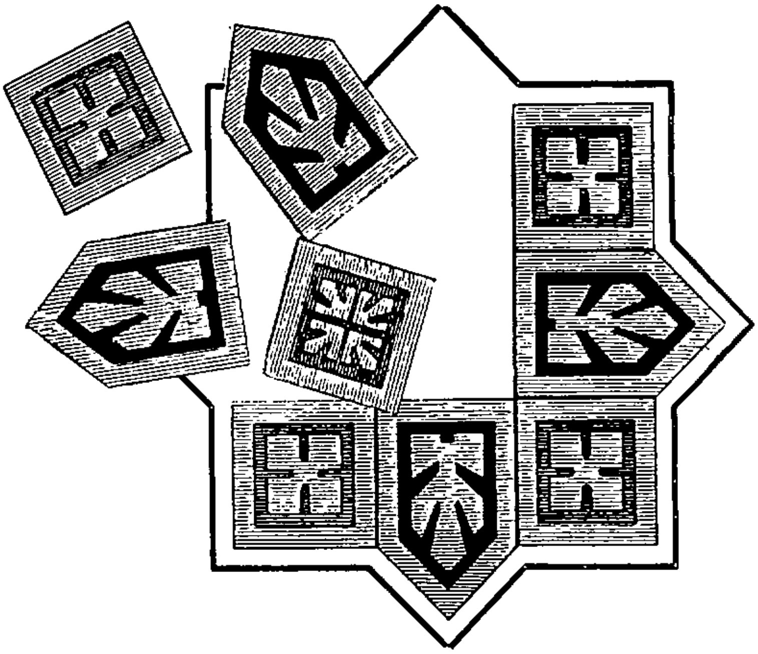
.۲۰



در کدام یک از ناحیه‌های مشخص شده، نقطه‌ای به مختصات (۳ و ۴) قرار دارد؟

۱) P ۲) Q ۳) R

۴) S ۵) T



تجزیه چندجمله ایها

(برای دانش‌آموزان سال اول نظام جدید)

● میرشهرام صدر

تجزیه در لغت به معنای جزء به جزء در آوردن است و در علم ریاضی منظور از تجزیه چندجمله‌ای، روشی است که در صورت امکان بتوان چندجمله‌ای را به صورت حاصلضرب چند عبارت (عامل) نوشت، مثلاً چندجمله‌ای $x^{۲} - ۴$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو عامل $(x - ۲)$ و $(x + ۲)$ نوشت؛ یعنی $x^{۲} - ۴ = (x + ۲)(x - ۲)$.

تجزیه یکی از مباحث مهم جبر و حساب است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل معادلات، تعیین (ب. م.م) و (ک. م.م) چندجمله‌ایها، کسرهای جبری گویا، خارج کردن عبارتی از زیر رادیکال و... است. در زیر روشهای تجزیه چندجمله‌ایها ارائه شده است.

۱. فاکتورگیری

برای استفاده از این روش ابتدا باید فاکتور را معرفی کنیم، بنا به تعریف فاکتور عاملی است که جملات چند جمله‌ای بر آن قابل قسمت هستند. برای تعیین فاکتور کافی است (ب. م.م) جملات را محاسبه کنیم. به عنوان مثال: فاکتور در چندجمله‌ای $۲x^{۳} + ۴x^{۲} - ۸x$ عامل $۲x$ است زیرا کلیه جملات این چندجمله‌ای بر $۲x$ قابل قسمت هستند، یا به تعبیر دیگر (ب. م.م) جملات این چندجمله‌ای عامل $۲x$ است. بعد از تعیین فاکتور برای تجزیه یک چندجمله‌ای به کمک روش فاکتورگیری کافیست هر یک از جملات را بر فاکتور تقسیم کنیم و خارج قسمت را در یک پرانتز به صورت زیر بنویسیم:

با شرط: $(x \neq ۰)$

$$۲x^{۳} + ۴x^{۲} - ۸x = ۲x\left(\frac{۲x^{۳}}{۲x} + \frac{۴x^{۲}}{۲x} - \frac{۸x}{۲x}\right) =$$

$$۲x(x^{۲} + ۲x - ۴)$$

مثال ۱ ــ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = ۲x^{۳}y^{۲} + ۸x^{۷}y^{۵} + ۱۲x^{۳}y^{۳}$

حل: ابتدا بین $۲x^{۳}y^{۲}$ و $۸x^{۷}y^{۵}$ و $۱۲x^{۳}y^{۳}$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک را تعیین می‌کنیم.

$$۲x^{۳}y^{۲} = ۲ \times x^{۳} \times y^{۲}$$

$$۸x^{۷}y^{۵} = ۲^{۳} \times x^{۷}y^{۵}$$

$$۱۲x^{۳}y^{۳} = ۲^{۲} \times ۳ \times x^{۳} \times y^{۳}$$

(ب.م.م) $D = ۲x^{۳}y^{۲}$

یادآوری: (ب.م.م) عبارت است از حاصلضرب عوامل مشترک با نمای کمتر.

هر یک از جمله‌های $۲x^{۳}y^{۲}$ و $۸x^{۷}y^{۵}$ و $۱۲x^{۳}y^{۳}$ را بر $۲x^{۳}y^{۲}$ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A = ۲x^{۳}y^{۲} + ۸x^{۷}y^{۵} + ۱۲x^{۳}y^{۳} =$$

$$۲x^{۳}y^{۲}(۱ + ۴x^{۴}y^{۳} + ۶y)$$

ب) $B = ۷۰a^{۳}b^{۳} - ۳۵a^{۲}b^{۴} + ۲۱ab^{۵}$

$$۷۰a^{۳}b^{۳} = ۲ \times ۵ \times ۷ \times a^{۳} \times b^{۳}$$

$35a^2b^4 = 5\times 7\times a^2\times b^4$

$21ab^5 = 3\times 7\times a\times b^5$

(ب.م.م) $D = 7ab^3$

$B = 70a^3b^3 - 35a^2b^4 + 21ab^5 =$

$7ab^3(10a^2 - 5ab + 3b^2)$

ج) $C = -44ax^m - 286a^2x^{m+1} - 66a^3x^{m+2}$

$-44ax^m = -1\times 2^2\times 11\times a\times x^m$

$-286a^2x^{m+1} = -1\times 2\times 11\times 13\times a^2\times x^m\times x$

$-66a^3x^{m+2} = -1\times 2\times 3\times 11\times a^3\times x^m\times x^2$

(ب.م.م) $D = -1\times 2\times 11\times a\times x^m = -22ax^m$

$C = -44ax^m - 286a^2x^{m+1} - 66a^3x^{m+2} =$

$-22ax^m(2 + 13ax + 3a^2x^2)$

د) $E = a(x+1) + b(x+1)$

ابتدا بین $a(x+1)$ و $b(x+1)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک می‌گیریم، با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که $(x+1)$ عامل مشترک آنها است، درنتیجه :

$$E = a(x+1) + b(x+1) = (x+1)\left[\frac{a(x+1)}{(x+1)} + \frac{b(x+1)}{(x+1)}\right]$$

$E = (x+1)(a+b)$

با فرض : $(x+1 \neq 0)$

هـ) $F = 3x^2(x+y) - 2x(x+y) = (x+y)(3x^2 - 2x)$

(ب.م.م) بین $2x(x+y)$ و $3x^2(x+y)$ عامل $(x+y)$ می‌باشد.

۲. تجزیه دو جمله‌ایها

۲.۱ ــ کلیه عبارتهایی به شکل $a^2 - b^2$ به کمک اتحاد مزدوج بصورت زیر تجزیه می‌شوند،

$a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b)$

دوجمله‌ایهایی که اولاً به صورت تفاضل باشند، ثانیاً هر جمله آن مربع کامل باشند، به کمک اتحاد مزدوج با ضرایب صحیح تجزیه‌پذیر هستند یعنی :

$a^2x^{2m} - b^2y^{2n} = (ax^m - by^n)\ (ax^m + by^n)$

مثال ۲ ــ عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = 16x^2 - 81$

چون هردو جمله مربع کامل و علامت بین آنها تفاضل است لذا به کمک اتحاد مزدوج آنرا تجزیه می‌کنیم ؛

$A = 16x^2 - 81 = (4x)^2 - (9)^2$

$= (4x-9)\ (4x+9)$

ب) $B = 4m^2 - 25m^4 = (2m)^2 - (5m^2)^2$

$= (2m - 5m^2)\ (2m + 5m^2)$

ج) $C = x^4 - 1 = (x^2)^2 - (1)^2 = (x^2-1)\ (x^2+1)$

دوجمله‌ای $(x^2 - 1)$ نیز به کمک اتحاد مزدوج تجزیه‌پذیر است. باید توجه داشته باشیم که تجزیه چندجمله‌ایها را تا مرحله‌ای ادامه می‌دهیم، که پرانتزها دیگر قابل تجزیه نباشند بنابراین :

$C = (x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)$

د) $D = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$

$= \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$

هـ) $E = (2x-y)^2 - 9y^4 = (2x-y)^2 - (3y^2)^2$

$= \left[(2x-y) - 3y^2\right]\left[(2x-y) + 3y^2\right]$

۲.۲ ــ کلیه عبارتهایی به شکل $a^3 + b^3$ یا $a^3 - b^3$ به کمک اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله‌ای تجزیه‌پذیر هستند.

$a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\ (a^2 + ab + b^2)$

دوجمله‌ایهایی که هر جمله آن مکعب کامل[1] باشند، به کمک این نوع اتحادها با ضرایب صحیح تجزیه‌پذیر هستند، بنابراین :

$a^3x^{3m} + b^3x^{3n} = (ax^m + bx^n)$
$(a^2x^{2m} - abx^{m+n} + b^2x^{2n})$

$a^3x^{3m} - b^3x^{3n} = (ax^m - bx^n)$
$(a^2x^{2m} + abx^{m+n} + b^2x^{2n})$

مثال ۳ ــ عبارتهای زیر را تجزیه کنید :

الف) $A = 8x^3 - 27$

چنانچه ملاحظه می‌کنید $8x^3$ و ۲۷ را می‌توان به صورت $(2x)^3$ و $(3)^3$ نوشت، بنابراین هر جمله عبارت بالا مکعب کامل است ؛ در نتیجه به کمک اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دوجمله‌ای تجزیه می‌شود.

$$A=(2x)^3-(3)^3=(2x-3)\left((2x)^2+(2x)(3)+(3)^2\right)$$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+9)$$

ب) $B=2x^4+54x$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=2x(x^3+27)$$

سپس به کمک اتحاد مجموع مکعبات دوجمله‌ای

$$=2x(x^3+3^3)=2x(x+3)(x^2-3x+9)$$

ج) $C=3ax^3y^6-192a^7y^3$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=3a(x^3y^6-64a^6y^3)$$

سپس به کمک اتحاد تفاضل مکعبات دوجمله‌ای

$$=3a\left((xy^2)^3-(4a^2y)^3\right)$$
$$=3a(xy^2-4a^2y)\left[(xy^2)^2+(xy^2)(4a^2y)+(4a^2y)^2\right]$$
$$=3a(xy^2-4a^2y)(x^2y^4+4a^2xy^3+16a^4y^2)$$

د) $E=(x-y)^3-64=(x-y)^3-(4)^3$

$$=\left[(x-y)-4\right]\left[(x-y)^2+4(x-y)+4^2\right]$$
$$=(x-y-4)(x^2+y^2-2xy+4x-4y+16)$$

۳. تجزیه سه‌جمله‌ایها

۳.۱ ـ سه‌جمله‌ایهایی به شکل $a^2+2ab+b^2$ یا $a^2-2ab+b^2$ به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت زیر تجزیه‌پذیر هستند:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)=(a+b)(a+b)$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$

سه جمله‌ایهایی به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای با ضرایب گویا تجزیه‌پذیرند، که دارای دو جمله مربع کامل هستند و جمله دیگر دو برابر حاصلضرب جذرجمله‌های‌مربع کامل است.

مثال ۴ ـ چند جمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2-4x+4=(x)^2-2(x)(2)+(2)^2=$
$(x-2)^2=(x-2)(x-2)$

ب) $B=4ax^2+12axy+9ay^2$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=a(4x^2+12xy+9y^2)$$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$=a\left[(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2\right]=a(2x+3y)^2$$
$$=a(2x+3y)(2x+3y)$$

ج) $C=6ab-a^2b-9b$ ابتدا به کمک فاکتورگیری

$$=-b(a^2-6a+9)$$

بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$=-b(a^2-2(3)a+3^2)=-b(a-3)^2$$
$$=-b(a-3)(a-3)$$

د) $a^2+\frac{1}{4}+a=a^2+2(a)(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2=(a+\frac{1}{2})^2$

$$=(a+\frac{1}{2})\,(a+\frac{1}{2})$$

هـ) $\frac{9x^2}{25}-2+\frac{25}{9x^2}=\left(\frac{3x}{5}\right)^2-2\left(\frac{3x}{5}\right)\left(\frac{5}{3x}\right)+\left(\frac{5}{3x}\right)^2$

$$=\left(\frac{3x}{5}-\frac{5}{3x}\right)^2=\left(\frac{3x}{5}-\frac{5}{3x}\right)\left(\frac{3x}{5}-\frac{5}{3x}\right)\qquad x\neq 0$$

۳.۲ ـ سه جمله‌ایهایی به شکل $x^2+(a+b)x+ab$ به کمک اتحاد یک جمله مشترک به صورت زیر تجزیه می‌شوند.

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

سه‌جمله‌ایهایی که فقط یک جمله مربع کامل دارند یا اگر دو جمله آنها مربع کامل است آنگاه جمله دیگر دو برابر حاصلضرب جذر جمله‌های مربع کامل نباشد، به کمک اتحاد یک جمله مشترک در صورت امکان تجزیه‌پذیر هستند.

مثال ۵ ـ عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2-8x+15$

سه جمله‌ای فوق را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم و آن را به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه کنیم.

$$A=x^2-8x+15=x^2+(-3+(-5))x+(-3)(-5)$$
$$=(x-3)(x-5)$$

در این مثال دو عدد پیدا می‌کنیم که جمعشان ۸- و ضربشان ۱۵ باشد، با کمی دقت درمی‌یابیم که آن دو عدد ۵- و ۳- هستند.

ب) $B=x^2+7xy+12y^2$

دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آنها $7y$ و ضرب آنها $12y^2$ باشد. با اندکی تأمل، ملاحظه می‌کنیم که آن دو عدد $3y$ و $4y$ می‌باشند بنابراین؛

$$B=x^2+7xy+12y^2=x^2+(3x+4y)x+(3y)(4y)$$

$=(x+۳y)(x+۴y)$

ج) $C=۴x^۲-۱۰x+۶$

سه جمله‌ای بالا شامل یک جمله مربع کامل است ($۴x^۲$) بنابراین در صورت امکان می‌توانیم آن را به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه کنیم، می‌دانیم که $۴x^۲$ مربع جمله مشترک است بنابراین جمله مشترک $۲x$ است. درنتیجه:

$C=۴x^۲-۱۰x+۶=(۲x)^۲+(-۵)\times ۲x+۶$

اکنون دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آنها ۵- و ضرب آنها ۶ باشد، که آن دو عدد ۲- و ۳- هستند، لذا:

$$C=(۲x-۲)(۲x-۳)$$
$$=(۲x)^۲+(-۲+(-۳))۲x+(-۲)(-۳)$$
$$=۲(x-۱)(۲x-۳)$$

۳.۳ـ روش تبدیل [۲]

سه جمله‌ایهایی که به کمک دو روش قبل تجزیه‌پذیر نباشند و ضریب $x^۲$ در آنها مربع کامل نباشد، در صورت امکان برای تجزیه آنها از روش تبدیل استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا تمامی جملات سه جمله‌ای درجه دوم را در ضریب $x^۲$ ضرب می‌کنیم، سپس با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک آنرا تجزیه می‌کنیم و در مرحله نهایی حاصل را براولین ضریب $x^۲$ تقسیم می‌کنیم.

مثال ۶ ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=۶x^۲-۵x-۶$

چون ضریب $x^۲$ مربع کامل نیست، ابتدا عبارت فوق را در ضریب $x^۲$ یعنی عدد ۶ ضرب می‌کنیم:

$۶A=۶\times(۶x^۲-۵x-۶)=۳۶x^۲-۵(۶x)-۳۶$

اکنون به کمک اتحاد یک جمله مشترک و با توجه به اینکه جمله مشترک $(۶x)$ است، دو عدد پیدا می‌کنیم که جمعشان ۵- و ضربشان ۳۶- باشد. با کمی دقت درمی‌یابیم که آن دو عدد ۴+ و ۹- هستند، درنتیجه:

$۶A=(۶x-۹)(۶x+۴)$

به کمک فاکتورگیری:

$۶A=۳\times(۲x-۳)\times ۲(۳x+۲)=۶(۲x-۳)(۳x+۲)$

در مرحله آخر طرفین را بر ۶ تقسیم می‌کنیم، لذا:

$A=(۲x-۳)(۳x+۲)$

ب) $B=۲۰b^۲-۲۴bc-۹c^۲$

طرفین رابطه بالا را در ۲۰ ضرب می‌کنیم:

$$۲۰B=۲۰\times(۲۰b^۲-۲۴bc-۹c^۲)$$
$$=۴۰۰b^۲-۲۴c(۲۰b)-۱۸۰c^۲$$

با توجه به اینکه جمله مشترک $۲۰b$ می‌باشد و دو عددی که جمعشان $۲۴c$- و ضربشان $۱۸۰c^۲$- است، به صورت $۳۰c$- و $۶c$+ هستند خواهیم داشت:

$۲۰B=(۲۰b+۶c)(۲۰b-۳۰c)$

به کمک فاکتورگیری داریم:

$۲۰B=۲\times(۱۰b+۳c)\times ۱۰\times(۲b-۳c)$

طرفین را بر ۲۰ تقسیم می‌کنیم.

$$۲۰B=۲۰(۱۰b+۳c)(۲b-۳c)$$
$$B=(۱۰b+۳c)(۲b-۳c)$$

ج) $C=۶a^۳x-۱۳a^۲x^۲+۶ax^۳$

ابتدا به کمک فاکتورگیری خواهیم داشت:

$$C=ax(۶a^۲-۱۳ax+۶x^۲) \quad (۱)$$

اکنون به کمک روش تبدیل سه جمله‌ای $Q=۶a^۲-۱۳ax+۶x^۲$ را تجزیه می‌کنیم. برای این کار در مرحله اول باید طرفین را در عدد ۶ ضرب کنیم، درنتیجه:

$$۶Q=۶\times(۶a^۲-۱۳ax+۶x^۲)$$
$$۶Q=۳۶a^۲-۱۳x(۶a)+۳۶x^۲$$

جمله مشترک در اینجا $۶a$ است و دو عددی که جمع آنها $۱۳x$- و ضرب آنها $۳۶x^۲$ است به صورت $۹x$- و $۴x$- هستند، بنابراین:

$۶Q=(۶a-۹x)(۶a-۴x)$

به کمک فاکتورگیری داریم:

$$۶Q=۳\times(۲a-۳x)\times ۲(۳a-۲x)$$
$$۶Q=۶(۲a-۳x)(۳a-۲x)$$

چون در ابتدا طرفین را در ۶ ضرب کردیم، اکنون باید

طرفین را بر همان عدد ۶ تقسیم کنیم، لذا خواهیم داشت:

$Q=(2a-3x)(3a-2x)$

عبارت به دست آمده تجزیه، $6x^2-13ax+6a^2$ است. با جایگزینی در رابطه(۱) خواهیم داشت: $c=ax(2a-3x)(3a-2x)$

۴. تجزیه چهارجمله ایها

۴.۱ ــ چهارجمله ایهای تجزیه‌پذیری که سه جمله آنها به فرمهای $a^2+2ab+b^2$ یا $a^2-2ab+b^2$ باشند، با دسته‌بندی چنین سه‌جمله ایهایی در یک پرانتز و استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد مزدوج تجزیه‌پذیر هستند.

مثال ۷ ــ چندجمله ایهای زیر را تجزیه کنید.

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) $A=x^2+2x-y^2+1=(x^2+2x+1)-y^2$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$=(x+1)^2-y^2$

بالاخره به کمک اتحاد مزدوج:

$=[(x+1)-y][(x+1)+y]$

ب) $B=m^4-x^2+2xp-p^2$

$=m^4-(x^2-2xp+p^2)$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$=m^4-(x-p)^2$

بالاخره به کمک اتحاد مزدوج:

$=(m^2-(x-p))(m^2+(x-p))$

$=(m^2-x+p)(m^2+x-p)$

ج) $C=4by-b^2+9x^2-4y^2$

$=9x^2-(b^2-4by+4y^2)$

سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای $=9x^2-(b-2y)^2$

$=[3x-(b-2y)][3x+(b-2y)]$

بالاخره به کمک اتحاد مزدوج:

$=(3x-b+2y)(3x+b-2y)$

۴.۲ ــ چهارجمله ایهای تجزیه‌پذیری که سه جمله آنها به صورت قبل نباشند، آنها را طوری به دو دسته دو جمله‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که پرانتزهای مشترک قابل فاکتورگیری به وجود آید، سپس با فاکتورگیری از پرانتز مشترک تجزیه چهارجمله‌ای به دست می‌آید.

مثال ۸ ــ چندجمله ایهای زیر را تجزیه کنید.

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم: الف) $A=x^2+ax+ab+bx$

$=(x^2+ax)+(ab+bx)$

$=x(x+a)+b(a+x)$

$=(x+a)(x+b)$

ب) $B=a^2-ab-b-1=(a^2-1)-(ab+b)$

$=(a-1)(a+1)-b(a+1)$

سپس با فاکتورگیری از پرانتز مشترک داریم:

$=(a+1)[(a-1)-b]$

$=(a+1)(a-1-b)$

ج) $C=a^5-a^3+a^2-1$

$=(a^5-a^3)+(a^2-1)$

$=a^3(a^2-1)+(a^2-1)$

از پرانتز مشترک فاکتور می‌گیریم:

$=(a^2-1)(a^3+1)$

تجزیه را تا مرحله آخر ادامه می‌دهیم:

$=(a-1)(a+1)(a+1)(a^2-a+1)$

د) $D=-5a^3+10x^3-25a^2x^2+2ax$

$=(-5a^3-25a^2x^2)+(10x^3+2ax)$

$=-5a^2(a+5x^2)+2x(5x^2+a)$

$=(5x^2+a)(-5a^2+2a)$

۵. تجزیه سه‌جمله ایها در حالت خاص[3]

برای تجزیه سه‌جمله ایهای تجزیه‌پذیری که به کمک روشهای قبل تجزیه نشوند، باید یک جمله آنها را به صورت جمع جبری دو جمله بنویسیم تا این که به چهارجمله‌ای تبدیل گردند. سپس به کمک روشهای تجزیه چهار جمله ایها آنها را به صورت حاصلضرب عوامل تجزیه کنیم.

مثال ۹ ــ چندجمله ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^4+x^2+1$

ابتدا x^2 را به صورت $2x^2-x^2$ می‌نویسیم، یعنی

$A=x^4+2x^2-x^2+1$

$=(x^4+2x^2+1)-x^2$

حال با دسته‌بندی جملات آن را تجزیه می‌کنیم.

$=(x^2+1)^2-x^2=\left[(x^2+1)-x\right]\left[(x^2+1)+x\right]$

ب) $B=x^8+1+x^4$

ابتدا x^4 را به صورت $2x^4-x^4$ می‌نویسیم،

$=x^8+1+2x^4-x^4$

$B=(x^8+2x^4+1)-x^4$

$=(x^4+1)^2-x^4=\left[(x^4+1)-x^2\right]\left[(x^4+1)+x^2\right]$

با استفاده از مثال قبل خواهیم داشت:

$B=(x^4+1-x^2)(x^2+1-x)(x^2+1+x)$

ج) $C=a^3+3a^2-4$

ابتدا ۴- را به صورت ۱-۳- می‌نویسیم:

$=a^3+3a^2-3-1$

$=(a^3-1)+(3a^2-3)$

$=(a-1)(a^2+a+1)+3(a-1)(a+1)$

$=(a-1)\left[(a^2+a+1)+3(a+1)\right]=(a-1)(a^2+4a+4)$

$=(a-1)(a+2)^2$

$=(a-1)(a+2)(a+2)$

۶. تجزیه پنج‌جمله‌ایها و شش‌جمله‌ایها

۶.۱ ـ این‌گونه عبارات ممکن است شامل دو سه جمله‌ای بفرمهای $a^2+2ab+b^2$ یا $a^2-2ab+b^2$ باشند، در این حالت کافیست ابتدا سه‌جمله‌ایها را دسته‌بندی کنیم سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج آنرا تجزیه نماییم.

مثال۱۰ ـ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2+4x-5-y^2-4y$

ابتدا ۵- را به صورت ۹-۴ می‌نویسیم، تا این که دو سه‌جمله‌ای به فرمهای بالا به وجود آیند، بنابراین:

$A=x^2+4x+4-9-y^2-6y$

سپس دو «سه‌جمله‌ای» دسته‌بندی می‌کنیم:

$=(x^2+4x+4)-(9+y^2+6y)$

$=(x+2)^2-(3+y)^2$

بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$=\left[(x+2)-(3+y)\right]\left[(x+2)+(3+y)\right]$

به کمک اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$=(x-y-1)(x+y+5)$

ب) $B=x^2-y^2+14x-6y+40$

ابتدا عدد ۴۰ را به صورت ۹-۴۹ می‌نویسیم:

$B=x^2-y^2+14x-6y+49-9$

سپس دو «سه‌جمله‌ای» دسته‌بندی می‌کنیم:

$=(x^2+4x+49)-(y^2+6y+9)$

بنابر اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$=(x+7)^2-(y+3)^2$

به کمک اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$=\left[(x+7)-(y+3)\right]\left[(x+7)+(y+3)\right]$

$=(x-y+4)(x+y+10)$

۶.۲ ـ پنج جمله‌ای یا شش‌جمله‌ای ممکن است به کمک اتحاد یک جمله مشترک تجزیه شوند، در این حالت جملات غیرمشترک بصورت چندجمله‌ای هستند، که به کمک دسته‌بندی و فاکتورگیری چنین عبارتی را تجزیه می‌کنیم.

مثال۱۱ ـ چندجمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $A=x^2+x-6+13y-6y^2+xy$

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

$=x^2+(x+xy)+(-6y^2+13y-6)$

سپس هر پرانتز را تجزیه می‌کنیم.

$=x^2+(1+y)x+(-2y+3)(3y-2)$

با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک و با توجه به اینکه جمله مشترک x و جمله‌های غیرمشترک $(3y-2)$ و $(-2y+3)$ هستند، خواهیم داشت:

$A=(x-2y+3)(x+3y-2)$

ب) $B=4x^2+6xy+2y^2+3my+2mx-2m^2$

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

$=4x^2+(6xy+2mx)+(2y^2+3my-2m^2)$

سپس هر پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$=4x^2+(3y+m)\times 2x+(2y-m)(y+2m)$

اکنون با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک خواهیم داشت:

$B=(2x+2y-m)(2x+y+2m)$

ج) $C = x^2 + (5xy + x) + (4y^2 + y)$

ابتدا دسته‌بندی می‌کنیم:

$= x^2 + 4y^2 + 5xy + x + y$

سپس هر پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$C = x^2 + (5y + 1) \times x + y(4y + 1)$

اکنون با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک خواهیم داشت

$= (x + y)(x + 4y + 1)$

۶.۳ ــ در این گونه عبارات ممکن است یک سه‌جمله‌ی به فرمهای $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ و سه‌جمله‌ای دیگر به فرم $x^2 + (a + b)x + ab$ یا یک چهارجمله‌ای موجود باشد، در این صورت با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد یک جمله مشترک و به کمک روشهای دسته‌بندی در چهارجمله‌ایها و فاکتورگیری، عبارت را به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم.

مثال ۱۲ ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $A = 6x^2 - 5x - 2xy + y + 1$

ابتدا $6x^2$ را به صورت $4x^2 + 2x^2$ و $-5x$ را به صورت $-4x - x$ می‌نویسیم، بنابراین:

$A = 4x^2 + 2x^2 - 4x - x - 2xy + y + 1$

حال با دسته‌بندی جملات داریم:

$= (4x^2 + 4x + 1) + (2x^2 - x - 2xy + y)$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و روشهای تجزیه چهارجمله‌ایها خواهیم داشت:

$= (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x - y)$

به کمک روش فاکتورگیری:

$= (2x - 1)[(2x - 1) + (x - y)]$

$= (2x - 1)(3x - y - 1)$

ب) $B = 6x^2 + 2xy - 3y + x - 15$

ابتدا $6x^2$ را به صورت $4x^2 + 2x^2$ و x را به صورت $4x - 3x$ می‌نویسیم، بنابراین:

$B = 4x^2 + 2x^2 + 2xy - 3y + 4x - 3x - 15$

اکنون با روش دسته‌بندی جملات داریم:

$= (4x^2 + 4x - 15) + (2x^2 + 2xy - 3x - 3y)$

با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک و روشهای تجزیه چهارجمله‌ایها خواهیم داشت:

$B = (2x - 3)(2x + 5) + (2x - 3)(x + y)$

به کمک روش فاکتورگیری: $= (2x - 3)[(2x + 5) + (x + y)] =$

$= (2x - 3)(3x + y + 5)$

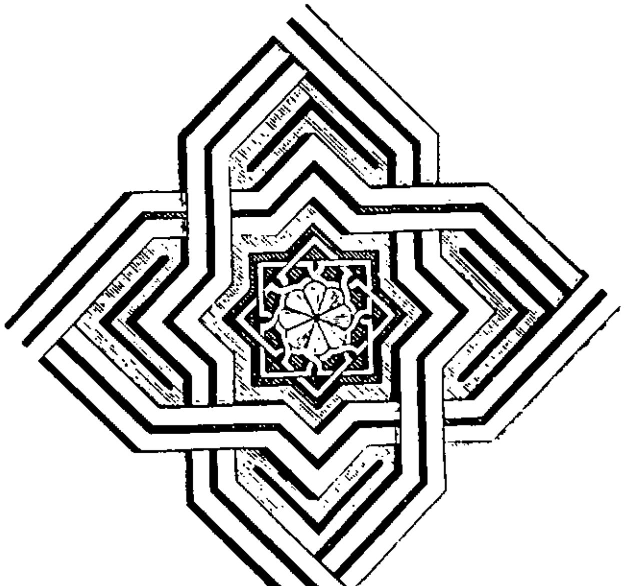
لازم به تذکر است که تجزیه پنج جمله‌ایها و شش‌جمله‌ایها، ذهن خلاق و مبتکری را می‌طلبد و دانش‌آموز باید با تیزبینی خاص و ترکیب مطالب خوانده شده درباره تجزیه چندجمله‌ایها مبادرت به تجزیه این گونه عبارات کند.

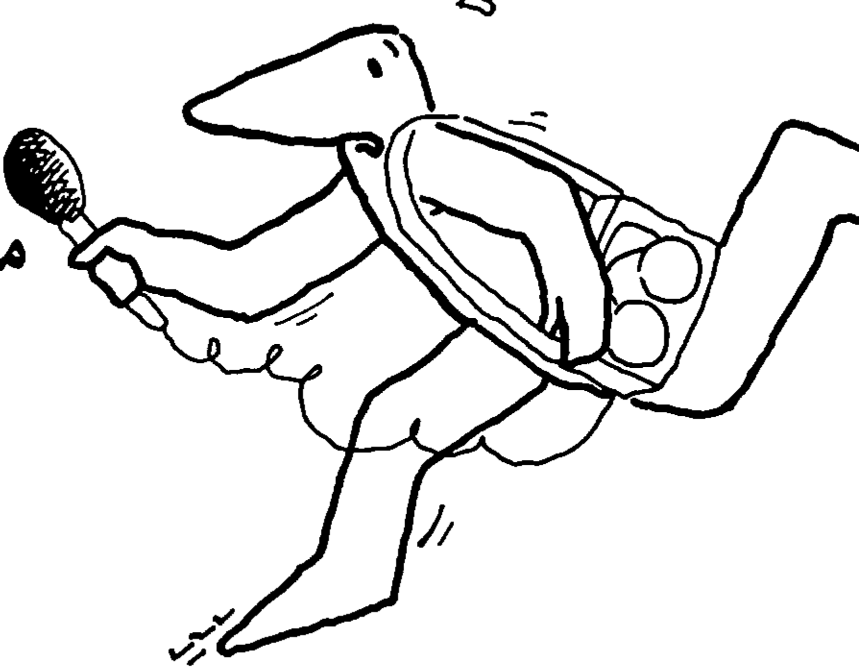
پانوشتها:

۱. هرجمله به فرم a^3 را مکعب کامل گویند. (که در آن $a \in z$) بعنوان مثال ۸ یا ۲۷ مکعب کامل هستند زیرا ۸ را می‌توان به صورت 2^3 یا ۲۷ را می‌توان به صورت 3^3 نوشت.

۲. دلیل نامگذاری «روش تبدیل» این که با انجام عملیاتی سه جمله‌ای را به اتحاد یک جمله مشترک تبدیل می‌کنیم، سپس آن را تجزیه می‌کنیم.

۳. این طریق تجزیه را روش شکستن جملات گویند.





مصاحبه با یک عدد

از: کلیفورد آ. پیکاور[1]

ترجمهٔ کریم احمدی دلیر

گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تبریز

اگر عقیدهٔ آن رایس[2]، نویسندهٔ پرفروشترین رمانها را باور داشته باشیم، خون‌آشامان[3] از بسیاری جهات شبیه انسان هستند، امّا رازهای زنده‌ای که در میان ما به طور پنهانی زندگی می‌کنند و مرگبار هستند. خون‌آشام‌هایی هم در دنیای ریاضیات، اعداد، وجود دارند که اعدادی عادی به نظر می‌رسند امّا یک اختلاف پنهانی در بردارند. آنها در واقع حاصلضرب دو عدد اجداد خود هستند که هرگاه در هم ضرب شوند، با یکدیگر درمی‌آمیزند و در عدد خون‌آشام ابقا می‌شوند. یک چنین موردی را در نظر بگیرید: ۲۱۸۷ = ۸۱×۲۷. ■ یک عدد خون‌آشام دیگر ۱۴۳۵ است که حاصلضرب ۳۵ و ۴۱ است.

من خون‌آشامان واقعی را مثل دو مثال قبلی چنین تعریف می‌کنم که دارای سه قاعده هستند: انها تعداد زوجی از ارقام را دربردارند. هر یک از اعداد اجدادی دارای نیمی از رقمهای خون‌آشام هستند. و سرانجام، یک عدد خون آشام واقعی به طور ساده با اضافه کردن صفرها به انتهای اعداد ایجاد نمی‌شود، مثل:

۲۱۸,۷۰۰,۰۰۰,۰۰۰ = ۸۱۰,۰۰۰×۲۷۰,۰۰۰

خون‌آشامان واقعی هرگز این‌چنین آشکار نمی‌توانستند باشند.

اعداد خون‌آشام به طور مرموز در دستگاه اعداد ما سُکنی گزیده‌اند، اما بیشتر آنها تاکنون کشف نشده‌اند. هنگامی که آیینهٔ نقره‌ای و میخ‌چوبی‌ام را قاپیدم و شروع به جستجوی آنها کردم، علاوه بر دو عدد بالایی، پنج عدد خون‌آشام چهار رقمی دیگر نیز یافتم. آیا می‌توانید آنها را بیابید؟ آیا می‌توانید اعداد خون‌آشام با ارقام بیشتری را بیابید؟

پاسخها:

اعداد زیر پنج خون‌آشام واقعی چهار رقمی دیگر هستند:

۱۳۹۵ = ۹۳×۱۵   ۱۵۳۰ = ۵۱×۳۰   ۱۲۶۰ = ۶۰×۲۱

۶۸۸۰ = ۸۶×۸۰   ۱۸۲۷ = ۸۷×۲۱

در واقع اعداد خون‌آشام بسیار بزرگتری نیز وجود دارند. برای مثال ۱۵۵ عدد خون‌آشام شش رقمی موجودند. اخیراً، من دانشمندان کامپیوتر و ریاضیدانان سرتاسر جهان را برای ارائهٔ بزرگترین عدد خون‌آشامی که می‌توانستند بیابند به مبارزه طلبیدم. آخرین رکورد جهانی عبارت است از:

۱,۲۳۴,۵۵۴,۳۲۱×۹,۱۶۲,۳۶۱,۰۸۶ =

۱۱,۳۱۱,۴۳۲,۴۶۹,۲۸۳,۵۵۲,۶۰۶

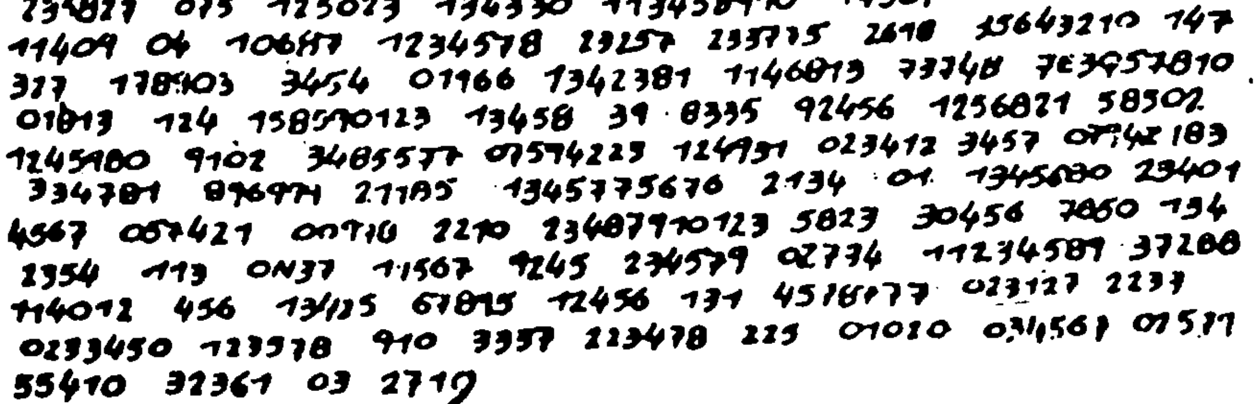
(اگر توانستید یک رکورد جهانی جدید بیابید، یا اگر مایل به دریافت اطلاعات بیشتری (شامل لیستی از اعداد خون‌آشام شش رقمی) هستید لطفاً به آدرس:

Clifford A. Pickover, c/o Discover, 114 Fifth Av. New York, N. Y. 10011-5690

نامه بنویسید.)

(برگردان از: مجله Discover June 1995)

1. Clifford A.Pickover.
2. Anne Rice.
3. Vampire.





جزء صحیح

● علی حسن‌زاده ماکویی

۱. هر عدد حقیقی مانند x را می‌توان به صورت مجموع یک عدد صحیح مانند n، $(n\in\mathbb{Z})$ و عدد دیگری مانند $a(۰\le a<۱)$ نوشت.

مثال (۱) $x=۷/۴\ ,\ n=۷\ ,\ x=۰/۴$

(۲) $x=-۱۲/۷\ ,\ n=-۱۳\ ,\ a=۰/۳$

(۳) $x=\sqrt{۵}\ ,\ n=۲\ ,\ a=\sqrt{۵}-۲$

(۴) $x=-\pi\ ,\ n=-۴\ ,\ a=۴-\pi$

جزء صحیح هر عدد حقیقی مانند x را با نماد [x] نشان داده و آن را براکت می‌خوانند (Bracket)، x هرگاه $n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\le x<n+۱$ آنگاه:

$$[x]=n$$

با توجه به مطالب فوق [x] بزرگترین عدد صحیح موجود در x و نابزرگتر (کوچکتر یا مساوی) از آن است.

به مثالهای زیر توجه کنید.

(۱) $\left[\frac{۱۷}{۳}\right]=۵$

(۲) $\left[-\frac{۱۷}{۳}\right]=-۶$

(۳) $\left[(\frac{۷}{۲})^۲\right]=۱۲$

(۴) $\left(\left[\frac{۷}{۲}\right]\right)^۲=۹$

(۵) $\left[-(\frac{۳}{\pi})^۲\right]=-۱$

(۶) $-\left[(\frac{۳}{\pi})\right]=۰$

(۷) $\left[(\sqrt{۳}-۲)^{۲k-۱}\right]=-۱$

(۸) $k\in\mathbb{N}\ ,\ \left[(\sqrt{۳}-۲)^{۲k}\right]=۰$

زیرا $-۱\le a<۰\Rightarrow[a]=-۱$ و $۰\le b<۱\Rightarrow[b]=۰$

و $-۱<\sqrt{۳}-۲<۰\Rightarrow-۱<(\sqrt{۳}-۲)^{۲k-۱}<۰$

و $۰<(\sqrt{۳}-۲)^{۲k}<۱$

یادآوری می‌شود که در مواردی (مثلاً محاسبه‌های رایانه‌ای) به کوچکترین عدد صحیح موجود در x که ناکوچکتر (بزرگتر یا مساوی) از x است، نیازمندیم. روی این اصل، دو نوع جزء صحیح برای هر عدد حقیقی مانند x تعریف کرده‌اند، بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از x را با نماد $\lfloor x\rfloor$ یا [x] و کوچکترین عدد صحیح ناکوچکتر از x را با نماد $\lceil x\rceil$ نشان می‌دهند.

مثلاً

$$[۱/۴]=\lfloor ۱/۴\rfloor=۱\ ,\ \lceil ۱/۴\rceil=۲$$

$[-۳/۹]=\lfloor -۳/۹\rfloor=-۴\ ,\ \lceil -۳/۹\rceil=-۳$

$[\sqrt{۲}-۱]=\lfloor\sqrt{۲}-۱\rfloor=۰\ ,\ \lceil\sqrt{۲}-۱\rceil=۱$

$[۱-\sqrt{۳}]=\lfloor ۱-\sqrt{۳}\rfloor=-۱\ ,\ \lceil ۱-\sqrt{۳}\rceil=۰$

به طورکلی هرگاه، $n\in \mathbb{Z}\ ,\ n<x<n+۱$ آنگاه:

$[x]=\lfloor x\rfloor=n\ ,\ \lceil x\rceil=n+۱$

در بعضی از کتابهای ریاضی عدد $a-[a]$ (جزء ناصحیح a) را با نماد $\{a\}$ نشان می‌دهند، و به آن براسه (Brace) عدد a می‌گویند. واضح است که $۰<\{a\}<۱$.

۲. تابع $f(x)=[x]$ را که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) و بردش مجموعه عددهای صحیح نسبی و صفر($\mathbb{Z}$) است تابع جزء صحیح می‌گویند. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{Z}\ ,\ f(x)=[x]$

(در بعضی از کتابهای ریاضی تابع جزء صحیح را با نماد، $f(x)=E(x)$ نیز نشان داده‌اند).

۳. چند رابطه در مورد تابعهای جزء صحیح

(۱) $m\in\mathbb{Z}\ ,\ [x+m]=[x]+m$

زیرا: $n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\le x<n+۱\Rightarrow [x]=n$

$n+m\le x+m<n+۱+m\Rightarrow [x+m]=$

$n+m=[x]+m$

مثال: $[-۷/۶+۱]=[-۶/۶]=-۷$

و $[-۷/۶+۱]=[-۷/۶]+۱=-۸+۱=-۷$

و $[۲۲/۴-۵]=[۱۷/۴]=۱۷$

$[۲۲/۴-۵]=[۲۲/۴]-۵=۲۲-۵=۱۷$

دقت کنید که اگر $m\in\mathbb{R}\ ,\ m\notin Z$

آنگاه $[x+m]\neq[x]+m$

زیرا $([x]+m)\notin Z\ ,\ [x+m]\in Z$

(۲) $$[-x]=\begin{cases}-[x]\ ,\ x\in Z\\ -[x]-۱\ ,\ x\notin Z\end{cases}$$

زیرا $n\in Z\ ,\ x=n\Rightarrow [x]=n\ ,\ -x=-n\Rightarrow$

$[-x]=-n=-[x]$

و $n<x<n+۱\Rightarrow [x]=n\ ,\ -(n+۱)<-x<-n\Rightarrow$

$[-x]=-n-۱=-[x]-۱$

مثال: $[-۷]=-۷=-[x]$

$[-۱۲/۴]=-۱۳\ ,\ -[۱۲/۴]-۱=-۱۲-۱=-۱۳$

(۳) $[x+y]$ برابر است با: $[x]+[y]$ یا $[x]+[y]+۱$.

زیرا $m,n\in Z,\ \ m\le x<m+۱\Rightarrow [x]=m$

$n\le y<n+۱\Rightarrow [y]=n\ ,\ m+n\le x+y<m+n+۲$

الف $m+n\le x+y<m+n+۱\Rightarrow$

$[x+y]=m+n=[x]+[y]$

ب $m+n+۱\le x+y<m+n+۲\Rightarrow$

$[x+y]=m+n+۱=[x]+[y]+۱$

مثال: الف $[۲/۳+۷/۴]=[۹/۷]=۹$

$[۲/۳]+[۷/۴]=۲+۷=۹$

ب $[۵/۶+۱۱/۷]=[۱۷/۳]=۱۷$

$[۵/۶]+[۱۱/۷]+۱=۵+۱۱+۱=۱۷$

(۴) $[۲x]=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$

زیرا: $n\in Z\ ,\ n\le x<n+۱\Rightarrow [x]=n$

الف $n\le x<n+\frac{۱}{۲}\ ,\ n+\frac{۱}{۲}\le x+\frac{۱}{۲}<n+۱\Rightarrow$

$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=n$

$۲n\le ۲x<۲n+۱\Rightarrow [۲x]=۲n=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$

ب $n+\frac{۱}{۲}\le x<n+۱\ ,\ n+۱\le x+\frac{۱}{۲}<n+\frac{۳}{۲}$

و $۲n+۱\le ۲x<۲n+۲\ ,\ [x]=n\ ,\ \left[x+\frac{۱}{۲}\right]=n+۱$

$[۲x]=۲n+۱=[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$

مثال: $[۲\times -۷/۸]=[-۱۵/۶]=-۱۶$

$[-۷/۸]=-۸\ ,\ \left[-۷/۸+\frac{۱}{۲}\right]=[-۷/۳]=-۸$

و $[۲\times ۶/۸]=[۱۳/۶]=۱۳$

$[۶/۸]=۶\ ,\ \left[۶/۸+\frac{۱}{۲}\right]=[۷/۳]=۷$

(۵) $[۳x]=[x]+\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]$

زیرا: $n+\frac{۲}{۳}\le x<n+۱$ یا $n+\frac{۱}{۳}\le x<n+\frac{۲}{۳}$ یا $n\in Z\ ,\ n\le x<n+\frac{۱}{۳}$ با توجه به بررسی رابطه ۴ به آسانی می‌توان رابطه فوق را اثبات کرد.

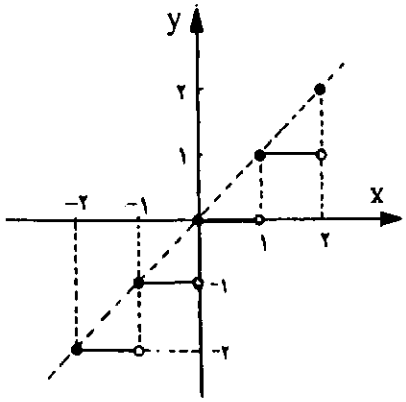
مثال: $[۳\times ۵/۴]=[-۱۶/۲]=-۱۷$

و $[-۵/۴]=-۶\ ,\ \left[-۵/۴+\frac{۱}{۳}\right]=\left[\frac{-۷۶}{۱۵}\right]=-۶$

$\left[-۵/۴+\frac{۲}{۳}\right]=\left[\frac{-۷۱}{۱۵}\right]=-۵\quad (-۶)+(-۶)+(-۵)=-۱۷$

۴. رسم نمودار تابع جزء صحیح

جهت آشنا شدن با رسم نمودار تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند، به مثالهای زیر توجه کنید.



(۱) $y=[x]\ ,\ x\in[-۲,۲]$

$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=-۲$

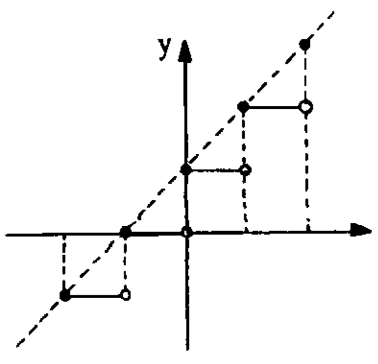
$-۱\le x<۰\Rightarrow y=-۱$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۱$

$x=۲\Rightarrow y=۲$

نقطه‌های پرجزو نمودار هستند و نقطه‌های توخالی جزو نمودار نیستند.



(۲) $y=[x+۱]\ ,\ x\in[-۲,۲]$

$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=-۱$

$-۱\le x<۰\Rightarrow y=۰$

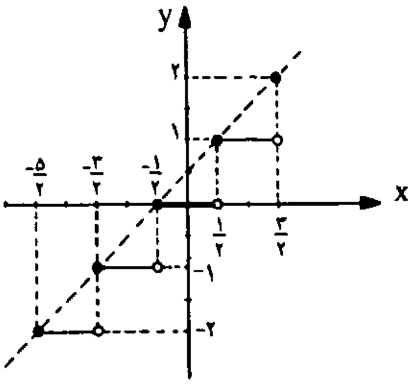
$۰\le x<۱\Rightarrow y=۱$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۲$

$x=۲\Rightarrow y=۳$

نمودار قبل‌همان نمودار $y=[x]$ است که به اندازهٔ یک واحد روی محور y ها تغییر مکان یافته است.

به طور کلی برای رسم نمودار $y=[x+n]=[x]+n\ ,\ n\in Z$ کافی است نمودار $y=[x]$ را به اندازهٔ n واحد روی محور y ها تغییر مکان دهیم.



(۳) $y=\left[x+\frac{۱}{۲}\right]\ ,\ x\in\left[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}\right]$

$-\frac{۵}{۲}\le x<-\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=-۲$

$-\frac{۳}{۲}\le x<-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=-۱$

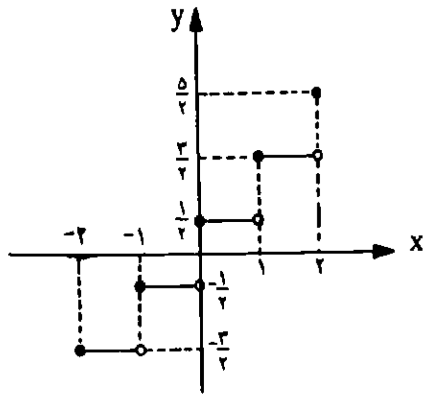
$-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۰$

$\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=۱$

$x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=۲$

ملاحظه می‌شود که نمودار فوق همان نمودار $y=[x]$ است که به اندازهٔ $(-\frac{۱}{۲})$ روی محور xها تغییرمکان داده شده است.

به‌طورکلی هرگاه m عدد صحیح نباشد $(m\notin Z)$ آنگاه برای رسم نمودار $y=[x+m]$ کافی است نمودار $y=[x]$ را به اندازهٔ قرینه m روی محور x ها تغییر مکان دهیم. یادآوری می‌شود که در حالت کلی برای رسم نمودار $y=f(x+\alpha)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ قرینه α روی محور xها تغییر مکان دهیم.



(۴) $y=[x]+\frac{۱}{۲}\ ,\ x\in[-۲,۲]$

$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}$

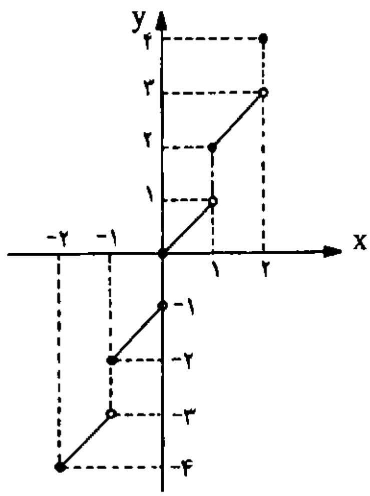
$-۱\le x<۰\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}$

$x=۲\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}$

بطوری که ضمن مسأله ۲ بیان شد برای رسم نمودار تابع فوق کافی است نمودار $y=[x]$ به اندازه $\frac{۱}{۲}$ واحد روی محور y ها تغییر مکان دهیم.



(۵) $y=x+[x]\ ,\ x\in[-۲,۲]$

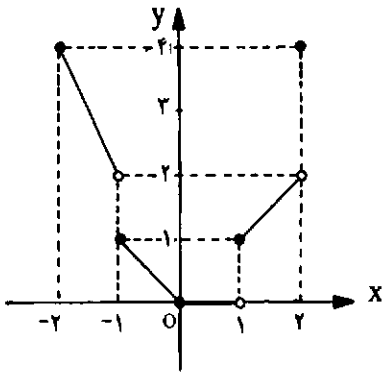
$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=x-۲$

$-۱\le x<۰\Rightarrow y=x-۱$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=x$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=x+۱$

$x=۲\Rightarrow y=۴$



(۶) $y=x.[x]\ ,\ x\in[-۲,۲]$

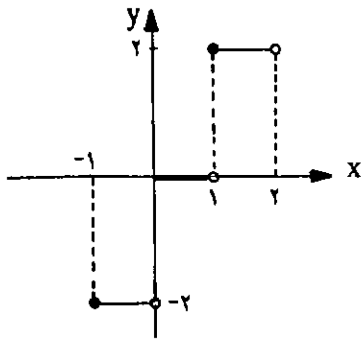
$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=-۲x$

$-۱\le x<۰\Rightarrow y=-x$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=x$

$x=۲\Rightarrow y=۴$

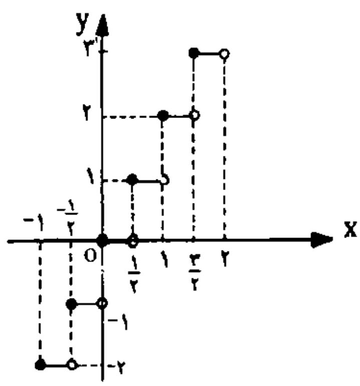


(۷) $y=۲[x]\ ,\ x\in[-۱,۲)$

$-۱\le x<۰\Rightarrow y=-۲$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۲$



(۸)
$y=[۲x]\ ,\ x\in[-۱,۲)$

$-۱\le x<-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=-۲$

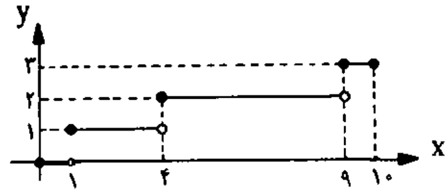
$-\frac{۱}{۲}\le x<۰\Rightarrow y=-۱$

$۰\le x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۰$

$\frac{۱}{۲}\le x<۱\Rightarrow y=۱$

$۱\le x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=۲$

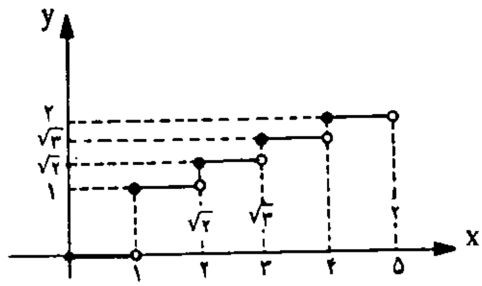
$\frac{۳}{۲}\le x<۲\Rightarrow y=۳$



(۹)
$y=[\sqrt{x}]\ ,\ x\in[۰,۱۰]$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰\ ,\ ۱\le x<۴\Rightarrow y=۱$

$۴\le x<۹\Rightarrow y=۲\ ,\ ۹\le x\le ۱۰\Rightarrow y=۳$



(۱۰)
$y=\sqrt{[x]}\ ,\ x\in[۰,۵)$

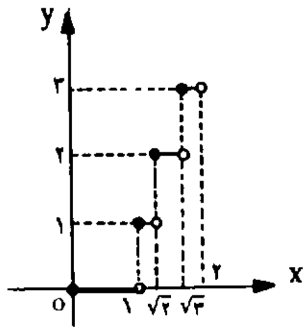
$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۱$

$۲\le x<۳\Rightarrow y=\sqrt{۲}$

$۳\le x<۴\Rightarrow y=\sqrt{۳}$

$۴\le x<۵\Rightarrow y=۲$



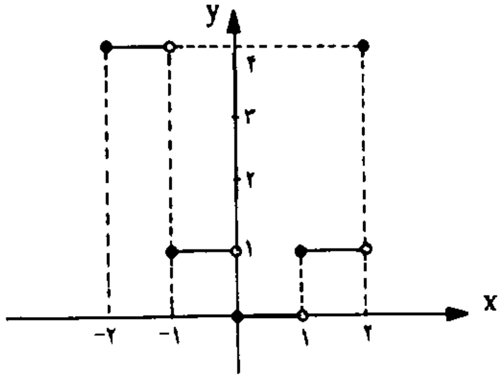
(۱۱)
$y=[x^{۲}]\ ,\ x\in[۰,۲)$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<\sqrt{۲}\Rightarrow y=۱$

$\sqrt{۲}\le x<\sqrt{۳}\Rightarrow y=۲$

$\sqrt{۳}\le x<۲\Rightarrow y=۳$



(۱۲)
$y=([x])^{۲}\ ,\ x\in[-۲,۲]$

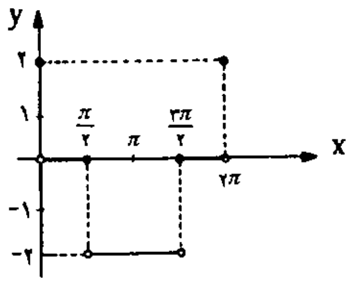
$-۲\le x<-۱\Rightarrow y=۴$

$-۱\le x<۰\Rightarrow y=۱$

$۰\le x<۱\Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲\Rightarrow y=۱$

$x=۲\Rightarrow y=۴$

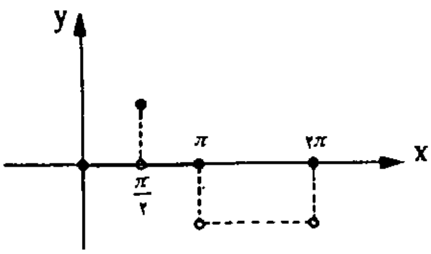


(۱۳)
$y=۲[\cos x]\ ,\ x\in[۰,۲\pi]$

$۰<x\le\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}\le x<۲\pi\Rightarrow[\cos x]=۰\Rightarrow y=۰$

$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow[\cos x]=-۱\Rightarrow y=-۲$

$x=۰$ یا $x=۲\pi\Rightarrow[\cos x]=۱\Rightarrow y=۲$

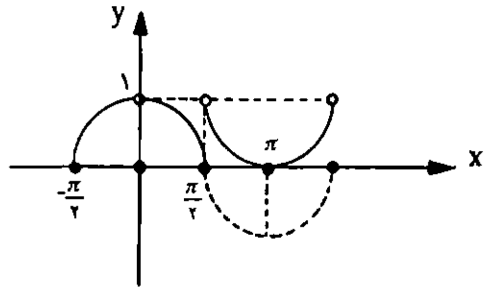


(۱۴) $y=\frac{۳}{۲}[\sin x]\ ,\ x\in[۰,۲\pi]$

$۰\le x<\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{\pi}{۲}<x\le\pi\Rightarrow[\sin x]=۰\Rightarrow y=۰$

$\pi<x<۲\pi\Rightarrow[\sin x]=-۱\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}$

$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}\ ,\ x=۲\pi\Rightarrow y=۰$

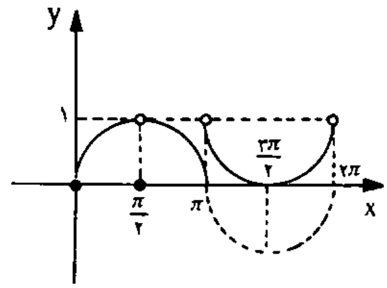


(۱۵) $y=\cos x-[\cos x]\ ,\ x\in\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$

$-\frac{\pi}{۲}\le x<۰$ یا $۰<x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰\le\cos x<۱\Rightarrow y=\cos x$

$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow -۱\le\cos x<۰\Rightarrow y=\cos x+۱$

$x=۰\Rightarrow\cos x=۱\Rightarrow y=۰\ ,\ x=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow y=۰$



(۱۶) $y=\sin x-[\sin x]\ ,\ x\in[۰,۲\pi]$

$۰\le x<\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}<x\le\pi\Rightarrow y=\sin x, x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=۰$

$\pi<x<۲\pi\Rightarrow y=\sin x+۱\ ,\ x=۲\pi\Rightarrow y=۰$

(۱۷) بررسی رسم نمودار چند رابطه

الف. $[x+y]=۳$ ب. $[x-y]=۲$ پ: $[x].[y]=۲$

$$[x+y]=۳\Rightarrow\begin{cases}x+y\ge۳ & D_۱:\ x+y=۳\\ x+y<۴ & D_۲:\ x+y=۴\end{cases}$$

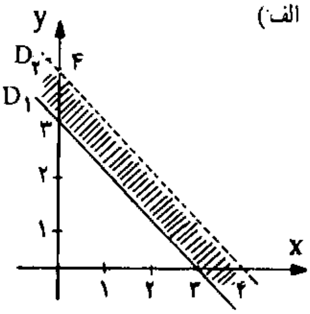
$$[x-y]=۲\Rightarrow\begin{cases}x-y\ge۲ & \Delta_۱:\ x-y=۲\\ x-y<۳ & \Delta_۲:\ x-y=۳\end{cases}$$

(۱). $[x]=\pm۱\ ,\ [y]=\pm۲$ (۲). $[x]=\pm۲\ ,\ [y]=\pm۱$

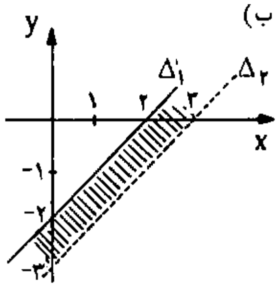
(۱) $\begin{cases}-۲\le x<-۱\\ -۱\le y<۰\end{cases}$ یا $\begin{cases}۲\le x<۳\\ ۱\le y<۲\end{cases}$

(۲) $\begin{cases}-۱\le x<۰\\ -۲\le y<-۱\end{cases}$ یا $\begin{cases}۱\le x<۲\\ ۲\le y<۳\end{cases}$

الف)



ب)

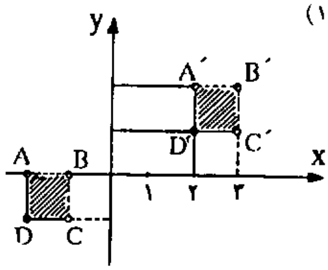


مجموعهٔ نقطه‌های هاشور خورده و خط $D_۱$ نمودار رابطهٔ الف است.

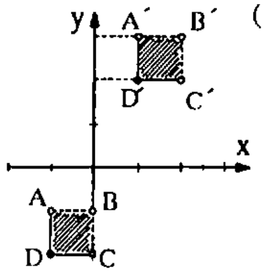
مجموعهٔ نقطه‌های هاشور خورده و خط $\Delta_۱$ نمودار رابطهٔ ب است.

پ)

(۱)



(۲)



مجموعهٔ نقطه‌های مربعهای ABCD و A′B′C′D′ به غیر از قطعه خطهای AB و BC و A′B′ و B′C′ شکل (۱) یا شکل (۲) نمودار رابطه پ است.

تمرین

۱. اگر $(۲+\sqrt{۳})^۵+(۲-\sqrt{۳})^۵=۷۲۴$، آنگاه $\left[(۲+\sqrt{۳})^۵\right]$ چقدر است؟

دامنه تعریف هریک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

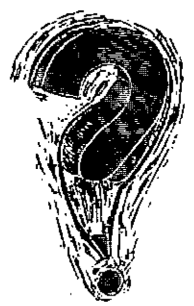
۲. $f(x)=\frac{[x]}{|x|}$ ۳ $g(x)=\frac{|x|}{[x]}$





• ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش مقدماتی (۲۱)




فرض می‌کنیم A عددی به‌صورت زیر باشد، که در آن $a_n, \cdots, a_۱, a_۰$ اعداد صحیحی بین ۰ و ۹ از جمله ۹اند:

$$A=۱۰^n a_n+۱۰^{n-۱}a_{n-۱}+\cdots+۱۰a_۱+a_۰$$

عدد $A_۱$ را طبق قاعدهٔ زیر از A به‌دست آورید:

$$A_۱=D(A)=a_n+۲a_{n-۱}+۲^۲a_{n-۲}+\cdots+۲^{n-۱}a_۱+۲^n a_۰$$

ساخت فوق را برای به‌دست آوردن موارد زیر تکرار کنید:

$A_۲=D(A_۱)$ و $A_۳=D(A_۲)$ و...

(الف) ثابت کنید فرآیند فوق، به‌ازای هر عدد طبیعی A، به عدد $A_k<۲۰$ ای چنان منجر می‌شود که $D(A_k)=A_k$.

(ب) اگر $a=۱۹^{۸۵}$، دنبالهٔ زیر را درنظر می‌گیریم.

$A_۱=D(A)$ و $A_۲=D(A_۱)$ و ...

عدد A_k ای را تعیین کنید که به ازای آن $(D_k)=A_k$.

حل:

(الف) اگر A عددی یک رقمی باشد، آنگاه D(A)=A. اگر A دارای دو رقم باشد، آنگاه تفاضل

$$A-D(A)=۱۰a_۱+a_۰-(a_۱+۲a_۰)=۹a_۱-a_۰$$

جز هنگامی که $a_۱=۱$ و $a_۰=۹$، مثبت است. به‌این ترتیب، به‌ازای هر عدد دورقمی A ی غیر از ۱۹، عدد D(A) کوچکتر از A است.

اگر A بیش از دو رقم داشته باشد (یعنی، $n>۱$)، آنگاه:

$$D(A)=a_n+۲a_{n-۱}+\cdots+۲^n a_۰\le ۹+۲.۹+\cdots+۲^n.۹$$
$$=۹(۲^{n+۱}-۱)<۱۸.۲^n<۱۰^n<A$$

نتیجه می‌گیریم که اعداد مثبت A، $A_۱$، $A_۲$، ... دنبالهٔ نزولی‌ای تشکیل می‌دهند که به چنان عدد A_k ای ختم می‌شود که $D(A_k)=A_k$. دراین‌صورت A_k یا ۱۹ یا عددی یک رقمی است.

(ب) D(A) هنگامی که A بر ۱۹ بخش‌پذیر باشد بر ۱۹ بخش‌پذیر است. برای نشان دادن این موضوع عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$۲^n A-D(A)=(۲۰^n-۱)a_n+۲.(۲۰^{n-۱}-۱)a_n+\cdots+$$
$$۲^{n-۱}(۲۰-۱)a_۱$$

هر جمعوند واقع در سمت راست این برابری، بر ۱۹ بخش‌پذیر است. به این ترتیب، اگر A بر ۱۹ بخش‌پذیر باشد، آنگاه ۱۹ نیز باید D(A) را بشمرد.

اگر $A=۱۹^{۸۵}$، آنگاه: A، $A_۱$، $A_۲$، ...، A_k جمیعاً بر ۱۹ بخش‌پذیرند، بنابراین عدد A_k ی واقع در این دنباله، که به‌ازای آن $D(A_k)=A_k$، ۱۹ است.

n یا ۱-n



● دکتر عین‌الله پاشا
دانشگاه تربیت‌معلم

مبحث واریانس، ابهامهایی را در ذهنها به‌وجود آورده است. اغلب سؤال می‌شود که از کدام دستور زیر باید برای محاسبه واریانس استفاده شود :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad , \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ما در این مقاله سعی می‌کنیم به این سؤال پاسخ دهیم. این مقاله شامل دو بخش است، در بخش اوّل پارامترهای پراکندگی به‌ویژه واریانس بررسی می‌شوند و بخش دوم به موضوع برآورد می‌پردازد.

بخش اوّل: پراکندگی

فرض بر این است که پارامترهای مرکزی (میانگین) مد و نما به‌ویژه میانگین برای خواننده آشناست، با این همه، یادآوری می‌کنیم که این پارامترها محل تجمع داده‌ها را مشخص می‌کنند، وقتی که گفته می‌شود معدل دانش‌آموزی برابر ۱۴/۷۵ است این انتظار به‌وجود می‌آید که نمرات این دانش‌آموز حول و حوش ۱۴/۷۵ است. به‌ندرت ممکن است برای این دانش‌آموز نمره ۱۰ یا ۲۰ تصور کرد. هر نمره‌ای که به میانگین نزدیکتر باشد با اطمینان بیشتری می‌تواند جزء نمرات کسب شده به‌وسیله این دانش‌آموز باشد. همان‌طوری که ملاحظه کردید، این نتیجه‌گیریها براساس انتظار یا اطمینان بود و حکم‌ها قطعی نبودند. بنابراین امکان هر چیزی هست، یعنی نمرات ممکن است به میانگین خیلی نزدیک باشند و یا برعکس، ممکن است خیلی دور باشند.

در مبحث پراکندگی می‌خواهیم معیاری برای اندازه‌گیری پراکندگی و دور از هم بودن مقادیر به‌دست آوریم. ساده‌ترین و مقدماتی‌ترین معیاری که در این زمینه مطرح شده است دامنه تغییرات است.

دامنه تغییرات: فرض کنیم $x_1,\cdots,x_n$ مقادیر مورد نظر باشند و همچنین فرض کنید $a=\mathrm{Min}\{x_1,\cdots,x_n\}$ و $b=\mathrm{Max}\{x_1,\cdots,x_n\}$ در این صورت $R=b-a$ را *دامنهٔ تغییرات* می‌نامند و همان‌طوری که از ساختمان آن برمی‌آید، بزرگی آن نشان از اختلاف زیاد مقادیر و کوچکی آن نشان از اختلاف کم مقادیر دارد، درحالت خاص اگر $R=0$، آنگاه تمام مقادیر با هم برابرند و پراکنده نیستند. اشکالی که دامنه تغییرات دارد این است که اصطلاحاً می‌گویند : نسبت به *تمام مقادیر حسّاس نیست*. یعنی در مقابل حتی تغییرات بزرگ در مقادیر، ممکن است دامنهٔ تغییرات، تغییر نکند. به دو مثال زیر که دارای دامنهٔ تغییرات برابر هستند توجه کنید :

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰

۱، ۴، ۴، ۵، ۵، ۵، ۶، ۶، ۶، ۱۰

در دستهٔ دوم بجز ۱ و ۱۰ سایر مقادیر به هم خیلی نزدیک هستند و پراکندگی در مقادیر دستهٔ اوّل محسوس‌تر است و حال آن‌که دامنهٔ تغییرات این ویژگی را نشان نمی‌دهد و از نظر این پارامتر، هر دو دسته مقادیر به یک اندازه پراکنده هستند. برای رفع این ضعف، باید معیار مورد استفاده به‌گونه‌ای باشد تا مقادیر ــ مستقیماً ــ در محاسبهٔ آن دخیل باشند. از این‌رو معیار زیر را که شاید بهتر از دامنهٔ تغییرات باشد معرفی کردند.

انحراف از میانگین: در این معیار، اختلاف مقادیر از میانگین درنظر گرفته می‌شود.

می‌دانیم که همواره $\sum_{i=0}^{n}(x_i - \text{میانگین}) = 0$ (ثابت کنید). یعنی مجموع این اختلاف‌ها اطلاعی دربارهٔ پراکندگی مقادیر نمی‌دهد. برای رهایی از این مشکل فاصلهٔ مقادیر از میانگین، یعنی $\sum_{i=0}^{n}|x_i - \text{میانگین}|$ به‌عنوان پارامتری برای پراکندگی مطرح شد. اشکال این دستور آن است که با افزایش تعداد مقادیر افزایش می‌یابد (جمله‌های مثبت جدیدی اضافه می‌شود). از این‌رو برای از بین بردن اثر تعداد مقادیر این عبارت را بر n تقسیم می‌کنند که به این صورت دستور انحراف از میانگین به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|x_i - \text{میانگین}|$$

هر جایی که مجموع مقادیر به تعداد آنها تقسیم می‌شود، میانگین آن مقادیر حساب می‌شود. پس در عبارت بالا، میانگین مقادیر $|x_1 - \text{میانگین}|$ ، ... ، $|x_n - \text{میانگین}|$ حساب شده است.

این دستور عیب دامنهٔ تغییرات را ندارد و پارامتر خوبی است، ولی اشکال آن در وجود قدرمطلق است. قدرمطلق با وجود سادگی، تابع سر به راهی نیست و کار کردن با آن مشکلاتی دارد و به همین دلیل قضایا و نتایج پیشرفته و خوبی دربارهٔ دستورهای حاصل از آن نمی‌توان استخراج کرد. برای رفع این مشکل چارهٔ زیر اندیشیده شد.

واریانس: قدرمطلق در دستور انحراف از میانگین صرفاً برای این در کار آمد تا جمله‌های دخیل در Σ را نامنفی کند تا از برابر صفر شدن مجموع آنها جلوگیری کند. می‌دانیم که تنها قدرمطلق نیست که می‌تواند این کار را انجام بدهد، با توان ۲ رساندن نیز می‌توان به این مقصود رسید. بنابراین دستور معیار اندازه‌گیری پراکندگی به‌صورت زیر اصلاح شد و آن را *واریانس* نامیدند.

$$\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \text{میانگین})^2$$

یعنی واریانس برابر میانگین مجذور انحراف از میانگین است. این دستور نشان داده است که نه‌تنها نقاط ضعف دامنهٔ تغییرات و انحراف از میانگین را ندارد، بلکه نتایج و مفاهیم عمیقی را می‌توان براساس آن پی‌ریزی کرد و از این‌رو به‌عنوان مناسبترین پارامتر برای اندازه‌گیری پراکندگی شناخته شد.

پس تا اینجا معلوم شد که *واریانس* برابر *میانگین مجذور انحرافات از میانگین است* و دستور آن چنین است:

$$\text{واریانس} = \boxed{\frac{1}{n}\Sigma}(x_i - \text{میانگین})^2$$

میانگین

مثال: واریانس مقادیر زیر را به‌دست آورید:

۱،۸،۶،۳،۲

حل: ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم

$$\text{میانگین} = \frac{1+8+6+3+2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

بنابراین

$$\text{واریانس} = \frac{(1-4)^2+(8-4)^2+(6-4)^2+(3-4)^2+(2-4)^2}{5}$$

$$= \frac{9+16+4+1+4}{5}$$

$$= \frac{34}{5} = 6/8$$

بخش دوم: برآورد

معمولاً در یک مسأله آماری می‌خواهیم پارامتری را در یک جامعهٔ آماری براساس یک نمونه، یعنی بخش ــ تقریباً ــ کوچکی از جامعه که با شرایط خاصی انتخاب می‌شود، تعیین کنیم. از آنجایی که ما نمی‌توانیم و یا نمی‌خواهیم از اطلاعات تمام جامعه استفاده کنیم، در تعیین این پارامتر با اطلاعات ناقصی که از نمونه به‌دست آورده‌ایم سر و کار داریم. با اطلاعات ناقص هم نمی‌توان دقیقاً پارامتر مورد مطالعه را به‌دست آورد. آنچه که از طریق نمونه حاصل می‌شود یک تقریب از پارامتر مورد نظر است که آن را *برآورد پارامتر* می‌نامند.

مثلاً می‌خواهیم در یک کلاس ۴۰ نفری بدانیم میانگین نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان چه‌قدر است. اگر تمام نمرات را در نظر بگیریم و آنها را با هم جمع و بر ۴۰ تقسیم کنیم، عدد حاصل، دقیقاً همان چیزی است که به‌دنبال آن هستیم ولی حالا فرض کنید که ۱۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس را به تصادف

انتخاب کرده‌ایم و براساس نمرهٔ این ۱۰ دانش‌آموز می‌خواهیم بدانیم میانگین نمره کل کلاس در درس ریاضی (حدوداً) چه‌قدر است؟ چون اطلاعات ما از کلاس کامل نیست آنچه که براساس این ۱۰ نمره به‌دست خواهد آمد مقداری تقریبی است. تمام سعی و کوشش در آمار و احتمال آن است که محاسبهٔ روی این ۱۰ نمره به قسمی انجام شود که تقریب خوبی از میانگین نمرات کلاس به‌دست آید. آنچه از طریق نمونه برای پارامتر جامعه به‌دست می‌آید، *برآورد* آن پارامتر می‌نامند.

مثال: برای سهولت و درک بهتر، فرض می‌کنیم جامعهٔ ما شامل ۳ دانش‌آموز با نمرات ۱۴،۱۸،۱۶ باشد، می‌خواهیم براساس یک نمونهٔ ۲ تایی، میانگین نمرهٔ این ۳ دانش‌آموز را برآورد کنیم.

حل: به‌خاطر کوچکی جامعه می‌توانیم میانگین را حساب کنیم:

$$\text{میانگین کلاس} = \frac{۱۶+۱۸+۱۴}{۳} = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶$$

ممکن است ما راههای مختلفی را برای به‌دست آوردن برآورد درنظر بگیریم، برخی از آنها عبارتند از:

الف. اگر x_1 و x_2 مقادیر حاصل از نمونه باشند، میانگین کلاس را به‌صورت ماکزیمم این دو نمره برآورد می‌کنیم:

$$\text{برآورد میانگین کلاس} = \text{Max}\{x_1, x_2\}$$

حال اگر به دفعات مختلف از این کلاس یک نمونهٔ دوتایی (با جایگذاری) انتخاب کنیم، برآوردهای زیر حاصل می‌شوند:

نمونه	برآورد	خطای برآورد
۱۴،۱۴	۱۴	−۲
۱۴،۱۶	۱۶	۰
۱۴،۱۸	۱۸	۲
۱۶،۱۴	۱۶	۰
۱۶،۱۶	۱۶	۰
۱۶،۱۸	۱۸	۲
۱۸،۱۴	۱۸	۲
۱۸،۱۶	۱۸	۲
۱۸،۱۸	۱۸	۲

ملاحظه کنید که در این روش در اکثر مواقع ما به اندازهٔ دو واحد از میانگین جامعه فاصله داریم، میانگین خطای برآورد در اینجا عبارت است از:

$$\frac{-۲+۰+۲+۰+۰+۲+۲+۲+۲}{۹} = \frac{۸}{۹} = ۰/۸۸$$

پس در این روش، به‌طور متوسط، به اندازهٔ ۰/۸۸ با میانگین اختلاف خواهیم داشت، همچنین ملاحظه می‌شود که این میانگین مثبت است. یعنی برآورد ما در مجموع بیش از میانگین (پارامتر مورد نظر) بوده است.

ب. این‌بار برای اینکه جلوی برآورد اضافی را بگیریم، ممکن است برآورد را به‌صورت زیر انجام دهیم:

$$\text{برآورد میانگین کلاس} = \text{Min}\{x_1, x_2\}$$

جدول زیر را داریم:

نمونه	برآورد	خطای برآورد
۱۴،۱۴	۱۴	−۲
۱۴،۱۶	۱۴	−۲
۱۴،۱۸	۱۴	−۲
۱۶،۱۴	۱۴	−۲
۱۶،۱۶	۱۶	۰
۱۶،۱۸	۱۶	۰
۱۸،۱۴	۱۴	−۲
۱۸،۱۶	۱۶	۰
۱۸،۱۸	۱۸	۲

میانگین خطا عبارت است از:

$$-\frac{۸}{۹} = -۰/۸۸$$

که در این حالت نیز تفاوت به اندازهٔ همان مقدار قبلی است، منتها منفی، یعنی برآوردهای ما در این روش در مجموع، پارامتر را کمتر از آنچه که هست برآورد می‌کند.

ج. ممکن است برآورد میانگین کلاس را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\text{برآورد میانگین کلاس} = \frac{x_1 + x_2}{۲} = \text{میانگین مقادیر حاصل از نمونه}$$

در این مورد نیز می‌توانیم جدول زیر را تشکیل و میانگین خطای برآورد را حساب کنیم:

نمونه	برآورد	خطای برآورد
۱۴،۱۴	۱۴	−۲
۱۴،۱۶	۱۵	−۱
۱۴،۱۸	۱۶	۰
۱۶،۱۴	۱۵	−۱
۱۶،۱۶	۱۶	۰
۱۶،۱۸	۱۷	۱
۱۸،۱۴	۱۶	۰
۱۸،۱۶	۱۷	۱
۱۸،۱۸	۱۸	۲

در این حالت، میانگین خطای برآورد برابر صفر است. یعنی

این روش برآورد به‌گونه‌ای است که میانگین خطای این روش نه مثبت است و نه منفی. برآوردی که این ویژگی را داشته باشد، از اهمیت بالایی در مباحث آماری برخوردار است و اغلب کارشناسان آمار سعی می‌کنند برای پارامترها روشی برای محاسبهٔ برآورد بیابند که دارای این خاصیت باشد. به علت اهمیت این ویژگی به آن عنوان مستقلی داده‌اند که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

برآورد نااریب: برآورد یک پارامتر را *نااریب* می‌گوییم؛ هرگاه میانگین خطای برآورد، برابر ۰ باشد.

برآوردهای (الف) و (ب) نااریب نیستند، ولی برآورد (ج) نااریب است.

حال به مسألهٔ اصلی خود یعنی واریانس بازمی‌گردیم. فرض می‌کنیم واریانس جامعه معلوم نباشد و درنتیجه بخواهیم براساس یک نمونه آن را برآورد کنیم و با مقدمه‌ای که گذشت به دنبال *برآورد نااریب برای واریانس* هستیم. یعنی می‌خواهیم براساس مقادیر $x_1, \dots, x_n$ واریانس جامعه را به گونه‌ای برآورد کنیم که میانگین خطای برآورد، برابر ۰ باشد. در مباحث نیمه پیشرفتهٔ آمار، می‌توان ثابت کرد که یک *برآورد نااریب* برای واریانس جامعه از دستور زیر حساب می‌شود.

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \text{میانگین})^2$$

مثال: در مثال قبل، سعی می‌کنیم میانگین خطای برآورد را که از دستور بالا حساب می‌شود، به‌دست آوریم و مطابق انتظار نشان دهیم که برابر صفر است.

حل: قبلاً واریانس جامعه را حساب می‌کنیم:

$$\text{واریانس} = \frac{(۱۴-۱۶)^2+(۱۶-۱۶)^2+(۱۸-۱۶)^2}{۳} = \frac{۴+۴}{۳}$$

$$= \frac{۸}{۳} = ۲/۶۶$$

نمونه	میانگین	برآورد واریانس	خطای واریانس
۱۴,۱۴	۱۴	۰	$\frac{۸}{۳}$
۱۴,۱۶	۱۵	۲	$\frac{۲}{۳}$
۱۴,۱۸	۱۶	۸	$-\frac{۱۶}{۳}$
۱۶,۱۴	۱۵	۲	$\frac{۲}{۳}$
۱۶,۱۶	۱۶	۰	$\frac{۸}{۳}$
۱۶,۱۸	۱۷	۲	$\frac{۲}{۳}$
۱۸,۱۴	۱۶	۸	$-\frac{۱۶}{۳}$
۱۸,۱۶	۱۷	۲	$\frac{۲}{۳}$
۱۸,۱۸	۱۸	۰	$\frac{۸}{۳}$

$\leftrightarrow \frac{۸}{۳}-۲=\frac{۸-۶}{۳}=\frac{۲}{۳}$

$\leftrightarrow \frac{۸}{۳}-۸=\frac{-۱۶}{۳}$

$$\text{میانگین خطای برآورد} = \frac{۸+۲-۱۶+۲+۸+۲-۱۶+۲+۸}{۹} = ۰$$

بنابراین همان‌طوری که در این مثال دیده شد، درحالت کلی هم با استفاده از مطالب نظری احتمال ثابت می‌شود، برآورد واریانس جامعه با استفاده از دستور

$$\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \text{میانگین})^2$$

نااریب است. بنابراین دستور مناسبی برای برآورد واریانس (نه محاسبه واریانس) است.

در خاتمه: بنابر آنچه که گذشت، اگر بخواهیم واریانس را حساب کنیم از n استفاده می‌کنیم و اگر بخواهیم واریانس را به‌طور نااریب براساس یک نمونهٔ nتایی برآورد کنیم، از $n-1$ استفاده می‌کنیم. و امّا آخرین نکته این‌که: اگر خوانندهٔ نکته‌سنج دقت کرده باشد، در سراسر این مقاله از به‌کار بردن اصطلاح *داده* که همان کمیتهای حاصل از نمونه است، خودداری شده است و همچنین هیچگاه از نمادی برای میانگین و یا واریانس استفاده نشده است. اگر از نمادهای مناسب استفاده می‌شد یا اصلاً ابهام n یا $n-1$ درکار نمی‌آمد و یا این ابهام هم به ابهام قبلی اضافه می‌شد که کی از نماد μ و کی از نماد $\bar{x}$ برای میانگین استفاده کنیم.

جدول زیر، ضمن معرفی نمادها دستور محاسبه و ویژگی آنها را دربر دارد.

پارامتر	نماد	برآورد پارامتر	ویژگی برآورد	دستور محاسبه برآورد	
میانگین جامعه	μ	$\bar{x}$	نااریب	$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i$	$\mu=\frac{\text{مجموع مقادیر جامعه}}{\text{تعداد آنها}}$
واریانس جامعه	σ^2	S^2	نااریب	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$	$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$

برای توضیح بیشتر، اضافه می‌شود که μ نمادی است برای میانگین جامعه و برای محاسبهٔ آن باید تمام مقادیر جامعه را با هم جمع و بر تعداد افراد جامعه تقسیم کنیم. σ^2 نمادی است برای واریانس در جامعه که برای محاسبهٔ آن باید میانگین انحرافات از میانگین (یعنی μ) را حساب کرد و لذا دستور آن به‌صورت $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$ است. $\bar{x}$ نمادی است برای میانگین مقادیر حاصل از نمونه (یعنی $\bar{x}$ میانگین داده‌هاست) و S^2 نمادی است برای برآورد نااریب σ^2 با دستور $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$. توجه کنید که $\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ برآورد نااریب σ^2 نیست، بلکه واریانس داده‌ها را حساب می‌کند.



مقاله‌های کوتاه از مجله‌های معتبر جهان (۲۱)

●ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

قضایای سِوا، مِنِلائوس و اصل سطح (قسمت سوم)

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ سوا در n ضلعیها). فرض می‌کنیم $P=[V_1,\dots,V_n]$ یک n ضلعی دلخواه، C نقطه‌ای معلوم، و k عدد صحیح و مثبتی چنان باشد که $1\le k< n/2$. به‌ازای $i=1,\dots,n$، فرض می‌کنیم W_i تقاطع خطوط CV_i و $V_{i-k}V_{i+k}$ باشد. آنگاه،

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}}\right]=1 \qquad (۷)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه با قطر ـ نسبت‌ها، جز در حالتی که n فرد و $k=(n-1)/2$، ارتباط دارد. مورد اخیر، تنها تعمیمی از قضیهٔ سواست که توانسته‌ایم در کتابهای مربوطه بیابیم. اما، نتیجهٔ قضیهٔ ۲، به اندازه‌ای که در وهلهٔ نخست ملاحظه می‌شود عمومی نیست.

اگر n و k دارای بزرگترین عامل مشترک $d>1$ باشد آنگاه حاصل‌ضرب سمت چپ (۷) می‌تواند به d حاصل‌ضرب، هر یک با n/d عامل، تجزیه شود، و هر یک از این عاملها دارای مقدار ۱ باشد. اگر n و ۲k نسبت به هم اول باشند، آنگاه می‌توان (با شماره‌گذاری مجدد رأسها چون در حالت قضیهٔ منلائوس) سمت چپ (۷) را به حاصل‌ضرب n یال ـ نسبت، در یک n ضلعی ستاره‌ای مناسب، تبدیل کرد. در نتیجه، تنها اظهار واقعاً تازهٔ قضیهٔ ۲ در حالتی است که در آن n زوج و k نسبت به n اول است. مثالی از این حالت: $(n=10, k=3)$ را در شکل ۷(a) نشان داده‌ایم. مثالهای دیگری را در شکل ۷(b) با قطر ـ نسبت‌ها $(n=7,\ k=2)$ و شکل ۷(c) با یال ـ نسبت‌ها $(n=5,\ k=2)$ آورده‌ایم.

اثبات. اثبات این قضیه از مراحلی مشابه مراحل قضیهٔ ۱ تبعیت می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که با به کار بردن اصل سطح در مثلثهای با قاعده $[C,V_i]$، به ازای $i=1,\dots,n$، به دست می‌آوریم.

$$\left[\frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}}\right]=\left[\frac{CV_iV_{i-k}}{CV_{i+k}V_i}\right]$$

با قرار دادن این جملات در سمت چپ (۶)، حاصل‌ضرب n جمله را حاصل می‌کنیم که هر یک از آنها خارج قسمت سطحهای مثلثهای مربوطه است. این جمله‌ها، چنان‌که مطلوب است، مقدار ۱ را به‌دست می‌دهند.

در هر یک از قضایای فوق W_i را به صورت تقاطع یک ضلع یا یک قطر (**پایه** «basis») با خط CD (قاطع متناظر) تعریف می‌کنیم. قضیهٔ منلائوس متناظر با حالتی است که در آن C و D نقاط ثابتی، که رأس نیستند، می‌باشند، بنابراین قاطع CD در مورد تمام قاعده‌ها خطّی ثابت است. در قضیهٔ سوا، C نقطه‌ای ثابت و D رأس V_i ای از چند ضلعی P است. در این صورت W_i نقطهٔ تقاطع قاعدهٔ $V_{i-k}V_{i+k}$ با قاطع CV_i است. این ملاحظه‌ها این را مطرح می‌کنند که، زمانی که قاطع مورد بحث توسط دو رأس P مشخص شده باشد، می‌تواند نتایجی مشابه در مورد یال ــ نسبت‌ها یا قطر ــ نسبت‌ها موجود شود. در واقع، قضیه زیر را خواهیم داشت که به صورتی جدید ظاهر شده است :

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ خود قاطع بودن). *فرض می‌کنیم j، r، s اعدادی صحیح و متمایز به پیمانهٔ n باشند و W_i نقطهٔ تقاطع قاعده (ضلع یا قطر) V_iV_{i+j} از n ضلعی $P=[V_1,\dots,V_n]$ با قاطع $V_{i+r}V_{i+s}$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای*

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+j}}\right]=(-1)^n \qquad (۸)$$

این است که یا (i) $n=2m$ زوج باشد، $j\equiv m$ و $s\equiv r+m$ ؛ یا n دلخواه باشد و یا (ii) $s\equiv 2r$ و $j\equiv 3r$ ؛ یا (iii) $r\equiv 2s$ و $j\equiv 3s$. تمام همنهشتیها به پیمانهٔ n‌اند.

در حالت (i) جملات واقع در (۸) دوبه‌دو حذف می‌شوند و در نتیجه صورت قضیه بدیهی می‌شود. حالتهای (ii) و (iii) در اصل یکسان‌اند، زیرا r و s در تعیین قاطع V_{i+r}، V_{i+s} نقشی متقارن ایفا می‌کنند و بنابراین می‌توانند با هم تعویض شوند.

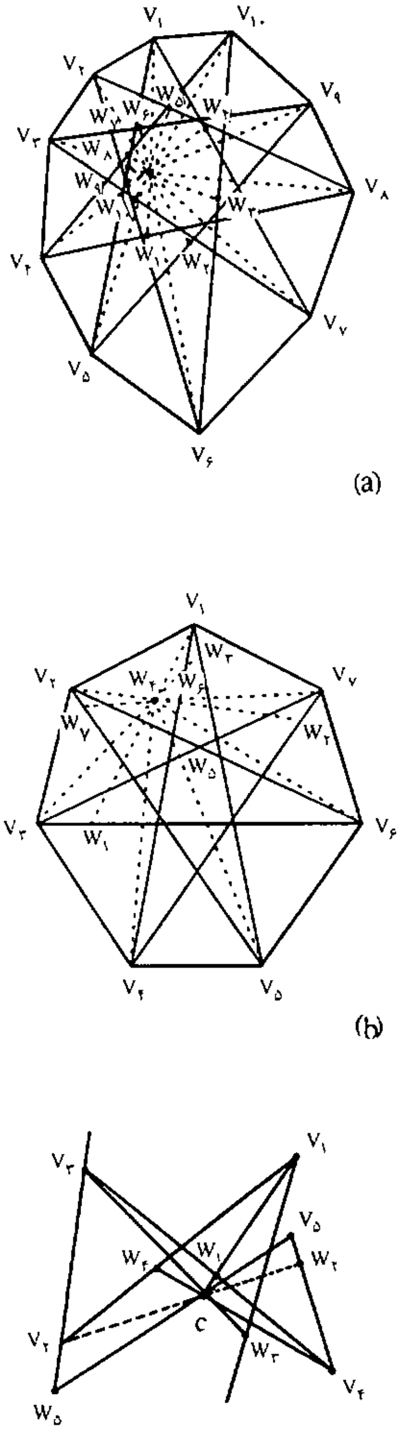
به‌عنوان مثـال، در شکل ۸(a)، n = ۵، j = ۲، r = ۳، s = ۴، و در شکـل ۸(b)، n = ۷، j = ۱، r = ۳، s = ۵ بنابراین هر یک از آنها مثالی از حالت (iii) اند .

از آنجا که n فرد است، علامت سمت راست (۸) منفی است.

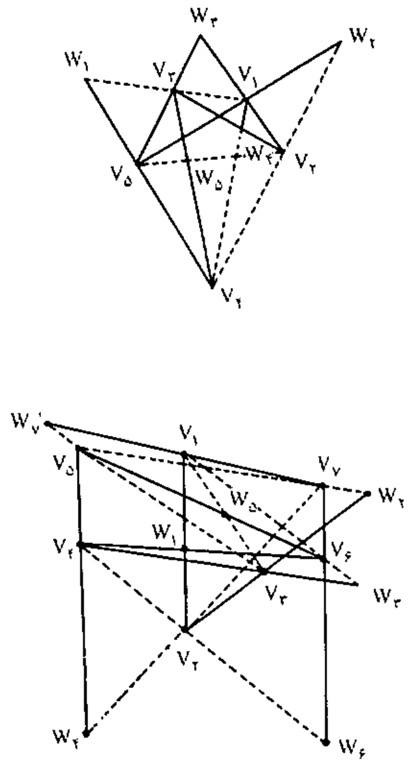
اثبات. با استفاده از اصل سطح در مورد مثلثهای به قاعدهٔ $[V_{i+r}\ ,\ V_{i+s}]$ و رأسهای V_i و V_{i+j}، به‌دست می‌آوریم.

$$\left[\frac{V_iW_i}{W_iV_{i+j}}\right]=-\left[\frac{V_iV_{i+r}\ V_{i+s}}{V_{i+j}V_{i+r}V_{i+s}}\right] \qquad (۸a)$$

عبارات فوق را به جای هر یک از n عامل واقع در سمت



شکل ۷. مثالهای قضیهٔ سوا در n ضلعیها در حالات (a) n = ۱۰، k = ۳ ؛ (b) n = ۷، k = ۲ ؛ و (c) n = ۵، k = ۲ . در حالتهای (a) و (b) قضیه، به ترتیب، اظهاراتی دربارهٔ قطر ــ نسبت‌های $[V_iW_{i+3}/W_{i+3}V_{i+6}]$ و $[V_iW_{i+2}/W_{i+2}V_{i+4}]$ می‌گوید، و در(c) اظهاری دربارهٔ یال ــ نسبت‌های $[V_iW_{i+3}/W_{i+3}V_{i+1}]$ می‌کند.



(a)

(b)

شکل ۸. مثالهایی از قضیهٔ خود قاطع بودن، به‌ازای (a) $n=5$، $j=2$، $r=3$، $s=4$؛ و (b) $n=7$، $j=1$، $r=3$، $s=5$. در هر حالت، قضیه نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب n نسبت $\left[V_iW_i/W_iV_{i+j}\right]$ (که در آن $i=1,\dots,n$) برابر ۱- است.

چپ (۸) قرار می‌دهیم و زمانی را که دقیقاً مثلثهایی یکسان در صورت و مخرج رخ می‌دهند مشخص می‌نماییم و بنابراین مساحتهای آنها را (که برحسب دترمینانها بیان شده‌اند) حذف می‌کنیم تا چنان‌که مطلوب است، اندازهٔ ± 1 به‌دست آید. ولی جملهٔ $V_i\ V_{i+r}\ V_{i+s}$ واقع در صورت با جملهٔ $V_{(i+h)+j}\ V_{(i+h)+r}\ V_{(i+h)+s}$ واقع در مخرج حذف می‌شود، اگر و تنها اگر، یا

(i) $h\equiv -j$، $r\equiv s-j$ و $s\equiv r-j$ ؛ یا

(ii) $h\equiv -r$، $r\equiv s-r$ و $s\equiv j-r$ ؛ یا

(iii) $h\equiv -s$، $s\equiv r-s$ و $r\equiv j-s$

سه شق فوق، نظیر سه حالتی هستند که در صورت قضیه داده شده‌اند. توجه داشته باشید که هر حذف، عامل ۱- را در حالت (i) و عامل ۱+ را در دو حالت دیگر به دست می‌دهد که منجر به جملهٔ $(-1)^n$ در سمت راست (۸) می‌شود. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

در مورد قاعده‌ای معلوم، تعیین قاطعهای نظیری که قضیه به ازای آنها برقرار است، جالب است.

در این مورد، حالت (ii) را بررسی می‌کنیم. با نوشتن $j+t$ به جای r و $-u$ به جای s، به سادگی محقق می‌شود که شرط داده شده هم‌ارز است با

$$u\equiv t\ ,\ \ 2j+3t\equiv 0 \pmod n$$

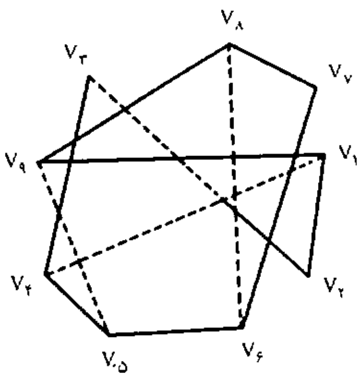
این دستگاه را می‌توان به‌طور صریح برای یافتن t برحسب j به‌طریق زیر حل کرد (و بنابراین r و s را به‌دست آورد):

(ii_a) اگر $n\equiv 3k+1$، آنگاه $t\equiv 2kj$
به‌ازای $j=1,2,\dots,[(n-1)/2]$

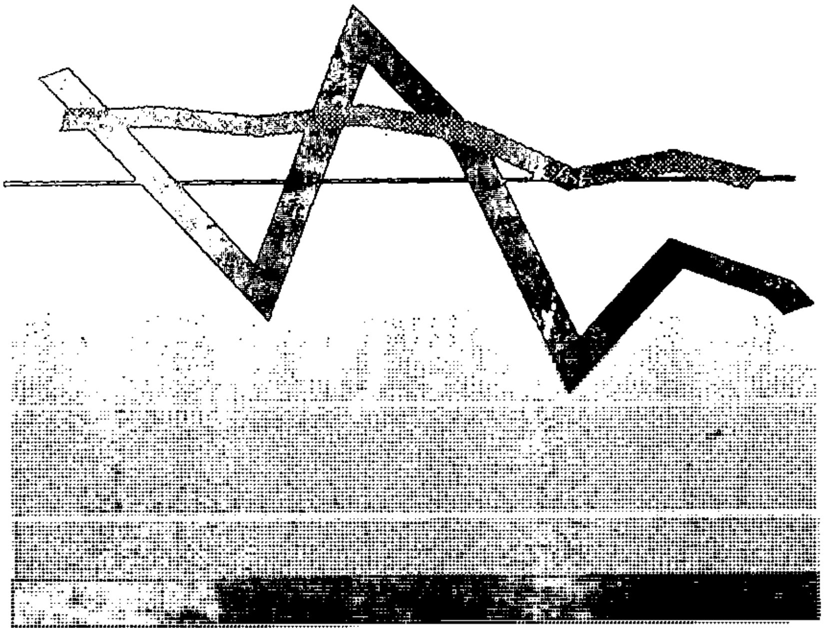
(ii_b) اگر $n\equiv 3k-1$، آنگاه $t\equiv (k-1)j$
به‌ازای $j=1,2,\dots,[(n-1)/2]$

(ii_c) اگر $n\equiv 3k$، آنگاه $j\equiv 3i$ و
$2k-2i$ یا $k-2i$ ، $t\equiv -2i$
به‌ازای $i=1,2,\dots,[(k-1)/2]$

به‌عنوان مثال، درشکل ۹ حالت $n=9$، $k=3$ و $i=1$ را نشان خواهیم داد. قاطعهای V_2V_3، V_6V_8 و V_5V_9 را با خط ــ نقطه و قاعدهٔ (پایه) V_1V_4 را با خط‌چین مشخص کرده‌ایم. تمام آنها شرایط قضیه را برقرار می‌کنند. (هشت قاعدهٔ (پایه) دیگری را که در (۸) رخ می‌دهند نشان نداده‌ایم، زیرا مشخص کردن آنها شکل را چنان پیچیده می‌کند که نامفهوم می‌شود.)



شکل ۹. سه قاطع V_2V_3، V_6V_8 و V_5V_9 از پایهٔ V_1V_4 که شرطهای قضیهٔ خود قاطع بودن را به‌ازای $n=9$ برقرار می‌کنند.



درحاشیه تابع

قسمت ششم

● حمید رضا امیری

تابعهای زوج و فرد

تعریف: اگر تابع f با D_f مفروض و برای هر $x \in D_f$، همواره $-x \in D_f$ در این صورت:

الف) تابع f را زوج می‌نامیم. اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$.

ب) تابع f را فرد می‌نامیم، اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = -f(x)$.

مثال ۱: تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2x^4 + x^2 - 3$ زوج است، زیرا:

$$D_f = \mathbb{R}, f(-x) = 2(-x)^4 + (-x)^2 - 3 = 2x^4 + x^2 - 3 = f(x)$$

مثال ۲: تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 - x$ فرد است، زیرا:

$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$$

مثال ۳: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log\frac{x+1}{-x+1}$ فرد است، زیرا:

$$D_f = [-1, 1) \quad ,$$

اگر $x \neq 1 \Rightarrow f(-x) = \log\frac{-x+1}{-(-x)+1} = \log\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)^{-1} =$

$$(-1)\log\frac{x+1}{-x+1} = -f(x)$$

مثال ۴: تابع با ضابطهٔ $f(x) = -2$ زوج است، زیرا:

$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad f(-x) = -2 = f(x)$$

مثال۵: اگر $f(x) = 0$ در این صورت f تابعی هم زوج و هم فرد است، زیرا:

$$f(-x) = 0 = f(x)$$

$$f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$$

مثال ۶: تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^2 - x$ نه زوج است و نه فرد، زیرا:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \neq f(x)$$

و همین طور $f(-x) \neq -f(x)$

مثال ۷: تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^n$، گاهی زوج و گاهی فرد است، زیرا:

$$n = 2k \Rightarrow f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = x^n = f(x)$$

$$n = 2k+1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -x^n = -f(x)$$

نکتهٔ مهم: اگر f تابعی فرد باشد و $0 \in D_f$ در این صورت همواره $f(0) = 0$ زیرا برای هر $x \in D_f$ داریم $f(-x) = -f(x)$ پس باید:

$$f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

نتیجه: اگر در تابعی $f(0) \neq 0$ آنگاه این تابع نمی‌تواند تابعی فرد باشد. البته توجه دارید که عکس نکتهٔ فوق برقرار نیست، یعنی اگر در تابعی $f(0) = 0$ همواره نمی‌توان حکم کلی صادر کرد که؛ تابع f فرد است، به عنوان مثال درتابع با ضابطه $f(x) = x^2 - x$ داریم $f(0) = 0$ و این تابع فرد نیست.

مثال ۸: تابعهای سینوس و تانژانت و کتانژانت، فرد و تابع کسینوس زوج است (ثابت کنید).

نکات مهم:

۱ ــ اگر f و g هر دو تابعهایی زوج یا هر دو فرد باشند، در این صورت ترکیب آنهابه ترتیب، همواره زوج یا فرد است.

I) فرض کنیم $f(-x) = f(x)$ ، $g(-x) = g(x)$

$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

II) فرض کنیم $f(-x)=-f(x)\ ,\ g(-x)=-g(x)$

$(fog)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=$

$-(fog)(x)$

۲ ــ اگر f و g دو تابع و یکی زوج و دیگری فرد باشد، در این صورت همواره (fog) و (gof) زوج می‌باشند. (اثبات به عهدهٔ خودتان)

۳ ــ حاصل ضرب دو تابع فرد یا دو تابع زوج تابعی زوج است، اگر f و g هر دو فرد باشند داریم:

$(f\times g)(-x)=f(-x)\times g(-x)=$

$=-f(x)\times -g(x)=f(x)\times g(x)=(f\times g)(x)$

پس $(f\times g)$ تابعی زوج است.

برای حالتی که هر دو زوج باشند نیز مانند بالا ثابت می شود.

۴ ــ حاصل ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است (ثابت کنید).

۵ ــ حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک تابع فرد، تابعی فرد و حاصل ضرب آن در یک تابع زوج تابعی زوج است (ثابت کنید).

۶ ــ مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج و مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است (ثابت کنید).

۷ ــ اگر f یک تابع دلخواه و D_f نسبت به مبدأ متقارن باشد، در این صورت، همواره $h(x)=f(x)+f(-x)$ تابعی زوج و $k(x)=f(x)-f(-x)$ تابعی فرد می‌باشد و نیز همواره می‌توان هر تابع دلخواه که دامنهٔ متقارنی داشته باشد چون f را به‌صورت مجموع دو تابع نوشت که یکی از آنها زوج و دیگری فرد باشد، زیرا:

$h(-x)=f(-x)+f(-(-x))=$

$=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=h(x)$

$k(-x)=f(-x)-f(-(-x))=$

$=f(-x)-f(x)=-(f(x))-f(-x)=-k(x)$

از طرفی اگر f تابعی دلخواه باشد، همواره داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}[(f(x)+f(-x))+(f(x)-f(-x))]$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}[h(x)+k(x)]=\underbrace{\frac{1}{2}h(x)}_{\text{زوج}}+\underbrace{\frac{1}{2}k(x)}_{\text{فرد}}$$

۸ ــ با توجه به تعریف تابع زوج و تابع فرد، نتیجه می‌گیریم که؛ اگر f تابعی زوج باشد چون با تغییر x به $(-x)$ معادلهٔ تابع تغییر نمی‌کند، پس محور y ها، محور تقارن f است و به همین قیاس اگر g تابعی فرد باشد، محور x ها، محور تقارن آن خواهد بود (به شرط آن که D_f و D_g نسبت به مبدأ، متقارن باشند).

۹ ــ اگر f تابعی فرد و مشتق‌پذیر باشد، آن گاه f' تابعی زوج و اگر f زوج و مشتق‌پذیر باشد f' فرد است.

تمرین

۱ ــ ثابت کنید، تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+3|+|x-3|$ تابعی زوج و تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+3|-|x-3|$ تابعی فرد است.

۲ ــ فرد یا زوج بودنِ هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{|x|}{[x]-[-x]}$

۲) $g(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

۳) $f(x)=\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|}$

۴) $g(x)=|x|+\cos x$

۵) $f(x)=|x+1|-x|x|-|x-1|$

۶) $f(x)=[x]x$

۷) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

۸) $g(x)=|x^2-1|+|-x|$

۹) $f(x)=\dfrac{[x]}{|x|x^3}$

۱۰) $f(x)=\sin(\cos x)$

۱۱) $g(x)=tg(\cos x)$

۱۲) $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{Arc\,cotg}x}$

۱۳) $g(x)=\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

ریاضیات گسسته

قسمت نهم

RALPH P. GRIMALDI

• ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مثال ۲. ۲۷

در این مثال از اثبات با استفاده از کاذب بهره می‌بریم.

$$\begin{array}{l} \overline{p} \leftrightarrow q \\ q \to r \\ \underline{\overline{r}} \\ \therefore p \end{array}$$

در اثبات درستی این استدلال، $\overline{p}$ ، نقیض نتیجهٔ p، را به‌عنوان فرضی دیگر در نظر می‌گیریم. در این صورت، هدفمان در این مرحله استفاده از این چهار فرض در استخراج کاذب $F_\circ$ است. (اثبات) استخراجمان به ترتیب زیر است.

مراحل	دلایل
(۱) $\overline{p} \leftrightarrow q$	فرض
(۲) $(\overline{p} \to q) \wedge (q \to \overline{p})$	(۱) و $[\overline{p} \leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(\overline{p} \to q) \wedge (q \to \overline{p})]$
(۳) $\overline{p} \to q$	(۲) و قاعدهٔ تسهیل عطفی
(۴) $q \to r$	فرض
(۵) $\overline{p} \to r$	(۳)، (۴)، و قانون قیاس
(۶) $\overline{p}$	فرض (در نظر گرفته شده)
(۷) r	(۵)، (۶)، و قاعدهٔ انفصال
(۸) $\overline{r}$	فرض
(۹) $r \wedge \overline{r} (\Leftrightarrow F_\circ)$	(۷)، (۸)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۰) $\therefore p$	(۶)، (۹)، و اثبات با استفاده از کاذب

در صورتی که به بررسی بیشتر آنچه در اینجا رخ داده بپردازیم، درمی‌یابیم که

$$[(\overline{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge \overline{r} \wedge \overline{p}] \Rightarrow F_\circ.$$

استلزام منطقی فوق طالب این است که ارزش راستی $[(\overline{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge \overline{r} \wedge \overline{p}]$ صفر باشد. به علت این که

$\bar{p} \leftrightarrow q$ ، $q \rightarrow r$ ، و $\bar{r}$ فرضهای داده شده‌اند، هر یک از آنها دارای ارزش راستی ۱ است. درنتیجه، برای این که :

$[(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r} \wedge \bar{p}]$

دارای ارزش راستی ۰ باشد، باید گزارهٔ $\bar{p}$ دارای ارزش راستی ۰ باشد. بنابراین، p ارزش راستی ۱ دارد، و نتیجهٔ استدلال، یعنی، p ، راست است.

□

مثالهای ۲.۲۴ ــ ۲.۲۷ راههایی در چگونگی اثبات درستی استدلال دادند. اکنون باید چگونگی تشخیص *نادرستی*[1] یک استدلال را بیاموزیم.

این وضعیت در استدلال

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

رخ می‌دهد که در آن هر یک از فرضهای p_1 ، p_2 ، p_3 ، ... ، p_n راست است (ارزش راستی ۱ دارد.)، و با این همه نتیجهٔ q دروغ است (ارزش راستی ۰ دارد).

مثال بعدی، روش غیرمستقیمی را توضیح می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان نشان داد استدلالی که *احساس می‌کنیم* نادرست است (شاید به این علت که نمی‌توانیم راهی برای نشان دادن درستی آن بیابیم) در واقع نادرست است.

مثال ۲. ۲۸

استدلال زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{l} p \\ p \vee q \\ q \rightarrow (r \rightarrow s) \\ \underline{t \rightarrow r} \\ \therefore \bar{s} \rightarrow \bar{t} \end{array}$$

برای نشان دادن نادرستی این استدلال، به چنان تخصیص ارزشهای راستی‌ای به هر یک از گزاره‌های p، q، r، s و t نیاز داریم که نتیجهٔ $\bar{s} \rightarrow \bar{t}$ دروغ باشد (ارزش راستی ۰ داشته باشد.) در حالی که هر چهار فرض استدلال راست باشد (ارزش راستی ۱ داشته باشد).

نتیجهٔ $\bar{s} \rightarrow \bar{t}$ ، تنها وقتی دروغ است که $\bar{s}$ راست و $\bar{t}$ دروغ باشد. این مطلب مستلزم این است که ارزش راستی s ، ۰ و ارزش راستی t ، ۱ باشد. برای اینکه فرض $p \vee q$ دارای ارزش راستی ۱ باشد، q می‌تواند راست (۱) یا دروغ (۰) باشد. بنابراین فرض $t \rightarrow r$ را در نظر می‌گیریم که در مورد آن می‌دانیم که t راست است. اگر قرار باشد $t \rightarrow r$ راست باشد، آنگاه r باید راست باشد (ارزش راستی ۱ داشته باشد). اما ارزش راستی فرض $q \rightarrow (r \rightarrow s)$ ، با r راست (۱) و s دروغ (۰)، تنها وقتی که q دروغ (۰) است ۱ می‌شود.

درنتیجه، تحت تخصیصات ارزش راستی :

p : ۱   q : ۰   r : ۱   s : ۰   t : ۱

هر چهار فرض

p $p \vee q$ $q \rightarrow (r \rightarrow s)$ $t \rightarrow r$

دارای ارزش راستی ۱ است، در حالی که نتیجهٔ

$\bar{s} \rightarrow \bar{t}$

ارزش راستی ۰ دارد. در این حالت نشان دادیم که استدلال داده شده نادرست است.

□

ارزشهای راستی

p : ۱   q : ۰   r : ۱   s : ۰   t : ۱

مثال ۲. ۲۸ حالتی را به دست می‌دهد که آنچه را که می‌اندیشیدیم ممکن است قضیه باشد رد می‌کند. اکنون باید شروع به داشتن این مطلب داشته باشیم که در کوشش در اثبات این که گزاره‌ای به‌صورت $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ قضیه است، باید استدلالی عمومی برای همهٔ حالت‌هایی که فرضهای p_1 ، p_2 ، p_3 ، ... ، p_n در آنها راست‌اند، ارائه دهیم. این استدلال، اساساً بر قواعد استنتاج و قوانین منطق بنا شده است، و در این مورد نمی‌توانیم از مثال خاصی به عنوان وسیلهٔ اثبات نتیجه‌ای عمومی استفاده کنیم. اما، زمانی که مایل به رد[2] گزاره‌ای خاص هستیم، تنها کاری که باید انجام بدهیم، یافتن نمونه‌ای است که گزارهٔ مورد نظر به‌ازای آن دروغ است. این نمونه را *مثال نقض*[3] می‌نامیم.

اکنون مثال دیگری را در نظر می‌گیریم و در آن به آزمایش رهیافت غیرمستقیم مثال ۲. ۲۸ می‌پردازیم.

مثال ۲. ۲۹

در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر چه می‌توان گفت؟

$p \to q$

$q \to s$

$r \to \bar{s}$

$\underline{\bar{p} \veebar r}$

$\therefore \bar{p}$

آیا نتیجهٔ $\bar{p}$، در حالی که هر چهار فرض راست‌اند، می‌تواند دروغ باشد؟ نتیجهٔ $\bar{p}$ هنگامی دروغ است که p دارای ارزش راستی ۱ باشد. بنابراین، برای این که فرض $p \to q$ راست باشد، باید ارزش راستی q چنین باشد. با توجه به ارزش فرض $q \to s$، ارزش q بر ارزش s مسلّط است. در این مرحله جمیع گزاره‌های p، q و s را با ارزش راستی ۱ داریم. با پرداختن به فرض $r \to \bar{s}$، در می‌یابیم که به علت ارزش راستی ۱ داشتن s، باید ارزش راستی r، ۰ باشد. در نتیجه r دروغ می‌شود. امّا با $\bar{p}$ ی دروغ و فرض $\bar{p} \veebar r$ راست، r را راست نیز داریم. بنابراین؛ درمی‌یابیم که $p \Rightarrow (\bar{r} \wedge r)$.

به این ترتیب در کوششمان برای یافتن مثالی نقض در مورد درستی استدلال داده شده با شکست مواجه شدیم. اما، این شکست به اثبات درستی استدلال مزبور ــ اثباتی بر مبنای اثبات با استفاده از کاذب ــ منجر شده است.

□

معرفی قواعد استنتاج و روشهای اثباتمان، فاصلهٔ زیادی تا جامع بودن دارد. کتابهای دیگر، موضوعات دیگری را به خواننده‌ای که میل به بررسی بیشتر این موضوع دارد، ارائه می‌دهند. در آینده، تکنیک اثبات بسیار مهمتری موسوم به *استقرای ریاضی*[۴] را به زرادخانه‌مان، برای یورش به اثباتهای قضایای ریاضی، خواهیم افزود.

کاربرد سورها

در بخش ۲. ۱ یادآور شدیم که چگونه لازم نیست، جمله‌هایی که با متغیری (چون x) سر و کار دارند، گزاره باشند. به عنوان مثال جملهٔ «عدد x + ۲ عددی صحیح و زوج است» لزوماً راست یا دروغ نیست، مگر این که بدانیم چه مقداری به‌جای x قرار گرفته است. اگر انتخابهایمان را به اعداد صحیح محدود کنیم، در این صورت چون به جای x، ۵-، ۱- یا ۳ را قرار دهیم، گزارهٔ نتیجه دروغ است. در واقع، جملهٔ مزبور هرگاه به جای x عددی صحیح و فرد قرار دهیم دروغ است. اما، چون به جای x عددی صحیح و زوج قرار داده شود گزارهٔ نتیجه راست است.

به جملهٔ «عدد x + ۲ عددی صحیح و زوج است» به عنوان *گزارهٔ باز*[۵] اشاره، و آن را به طور صوری به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲. ۵

جملهٔ خبری *گزارهٔ باز* است، اگر

۱. شامل یک یا بیش از یک متغیر باشد، و
۲. گزاره نباشد، امّا
۳. چون به جای متغیرهای آن انتخابهای مجاز خاصی بگذاریم، به گزاره تبدیل شود.

هنگامی که جملهٔ «عدد x + ۲ عددی صحیح و زوج است» را در پرتو این تعریف بررسی کنیم، آن را گزارهٔ بازی ملاحظه می‌کنیم که شامل تک متغیر x است. در رابطه با سومین عنصر تعریف فوق، در بحث پیشین‌مان «انتخابهای مجاز خاص» را به اعداد صحیح محدود کرده‌ایم. این انتخابهای مجاز آنچه را که به *عالم*[۶] یا *عالم مقال*[۷] گزارهٔ باز موسوم است، تشکیل می‌دهند. عالم مزبور، شامل انتخابهایی است که مایل به در نظر گرفتن یا تجویزشان برای متغیرهای واقع در گزارهٔ باز مورد نظریم. (عالم مورد بحث، مثالی از مجموعه[۸] است، مفهومی که آن را در آینده به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.)

در برخورد با گزاره‌های باز، نمادنویسی زیر را به کار خواهیم برد:

گزارهٔ باز «عدد x + ۲ عددی صحیح و زوج است» را به $p(x)$ [یا $q(x)$، $r(x)$ و غیره] نمایش می‌دهیم. در این صورت $\overline{p(x)}$ «عدد x + ۲ عددی صحیح و زوج نیست» خوانده می‌شود.

از $q(x,y)$ برای نمایش گزارهٔ بازی که شامل دو متغیر است استفاده می‌کنیم، چون $q(x,y)$: اعداد y+۲، x − y و x + ۲y اعدادی صحیح و زوج‌اند.

در حالت $q(x,y)$، بیش از یک ظهور هر یک از متغیرهای x، y موجود است. باید دانست که چون به جای یکی از xها

انتخابی از عالممان را قرار می‌دهیم، به جای x های دیگر، همان انتخاب را می‌گذاریم. به همین ترتیب، چون جانشینی‌ای (از عالم مربوطه) در مورد یک ظهور y انجام می‌گیرد، همان جانشینی در مورد جمیع ظهورات متغیر y به کار می‌رود.

با $p(x)$ و $q(x,y)$ چون فوق، و عالمی که همچنان اعداد صحیح را به‌عنوان تنها انتخابهای مجازمان مقرّر می‌کند، هنگامی که بعضی جانشینیها را برای متغیرهای x و y به کار می‌بریم، نتایج زیر را به دست می‌آوریم.

$p(۵)$: عدد ۷(=۲+۵) عددی صحیح و زوج است. (دروغ)

$\overline{p(۷)}$: عدد ۹ عددی صحیح و زوج نیست. (راست)

$q(۴,۲)$: اعداد ۴، ۲ و ۸ اعدادی صحیح و زوج‌اند. (راست)

نیز، به عنوان مثال، توجه می‌کنیم که $q(۵,۲)$ و $q(۴,۷)$ هر دو گزاره‌هایی دروغ‌اند، در حالی که $\overline{q(۵,۲)}$ و $\overline{q(۴,۷)}$ راست‌اند.

درنتیجه، ملاحظه می‌کنیم که در مورد $p(x)$ و $q(x,y)$، بعضی از جانشینیها به گزاره‌های راست و بعضی به گزاره‌های دروغ منجر می‌شوند. بنابراین می‌توانیم گزاره‌های راست زیر را تشکیل دهیم.

۱. به ازای بعضی xها، $p(x)$.

۲. به‌ازای بعضی xها و yها، $q(x,y)$.

توجه داشته باشید که در این حالت، گزاره‌های «به ازای بعضی xها، $\overline{p(x)}$» و «به ازای بعضی xها و yها، $\overline{q(x,y)}$» نیز راست‌اند.

گفته می‌شود که فرازهای «به ازای بعضی xها» و «به ازای بعضی xها و yها»، به ترتیب، گزاره‌های باز $p(x)$ و $q(x,y)$ را *سوردار* می‌کنند[۹]. بسیاری از اصول موضوع، تعاریف، و قضایای ریاضی شامل گزاره‌هایی هستند که گزاره‌های باز سوردارند. اینها از دو نوع سور[۱۰] نتیجه شده‌اند، که به *سورهای وجودی و عمومی*[۱۱] موسوم‌اند.

گزارهٔ (۱) از سور وجودی «به ازای بعضی xها» استفاده می‌کند، که می‌تواند به صورت «به ازای حداقل یک x» یا «x ی چنان موجود است که» نیز بیان شود. این سور در صورت نمادین به شکل $\exists x$ نوشته می‌شود. درنتیجه، گزارهٔ «به ازای بعضی xها، $p(x)$» در صورت نمادین به $\exists x\, p(x)$ تبدیل می‌شود.

گزارهٔ (۲) در صورت نمادین به $\exists x\, \exists y\, q(x,y)$ تبدیل می‌شود. از نماد $\exists x,y$ نیز می‌توان برای اختصار $\exists x\, \exists y\, q(x,y)$ به $\exists x,y\ \ q(x,y)$ استفاده برد.

سور عمومی با $\forall x$ نمایش‌داده و «به ازای جمیع xها»، یا «به ازای هر x» خوانده می‌شود.

با در نظر گرفتن $p(x)$ به صورت تعریف شده در قبل و استفاده از سورعمومی، می‌توانیم گزارهٔ باز $p(x)$ را به گزارهٔ (سوردار) $\forall x\, p(x)$، گزاره‌ای دروغ، تغییر دهیم.

اگر گزارهٔ باز $r(x)$: «۲x عددی صحیح و زوج است» را با همان عالم (جمیع اعداد صحیح) در نظر بگیریم، آنگاه گزارهٔ (سوردار) $\forall x\, r(x)$ گزاره‌ای راست است. هنگامی که می‌گوییم $\forall x\, r(x)$ راست است، مقصودمان این است که بی‌توجه به این که چه عدد صحیحی (از عالممان) به جای x قرار گرفته است، گزارهٔ نتیجه راست است. نیز توجه داشته باشید که گزارهٔ $\exists x\, r(x)$ گزاره‌ای راست است، در حالی که $\forall x\, \overline{r(x)}$ و $\exists x\, \overline{r(x)}$، هر دو، دروغ‌اند.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه مفاهیم جدید مربوط به سورهای فوق را می‌توان با رابطهای منطقی به کار برد.

مثال ۲. ۳۰

در این مثال، عالممان شامل جمیع اعداد حقیقی است. گزاره‌های باز $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $s(x)$ در زیر داده شده‌اند.

$:p(x)$	$x \geq ۰$
$:q(x)$	$x^۲ \geq ۰$
$:r(x)$	$x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$
$:s(x)$	$x^۲ - ۳ > ۰$

در این صورت گزاره‌های زیر راست‌اند.

۱

$\exists x[p(x) \wedge r(x)]$

این گزاره به این علت نتیجه می‌شود که، فی‌المثل، عدد حقیقی ۴، عضوی از عالم مربوطه و چنان است که هر دو گزارهٔ $p(۴)$ و $r(۴)$ راست‌اند.

۲.

$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$

اگر به جای x در $p(x)$ عدد حقیقی و منفی a را قرار دهیم، آنگاه $p(x)$ دروغ است، اما $p(a) \rightarrow q(a)$، بی‌توجه به ارزش

راستی $q(a)$، راست است. با قرار دادن عدد حقیقی نامنفی b به جای x در $p(x)$ و $q(x)$ ؛ $p(b)$، و $q(b)$، هر دو، را، همچنان که $p(b) \to q(b)$، راست می‌یابیم، درنتیجه، $p(x) \to q(x)$ به ازای جمیع مقادیر x واقع در عالم تمام اعداد حقیقی، راست است، و گزارهٔ (سوردار) $\forall x[p(x) \to q(x)]$ راست است.

این گزاره را می‌توان به یکی از دو صورت زیر ترجمه کرد:

a) به ازای هر عدد حقیقی x، اگر $x \geq ۰$، آنگاه $x^۲ \geq ۰$.

b) هر عدد نامنفی مربعی نامنفی دارد.

گزارهٔ $\exists x[p(x) \to q(x)]$ نیز راست است.

گزاره‌های مورد بررسی بعدی دروغ‌اند.

.۱′

$\forall x[q(x) \to s(x)]$

می‌خواهیم نشان دهیم که این گزاره دروغ است، بنابراین لازم است که، به جایِ اثبات مطلبی به ازای جمیع x ها، چنان که در گزارهٔ (۲) انجام دادیم، تنها *مثالی نقض* ارائه دهیم ــ یعنی، *مقداری از* x که به ازای آن $q(x) \to s(x)$ دروغ است. با قرار دادن ۱ به‌جای x، ملاحظه می‌کنیم که $q(۱)$ راست و $s(۱)$ دروغ است. بنابراین $q(۱) \to s(۱)$ دروغ است، و درنتیجه، گزارهٔ (سوردار) $\forall x[q(x) \to s(x)]$ دروغ است. (توجه داشته باشید که $x = ۱$ تنها مثال نقض موجود را به دست نمی‌دهد: هر عدد حقیقی a ی بین$\sqrt{۳}-$ و $\sqrt{۳}$، $q(a)$ را راست و $s(a)$ را دروغ می‌کند.)

.۲′

$\forall x[r(x) \vee s(x)]$

در این مورد، مثالهای نقض بسیاری، چون، ۱، $\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۱}{۲}$، و ۰ موجودند: امّا، با تغییر سور، درمی‌یابیم که گزارهٔ $\exists x[r(x) \vee s(x)]$ راست است.

.۳′

$\forall x[r(x) \to p(x)]$

عدد حقیقی ۱- جواب معادلهٔ $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ است، بنابراین $r(-۱)$ راست است. در حالی که $p(-۱)$ دروغ است.

بنابراین انتخاب ۱- مثال نقض یکتایی را به دست می‌دهد که برای رد این گزارهٔ (سوردار) به آن نیاز است.

گزارهٔ (۳′) را می‌توان به یکی از دو صورت زیر ترجمه کرد:

a) به ازای هر عدد حقیقی x، اگر $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$، آنگاه $x \geq ۰$.

b) به ازای هر عدد حقیقی x، اگر x جواب معادلهٔ $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشد، آنگاه $x \geq ۰$.

□

از مثال ۲. ۳۰ ملاحظات زیر را به عمل می‌آوریم. فرض می‌کنیم $p(x)$ هر گزارهٔ باز (برحسب متغیر x) با عالم *ناتهی*[۱۲] مشخصی را (یعنی، عالمی شامل حداقل یک موجود) نمایش دهد. در این صورت اگر $\forall x\, p(x)$ راست باشد، $\exists x\, p(x)$ نیز چنین است، یا

$\forall x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$

نیز اگر $\exists x\, p(x)$ راست باشد، نتیجه نمی‌شود که $\forall x\, p(x)$ باید راست باشد. درنتیجه، $\exists x\, p(x)$ منطقاً مستلزم $\forall x\, p(x)$ نیست.

یادداشتها

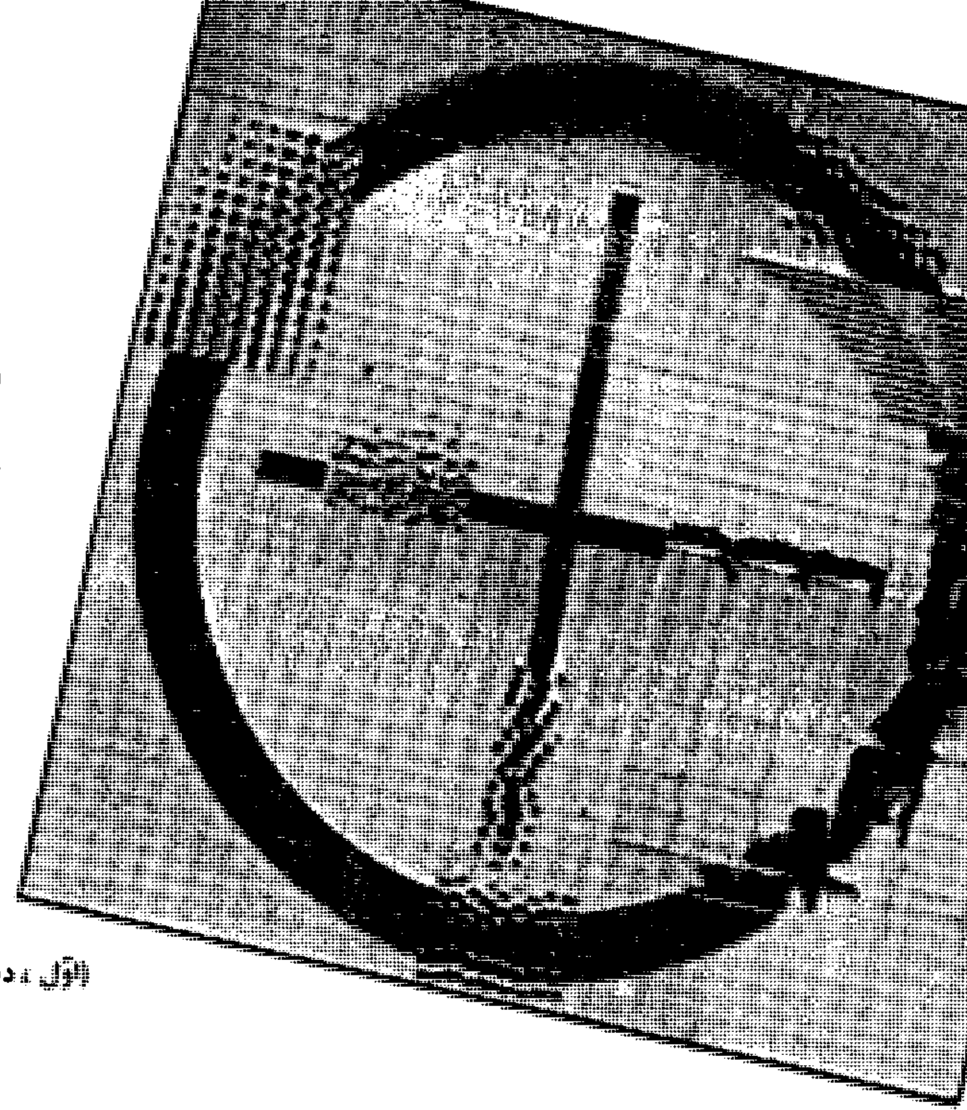
1. Invalid
2. Disprove
3. Counterexample
4. Mathematical induction
5. Open statement
6. Universe
7. Universe of discourse
8. Set
9. Quantify
10. Quantifiers
11. Existential and universal quantifiers
12. Nonempty

مکان هندسی

(قسمت سیزدهم)

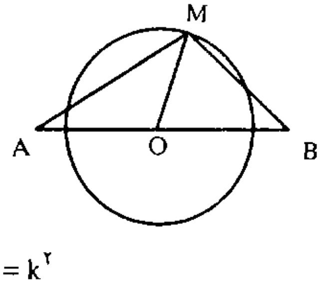
● محمدهاشم رستمی

(اول، دوم، سوم، چهارم دبیرستان)



۹. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و AB = a و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:



$$MA^2 + MB^2 = k^2 \qquad (1)$$

در مثلث MAB، پاره‌خط MO میانهٔ نظیر ضلع AB است و بنا به رابطهٔ میانه‌ها در مثلث، می‌توان نوشت:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

و یا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

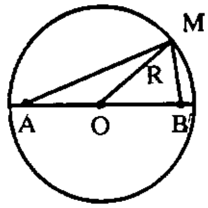
$$2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k^2$$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2} \qquad (3)$$

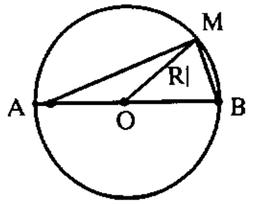
با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O و مقدارهای k^2 و a، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ است. برعکس هر نقطه روی دایرهٔ بالا انتخاب کنیم، مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا $k^2 \geq \frac{a^2}{2}$ باشد. در این‌صورت:

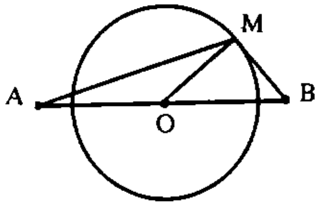
۱. اگر $k^2 > a^2$ باشد، $R > \frac{a}{2}$ و در نتیجه دو نقطهٔ A و B درون دایرهٔ مکان واقع می‌شوند.



۲. اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = \frac{a}{2}$ و دایرهٔ مکان از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. در حقیقت در این حالت دایرهٔ مکان دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است.



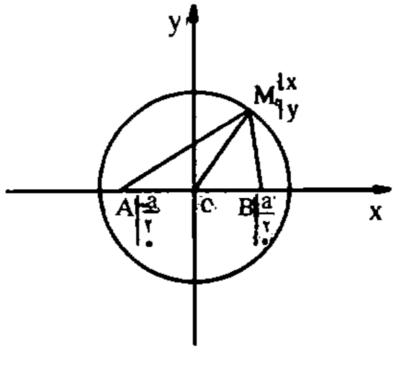
۳. اگر $\frac{a^2}{2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{2}$ و دو نقطهٔ A و B در برون دایرهٔ مکان قرار می‌گیرند.



۴. اگر $k^2 = \frac{a^2}{2}$ باشد، $R = 0$ و در نتیجه تنها نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB جواب مسأله است.



اثبات به روش تحلیلی. خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. در



این‌صورت با فرض $AB = a$، $A(-\frac{a}{2}, 0)$ و $B(\frac{a}{2}, 0)$ خواهد بود.[1] اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر یعنی نقطه‌ای باشد که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k^2 است، داریم:

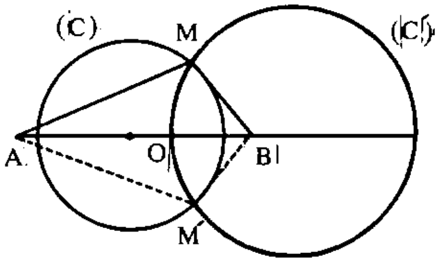
$$M(x,y) \text{ و } A(-\frac{a}{2},0) \text{ و } B(+\frac{a}{2},0) \text{ و } MA^2 \neq MB^2 = k^2$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2 + y^2 + (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = k^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = k^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(2k^2 - a^2)} \quad (1)$$

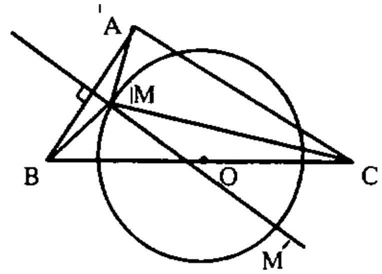
معادلهٔ (۱)، معادلهٔ دایره‌ای است که مرکز آن نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و شعاع آن $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ است. بنابراین بحث جواب مسأله همانند روش هندسی است.

مثال ۱. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از این دو نقطه برابر k^2 و نسبت فاصله‌اش از همین دو نقطه برابر k' باشد.



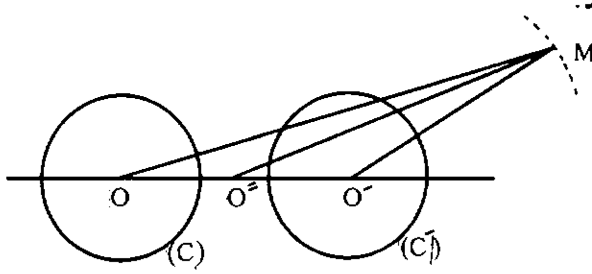
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k^2 است، دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ (دایرهٔ C). این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k' باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، دایرهٔ (C'). این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.

مثال ۲. سه نقطهٔ B، A و C غیرواقع بر یک خط راست در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k^2 و از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-BC^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است عمودمنصف پاره‌خط AB است. این مکان را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است.

مثال ۳. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع قوتهای آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار ثابت k باشد.



حل. فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌های مکان هندسی مورد نظر باشد یعنی داشته باشیم:

با توجه به این‌که $PA(C)=MO^2-R^2$ و $PA(C')=MO'^2-R'^2$ است. با جایگذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$MO^2-R^2+MO'^2-R'^2=k$$
$$\Rightarrow MO^2+MO'^2=k+R^2+R'^2 \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که مجموع مربعهای فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت O و O′ برابر مقدار ثابت $k^2+R^2+R'^2$ است. بنابراین مکان هندسی این نقطهٔ دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط OO′ و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(k+R^2+R'^2)-\overline{OO'}^2}$ است.

مثال ۴. دو نقطهٔ $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ در دستگاه مختصات xoy مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این دستگاه مختصات را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه A و B برابر ۱۷ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی خواسته باشد. در این صورت داریم:

$$B(2,-1) \text{ و } A(-1,3) \text{ و } M(x,y) \text{ و } MA^2+MB^2=17$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=17$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-2x-4y=2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-x-2y-1=0 \Rightarrow \boxed{(x-\tfrac{1}{2})^2+(y-1)^2=\tfrac{9}{4}}$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز $O_1(\frac{1}{2},1)$ و به شعاع $R=\frac{3}{2}$ است.

مثال ۵. نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x+y-1=0$ بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(2,1)$ برابر ۱۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دونقطه A و B برابر مقدار ثابت ۱۶ است، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطه یا نقاط برخورد آن، با خط Δ را به‌دست می‌آوریم.

$$M(x,y) \qquad A(-2,1) \qquad B(2,1)$$
$$MA^2+MB^2=16$$
$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2=16$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y=6 \Rightarrow x^2+y^2-2y-3=0$$
$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4 \qquad \text{معادلهٔ دایرهٔ مکان هندسی}$$

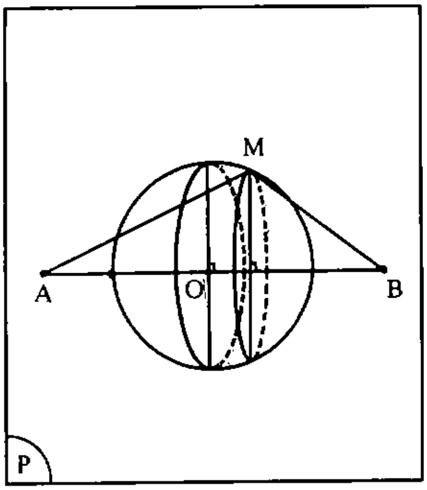
$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow M_1 \left| \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 1-\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{array} \right. \qquad M_2 \left| \begin{array}{l} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ 1+\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{array} \right.$$

نقطه‌های جواب مسأله.

۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k^2 است، کره‌ای است که مرکزش وسط پاره‌خط AB است.

اثبات به روش هندسی. صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد درنظر می‌گیریم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایرهٔ (C) به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-\overline{AB}^2}$ است.



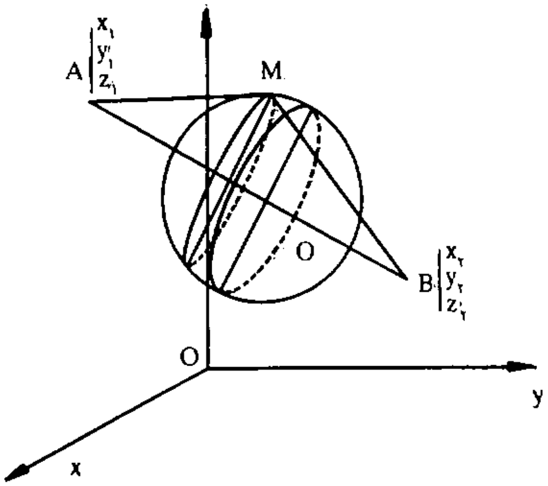
این دایره را رسم می‌کنیم. واضح است که برای هر نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ (C) داریم: $MA^2+MB^2=k^2$. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایرهٔ (C) واقع در این صفحه که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k^2 است، کره‌ای به قطر پاره‌خط AB پدید می‌آید، که این کره، مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 است.

اثبات به روش تحلیلی. دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را در دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ درنظر می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k^2 باشد، داریم:

$A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ و $M(x,y,z)$

$$\Rightarrow MA^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \quad \text{و}$$

$$MB^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$



$$MA^2+MB^2=k^2\Rightarrow$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=k^2$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2x(x_1+x_2)-2y(y_1+y_2)-2z(z_1+z_2)+x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2=k^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z=\frac{1}{2}\left[k^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2)\right]$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2=\frac{2k^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2}{4} \qquad (1)$$

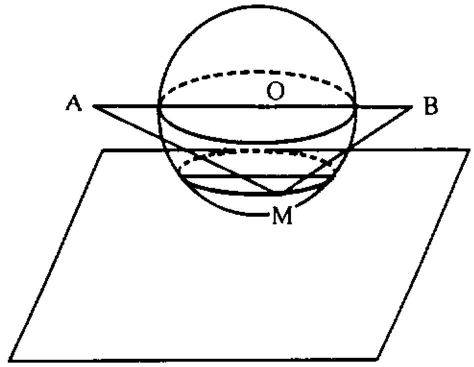
معادلهٔ (۱) معادلهٔ کره‌ای به مرکز $O_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2}$ است.

بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ برابر مقدار ثابت k^2 است.

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است.

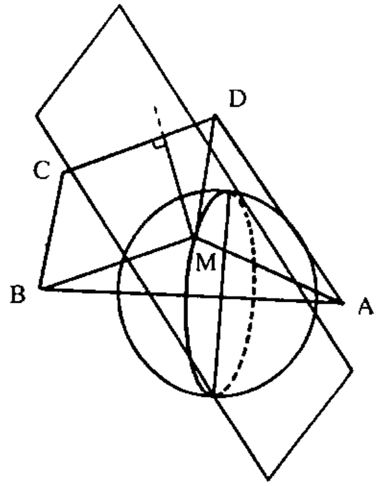
مثال ۱. صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B غیرواقع بر این صفحه مفروضند. مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ P را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌شان از دو نقطه ثابت A و B برابر k^2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k^2 باشد، کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P (در صورت وجود) جواب مسأله است. بنا به مقدار k و وضع پاره‌خط AB نسبت به صفحهٔ P می‌توان وجود جواب را بررسی نمود.



مثال ۲. چهارضلعی چپ ABCD (چهارضلعی‌ای که رأسهایش در یک صفحه قرار ندارند) مفروض است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند و مجموع مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ C و D برابر مقدار ثابت k^2 باشد.

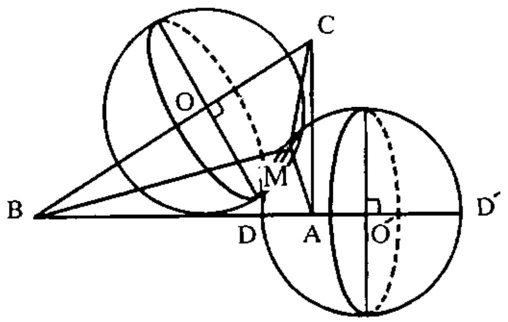
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ ثابت C و D به یک فاصله است، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. این صفحه را رسم کرده آن را صفحهٔ (P) می‌نامیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع مربعهای



فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت C و D برابر مقدار ثابت k^2 است. کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط CD و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - CD^2}$ است. این کره را نیز رسم می‌کنیم. فصل‌مشترک این کره با صفحهٔ P (درصورت وجود) جواب مسأله است. برحسب اندازهٔ k^2 و طول ضلعهای چهارضلعی می‌توان وجود جواب را بررسی کرد.

مثال ۳. سه نقطهٔ A، B و C مفروضند. مجموعه نقاطی از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر k و مجموع مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ B و C برابر k'^2 باشد.

حل. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند (کرهٔ آپولونیوس) این کره را رسم می‌کنیم (کرهٔ S). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر k'^2 است کره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k'^2 - BC^2}$ است (کرهٔ S′). این کره را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو کره (درصورت وجود) جواب مسأله است.



مثال ۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(1,0,2)$ و $B(3,-1,0)$ برابر ۲۳ باشد.

حل. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$A(1,0,2)$ و $B(3,-1,0)$ و $M(x,y,z)$

$$MA^2 + MB^2 = 23$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 + (x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 23$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 2y - 4z + 15 = 23$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x+y-2z=4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-1)^2=\frac{37}{4} \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ کره‌ای به مرکز $O_1(2,-\frac{1}{2},1)$ (که همان وسط پاره‌خط AB است) و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{37}$ می‌باشد.

مثال ۵. دو نقطهٔ $A(2,-1,3)$ و $B(-2,1,1)$ و خط $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ داده شده‌اند. نقطه‌ای بر خط Δ بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۴۰ باشد.

حل. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۴۰ است می‌نویسیم و با معادله خط Δ قطع می‌دهیم. داریم:

$A(2,-1,3)$ و $B(-2,1,1)$ و $M(x,y,z)$

$$MA^2+MB^2=40$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2+(x+2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=40$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-8z+20=40$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی (S) $\quad \Rightarrow x^2+y^2+z^2-4z-10=0$

$$\begin{cases}\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z-2=t \Rightarrow x=2t, y=3t, z=t+2 \\ (S): x^2+y^2+z^2-4z-10=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4t^2+9t^2+(t+2)^2-4(t+2)-10=0$$

$$\Rightarrow 14t^2-14=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$$

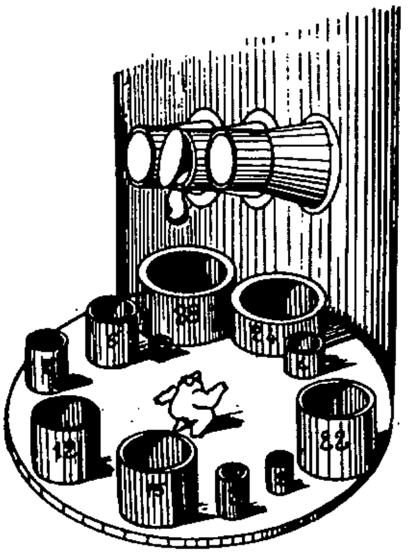
$\Rightarrow M_1(2,3,3)$ و $M_2(-2,-3,1)$

نقطه‌های جواب مسأله.



تفریح اندیشه ۳

تاجری ۱۰ مخزن دارد که گنجایش آنها ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۱۲، ۱۵، ۲۲، ۲۴ و ۳۸ لیتر است. هرکدام از این ظرفها پر از مایعات مختلف زیر است. بعضی پر از شیر، بعضی پر از آب و برخی پر از روغن هستند و فقط یک مخزن خالی است. مقدار آب موجود در مخزنها دو برابر مقدار شیر، و مقدار روغن، دو برابر مقدار آب است. هر مخزن از چه موادی پر شده است؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



در باغ تجربه‌ها

(قسمت اول)

گفتگو با آقای میرزا جلیلی

□ **آقای جلیلی! لطفاً خودتان را معرفی کنید.**

■ بسم‌الله الرحمن الرحیم الحمدلله رب‌العالمین و به نستعین فبشّر عبادیَ الّذین یستمعون القولْ و یتبعون اَحسنه.

میرزا جلیلی هستم، در اوّل اردیبهشت ماه ۱۳۱۲ در بوشهر متولد شدم. تحصیلات ابتدایی را در دبستان فردوسی و متوسطه را در دبیرستان سعادت آن شهر به پایان رساندم. پس از گذراندن دانشسرای مقدماتی شیراز، از دانشسرای عالی تهران فارغ‌التحصیل شدم. ۲۰ سال در شهرستان کازرون تدریس کردم، یک دورهٔ یکساله آموزش ریاضی در انستیتوی تربیتی دانشگاه لندن گذراندم و به دریافت دیپلم نایل آمدم، که بعدها از طرف وزارت علوم، فوق لیسانس شناخته شد. یک دورهٔ شش ماهه برنامه‌ریزی را در دانشگاه تگزاس در آسین گذراندم و پایان‌نامهٔ آن دوره را دریافت کردم.

از سال ۱۳۵۰، در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف مشغول به کار هستم. با این همه کار تدریس را هیچ‌گاه رها نکرده‌ام و با معلّمان ریاضی کشور در تمام مقاطع تحصیلی، مرتب در تماس بوده‌ام و با جوّ آموزش کشور کاملاً آشنا هستم.

برنامه‌ریزی چندین مقطع تحصیلی را، از ابتدایی، راهنمایی، دبیرستان، دانشسرای مقدماتی، و مراکز تربیت معلم کارگردانی کرده‌ام و به تألیف رسانیده‌ام، که همگی کتابهای موفق ریاضی در مدارس بوده‌اند. در دو برنامه‌ریزی دبیرستان [از ۱۳۶۲ تا ۱۳۶۴ و از ۱۳۶۸ تا ۱۳۷۰] شرکت کردم و از مؤلفان کتابهای «ریاضیات جدید» دبیرستان هستم که برای اوّلین بار در ایران با همکاری کارشناسان، مفاهیم جدید و به روز ریاضی جهان، در سطح فهم دبیرستان، با زبان ساده و دانش‌آموزی، وارد کتابهای ریاضی کردیم. همچنین در تألیف کتابهای ریاضی ۱ تا ۴ نظام‌جدید نیز همکاری داشته‌ام. سالها مدیر داخلی مجلهٔ رشد آموزش ریاضی و جزو هیأت تحریریه آن بوده‌ام.

در کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی[1] در استرالیا، همچنین در دو کنفرانس ریاضی در زمینهٔ آموزش ریاضی در سوتمتون و هلند، حضور داشتم و در توکیو و مسکو پای صحبت کارشناسان و مؤلفان و برنامه‌ریزان ریاضی نشسته‌ام و از آنها رهنمود برنامه‌ریزی گرفته‌ام.

□ **غیر از ریاضی، تخصص دیگری هم دارید؟**

■ به زبان انگلیسی مسلّط هستم و تاکنون چندین مقاله برای رشدِ آموزش ریاضی ترجمه کرده‌ام؛ از جمله مقالهٔ «شون فیلد» در زمینه «مسأله حل کردن در کلاس» همچنین کتاب هندسه فضایی المپیاد را با عنوان «مطالبی در هندسه» با همکار محترم آقای ابراهیم دارابی ترجمه کرده‌ام. متأسفانه

در ۱۰ یا ۱۲ سال گذشته به سبب ضعف بینایی، از ترجمه امساک می‌کنم.

□ **شما در آموزش ریاضی پیرو چه نظریه‌ای هستید؟**

■ پیرو که چه عرض کنم، ولی در این زمینه توضیحاتی را لازم می‌دانم:

گروهی از ریاضیدانان معتقدند که اشیای ریاضی، موجودات ذهنی انسان هستند. مثلاً، در مورد اینکه نقطه چیست؟ در ذهنمان به جای نقطه، اثر مداد یا قلم روی کاغذ فرض می‌کنیم. یعنی نقطهٔ هندسی، یک موجود ذهنی است که در عالم خارج وجود ندارد، ولی تصوری از آنچه در ذهن داریم، روی کاغذ نشان می‌دهیم. این مطلب در مورد خط نیز صدق می‌کند. مثلاً در ذهنمان به‌جای خط، تیرهای چراغ برق یا سیمهای تلفن و یا لبه‌های راست جوی و یا لبه میز در نظر می‌گیریم. یعنی خط نیز یک مخلوق ذهنی است که در جهان مادی وجود ندارد، بلکه آنچه به نام خط در هندسه فرض می‌کنیم، تصوّر ذهنی ماست.

مفهوم مجموعه نیز در ذهن خلق می‌شود و تصور و توصیفی از آن را چنین بیان می‌کنیم «دسته‌ای از اشیای دوبه‌دو متمایز» و یا در مثال می‌گوییم «مجموعهٔ ورزشی آزادی» و به کمک همین مجموعه، مفهوم عدد را آموزش می‌دهیم. وقتی مثلاً به عدد ۵ فکر می‌کنیم **جای عدد ۵، تصوری از خاصیت مشترک تمام مجموعه‌هایی که دارای ۵ عضو** هستند در نظر می‌گیریم.

در جهان خارج، پنج‌های مقیّد بسیاری هستند؛ مثل ۵ تا گنجشک، ۵ تا قلم، ۵ تا درخت، ۵ تا گل، ۵ تا گوسفند، ۵ تا اتوبوس، ... ولی شما نمی‌توانید عدد «۵» مطلق را در عالم خارج ببینید. یعنی عدد ۵ در عالم خارج وجود نداشته، بلکه وجودش در ذهن و تصور ماست. ممکن است این پرسش مطرح شود که اگر این اشیا، ذهنی است، ممکن است شیء ذهنی علی با شیء ذهنی رضا متفاوت باشد. مثلاً نقطه، خط، مجموعه یا عدد؟ با این حساب، معلم و دانش‌آموز چگونه می‌توانند با یکدیگر تبادل ذهنی انجام دهند و به یک مفهوم ریاضی مشترک برسند؟

جواب این است: همان‌طور که خداشناسی در ذات انسان وجود دارد این اشیا نیز در ذهن انسان وجود دارد. مثلاً: اعداد طبیعی در ذهن انسان وجود داشته و این ۵ که در ذهنها وجود دارد یکسان است و این یکسانی عاملی است که ایجاد تفاهم، تبادل و ارتباط و در نهایت مفهوم عدد یا شیء ریاضی دیگر می‌نماید که قابل انتقال به دیگری است.

□ **شما صحبت از اشیای ریاضی کردید ممکن است در این زمینه بیشتر توضیح دهید؟**

■ نقطه، خط، مجموعه، عدد، ... اشیای ریاضی هستند. **اشیای ریاضی، جوهر ریاضی هستند که در ذهن خلق می‌شوند و بعد شکلهایی از آنها به تصوّر درمی‌آید و یا متصوّر می‌شود.**

□ **آموزش ریاضی، چه نسبتی با این اشیای ریاضی دارد؟**

■ یادگیری ریاضی، چگونگی مطالعه تصوّر این اشیای خلق شده در ذهن و بررسی ارتباط آنهاست. و این یادگیری، مطالعه صرف یک دسته از اشیای ریاضی نیست، بلکه مطالعه رابطهٔ بین آنهاست و لذا می‌توان به جای یک دسته از اشیا، دستهٔ دیگر جایگزین نمود، به شرط آن که روابط میان آنها ثابت بماند و این خاصیت تعمیم ذهن است.

یادگیری ریاضی در ارتباط با اشیای خلق شدهٔ ذهنی و شکل دادن به آنها و اثبات احکامی دربارهٔ آنهاست، اگر احکام[۲] را ثابت نکنیم مسلماً چیزی از ریاضی را یاد نداده‌ایم. به عبارت دیگر، ذهن انسان، به قدرت خدای بزرگ، توانایی آن‌را دارد که اشیای ریاضی را خلق کند و شکل بدهد و آنچه خلق کرده، به‌تصور در بیاورد و تعمیم بدهد و میان آنها ارتباط برقرار کند و حکمی بسازد و سپس این حکم را ثابت کند و همین‌طور جلو برود، ... و آموزش کوشش دارد که بین این مخلوقات ذهنی و تصور آنها و ارتباط منطقی برقرار شده، ایجاد نظم کند و ارتباط‌ها را روشن ساخته، به مطالعهٔ ویژگیهای آنها بپردازد و هر چه این ارتباط با تصوّر و توصیف روشنتری ارائه گردد، آموزش آسانتر صورت می‌گیرد و تا آنجا پیش می‌رود که:

هر شیوهٔ منطقی خلق ذهنی اشیا را می‌توان متصوّر ساخت و ارتباط آنها را مطالعه کرد و احکام مربوط را با شیوه‌ای مستند و استدلالی اثبات نمود و ادامه داد... و از آنجا یک شاخه ریاضی را به‌وجود آورد و این مطالب را با همان مراحلی که پیموده شده و شکل گرفته آموزش داد.

□ **پس شیوهٔ «شهودی ــ تجربی» چیست؟**

■ در مقابل نظریه‌ای که اشاره شد گروهی نیز به شیوهٔ «شهودی‌ــ تجربی» اعتقاد دارند. بدین معنا که تأکید بر مشاهده، عمل، ارتباط و تعمیم دارند و یا به عبارت دیگر: همیشه در جستجوی واقعیت هستند. مثلاً در پی احکامی از این قبیل که «کوه هیمالیا بلند است»، «آب رودخانه روان است»، «زغال سیاه است» و ...

از نظر شهودی ــ تجربی یک حکم وقتی درست است که با واقعیت تطبیق داشته باشد و این با آنچه در پیش از این آمده قدری در ستیز و مجادله است.

□ **تا چه حد می‌توان در ارتباط بین تصورات اشیای ریاضی خلق شده در ذهن و تطبیق آن با واقعیت جلو رفت؟ و یا چگونه می‌توان از شهود و تجربه به تجرید رسید؟**

■ جواب، قابل تأمل است. عده‌ای معتقدند که این ارتباط، مربوط به ظرافت کار معلّم در کلاس و تجربهٔ عملی او با دانش‌آموزان است. بدین معنا که معلم با توجه به شرایط موجود کلاس خود (بویژه در دبیرستان) و توجه به هر دو مطلب، کوشش کند به آسانی دانش ریاضی را به بچه‌ها انتقال بدهد و هر روز در نحوهٔ این انتقال و پیشرفت کار خود مطالعه کند و خود بهترین روش انتقال را برای کلاس خویش تجربه و کشف کند. هر جا یک روش موجب پیشرفت می‌شود از آن استفاده کند و هر جا روش دیگری کارایی بیشتری دارد، از آن استفاده نماید. البته آموزگاران دوره ابتدایی و راهنمایی در این زمینه نیاز به راهنمایی و ارشاد بیشتری دارند.

تأکید بر تجربهٔ تنها، دانش‌آموز را از درک جوهر ریاضی باز می‌دارد و تأکید بر تجرید نیز ممکن است انتقال دانش را مشکل سازد.

نظریه‌های آموزش ریاضی نیز مبتنی بر تجربه و تأکید بر کار معلم در کلاس دارد. **کارشناسان آموزش ریاضی، همیشه به آنچه در این زمینه ارائه می‌دهند، اضافه می‌کنند (در دبیرستان و دانشگاه) که: این شیوه آموزش در شرایط و تجربهٔ کلاس درس ما می‌گنجد و کارایی دارد** و توصیه می‌کنند که شما هم برای کلاس خود تجربه کنید، نه بپذیرید. (در دبیرستان).

□ **نظر شما در مورد بحثهای روز که «کتابها محتوا محور است» چیست؟**

■ متأسفانه به علّت عدم وجود کار تحقیق و قرار نگرفتن افراد در جریان به روز جهان، وقتی مطلبی به دست ما می‌رسد یا به گوش ما می‌خورد و یا به ذهن ما می‌رسد یا در کتابی می‌بینیم، با وجودی که مطلب تازه هم نیست، خیلی زود شیفته و فریفته آن می‌شویم و تصمیم به پیاده کردن آن در آموزش کشور می‌کنیم. بدون آن‌که تأمل کنیم که ما در کجا هستیم؟ جایگاه ما در آموزش کدام است؟ سنت آموزشی ما چیست؟ تجربهٔ کار پیشینیان در این زمینه چه بوده است؟ شرایط کلاسها چگونه است؟ جوّ آموزش کشور چیست؟ شرایط معلمین کدام است؟ یا در اجرا چه می‌گذرد؟ و و و... مثلاً همان‌طورکه اشاره شد، اِعمال روانشناسی و روانکاوی در محتوای کتابها، بحث داغ روز عده‌ای است. به‌عبارت دیگر؛ شعار این است که:

«**کتابهای فعلی محتوا محورند» یعنی بیشتر به ارائه خود علم توجه کرده‌اند و به شیوهٔ آموزش ــ ظاهراً ــ توجه نشده است.**

این بحث، ظاهر قشنگی دارد، ولی عمل کردن به آن از یک‌طرف نیاز به تحقیق و تأمل فراوان دارد و از همه مهمتر نیازمند زمان است تا به‌تدریج جا بیفتد. در سالهای ۴۲ ــ ۱۳۳۶ طرح دکتر مهران وزیر آموزش و پرورش وقت در مدارس اجرا شد. کار گروهی در کلاس و حذف امتحانات سالهای ۱ تا ۴ ابتدایی ۱۰ سال بعد، سروصدای مردم از بیسوادی بچه‌ها بلند شد و مجبور شدند به سنّت برگردند.

از سوی دیگر، عنوان کردن این بحثها این مطلب را در ذهن متبادر می‌سازد که آیا قبلاً روانشناسی یادگیری، روانشناسی بلوغ، فن آموزش، فلسفه و اصول یادگیری، تاریخ آموزش و... وجود نداشته است؟

آیا نظریات *ارسطو*، *روسو*، *اسپنسر*، *جان دیویی*، پیازه تازه به ایران وارد شده است؟ در حالی‌که همه می‌دانند که از ۵۰ سال پیش، دکتر *محمدباقر هوشیار*، دکتر *علی‌اکبر سیاسی*، دکتر *عیسیٰ صدیق*، دکتر *مهدی جلالی* و دیگران این مطالب را به دانش‌آموزان دانشسراها و دانشجویان تربیت معلم و سایر دانشجویان آموزش می‌دادند و مؤلفان کتابهای امروزی، در هر رشته درسی، پیش از این با این مطالب آشنایی داشته و کار کرده‌اند. از همه مهمتر، سالها

تجربه تدریس و کار در کلاس دارند، با دبیران ریاضی کشور در تماس مستقیم کلاسی هستند و بعد از سالیان دراز تدریس و کلاسداری، دست به تألیف زده‌اند.

□ **شما تا چه حد و تا کجا بحث «محتوا محوری» را قبول دارید؟**

■ به نظر من، بحث محتوا محوری و یا اعمال روش و روانشناسی آموزشی در کتابها، بیشتر تأکید روی کتابهای دوره ابتدایی و یا راهنمایی دارد. دلیل آن هم این است که در سطح بین‌المللی، روی آموزش ریاضی و شیوه‌ها در دورهٔ ابتدایی پژوهش بیشتری شده و کتابهای فراوانی تألیف شده است. و هنوز هم هر ماه، کتابهای تازه‌ای در این زمینه منتشر می‌شود، ولی روی آموزش ریاضی در دبیرستان ــ در دنیا ــ محدود کار شده است. حتی در دورهٔ راهنمایی! *پولیا* و یکی دو تا از شاگردان او مثل *شون فیلد*، *آلن اسمیت* در این زمینه کار کرده‌اند و شیوه‌هایی در آموزش و حل مسأله توصیه کرده‌اند بقیه مثل سرژلانگ، کار تجربی فرد یا افرادی در کلاس است که به خواننده توصیه می‌کند که این روشها در کلاس من یا ما موفق بوده، شما هم در کلاسهای خود تجربه کنید.

□ **قرار شد شما از خاطراتتان هم صحبت کنید. برای تنوع، شاید در اینجا مناسب باشد.**

■ خاطره‌ای از استاد بیرشک دارم. وقتی کتابهای هندسهٔ دبیرستان در سالهای ۵۳ ــ ۱۳۵۰ در دست تألیف بود، همکار آقای بیرشک اصرار داشت که از علایم تازه به دبیرستان وارد شده ؛مثل ε, $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$ نیز در هندسه استفاده شود تا چهرهٔ هندسه نیز نو گردد، ولی آقای بیرشک چندان موافق نبود و این ضرب‌المثل را ذکر می‌کرد:

به طرف گفتند: «از سر بام نیفتی»، او آن‌قدر عقب عقب رفت تا از آن سوی بام بر زمین افتاد.

حال امیدواریم با شعار «محتوا محوری» و «آموزش ریاضی» از این طرف بام نیفتیم.

□ **به نظر شما، شیوهٔ کار در برنامه‌ریزی و تألیف باید چگونه باشد؟**

■ به نظر کارشناسان برنامه‌ریزی، در تجدیدنظر در برنامه و کتابها لازم است رعایت اصولی بنماییم. مثلاً هرگاه خواسته باشیم ایده یا مطلب تازه‌ای را وارد آموزش کنیم ــ چه محتوا و چه شیوه ــ این کار باید «**تدریجی**» صورت گیرد، نه «جهشی». این تغییرات را بین ۱۵ تا ۲۰ درصد ذکر می‌کنند، تا بدون پیشینه و سابقهٔ ذهنی و بی‌مقدمه به ثبات آموزشی کشور لطمه وارد نکند (اگر به این مطلب اعتقاد داشته باشیم) و عده‌ای از دبیران خوب و ورزیده، یکباره خلع سلاح نشوند. چون دبیران با تجربه و موفق، به این سادگی به این تغییرات اعتقاد پیدا نمی‌کنند و قانع هم نمی‌شوند، لذا برخلاف میل و علاقه‌شان بعد از سالها تدریس و تجربه مفید و بازدهی خوب، دست از تدریس می‌کشند و کار به‌دست افراد بی‌تجربه می‌افتد ؛ که نتیجه آن مسلماً پایین آمدن کیفیت کار خواهد بود و همیشه ضررکننده اصلی در این تغییرات بی‌حساب و کتاب دانش‌آموزان بوده‌اند. حال آن که هدف ما استفاده از یک فکر نو جهت اعتلای علمی دانش‌آموزان بوده است.

□ **به نظر شما برنامه‌ریزی یک مادّهٔ درسی در دورهٔ ۴ سالهٔ دبیرستان به چه صورت باید انجام گیرد؟**

■ در برنامه‌ریزی یک مادّهٔ درسی دبیرستان، باید نخست دید که در دنیا چه می‌گذرد، به عبارت دیگر، یک مطالعهٔ تطبیقی بین‌المللی و بررسی همه جانبه در برنامهٔ آن درس در سطح جهان صورت گیرد بعد، باید برنامه و مطالب کتابهایی که تدریس می‌شود، دقیقاً ارزشیابی شود و قوت و ضعف کتابها و برنامه‌ها مشخص شود و در این کار به روایت چند نفر بسنده نکنیم، بلکه ارزشیابی علمی انجام بدهیم. دیگر آن که ؛ جوّ آموزشی کشور، شرایط دبیران، کلاسها و اجرا را مورد مطالعه قرار دهیم. آنگاه با توجه به نسبت و نیاز کشور، برنامهٔ دورهٔ ۴ ساله، یکپارچه و یکجا تهیه گردد. در هر قسمت، شیوهٔ آموزش و سقف بالا و پایین را تعیین کنیم. به عبارت دیگر ؛ ریز برنامه ابهام‌آمیز نباشد تا هر مؤلفی از آن برداشتی نماید، سپس این برنامه تنظیمی به نظرخواهی گذاشته شده، در مجلّه‌های ریاضی و یکی دو روزنامهٔ کثیرالانتشار چاپ و از خوانندگان درخواست شود که نظرات و انتقادات خود را ارسال دارند. پس از دریافت نظرات، اگر لازم بود یک بازنگری در برنامهٔ تنظیم شده انجام دهیم. سپس کل برنامه را در قالب زمان بریزیم، یعنی به ۴ (نظام سالی) یا ۸ قسمت

(نظام ترمی) کنیم. **از نظر اصول برنامه‌ریزی، این منطقی به‌نظر نمی‌رسد که ــ به ملاحظاتی یا با شعارهایی ــ یک مادهٔ درسی دبیرستان، در چند قسمت (مثلاً $\frac{۱}{۱۶}$ برنامه) تنظیم و تألیف گردد.** دربارهٔ شرایط تألیف نیز بنده با استفاده از بیست‌وچند سال برنامه‌ریزی و تألیف، یک سخنرانی در این زمینه در کنفرانس آموزش ریاضی کرمانشاه ایراد کردم که علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب انتشار مقالات آن کنفرانس مراجعه کنند.

□ نظرتان راجع به ریاضی دورهٔ راهنمایی چیست؟

■ من در زمینهٔ ریاضیات دورهٔ راهنمایی، در اوّلین کنفرانس ریاضی آموزش اصفهان به‌طور مفصل سخنرانی کردم، که در کتاب مقالات کنفرانس چاپ شده است. امّا از نامه‌هایی که به دفتر می‌رسند و همچنین در تماس با دبیران راهنمایی، در گردهمایی‌های دورهٔ راهنمایی، چنین استنباط می‌شود که قسمتهای «کار در کلاس» با همهٔ محاسن خود، در دورهٔ راهنمایی موفق نبوده است. دبیران، اغلب به علت فرصت محدود کلاس مخصوصاً در سالهای اخیر که ساعات تدریس هفتگی ریاضی در سالهای دوم و سوم به ۴ ساعت در هفته تقلیل پیدا کرده است، امتحان ثلث که باید در محدودهٔ زمانی $\frac{۱}{۳}$ حجم کتاب تدریس شود، به قسمتهای کار در کلاس به دیدهٔ «تمرینات» نگریسته و از دانش‌آموز می‌خواهند که آنها را در خانه حل کند یا معلّم، خود ــ مثل سایر تمرینات ــ آنها را پای تخته حل می‌کند.

لذا کتاب به هدف آموزشی این قسمت که مشارکت دانش‌آموز در درس است، به علت فراهم نبودن شرایط به اجرا نرسیده است.

در کشورهای خارج، معلّم از اوّل برای آموزش چنین شیوه‌ای تربیت می‌شود و دانش‌آموز از همان سال اول تحصیل با این شیوه کار می‌کند و در درس مشارکت می‌کند. در نتیجه، هم دبیر و هم دانش‌آموز از آغاز تحصیل قدم‌به‌قدم با شیوهٔ کار آشنایی دارند. در آنجا محدودیتهای کلاسهای ما و یا امتحانات و یا مشکلات دیگری را که در اجرا بازدارنده است، ندارند.

ولی در کشوری که دانش‌آموز از آغاز تحصیل خود، با این شیوه کار نکرده و با این شیوه آشنا نیست و اعتقادی هم ــ به دلایل شرایط موجود کلاس ــ به آن ندارد، عنوان نمودن این‌گونه مطالب ــ بی‌هیچ سابقهٔ ذهنی ــ در کتابهای یک مقطع تحصیلی، مسلماً مشکلاتی داشته و در نتیجه سالها اُفت علمی به دنبال خواهد داشت تا جا بیفتد. همان‌طورکه قبلاً عرض شد، ایده‌های جدید و نو را باید به‌تدریج و در طول تعویض چند برنامه جایگزین کرد تا رفته رفته در فرهنگ آموزش ما جا پیدا کند و معلّم، دانش‌آموز، خانواده، رئیس و معاون مدرسه به آن شیوه اعتقاد پیدا کنند و برای اجرای آن کوشش نمایند. مخصوصاً در تغییر شیوه‌ها باید از مراکز تربیت معلم شروع کرد و معلم و دبیر را با روش جدید تربیت کرد و شرایط اجرا را هم فراهم آورد. وگرنه دو هزار سال پیش، افلاطون گفته است که آموزگار در کلاس نقش قابله را دارد و نقش اوّل با دانش‌آموزان است **یعنی این دانش‌آموز است که باید محور اصلی کار و فعالیت در کلاس باشد،** ولی همهٔ ما که درس خواندیم و پایان‌نامه گرفتیم، هیچ‌وقت اثری از حرف افلاطون را در کلاسها ندیدیم!

◇ادامه در شمارهٔ آینده

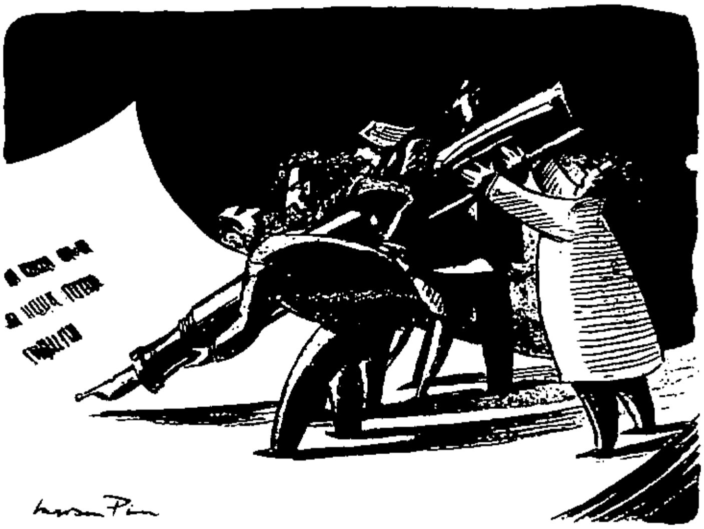
۱ــ $ICME_5$

۲ــ پیاژه معتقد است که بچه‌های یازده ساله (اول راهنمایی) می‌توانند مجرد بیندیشند و استدلال کنند و به آنچه پیش‌رو دارند و می‌بینند و تجربه می‌کنند قانع نشوند.



یک آلگوریتم برای حل معادلهٔ درجه ۳[۱]

●علی عمیدی



این مقاله ترجمه‌ای است از مجلهٔ:

The mathematical gazette july 1995

این مقاله روش پیدا کردن ریشهٔ حقیقی برای یک معادله درجه «۳» را با استفاده از ریاضیات پیشرفته ارائه می‌دهد. معادلهٔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ که در آن $a\neq 0$ در نظر بگیرید، با تقسیم دو طرف این تساوی بر a داریم:

$$X^3+\frac{b}{a}X^2+\frac{c}{a}X+\frac{d}{a}=0$$

که در آن

$$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=P\\[4pt] \dfrac{c}{a}=Q\\[4pt] \dfrac{d}{a}=R\end{cases}$$

$$X^3+PX^2+QX+R=0$$

$$(X+\frac{P}{3})^3=\frac{P^2}{3}X+\frac{P^3}{27}-QX-R$$

طرفین را مکعب کامل می‌کنیم:

$$(X+\frac{P}{3})^3=(\frac{P^2}{3}-Q)X+(\frac{P^3}{27}-R)$$

با قرار دادن $K_1=\frac{P^2}{3}-Q$ و $K_2=\frac{P^3}{27}-R$ نتیجه می‌شود:

$$X+\frac{P}{3}=(K_1X+K_2)^{\frac{1}{3}}$$

حال λ و μ را طوری می‌یابیم که:

$$(K_1X+K_2)^{\frac{1}{3}}=\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}} \qquad (1)$$

امّا

$$X+\frac{P}{3}=\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}} \qquad (2)$$

رابطه (۱) را به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$K_1X+K_2=\lambda+\mu+3(\lambda\mu)^{\frac{1}{3}}(\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}}) \qquad (3)$$

X را از رابطه (۲) پیدا کرده در رابطه (۳) قرار می‌دهیم:

$$K_1X+K_2=K_2-K_1\frac{P}{3}+K_1(\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}})$$

از مقایسه روابط (۳) و (۴) داریم:

$\lambda+\mu=K_2-K_1\frac{P}{3}$ و $\lambda\mu=K_1^3/27$

حال $K_3=K_2-K_1P/3$ و $K_4=K_1^3/27$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین λ و μ ریشه‌های معادلهٔ $Z^2-K_3Z+K_4=0$ می‌باشند به طوری که: $\lambda+\mu=K_3$ و $\lambda\mu=K_4$

دو حالت در نظر می‌گیریم: حالت اوّل را $K_3^2-4K_4\geq 0$ و حالت دوّم $K_3^2-4K_4<0$ بگیریم، در حالت اوّل خواهیم داشت:

$$\mu=\frac{K_3-\sqrt{K_3^2-4K_4}}{2} \text{ و } \lambda=\frac{K_3+\sqrt{K_3^2-4K_4}}{2}$$

اما با در نظر گرفتن $K_5=\lambda^{\frac{1}{3}}$ و $K_6=\mu^{\frac{1}{3}}$ و با استفاده از رابطه «۲» داریم: $X=K_5+K_6-\frac{P}{3}$

در حالت دوم: $D=\sqrt{4K_4-K_3^2}$ می‌گیریم. پس $\lambda=\frac{1}{2}(K_3+Di)$ و $\mu=\frac{1}{2}(K_3-Di)$ اعداد مختلط هستند و

$$\lambda^{\frac{1}{3}}+\mu^{\frac{1}{3}}=((K_3+Di)/2)^{\frac{1}{3}}+((K_3+Di)/2)^{\frac{1}{3}}$$

حال با استفاده از مدل فرم قدرمطلق ـ فاز برای اعداد مختلط داریم :

$$\lambda^{\frac{1}{3}} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

همچنین داریم :

$$\lambda = (K_3 + Di)/2 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

و

$$\mu = (K_3 - Di)/2 = r^3(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)$$

بنابراین : $\mu^{\frac{1}{3}} = ((K_3 - Di)/2)^{\frac{1}{3}} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

از این رو $\lambda^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{1}{3}} = 2r\cos\theta$ که در آن $r^6 = (K_3^2 + D^2)/4 = K_4$ و $tg 3\theta = \frac{D}{K_3}$ اما $K_4 = \frac{K_1^3}{27}$
بنابراین $r = \sqrt{K_1/3}$ اگر $K_3 > 0$ باشد خواهیم داشت :

$$(7) X = 2\sqrt{(K_1/3)}\cos(\frac{1}{3}\text{arctg}\, D/K_3) - P/3$$

اگر $K_3 < 0$ باشد داریم :

$$(8) X = 2\sqrt{(K_1/3)}\cos(\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \text{arctg}\, D/K_3)) - P/3$$

حال $\frac{1}{3}\text{arctg}\, D/K_3$ را جانشین $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \text{arctg}\, D/K_3)$ می‌کنیم ؛ زیرا قسمت حقیقی[2] اعداد مختلط کمتر از «۰» است یا با به کار بردن $D/K_3 \pm \pi$ جوابهای دیگری نتیجه می‌شود.

اگر $K_3 = 0$ باشد نتیجه می‌شود $\text{arctg}\, D/K_3 = \frac{\pi}{2}$

بنابراین : $X = 2\sqrt{(K_1/3)}.\sqrt{3}/2 - P/3$ و یا

$$X = \sqrt{K_1} - P/3$$

مسأله‌ای که باید به آن توجه داشت، این است که در حالت دوم $K_1 < 0$ باشد. در این صورت ریشهٔ موهومی بدست می‌آید و این غیر ممکن است، زیرا اگر $K_1 < 0$ باشد، آنگاه $K_4 < 0$ و $K_3^2 - 4K_4 > 0$ خواهد بود. بنابراین باید حالت اول که در آن این امکان وجود ندارد را بررسی کرد.

مثال (۱): $X^3 + 3X^2 + X - 3 = 0$

که در آن $K_3^2 - 4K_4 > 0$ ، $K_4 = 8/27$ ؛ $K_3 = 2$ ؛
$K_1 = 2$ ؛ $K_2 = 4$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) داریم: $X \simeq 0/76922293$

امتحان : $X^3 + 3X^2 + X - 3 \simeq 0$

مثال(۲):

$$10X^3 - 30X^2 + 20X - 1 = 0$$

$$K_1 = 1;\ K_2 = \frac{-9}{10};\ K_3 = \frac{1}{10};\ K_4 = \frac{1}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D^2 < 0 \\ K_3 > 0 \end{cases}$ ، با استفاده از رابطه (۷) داریم :

$$X = 2/0468805$$

امتحان : $10X^3 - 3X^2 + 20X - 1 = 3 \times 10^{-10}$

مثال (۳): $X^3 + 3X^2 - X - 1 = 0$

$$K_1 = 4;\ K_2 = 2;\ K_3 = -2;\ K_4 = \frac{64}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D^2 < 0 \\ K_3 < 0 \end{cases}$ با استفاده از رابطه (۸) داریم :

$$X = 0/6751308$$

امتحان : $X^3 + 3X^2 - X - 1 \approx 0$

مثال (۴):

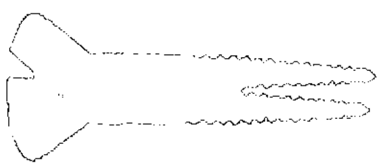
$$9X^3 + 9X^2 - 7X - 3 = 0 \Rightarrow X^3 + X^2 - \frac{7}{9}X - \frac{1}{3} = 0$$

$$K_1 = \frac{10}{9};\ K_2 = \frac{10}{27};\ K_3 = 0;\ K_4 = \frac{1000}{27}$$

که در آن $\begin{cases} D_2 < 0 \\ K_3 = 0 \end{cases}$ با استفاده از رابطهٔ (۹) خواهیم داشت :

$$X = 0/7207592$$

امتحان: $9X^3 + 9X^2 - 7X - 3 \approx -1/7 \times 10^{-10}$



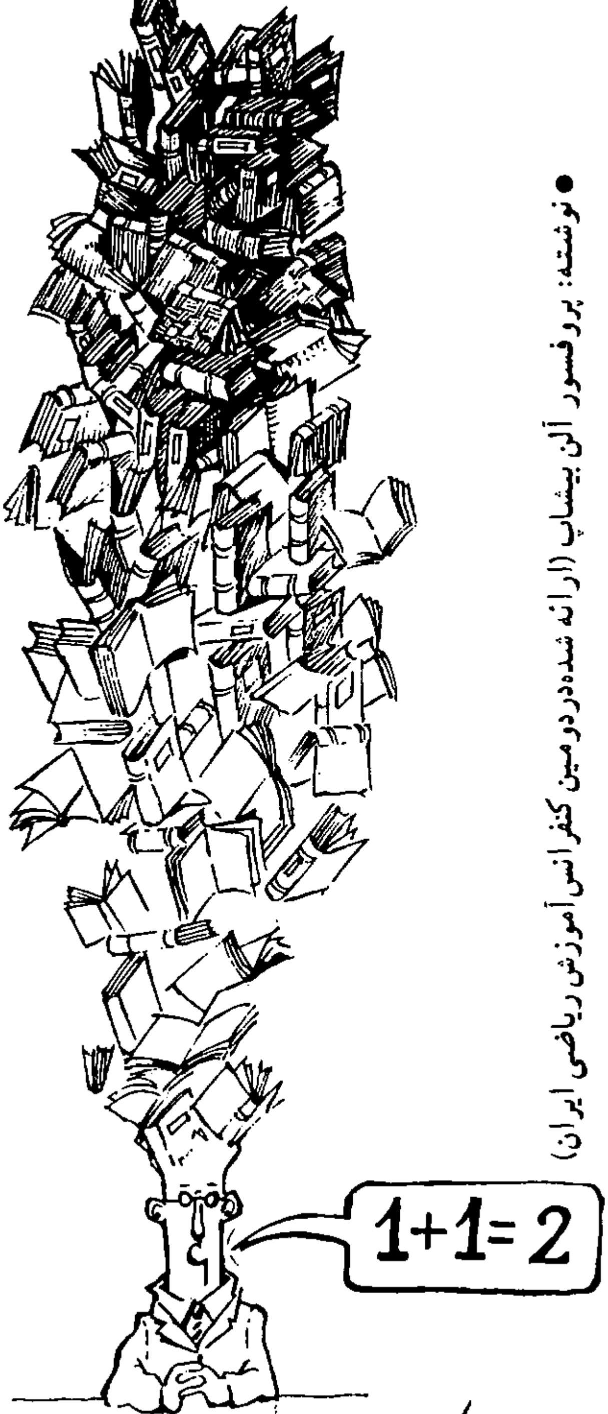
1) An algoritm for solving cubic equations

2 Real part

رابطه بین آموزش ریاضی و فرهنگ

● نوشتهٔ: پروفسور آلن بیشاپ (ارائه شده‌در دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران)

● ترجمهٔ: پرویز امینی



مقدمه ـ چالش آموزش ریاضیات معنادار

یکی از موضوعات مهم در جوامع پیشرفته که آموزش آن مشکل به‌نظر می‌رسد، ریاضیات است. ریاضیات موضوعی است که خود را به شدت انتزاعی نشان می‌دهد، به‌طوری که کودکان هیچ‌گونه ارتباط منطقی با دنیای واقعی بیرون کلاس برقرار نمی‌کنند و به همین علت آن را بی‌معنا و بیهوده می‌پندارند. درنتیجه، کودکان در سراسر جهان خود را در رشته‌های ریاضی مغلوب می‌دانند، و حتی والدین آنان نیز ریاضیات را درک نمی‌کنند و معلمینشان ریاضیات را موضوعی سخت برای درک و فهم قلمداد می‌کنند.

اگر امروز به مردم بگویم، من به آموزگاران کودکان شما ریاضی آموزش می‌دهم، آنان تصوّر بدی درباره من خواهند داشت و به من به مانند یک موجود عجیب نگاه خواهند کرد. اگر بگویم، من از ریاضیات لذّت می‌برم، مردم فکر می‌کنند، من دیوانه شده‌ام و اگر بگویم من آماده هستم آنان را به ریاضیات علاقه‌مند کنم، مردم به حرفهای من گوش نخواهند کرد و حرفهایم را باور نمی‌کنند! نیمی از مردم از ریاضیات رنج می‌برند و آن را نوعی شکنجهٔ روحی می‌دانند! حتماً فکر خواهید کرد که آنان مایل هستند از برنامه آموزشی ریاضیات خلاصی پیدا کنند، امّا این‌طور نیست، آنان ریاضیات را خیلی مهم می‌دانند و همهٔ کودکان مدرسه‌ای باید آن را مطالعه کنند، حتی اگر از آن خوششان نیاید، چرا که ریاضیات برای آنان مفید است!

البته، همه به اهمیت مطالعه ریاضیات واقف هستیم و ما به‌عنوان آموزشگر باید مسئولیت یافتن روشهای حل این بی‌علاقگی را پذیرا باشیم. باید به برنامه دوره‌های تحصیلی، آموزش، مواد آموزشی و روشهای مناسب کارآموزی جهت اصلاح و بهبود آموزش ریاضی نگاه عمیق‌تری بیندازیم. آموزگاران ریاضی، کارآموزان، برنامه‌ریزان آموزشی، نویسندگان کتابهای درسی و دیگر کسانی که در آموزش ریاضی قدم برمی‌دارند در جرگهٔ آموزشگران ریاضی[1] قرار می‌گیرند و با توجه به دشواری مسئولیت‌شان در جوامع پیچیده، تقاضاهای زیادی نیز برای تدریس ریاضیات به کودکان به آنان پیشنهاد می‌شود. تمایل به فراگیری و آموزش مفاهیم ریاضی به‌طور بغرنجی درحال افزایش است، بنابراین در راستای این چالش‌ها، هدایت آموزشگران ریاضی در سراسر دنیا به مقداری بررسی و تحقیقات جدید نیاز دارد.

در صحبتهای امروز، اندیشه‌های جدیدی که در طول بیست و پنج سال گذشته انجام گرفته است را به شما معرفی خواهم کرد. من این بیست و پنج سال را در یک چشم به هم زدن نسبت به تاریخ غرورآفرین ایران مجسم می‌کنم و با تعمق می‌گویم که درحال حاضر نیز به مانند گذشته می‌توانیم آموزش معنادار ریاضی را به کودکانمان ارائه دهیم. این اندیشه‌ها از رشد «ابعاد اجتماعی[۲]» آموزش ریاضی نشأت می‌گیرد. (بیشاپ ۱۹۹۳)

این بعد تحقیقات را به دوره‌های مختلف هدایت می‌کند، که مهمترین آنها عبارتند از :

- دوره انفرادی[۳]، مربوط به یادگیرندگان انفرادی ریاضی است که هم به داخل کلاس و هم به خارج کلاس مربوط می‌گردد.
- دورهٔ پرورشی[۴]، به بسیاری از تقابلهای اجتماعی که در کلاس ریاضی به‌وجود می‌آید مربوط می‌گردد.
- دورهٔ رسمی[۵]، به هنجارهای اجتماعی و تقابلهای بین مدارسی که در آموزش ریاضی در کلاسهای درس اثر می‌گذارد، مربوط می‌گردد.
- دورهٔ اجتماعی[۶]، به روابط بین آموزش ریاضی و مؤسسات آموزشی در یک جامع گسترده مربوط می‌گردد.
- دورهٔ فرهنگی[۷]، به روابط بین آموزش ریاضی و فرهنگی با زمینه تاریخی هر اجتماع مربوط می‌گردد.

در این گفتگو مایلم به آخرین دوره و نتایج تحقیقات این دوره اشاره‌ای داشته باشم. صحبت اینجانب پیرامون اندیشه جدید «ریاضیات قومی[۸]» که آموزشگران ریاضی باید درباره بعضی از این اندیشه‌های مهم تعمق کنند، خلاصه می‌گردد :

- رویارویی‌های انسانی[۹]. ریاضیات قومی به فعالیتهای ریاضی در اجتماع که بیشتر به بیرون مدرسه محدود می‌گردد، مربوط می‌شود. ریاضیات قومی به نقشهایی که مردم به غیر از آموزگاران و یادگیرندگان بر آموزش ریاضی دارند توجه به‌سزایی دارد.
- مردم و ارزشها. ریاضیات قومی در شناسایی فعالیتهای ریاضی که شامل ارزشها، باورها و انتخاب‌های شخصی می‌شود، مفید است.
- رویارویی بین ریاضیات و زبان. زبان انتقال‌دهنده اصلی اندیشه‌های ریاضی است.
- تاریخ ریاضیات. دیدگاه فرهنگی در ریاضیات، توجه ما را به تاریخ ریاضیات و رشد اندیشه‌های ریاضی در جوامع مختلف برمی‌انگیزد.
- ریشه های فرهنگی[۱۰]. ریاضیات قومی ما را با بسیاری از دانستنیهای فرهنگی و اجتماعی که نقطه شروع رشد ریاضی بوده است، آشنا می‌کند.

سه رویکرد پژوهشی که در حوزهٔ ریاضیات قومی جا می‌گیرد و باید به‌صورت یک کل به آن اندیشید، عبارت است از : ریاضیات در جوامع سنتی، تاریخ ریاضیات و دانش ریاضی کودکان خارج از مدرسه. اگرچه بنده در این‌جا برای شرح، بررسی و تجزیه و تحلیل آنها را جداگانه بررسی می‌کنم امّا عده‌ای از پژوهشگران و جامعه‌شناسان هیچ شکافی بین آنها نمی‌بینند.

ریاضیات در جوامع سنتی[۱۱]

تحقیقات انجام شده، شکلهایی از دانش ریاضی در جوامع ابتدایی را نشان می‌دهد. (جوامع سنّتی به جامعه‌هایی گفته می‌شود که روابط ساده و بی‌تکلف دارند و از پیشرفتهای جدید تکنولوژی مبرّا هستند). دانش ریاضی فنی به‌وسیلهٔ پژوهشگران در کاوشهای انسان‌شناسی در گینه‌نو (*الین* ۱۹۹۳)، موزامبیک (جروس ۱۹۹۵)، مردم موری در زلاندنو (*بارتن و فیرهال* ۱۹۹۵)، بومیان استرالیایی (کوک ۱۹۹۰) و ناواجوها در آمریکای شمالی (پینکستن ۱۹۸۳) به‌دست آمده است.

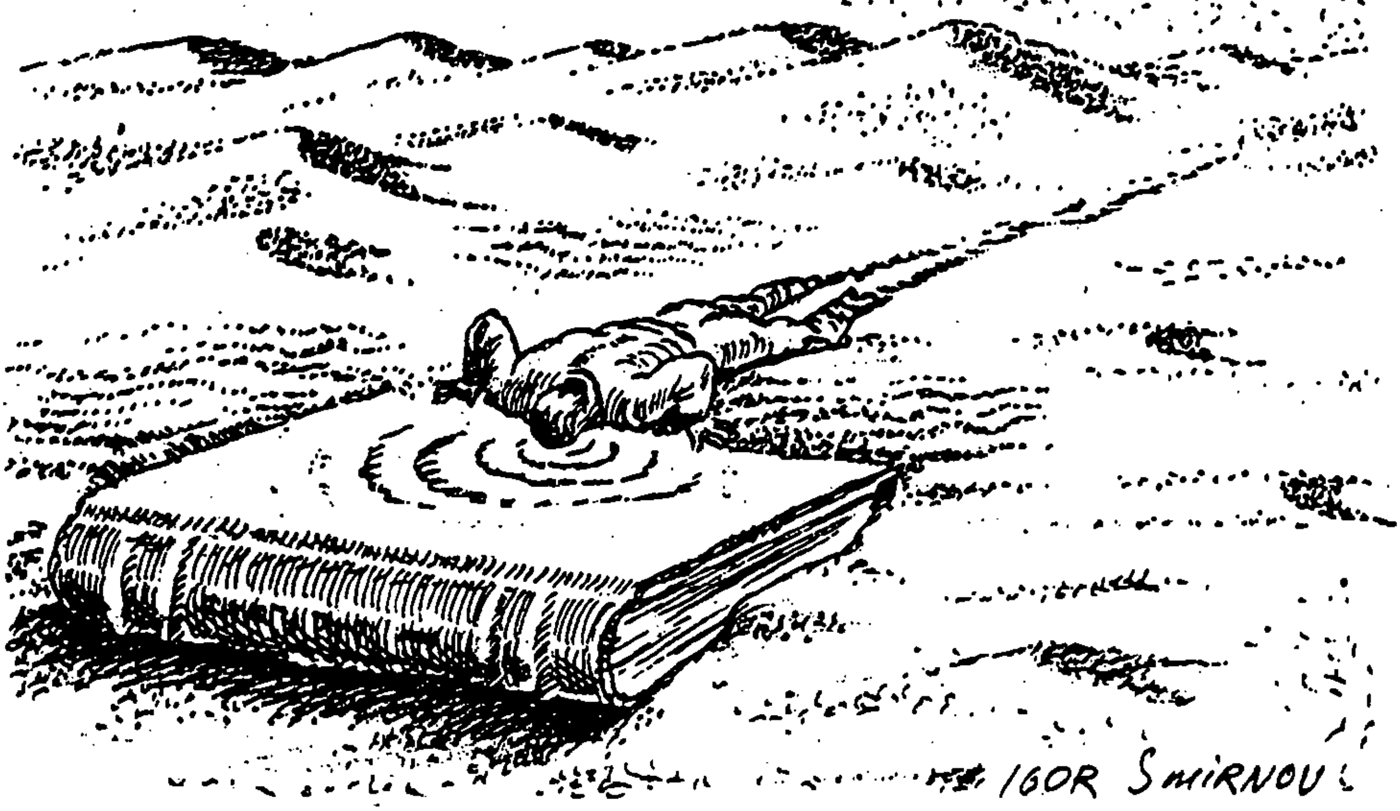
این پژوهش‌ها در تحقیق جروس (۱۹۹۶) و *بارتن* (۱۹۹۶) به‌دست آمده است. برای مثال، آیا می‌دانید که : بیش از دو هزار دستگاه عددنویسی در گینه‌نو و اقیانوسیه وجود دارد؟ (عده‌ای بر مبنای ۵ و عده‌ای دیگر نیز بر مبنای ۲ استفاده می‌کنند.) دستگاه‌های عددنویسی که نام عدد، نام قسمتی از بدن باشد نیز وجود دارد (شمارش انگشتی).

ـ روشهای مختلفی در جمع، تفریق، ضرب و تقسیم وجود دارد که هنوز هم به‌کار می‌رود.

ـ روشهای متفاوتی در پیدا کردن مساحت مستطیل است. یکی از این روشها که کشاورزان برزیلی برای به‌دست آوردن مساحت زمین خود به‌کار می‌برند، با پیدا کردن اندازه‌های متوسط (میانگین) اضلاع مخالف و ضربدر اندازه متوسط اضلاع دیگر به‌دست می‌آید.

ـ بازیها، معماها و ورزشهای متنوع که ارتباط ریاضی را در بین انسانها بیان می‌کند، فراوان یافت می‌شود.

ـ درودگران، دریانوردان، ماهیگیران و ملوانان از دانش و



مهارت ریاضی متنوعی برخوردار هستند.

مطالعه گلندون لین (۱۹۹۵) درباره دستگاه عددنویسی بومیان گینه‌نو و اقیانوسیه نمونه‌ای از این تحقیق است.او با استفاده از تحقیق میدانی، مصاحبه‌های ضبط شده، اطلاعات جنبی و پرسشنامه‌هایی که به‌وسیله معلمین و دانش‌آموزان در دانشگاهها و مدارس کامل شدند، در حدود دو هزار دستگاه عددنویسی را به ثبت رساند. این دستگاههای عددنویسی را براساس ملاک سالزمن (۱۹۵۰) طبقه‌بندی کرد و افسانه‌ای ۱ـ۲ که انسانهای نخستین به آن معتقد بودند را نقض کرد و یادآوری کرد که «به زبان خاصی برنخوردم که فقط از رقمهای ۱ و ۲ برای شمارش دقیق استفاده شود و بر ۲ ختم شود.» البته این تعداد زیادی دستگاه عددنویسی بر مبنای ۲ (دستگاه عددنویسی که فقط از رقمهای ۱ و ۲ استفاده می‌شد) یافت امّا در همه موارد یافت شده، رقمهای بزرگتر نیز با ترکیب‌های متفاوتی از ۲ و ۱ دیده می‌شد. در گینهٔ نو و اقیانوسیه دستگاه عددنویسی بر مبنای (۲۰ و ۵) نیز رواج داشت و رقمهای یک تا پنج با نامهای دو دست و دو پا در شمارش‌های بالاتر (بالاتر از ۲۰) ترکیب و مورد استفاده قرار می‌گرفت. این دستگاه عددنویسی متفاوت از دستگاه عددنویسی که براساس اندام بدن تنظیم می‌شده است، رواج داشته است. چندین دستگاه عددنویسی دیگر نیز بر مبناهای ۴، ۵، ۶ و ۱۰ مورد استفاده قرار می‌گرفته است. حوزه این تحقیق قابل بسط در هر زمانی است و به مانند اطلاعات دیگر در ایجاد علاقه مؤثر بوده و ابزاری مفید برای حفظ ارزشهای فرهنگی نسبت به آموزش ریاضی وارداتی خواهد بود.

تاریخ ریاضیات

دومین پژوهش در ریاضیات بومی، از تحقیقات تاریخی حاصل می‌شود که بیش از اندازه به آن پرداخته شده و آموزشگران به اندازه کافی با آن آشنا هستند. درحال حاضر، فعالیتهای انجمن پژوهش تاریخی، جمع‌آوری اسناد تاریخی مختلف دربارهٔ ریاضی در قسمتهای مختلف دنیاست. نمونه‌ای از این تحلیلهای جدید مربوط به کتاب جوزف (۱۹۹۱) «تاج رنگارنگ ریشه‌های غیراروپایی ریاضی» است که به ذکر تنوع فرهنگ‌هایی که در اندوخته جهانی اندیشه‌های ریاضی غنی سهم دارد، مربوط می‌شود. برای مثال، تاریخ فرهنگی ایران و جهان اسلام مملو از اندیشه‌های ریاضی است و گرچه اکثر این روایات به دانش‌پژوهان معروف اسلامی ایران مربوط می‌گردد. برای مثال از تاریخ ریاضیات مسلمانان یاد گرفته‌ایم:

- قوانین وراثت
- طراحی مساجد و کاشی‌کاری آنها
- تعیین قبله و تعیین جهت مکه در قسمتهای مختلف دنیا
- نجوم
- گسترش براهین هندسی برای قضایای جبری
- و آثار ریاضیدانانی مانند خوارزمی، ثابت‌بن قره، کاشانی و خیام

با وجود اختلافات مشهودی که در بعضی از موضوع‌های ریاضی مانند دستگاههای شمار و روشهای محاسبه‌ای مختلف ریاضی دیده می‌شود ؛ پژوهش‌های تاریخی، شباهتهای جالبی مانند علاقه‌مندی انسان را در اثبات قضیه فیثاغورث نشان می‌دهد. این قضیه مشهور قبل از ریاضیدانان یونانی مورد علاقه چینی‌ها (رونان ۱۹۸۱) و آفریقائیها (جروس ۱۹۹۵) بوده است. همچنین ثابت‌بن قرّه، به قضیهٔ فیثاغورث پی برده بود.

دانش ریاضی کودکان خارج از مدرسه

جدیدترین پژوهش ریاضیات بومی به دانش ریاضی دانش‌آموزان خارج از مدرسه مربوط می‌شود. این پژوهش به‌وسیله ناتز (۱۹۹۲) در برزیل بر روی کودکانی که در خیابانهای برزیل دستفروشی می‌کنند، به‌دست آمده است. نمونهٔ دیگر با گستردگی بیشتر به پایان‌نامهٔ دکترای گیودا دآبریو (۱۹۹۳) مربوط می‌شود که مدارکی از ریاضیات بومی کشاورزان نیشکر رسیف (نام یک محل) را به ثبت رسانده است. (ابریو و کاراهر ۱۹۸۸)

اَبریو پژوهشی دربارهٔ روشهای ابتکاری کودکان و روابط بین ریاضیات مدرسه‌ای و ریاضیات خارج مدرسه، به عمل آورده است.

اوّلین سؤال طرح تحقیق اَبریو این بود که «آیا کودکانی که در مدرسه موفق می‌شوند، وابستگی متفاوتی با ریاضیات خانگی نسبت به کودکان شکست‌خورده، نشان می‌دهند؟»

بسیاری از اطلاعات مهم این پژوهش به احساسات شدید کودکان دربارهٔ فقدان ارزش اجتماعی به دانش پدرانشان، مربوط می‌گردید.

برای مثال :

□ مصاحبه‌کننده : چرا آن مرد در تصویر، که روی تراکتور نشسته است، ریاضیات نمی‌داند؟

○ سوری‌نا : او نمی‌داند. او شغلی ندارد. او در مزرعه نیشکر کار می‌کند.

□ : آیا می‌توانی روشی که پدرت برای جمع کردن استفاده می‌کند، بگویی؟ آیا با روشی که تو در مدرسه یاد گرفته‌ای فرق می‌کند؟

○ : فرق می‌کند. او از دستهایش استفاده می‌کند و من از خودکار و کاغذ.

□ : فکر می‌کنی کدام بهتر است؟

○ : مدرسه

□ : فکر می‌کنی کدام صحیح است؟

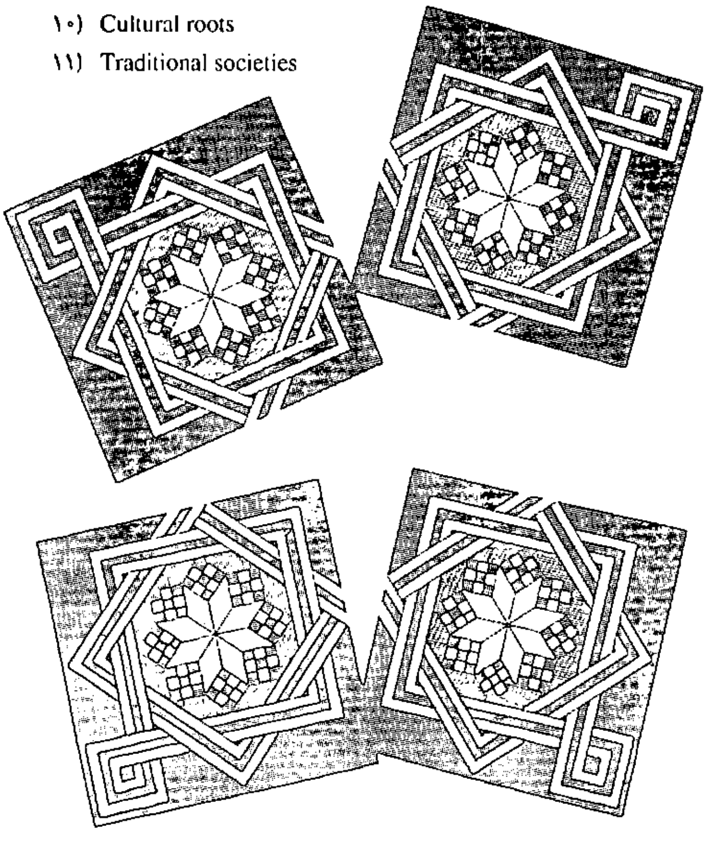
○ : پدرم!

با این شکافی که بین ریاضیات خانه و مدرسه مشاهده کردید، علت آن را باید در آموزش ریاضی کودکان به باورهایشان از حالات نسبی ریاضیات خانه و مدرسه جستجو کرد.

اَبریو پیشنهاد می‌کند، «چگونه تمرینهای مدرسه را نظم ببخشیم و فاصله بین ریاضیات مدرسه و خارج مدرسه را کاهش دهیم.»

پاورقیها

۱) Mathematics educators
۲) Social dimension
۳) Individual level
۴) Pedagogical level
۵) Institutional level
۶) Societal level
۷) Cultural level
۸) Ethnomathematics
۹) Human interactions
۱۰) Cultural roots
۱۱) Traditional societies



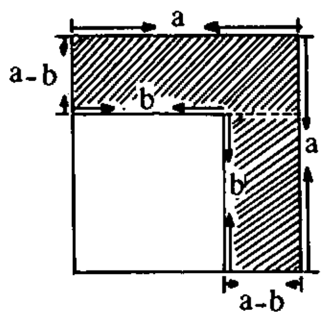
اثبات اتحاد

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

● سید محمّد رضا هاشمی موسوی

اثبات اتحاد $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ به‌کمک شکل و چند کاربرد از آن

دو مربع، یکی به ضلع a و دیگری به ضلع b را در نظر می‌گیریم (مطابق شکل (الف)).

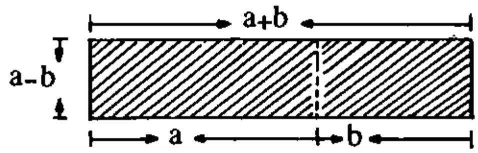


(الف)

سطحی را که برابر با تفاضل مساحت این دو مربع است، سایه می‌زنیم. واضح است که این سطح برابر است با :

(۱) $a^2 - b^2 =$ (سطح مربع b ضلعی) − (سطح مربع a ضلعی)

قسمت سایه خورده را جدا می‌کنیم و کنار هم می‌گذاریم (مطابق شکل (ب)).



واضح است که مساحت مستطیلی که به دست می‌آید، برابر است با :

(۲) $(a-b)(a+b) =$ طول × عرض

با توجه به شکلهای (۱) و (۲)، برای مساحت قسمت سایه خورده دو عبارت به دست آمده است که در نتیجه :

(۳) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

این توضیح لازم است که عبارتهایی به صورتهای $a-b$ و $a+b$ را مزدوج یکدیگر می‌نامیم. به طور مثال $\pi - 2$ و $\pi + 2$، مزدوج یکدیگر و همچنین $\sqrt{2} - 2$ و $\sqrt{2} + 2$ مزدوج یکدیگرند. از طرفی چون رابطهٔ (۳) به ازای هر عدد حقیقی a و

b برقرار است، آن را **اتحاد** می‌نامیم. با توجه به این که طرف اوّل این اتحاد از حاصل‌ضرب دو عبارت مزدوج تشکیل یافته است، مناسب است که آن را «**اتحاد مزدوج**» نامگذاری کنیم.

کاربردهایی از رابطهٔ $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

۱) با استفاده از رابطهٔ (۳) می‌توان حکم زیر را ثابت کرد:
«در مستطیلهایی که محیط برابر دارند، مستطیلی دارای مساحت حداکثر است که طول و عرض برابر داشته باشد (یعنی مربعی با همان محیط).»

اثبات:
ضلع بزرگتر مستطیل را $a+b$ و ضلع کوچکتر آن را $a-b$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، محیط مستطیل برابر با $۴a$ است، زیرا:

(محیط مستطیل) $۲(a+b)+۲(a-b)=۴a$

و مساحت آن برابر با $a^۲-b^۲$ است، زیرا:

(مساحت مستطیل) $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

واضح است که مساحت $a^۲-b^۲$، وقتی حداکثر است که $b=۰$ باشد. در این حالت، هر دو ضلع مستطیل برابر a و مستطیل به مربع تبدیل می‌شود.

مثال: ضلعهای مستطیل را ۵ و ۷ در نظر می‌گیریم؛ محیط مستطیل، برابر است با:

(محیط مستطیل) $۲\times۵+۲\times۷=۲۴=۴\times۶$

از بین مستطیلهایی که محیط آنها برابر ۲۴ است، مساحت حداکثر، متعلق به مربع به ضلع ۶ است. این نتیجه را می‌توان با جدول زیر آزمایش کرد:

مساحت	عرض	طول
۳۶	۶	۶
۳۵	۵	۷
۳۲	۴	۸
۲۷	۳	۹
...	...	...
...	...	...
۱۱	۱	۱۱

با توجه به جدول، نتیجه می‌گیریم که وقتی محیط مستطیل را ۲۴ در نظر بگیریم، هر چه اختلاف طول و عرض آن بیشتر باشد، مقدار مساحت آن، کوچکتر می‌شود. مشاهدهٔ جدول، حکمی را که به طور ریاضی ثابت کردیم، تأیید می‌کند:
«از بین مستطیلهای با محیط برابر، مساحت حداکثر، متعلق به مربع است.» بیان دیگری از این حکم چنین است:
«حاصل‌ضرب دو عاملی که مجموع آنها دو مقدار ثابتی است، وقتی حداکثر است که این دو عامل برابر باشند.»

۲) پیدا کردن سریع حاصل‌ضرب بعضی عددها به کمک رابطهٔ (۳)

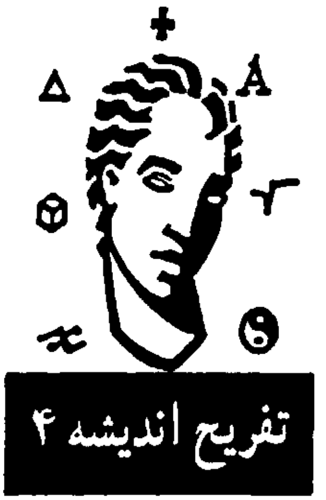
$۶۵\times۷۵=(۷۰-۵)(۷۰+۵)=۷۰^۲-۵^۲=$
$۴۹۰۰-۲۵=۴۸۷۵$

$۳۴\times۴۶=(۴۰-۶)(۴۰+۶)=۴۰^۲-۶^۲=$
$۱۶۰۰-۳۶=۱۵۶۴$

$۹۸\times۱۰۲=(۱۰۰-۲)(۱۰۰+۲)=۱۰۰^۲-۲^۲=$
$۱۰۰۰۰-۴=۹۹۹۶$

$۱۰۰۵\times۹۹۵=(۱۰۰۰+۵)(۱۰۰۰-۵)=۱۰۰۰۰۰۰-۲۵$
$=۹۹۹۹۷۵$

به همین ترتیب می‌توان حاصلضرب هر دو عددی که امکان نوشتن آنها به صورت مزدوج وجود داشته باشد را به سادگی به دست آورد.

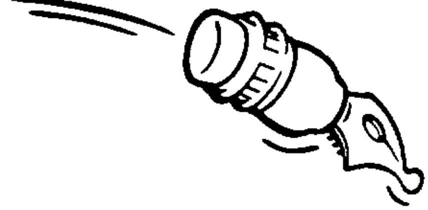


۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ۸ ۹ = ۱۰۰

چگونه می‌توان تساوی بالا راباقراردادن علائم +، −، ×، : و ( ) بین ۹ رقم برقرار کرد؟

●**از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور**

جواب در صفحهٔ ۸۸



آنچه از دوست رسد ...

با اهداء سلام خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

هر روز نامه‌های پرمحتوا و دلگرم‌کننده شما عزیزان در دفتر مجله به دست ما می‌رسد، از خداوند بزرگ بسیار سپاسگزاریم که توانسته‌ایم تاحدی مشکلات درس ریاضی شما عزیزان را برطرف و شما را تا اندازه‌ای به ریاضیات علاقه‌مند سازیم. طبق قولی که در شماره قبل داده بودیم و طبق درخواستهای مکرر شما عزیزان در این شماره پرسشهای چهارگزینه‌ای همهٔ کتابهای ریاضی دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی را با حل تشریحی آورده‌ایم، امیدواریم که خود را برای شرکت در امتحانات پایان سال و کنکور آماده کرده باشید واین مجموعه بتواند هرچند گامی کوچک در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما بردارد. در لابه‌لای نامه‌هایی که برای ما ارسال کرده‌اید، با نامهٔ زیر برخورد کردیم و تصمیم گرفتیم که آن رابرای علاقه‌مندی بیشتر شما به ریاضی چاپ کنیم :

اینجانب سجاد پوررحیمی آذر اهل تبریز و یکی از خوانندگان تازه مجله ریاضی برهان دبیرستان می‌باشم. نحوه آشنایی من با این مجله از این قرار است که : عصر یکی از روزهای تعطیلات نوروزی به خانه می‌رفتم که از جلوی نمایندگی انتشارات مدرسه در شهرستان تبریز عبور می‌کردم و مجله برهان را دیدم. از آن روز به بعد هرچند وقت یکبار به آنجا سرمی‌زنم و مجله و کتابهای مورد نظرم را تهیه می‌کنم. من این مجله را دوست دارم و با اشتیاق زیاد از تمامی مطالب مجله استفاده و مسائل آن را حل می‌کنم. به دلیل حجم بالای نامه‌های ارسالی شما عزیزان و محدودیت صفحات مجله بر آن شدیم که نامه‌های شما را دسته‌بندی کنیم و پاسخی مشترک برای آنها بیاوریم و اسامی فرستندگان نامه‌ها را در مجله چاپ کنیم.

اسامی تعدادی از خوانندگان محترم مجله ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : رضاقلی خدابخشی (تویسرکان)، صادق چائیچی (رشت)، مهدی حسنی (زنجان)، نظام اکبری (تهران)، سیروس اسلامی (دهدشت)، همکار ارجمند علی‌اکبر پژهان (مشهدمقدس)، امیر فرزاد نجف‌آبادی (نجف‌آباد)، سهند شمس اسحاق (اهواز)، فریدون عبدی (کامیاران) و خانم فائزه شریف النبی (اصفهان) ؛ از همگی شما برای ارسال مسایل همراه با حل و مقاله‌های درسی و کمک‌درسی سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسایل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهیم کرد.

سرکار خانم مریم ابوالقاسمی (ساری) از ارسال مسایل با حل سپاسگزاریم، ان‌شاء ا... از این مسایل در قسمت تفریح اندیشه استفاده خواهیم کرد.

دوستان عزیز آقایان مهدیار انوری (گرگان)، محسن‌امان‌پور (سپیدان)، یاشار حبیب‌یار (زنجان)، روزبه شفیعی (گرگان)، اکبر بلوری (کاشان) و همکار گرامی مهدی رحمانی (دانشجوی دانشگاه فردوسی مشهد) ؛ از همگی شما برای ارسال پیشنهادات سازنده سپاسگزاریم و از آنها برای هرچه بهتر و کاملتر شدن مجله استفاده خواهیم کرد.

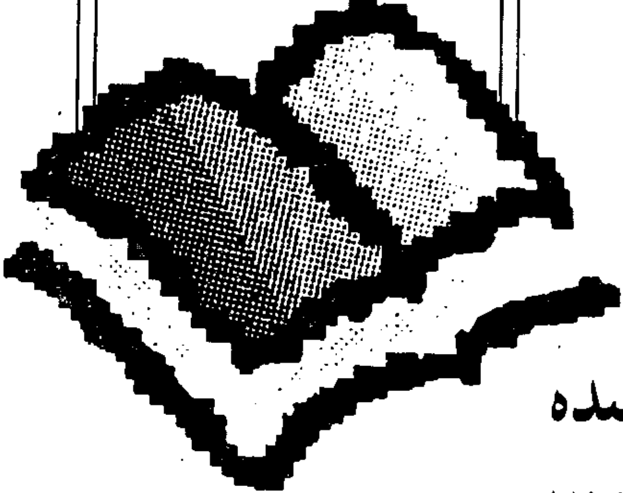
آقای کاووس قاجار (بناب) ؛ فرمولی را که برای جمع اعداد طبیعی به دست آورده‌اید، نخستین بار یکی از ریاضی‌دانان به نام گوس وقتی هنوز دانش‌آموز دبستان بود، موفق به کشف آن شد، و در برهان ۲۳ دبیرستان، مقاله‌ای درباره مجموع k عدد طبیعی اولیه آمده است.

آقای احمد بابایی (گیلان) ؛ از ارسال ۴ مسأله با حل متشکریم. از آن‌جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را با حل آورده‌ایم :

در صورتی که $y^{10}+y^5+1=0$ ، حاصل عبارت $y^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}$ را به دست آورید.

حل. فرض کنیم $y^5=x$ ، با جایگذاری این رابطه در معادله داریم :

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1$$
$$\Rightarrow x^3=-x^2-x=1 \Rightarrow x^3=1$$
$$y^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}=x^{399}+\frac{1}{x^{399}}=(x^3)^{133}+\frac{1}{(x^3)^{133}}$$
$$=(1)^{133}+\frac{1}{(1)^{133}}=2 \qquad \Rightarrow y^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}=2$$



فهرست الفبایی مقاله‌های چاپ شده در برهانهای شمارهٔ ۱ الی ۲۳

ح

خ

د

ر

س

ش

ص

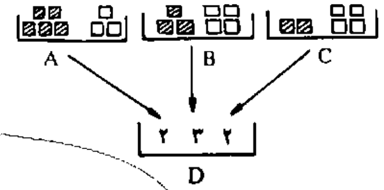
ط

ع

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۲

مسألهٔ اول: (حسین منصوری دانشجوی سال اول ریاضی کاربردی دانشگاه هرمزگان)

۳ ظرف زیر را درنظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال، از ظرفهای «A» و «B» و «C» به ترتیب ۲ و ۳ و ۲ مهره بیرون می‌آوریم و در ظرف «D» قرار می‌دهیم. حال یک مهره به تصادف از ظرف «D» بیرون می‌آوریم، می‌خواهیم احتمال این را بیابیم که مهره‌خارج شده از این ظرف، «قرمز» باشد. برای این منظور فرمول احتمال کل را می‌نویسیم (برای $n = 3$) و محاسبات را انجام می‌دهیم:



$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A/B_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A \cap B_i)$$

$$= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «D» قرمز باشد $= A$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «A» باشد $= B_1$

$$\rightarrow p(B_1) = \frac{2}{7}$$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «B» باشد $= B_2$

$$\rightarrow p(B_2) = \frac{3}{7}$$

پیشامد این که مهره انتخابی از ظرف «C» باشد $= B_3$

$$\rightarrow p(B_3) = \frac{2}{7}$$

پیشامد این که مهره انتخابی قرمز باشد به شرط این که از ظرف «A» باشد $= (A/B_1)$

$$\rightarrow p(A/B_1) = \frac{3}{8}$$

پیشامد این که مهره انتخابی قرمز باشد به شرط این که از ظرف «B» باشد $= (A/B_2)$

$$\rightarrow p(A/B_2) = \frac{4}{7}$$

پیشامد این که مهره انتخابی قرمز باشد به شرط این که از ظرف «C» باشد $= (A/B_3)$

$$\rightarrow p(A/B_3) = \frac{4}{6}$$

پس داریم؛

احتمال مطلوب؛

$$p(A) = \frac{2}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{319}{588}$$

مسأله دوم: (شادی منصوری سال اول دبیرستان از شیراز)

۲ ـ عددی که تعداد مقسوم‌علیه‌هایش فرد باشد مربع کامل است، یعنی $Z = n^2$ زیرا اگر $Z = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ در این صورت تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن از رابطهٔ $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$ به دست می‌آید پس باید α_i ها همگی زوج باشند یعنی Z مربع کامل است.

$$\Rightarrow Z = n^2 = 39k + 1$$

$$\Rightarrow n^2 - 1 = 39k \Rightarrow (n-1)(n+1) = 39k = 3 \times 13k$$

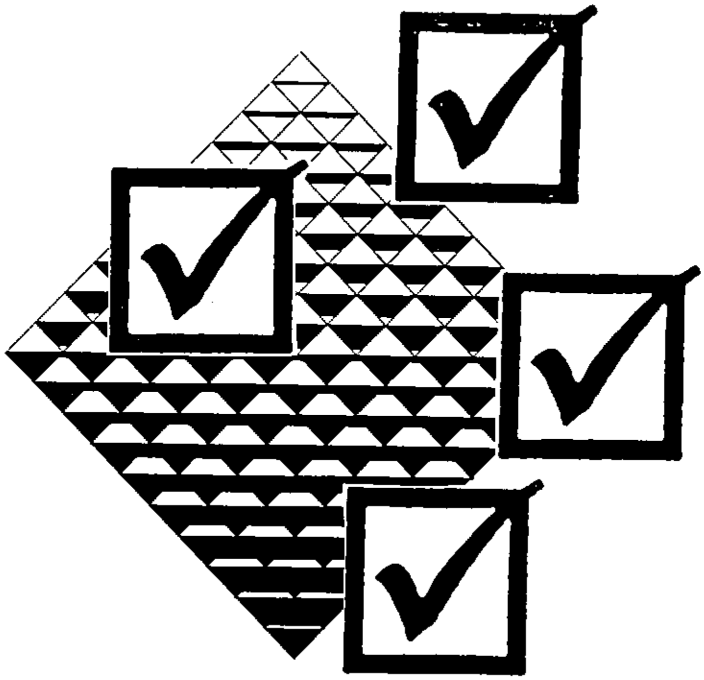
حالتهای زیر مطلوبست:

$$\begin{cases} \begin{cases} n-1=3 \ , \ n+1=13k \rightarrow n=4 \Rightarrow 13k=5 & \text{غ ق ق} \\ n+1=3 \ , \ n-1=13k \rightarrow n=2 \Rightarrow 13k=1 & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ \begin{cases} n-1=3k \ , \ n+1=13 \rightarrow n=12 \Rightarrow 3k=11 & \text{غ ق ق} \\ n+1=3k \ , \ n-1=13 \rightarrow n=14 \Rightarrow 3k=15 \Rightarrow k=5 \end{cases} \\ \begin{cases} n-1=k \ , \ n+1=3\times13 \rightarrow n=38 \Rightarrow k=37 \\ n+1=k \ , \ n-1=3\times13 \rightarrow n=40 \Rightarrow k=41 \end{cases} \end{cases}$$

اگر $k = 5 \rightarrow n^2 = Z = 39 \times 5 + 1 = \boxed{196}$

اگر $k = 37 \rightarrow Z = n^2 = \boxed{1444}$

اگر $k = 41 \rightarrow Z = n^2 = \boxed{1600}$

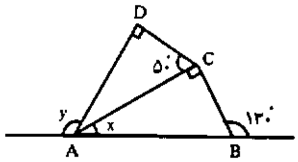


پرسشهای چهارگزینه‌ای با پاسخ تشریحی

هندسهٔ ۱

• محمدهاشم رستمی

۱ـ در شکل، AC⊥CB و AD⊥DC است. ۲x + y چند درجه است؟

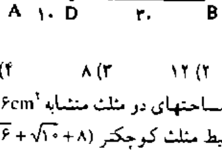


۱) ۱۲۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۲ ـ مساحت شش ضلعی منتظمی ۵۴$\sqrt{۳}$cm^۲ است. اندازهٔ بزرگترین قطر در این شش ضلعی چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳ ـ اندازهٔ x در شکل زیر چند سانتی‌متر است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۴ ـ اندازهٔ مساحتهای دو مثلث متشابه ۱۶cm^۲ و ۶۴cm^۲ است. اگر محیط مثلث کوچکتر ۲($\sqrt{۲۶}+\sqrt{۱۰}+۸$) باشد، محیط مثلث دیگر چقدر است؟

۱) ($\sqrt{۲۶}+\sqrt{۱۰}+۸$) ۲) ۴($\sqrt{۲۶}+\sqrt{۱۰}+۸$)
۳) ۲($\sqrt{۲۶}+\sqrt{۱۰}+۱۶$) ۴) ۳۲ + $\sqrt{۲۶}$ + ۲$\sqrt{۱۰}$

۵ ـ حجم مکعبی که اندازهٔ قطر آن ۲$\sqrt{۳}$ است، چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۶ ـ ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با ۲، ۳ و ۴ است. اگر سطح کل این مکعب مستطیل برابر ۲۰۸cm^۲ باشد، اندازهٔ حجم آن چقدر است؟

۱) ۱۹۲cm^۳ ۲) ۹۶cm^۳
۳) ۴۸cm^۳ ۴) ۲۸۸cm^۳

۷ ـ شعاعهای قاعده‌های دو استوانه قائم که مرکز قاعده‌های آنها یکی است، ۳cm و ۵cm و ارتفاع مشترک آنها ۱۲cm است. نسبت مساحت جانبی این دو استوانه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸ ـ قاعدهٔ هرم منتظمی شش ضلعی به ضلع ۵ و اندازهٔ هر یال آن ۱۳ است. حجم این هرم چند است؟

۱) ۳۰۰$\sqrt{۳}$ ۲) ۵۰$\sqrt{۳}$
۳) ۱۵۰ ۴) ۱۵۰$\sqrt{۳}$

۹ ـ کره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر را صفحه‌ای که به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از مرکز آن قرار دارد، قطع کرده است. حجم مخروطی که این مقطع، قاعدهٔ آن و ارتفاعش فاصله مرکز کره از صفحه است، چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۸π ۲) ۱۶π ۳) ۳۲π ۴) ۱۶

۱۰ ـ عدد حجم کره‌ای $\frac{۱}{۲}$ عدد سطح آن است. اندازهٔ حجم این کره چند است؟

۱) ۳π ۲) $\frac{۷π}{۲}$ ۳) ۴π ۴) $\frac{۹π}{۲}$

هندسهٔ ۲

• محمدهاشم رستمی

۱ ـ اندازه‌های دو ضلع مثلثی ۵ و ۸ است. کدام عدد می‌تواند اندازهٔ ضلع سوم این مثلث باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۲ ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو صفحهٔ متوازی به یک فاصله است، کدام شکل است؟

۱) یک خط راست موازی آن دو صفحه
۲) یک صفحه عمود بر آن دو صفحه
۳) یک خط عمود بر آن دو صفحه
۴) صفحه‌ای موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن دو صفحه

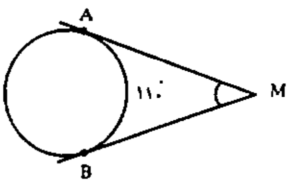
۳ ـ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتی‌متر در یک صفحه مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که فاصله‌اش از هریک از نقطه‌های A و B برابر ۵ سانتی‌متر باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴ ـ نقطه‌ای به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ای به قطر ۲۰ سانتی‌متر واقع است. اندازهٔ کوچکترین وتری که از این نقطه در دایره رسم می‌شود چقدر است؟

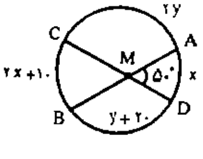
۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۵ ـ اندازهٔ زاویهٔ AMB در شکل زیر چقدر است؟ (MA و MB در نقطه‌های A و B بر دایره مماسند.)



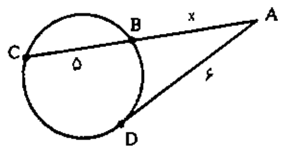
۱) ۷۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۴۰° ۴) ۶۰°

۶ ـ در شکل زیر، ۳x − y چند درجه است؟



۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۷ ـ اندازهٔ پاره‌خط AB در شکل داده شده چند است؟



(AD در نقطهٔ D مماس بر دایره است.)

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۸ ـ تصویر نقطهٔ $A=(۳,-۲)$ تحت تبدیل $E(x,y)=(۳x-۴\ ,\ ۵y+۲)$ کدام نقطه است؟

۱) $(۴,-۵)$　۲) $(۸,-۵)$
۳) $(۵,-۸)$　۴) $(-۵,۸)$

۹ ـ تحت یک بازتاب، نقطهٔ $(۳,۲)$ تصویر نقطهٔ $(۲,۳)$ است. معادلهٔ محور تقارن این بازتاب کدام است؟

۱) $y=x+۲$　۲) $y=x$
۳) $y=-x$　۴) $y=-x+۳$

۱۰ ـ فاصلهٔ مجانس نقطهٔ $A=(۳,-۱)$ در تجانس $D(x,y)=(۲x,۲y)$ از مرکز تجانس چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۱۰}$　۲) ۱۰　۳) $\sqrt{۱۰}$　۴) $۲\sqrt{۱۰}$

ریاضی ۱

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ ـ اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\ |x\geq ۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\ |x<-۲\}$، حاصل $A'\cap B'$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\ |-۲<x\leq ۳\}$　۲) $\{x\in\mathbb{R}\ |-۲<x<۳\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}\ |-۲\leq x\leq ۳\}$　۴) $\{x\in\mathbb{R}\ |-۲\leq x<۳\}$

۲ ـ اگر $A=\{۲,\{۲\},\{\{۲\}\}\}$ ؛ آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{\{۲\}\}\subset A$　۲) $\{۲\}\not\subset A$
۳) $\{\{۲\}\}\in A$　۴) $\{۲\}\in A$

۳ ـ اگر $A\subset B$ ؛ آن‌گاه حاصل $A\cup(B-A)$ کدام است؟

۱) A　۲) B　۳) A'　۴) B'

۴ ـ اگر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+۱)$ عضوی از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+۴)$ عضوی ۱۱۲ واحد کمتر باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۵ ـ حاصل عبارت $A=\frac{(a^۲)^۳(a^۳)^۲(b^۳)^۲(b^۲)^۳c^{۱۵}.c^۳}{(a^۲b^۲c^۲)(abc)^{۱۶}}$ کدام است؟ $(a,b,c\neq ۰)$

۱) abc　۲) $(abc)^۲$
۳) $(abc)^۳$　۴) ۱

۶ ـ حاصل عبارت

$p=(\frac{۳^۴\times ۲^۳\times a^{-۵}\times b^{-۲}\times c^{-۳}\times ۱۴}{۴a^{-۳}\times ۲۸b^{-۲}\times ۲۷c^{-۱}})^{-۳}$ کدام است؟

۱) $(abc)^۳$　۲) $(abc)^۲$
۳) $(abc)^۵$　۴) $(abc)^۶$

۷ ـ حاصل عبارت

$K=\frac{۲^{n+۲}+۲^{n+۲}-۲^{n+۳}+۵\times ۲^n}{۹\times ۲^n+۳\times ۲^{n+۱}+۳\times ۲^{n+۲}-۱۵\times ۲^{n+۱}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۷}$　۲) $\frac{۱۷}{۹}$　۳) $\frac{۱۷}{۱۵}$　۴) $\frac{۱۷}{۲۱}$

۸ ـ اگر $K=x+\frac{۱}{x}$، حاصل عبارت $(x-\frac{۱}{x})^۶$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{K^۲-۴}$　۲) $\sqrt{K^۲-۴}$
۳) $(K^۲-۴)^۳$　۴) $(K^۲-۲)^۶$

۹ ـ اگر $x+y=\sqrt{۲}$ و $y=\frac{۱}{x}$، حاصل $(x^۳+y^۳)^۲$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$　۲) $-\sqrt{۲}$　۳) $۲\sqrt{۲}$　۴) -۲

۱۰ ـ دامنهٔ متغیر x در عبارت

$\sqrt{۲x-۶}+\sqrt{\frac{۱}{x-۲}}+\sqrt{\frac{۱}{x-۳}}$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}|x>۳\}$　۲) $\{x\in\mathbb{R}|x>۲\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}|x>۰\}$　۴) $\{x\in\mathbb{R}|۲<x<۳\}$

ریاضی ۲

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ ـ معادله‌های دو قطر مربعی به صورت $y=-۲x-۱$ و $y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$ است، فاصلهٔ مرکز مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$　۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$　۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$　۴) $\sqrt{۱۰}$

۲ ـ اگر خط به معادلهٔ $kx+ny=۱$ بر خط به معادلهٔ $ky+x=n$ عمود باشد و از نقطهٔ $M(۱,-۲)$ نیز بگذرد حاصل $n+k$ کدام است؟

۱) -۲　۲) -۱　۳) صفر　۴) ۱

۳ ـ اگر $x=\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}$، حاصل $x^۶$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۵]{۲}$　۲) $۲\sqrt[۵]{۴}$　۳) $۲\sqrt[۵]{۸}$　۴) $۲\sqrt[۵]{۱۶}$

۴ ـ حاصل عبارت $P=\sqrt{\frac{۲۰\sqrt{۸}}{\sqrt{۳۲۰}}}+\frac{۳(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲})}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲۵}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}$　۲) $\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۴}$
۳) $\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۵}$　۴) $\sqrt[۳]{۱۰}-\sqrt[۳]{۲}$

۵ ـ حاصل عبارت

$K=\frac{۵\cot ۲۲۵^\circ+\cos ۲۴۰^\circ+۲\sin ۳۳۰^\circ+۴\tan ۱۳۵^\circ}{۱۰\tan ۲۲۵^\circ+\cos ۴۵۰^\circ-\cot ۱۳۵^\circ+۲۰\sin ۲۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) -۱　۲) $-\frac{۱}{۲}$　۳) صفر　۴) ۱

۶ ـ اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$، حاصل عبارت

$P=(\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\frac{۱+\sin x}{\cos x})\sqrt{۱-\sin^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　۲) $\sqrt{۲}$　۳) ۲　۴) $۲\sqrt{۲}$

۷ ـ اگر نقطهٔ $S(-۳,۲)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+px+q$ باشد، حاصل $p+q$ کدام است؟

۱) ۶　۲) ۱۱　۳) ۱۵　۴) ۱۷

۸ ـ معادلهٔ $۲x-x\sqrt{m}=x-۴$ به ازای چه مقادیری از m جواب دارد؟

۱) $m\geq ۰$　۲) $m\in\mathbb{R}-\{۱\}$
۳) $m\in\mathbb{R}-\{۰,۱\}$　۴) $m\geq ۰\ ,\ m\neq ۱$

۹ ـ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ باشند، حاصل عبارت $K=(\frac{۱}{x_۱})^۳+(\frac{۱}{x_۲})^۳+x_۱^۳x_۲^۳$ کدام است؟

۱) -۱　۲) -۳　۳) -۵　۴) -۷

۱۰ ـ مجموعهٔ همهٔ جوابهای نامعادلهٔ $\frac{۳\sqrt{x}+۳}{۶\sqrt{x}+۲}\geq\frac{۳}{۴}$، کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}|x\geq ۰\}$　۲) $\{x\in\mathbb{R}|۰\leq x\leq\frac{۳}{۲}\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}|۰\leq x\leq\sqrt{۲}\}$　۴) $\{x\in\mathbb{R}|۰\leq x\leq ۱\}$

ریاضی ۳

● میر شهرام صدر

۱ ـ مجموعه جواب نامعادله $\frac{۲\sqrt{x}+۲}{۳\sqrt{x}+۱}>۱$ کدام گزینه است؟

۱) $(-\infty,۱]$　۲) $(-\infty,۱)$
۳) $(۰,۱)$　۴) $[۰,۱)$

۲ ـ کسر $P=\frac{\sin x+x^۲\sin x}{۱+x^۲}$ در کدام بازه همواره مثبت است؟

۱) $[۰,\frac{۳\pi}{۲})$　۲) $(۰,\pi)$
۳) $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$　۴) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$

۳ ـ در تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲ax & x\geq ۱\\ ax+b & x<۱\end{cases}$ ؛ اگر $f(۲)=۴$ و $f(-۲)=۰$ ؛ $a+b$ کدام گزینه است؟

۱) -۳　۲) -۴　۳) -۲　۴) -۱

۴ ـ نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای تابع $y=\frac{x+۱}{x-۱}$ وقتی از Δx صرف‌نظر می‌کنیم، کدام گزینه است؟

۱) $\frac{-۲x}{x-۱}$　۲) $\frac{-۲}{x-۱}$
۳) $\frac{-۲}{(x-۱)^۲}$　۴) $\frac{۲x}{(x-۱)^۲}$

۵ ـ تابع $\begin{cases}f:R^+\to R\\ f(x)=x^۲\end{cases}$ مفروض است، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) تابع وارون‌پذیر است.　۲) تابع پوشا است.
۳) تابع وارون‌پذیر نیست.　۴) تابع دوسویی است.

۶ ـ اگر نقطهٔ A به مختصات $\begin{vmatrix}m+۱\\ n-۲\end{vmatrix}$ قرینه نقطه B به مختصات $\begin{vmatrix}۲m\\ n-۱\end{vmatrix}$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد، m و n کدام هستند؟

۱) $m=۲\ ,\ n=-۲$　۲) $m=-۱\ ,\ n=-۱$
۳) $m=۱\ ,\ n=۳$　۴) $m=۳\ ,\ n=-۱$

۷ ـ منحنی $y^۲=x^۲-\sin x+\frac{۶}{x}$ مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) مرکز تقارن دارد.　۲) محور تقارن افقی دارد.
۳) محور تقارن قائم دارد.　۴) گزینه‌های (۲) و (۳)

۸ ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ \frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix}$ ؛ در این صورت $A^{۴۸}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 2^{28} \\ (\frac{1}{2})^{28} & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$

۹ ـ مجموعه جواب نامعادله $\log\frac{x+2}{5} < -1$ کدام گزینه است؟

۱) $(-3, -\frac{5}{2})$ ۲) $(-2, -\frac{3}{2})$

۳) $(\frac{3}{2}, 2)$ ۴) $(\frac{5}{2}, 3)$

۱۰ ـ اگر $\log 2 = a$ در این صورت مقدار $\log 0/25$ برحسب a کدام است؟

۱) $-2a$ ۲) $-a$ ۳) $1-a$ ۴) $1+a$

ریاضی ۴

● حمیدرضا امیری

۱ ـ اگر s انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ باشد، انحراف معیار $(2x_1+5)$ و $(2x_2+5)$ و ... $(2x_{20}+5)$ کدام است؟

۱) $2s$ ۲) $2s+10$ ۳) $2s+5$ ۴) $2s+100$

۲ ـ با توجه به جدول فراوانی

حدود دسته	۲۳ − ۳۱	۳۱ − ۳۹	۳۹ − ۴۷	۴۷ − ۵۵
فراوانی	۳	۵	۹	۱۱

کدام یک از گزینه‌های زیر درست نیست.

۱) طول دسته برابر ۸ است.

۲) ۴۳ نشان دسته سوم است.

۳) دامنه تغییرات ۳۲ است.

۴) میانگین داده‌ها ۴۵ است.

۳ ـ اگر $V_n = \frac{3n-1}{4n-1}$، جمله عمومی یک دنباله باشد، چندمین جمله این دنباله $\frac{11}{15}$ است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ ـ جمله یازدهم یک تصاعد حسابی ۳۴ و مجموع ۸ جمله اول آن ۲۰ است. مجموع ۵۰ جمله نخستین این تصاعد کدام است؟

۱) 25×126 ۲) 25×127

۳) 25×129 ۴) 25×131

۵ ـ اگر $\log a$، $\log b$ و $\log c$ به ترتیب سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند، آنگاه کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند؟

۱) $\log c, \log b, \log a$ ۲) $c, 2b, a$

۳) $\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ ۴) $\frac{1}{\log c}, \frac{1}{\log b}, \frac{1}{\log a}$

۶ ـ به ازای کدام مقدار x عبارت $A = \cos^2 x - \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کمترین مقدار را دارد؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۷ ـ زاویه بین دو بردار $\vec{V_1} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ و $\vec{V_2} = -\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$ کدام است؟

۱) 30° ۲) 40° ۳) 60° ۴) 90°

۸ ـ از بین ۱۲ نفر که دو نفر آنها برادر هستند، می‌خواهیم یک کمیته ۵ نفری تشکیل دهیم به طوری که حداقل یکی از برادرها در آن شرکت داشته باشند، به چند طریق می‌توان این کمیته را تشکیل داد؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۷۹۲ ۳) ۵۴۰ ۴) ۲۹۷

۹ ـ دو مکعب را باهم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن که مجموع شماره‌هایی که بر زمین می‌نشینند ۷ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{4}{36}$ ۲) $\frac{5}{36}$ ۳) $\frac{6}{36}$ ۴) $\frac{7}{36}$

۱۰ ـ با ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۸ اعداد چهاررقمی کمتر از ۴۰۰۰ ساخته‌ایم و هریک از آن اعداد را جداگانه روی کارتهایی نوشته‌ایم، به طور تصادفی یک کارت انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد روی این کارت بر ۵ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

ریاضی ۵ رشته تجربی

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ ـ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{2x-2}} + \sqrt{\frac{2x-3}{1-2x}}$ کدام است؟

۱) $]1, \frac{3}{2}[$ ۲) $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$

۳) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ۴) $]\frac{1}{2}, 1[$

۲ ـ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{|1-x^2|}{|x+1|}$ کدام است؟ $\left(\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}\right)$

۱) $\mathbb{R}^+ - \{2\}$ ۲) $R^+ - \{-1\}$

۳) $[0, 2[\cup]2, +\infty[$ ۴) $[0, +\infty[$

۳ ـ توابع $f = \{(4,5), (3,1), (2,3)\}$ و $g = \{(4,6), (3,5), (1,2)\}$ مفروضند. اجتماع دامنه و برد تابع (fog) کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{3\}$ ۳) $\{1, 3\}$ ۴) $\varnothing$

۴ـ در تابع باضابطهٔ مفروض $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \le -1 \\ ax + b & -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \ge 1 \end{cases}$، اگر $\lim_{x\to 1} f(x)$ و $\lim_{x\to -1} f(x)$ هردو موجود باشند، مقدار (a.b) کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3

۳) صفر ۴) موجود نیست.

۵ ـ حاصل $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\infty$

۶ ـ حاصل $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$، کدام است؟

۱) -2 ۲) صفر ۳) ۲ ۴) $+\infty$

۷ ـ تابع f با قانون $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{2}{x^2}) & x \ne 0 \\ & x = 0 \end{cases}$ در $x_0 = 0$ چگونه است؟

۱) پیوسته است.

۲) پیوسته نیست.

۳) فقط پیوستگی راست دارد.

۴) فقط پیوستگی چپ دارد.

۸ ـ اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{ax+b}{x+a}$ محور xها را در $x_0 = -1$ قطع کند و خط $x + 2 = 0$ مجانب منحنی باشد، اندازهٔ واسطهٔ هندسی a و b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۹ ـ معادلهٔ $(x-1)^3 + \cdots + (x-76)^3 + (x-77)^3 = 0$ دارای چند ریشهٔ حقیقی است؟

۱) یک ریشهٔ حقیقی ۲) دو ریشهٔ حقیقی

۳) سه ریشهٔ حقیقی ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۰ ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با معادله‌های پارامتری $(x = 2\sin\alpha - 3\ ,\ y = 2\cos\alpha + 2)$ در نقطه‌ای از آن که $\alpha = \frac{\pi}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $x = -1$ ۲) $x = 2$

۳) $y = -1$ ۴) $y = 2$

حسابان ۱

● محمدصادق عسگری

۱ ـ برد تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & x \in \mathbb{Z} \\ x - [x] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,1]$ ۳) $[1,2)$ ۴) $[0,1)$

۲ ـ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log(1-[x])}$ ($[x]$ جزء صحیح x) کدام است؟

۱) $(-\infty, 1]$ ۲) $(-\infty, 1)$ ۳) $[0, 1)$ ۴) $(1, +\infty)$

۳ ـ اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد مقادیر m کدام است؟

۱) $-2 \le m \le 1$ ۲) $1 \le m \le 2$

۳) $-2 \le m \le 2$ ۴) $-3 \le m \le 2$

۴ ـ اگر $f(x) = 3x - |x-1|$ باشد آنگاه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{4} & x \ge 3 \\ \frac{x-1}{2} & x < 3 \end{cases}$

۲) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x \ge 3 \\ \frac{x+1}{4} & x < 3 \end{cases}$

۳) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & x \ge 3 \\ x+1 & x < 3 \end{cases}$

۴) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & x \ge 3 \\ x-1 & x < 3 \end{cases}$

۵ ـ حد عبارت $\frac{[x]-[2x]}{[x]-2[x]}$ وقتی $x \to 0^-$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) -2

۶ ـ تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}\sqrt{-x}$ برکدام مجموعه پیوسته است؟

۱) $[1, +\infty)$ ۲) $(-\infty, 0]$ ۳) $(-\infty, 0)$ ۴) $\mathbb{R}$

۷ ـ اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h) - f(1+h)}{h} = 6$ آنگاه مشتق تابع $y = f(\frac{4}{x^2})$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -6 ۳) ۳ ۴) -3

۸ ـ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ آنگاه مقدار حد عبارت $\frac{f(5h) - f(2h)}{h}$ وقتی $h \to 0$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹ ـ اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to -2^-} f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۰ ـ اگر $f(x+2)=x-\sqrt{x+2}$ آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to 0^-$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) وجود ندارد. ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

حسابان ۲

● محمدصادق عسگری

۱ ـ به کدام دلیل تابع با ضابطه $y=x|x-1|$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر نیست؟

۱) مشتق چپ ندارد. ۲) مشتق راست ندارد.
۳) مشتق چپ و مشتق راست ندارد.
۴) مشتق چپ و راست دارد ولی برابر نیست.

۲ ـ تابع باضابطه $f(x)=\begin{cases}ax^2 & x<1\\ bx^3+2x & x\geq 1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است $a+b$ چقدر است؟

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۶

۳ ـ ماکزیمم مقدار تابع با ضابطه $y=\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}$ در فاصله $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ∞

۴ ـ مقدار مشتق تابع منحنی $y=\mathrm{Arctg}\,x+\mathrm{Arccotg}\,y-\frac{\pi}{2}$ در نقطه $(0,0)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵ ـ می‌نیمم فاصله $y=4-x^2$ از نقطه $(0,2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۶ ـ فاصله مرکز دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{3}$ از خطی که این دایره را با زاویهٔ 30° قطع می‌کند چقدر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $4\sqrt{3}$

۷ ـ مکان هندسی نقاط $M\left|\begin{matrix}x=\sin\theta+\cos\theta\\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{matrix}\right.$ کدام است؟

۱) هذلولی باخروج از مرکز $\sqrt{2}$
۲) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$
۳) پاره‌خط به فاصله $\sqrt{2}$ از مبدأ مختصات
۴) بیضی با اقطار ۲ و ۱

۸ ـ اگر $f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{dt}{1+t^2}$ آنگاه مشتق تابع $y=f(\frac{1}{x})$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۳- ۴) ۳

۹ ـ اگر $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{1+\sin t}dt$ آنگاه $f(\frac{\pi}{2})-f(0)$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}2$ ۲) $-\mathrm{Ln}2$ ۳) $\mathrm{Ln}3$ ۴) $-\mathrm{Ln}3$

۱۰ ـ مساحت محدود به سهمی $y=x^2-2$ و خط $y=x$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

جبر و احتمال رشته ریاضی

● میرشهرام صدر

۱ ـ اگر ۴۰۰ نفر در یک سالن حضور داشته باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) حداقل دو نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند (بدون درنظر گرفتن سال تولد).
۲) حداقل دو نفر در یک ماه به‌دنیا آمده‌اند.
۳) حداقل دو نفر در یک هفته معین از سال به دنیا آمده‌اند.
۴) حداقل ۵۷ نفر در روز شنبه به‌دنیا آمده‌اند.

۲ ـ کدام یک از گزاره‌های زیر «قضیه دوشرطی» است؟

۱) اگر $x=y$ آنگاه، $x^2=y^2$
۲) اگر $x=y$ آنگاه، $\sin x=\sin y$
۳) اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲عضوی مجموعه‌ای ۲۸ باشد، آنگاه آن مجموعه ۸ عضو دارد.
۴) اگر $x=1$ آنگاه، $x^2=1$

۳ ـ اگر A و B دو مجموعه جدا ازهم باشند، $A\Delta B$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A-B$ ۴) M

۴ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$
۲) $a\overset{m}{\equiv}b, b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$
۳) $a\overset{m}{\equiv}b, c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$
۴) $ac\overset{m}{\equiv}bc\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$

۵ ـ روی ده کارت شماره‌های ۱ تا ۱۰ را می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای می‌ریزیم. سپس دو کارت را به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جابگذاری مجدد از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن که مجموع عددهای روی دو کارت فرد باشد کدام است؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۶ ـ کیسه‌ای حاوی ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سبز است. یک مهره را به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم و پس از مشاهدهٔ رنگ آن، به کیسه برمی‌گردانیم و سپس مهرهٔ دیگری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن که هردو مهره سبز باشند چقدر است؟

۱) $\frac{6}{8}$ ۲) $\frac{16}{81}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۷ ـ یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد متناسب با همان عدد است، احتمال عدد ۳ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۸ ـ به طرف دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۵ و ۲ تیراندازی می‌شود. احتمال آن که تیر به دایرهٔ بزرگتر اصابت کند و به دایره کوچکتر اصابت نکند کدام است؟ (تیر همواره به دایرهٔ بزرگ اصابت می‌کند.)

۱) $\frac{20}{25}$ ۲) $\frac{4}{25}$ ۳) $\frac{21}{25}$ ۴) $\frac{22}{25}$

۹ ـ نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right.$ را به تصادف از سطح مربع $M=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ انتخاب می‌کنیم احتمال این‌که $x\leq y\leq 1-x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۰ ـ صورت قطبی عدد مختلط $Z=2+2\sqrt{3}i$ کدام است؟

۱) $4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ۲) $4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$
۳) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ۴) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) تعداد رأسهای فرد، در هر گراف، بر ۲ بخش‌پذیر است.
۲) در هر گراف از مرتبهٔ p و اندازه q همواره $0\leq q\leq\frac{p(p-1)}{2}$
۳) تعداد رأسهای زوج در هر گراف، زوج است.
۴) مجموع درجه‌های رأسهای هر گراف دو برابر اندازه گراف است.

۲ ـ گراف G، ۳ رأس از درجه ۴ و ۲ رأس از درجه ۳ دارد. اگر این گراف از مرتبهٔ ۵ باشد اندازهٔ G کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۹

۳ ـ اگر گراف G، ۴ـ منتظم باشد و $q=3p-2$، کدام گزینه درست است؟

۱) $p=2\ ,\ q=4$
۲) $p=3\ ,\ q=7$
۳) $p=4\ ,\ q=10$
۴) $p=5\ ,\ q=13$

۴ ـ اگر M ماتریس مجاورت گراف k_p باشد و هر درایهٔ روی قطر اصلی M^2 برابر ۵ باشد، تعداد یالهای گراف، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۶

۵ ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) عضو ابتدای هر مجموعه، در صورت وجود، بزرگترین کران پایین است.
۲) عضو انتهای هر مجموعه، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا است.
۳) هر زیرمجموعه Z که از بالا کراندار باشد، عضو انتها دارد.
۴) اگر $A\subseteq R$ و از پایین کراندار نباشد، عضو ابتدا ندارد.

۶ ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد k بر ۱۷ برابر ۱۵ باشد باقیمانده تقسیم عدد $3k-1$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۳۱ ۳) ۰ ۴) ۱۰

۷ ـ اگر $(a,b)=1$ و $(a-2b, 3a-b)=d$ در این صورت d کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

۸ ـ اگر دوعدد $(2a+7)$ و $(3a-2)$ رقم یکان مساوی داشته باشند، رقم یکان $(2a+5)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۳

۹ ـ اگر $a=7k+5$ و $b=7k'-2$ در این صورت دستهٔ هم نهشتی $[a+2b]$ به پیمانه ۷ کدام است؟

۱) $[1]$ ۲) $[-4]$ ۳) $[5]$ ۴) $[6]$

۱۰ ـ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=27$ چند جواب صحیح با شرط $x_2>4$ دارد؟

۱) $\binom{24}{5}$ ۲) $\binom{25}{4}$ ۳) $\binom{24}{3}$ ۴) $\binom{25}{3}$

۱۱ ـ چند تابع پوشا از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ به روی مجموعهٔ $B=\{1,2\}$ وجود دارد؟ (دامنه همهٔ توابع را A بگیرید.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۱۲ ـ روی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند رابطه می‌توان تعریف کرد که پاد متقارن و متقارن باشند؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

۱۳ ـ ماتریس یک رابطهٔ R به صورت $M=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ است. R کدام یک از خواص زیر را داراست؟

۱) بازتابی و پاد متقارن است.
۲) بازتابی و ترایایی است.
۳) متقارن و ترایایی است.
۴) پاد متقارن و ترایایی است.

۱۴ ـ جمله n ام یک دنباله عبارت است از $a_n=3n+1$ این دنباله در کدام یک از رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کند؟

۱) $a_n=3a_{n-1}-1$ ۲) $a_n=3a_{n-1}+1$
۳) $a_n=a_{n-1}+2$ ۴) $a_n=a_{n-1}+3$

۱۵ ـ کیسه‌ای شامل ۱۰ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ قرمز و ۱۰ مهرهٔ سیاه است. یک مهره به تصادف از این کیسه بیرون می‌کشیم و مشاهده می‌کنیم که سیاه نیست، احتمال این که این مهره قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{15}$

۱۶ ـ در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. مهره‌ها را یکی پس از دیگری از کیسه بیرون آورده و کنار هم ردیف می‌کنیم. احتمال اینکه مهره‌ها یک‌درمیان سفید و سیاه باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{35}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{70}$ ۴) $\frac{1}{81}$

۱۷ ـ در یک کلاس ریاضی در دانشکده‌ای ۱۵ عیالوار، ۳۰ مرد مجرد و ۲۰ خانم مجرد وجود دارد. از عیالوارها ۵ نفر و از مردان مجرد نیز ۵ نفر و از خانم‌های مجرد ۲ نفر، نمره بیست می‌گیرند. یک نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که نمره او بیست است. احتمال اینکه او عیالوار باشد چقدر است؟

۱) $\frac{5}{11}$ ۲) $\frac{3}{12}$ ۳) $\frac{24}{25}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۱۸ ـ اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع احتمالی به صورت $f_x(x)=a(\frac{1}{3})^x$ به ازای $x=0,1,2,\dots$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱۹ ـ اگر امید ریاضی جدول توزیع متغیر تصادفی زیر برابر ۳ باشد، $a-b$ کدام است؟

x_i	۱	۳	۴	۵
p_i	a	۰/۱	b	۰/۳

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۱- ۴) ۰

جبر خطی پیش دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱ ـ همسازهٔ سطر سوم ستون دوم ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\1&0&2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۸-

۲ ـ اگر A ماتریس ۳×۳ و وارون‌پذیر باشد در این صورت حاصل $\left|\frac{3}{|A|}A\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{|A|}$ ۲) $\frac{9}{|A|^2}$ ۳) $\frac{27}{|A|^2}$ ۴) $\frac{27}{|A|^3}$

۳ ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ و $B=[1\ \ -1\ \ 0]$ در این صورت حاصل AB کدام است؟

۱) تعریف نمی‌شود

۲) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$

۴) $[-1]$

۴ ـ به ازای چه مقدار m مجموعه $H=\{(x,y)|2x+6y+(2m-1)=0\}$ یک زیر فضای برداری $\mathbb{R}^2$ است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵ ـ ماتریس نگاشت خطی $f(x_1,x_2)=(2x_2,x_1+x_2,4x_1)$ از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^3$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\4&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&4\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&4\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0&1&4\\2&1&0\end{bmatrix}$

۶ ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\\1&4\end{bmatrix}$ ماتریس یک نگاشت خطی f است، بعد هستهٔ f کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ ـ اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ یک نگاشت خطی باشد $f^{-1}(2,2,2)=\{(x,y)|y=3x-1\}$ در این صورت $f^{-1}(0,0,0)$ کدام است؟

۱) خط به معادلهٔ $x=0$
۲) خط به معادلهٔ $y=-\frac{1}{3}x-1$
۳) خط به معادلهٔ $y=-\frac{1}{3}x+1$
۴) خط به معادله $y=3x$

۸ ـ تبدیل یافته منحنی $x^2-y^2=1$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2=1$ ۲) $y^2-x^2=1$
۳) $x^2+y^2=1$ ۴) $y^2-x^2=-1$

۹ ـ اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\4&-1\end{bmatrix}$ باشند در این صورت $\lambda_1^2+\lambda_2^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۰ ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ نقطه x را به x' تبدیل می‌کند، کدام یک از ماتریسهای زیر x' را به x تبدیل می‌کند؟

۱) $\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}4&2\\3&1\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

۱۱ ـ ماتریس نگاشت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ عبارت است از $\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}$ این نگاشت:

۱) فقط یک به یک است.
۲) نه یک به یک و نه پوشا است.
۳) یک به یک و پوشا است.
۴) فقط پوشا است.

هندسهٔ تحلیلی رشتهٔ ریاضی‌فیزیک پیش‌دانشگاهی

● محمدهاشم رستمی

۱ ـ اگر بردارهای $a=(m-1,2p+5,m+n)$ و $b=(3,m+p-1,4)$ مساوی باشند، $m+n+p$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ ـ اگر $a=(m,2,m)$ باشد، به ازای کدام مقدار m، اندازهٔ بردار a برابر $3\sqrt{6}$ است؟

۱) ±3 ۲) ±4 ۳) ±5 ۴) ±6

۳ ـ زاویهٔ بردار $a=(2,-2,1)$ با محور xها کدام است؟

۱) $\mathrm{Arctg}\frac{2}{3}$ ۲) 60°
۳) $\mathrm{Arccos}\frac{1}{3}$ ۴) $\mathrm{Arccos}\frac{2}{3}$

۴ ـ اگر دو بردار $V_1=(m,2,m-5)$ و $V_2=(2,m+1,-2)$ بر هم عمود باشند $|\vec{V_2}|$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{33}$ ۲) $\sqrt{23}$ ۳) $\sqrt{35}$ ۴) $\sqrt{37}$

۵ ـ قرینهٔ بردار $a=(1,2,-3)$ نسبت به راستای $b=(4,-2,3)$ کدام است؟

۱) $(\frac{-101}{29},\frac{-22}{29},\frac{33}{29})$ ۲) $(\frac{-91}{29},\frac{11}{29},\frac{-33}{29})$
۳) $(\frac{101}{29},\frac{22}{29},\frac{-33}{29})$ ۴) $(\frac{22}{19},\frac{11}{19},\frac{33}{19})$

۶ ـ اگر $a=(1,0,2)$ و $b=(-2,1,2)$ باشد، اندازهٔ جبری تصویر بردار $a\times b$ روی محور zها کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

۷ ـ معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A=(1,1,2)$ به موازات خط

$D:\begin{cases}x=t-1\\y=2t\\z=4\end{cases}$ رسم می‌شود کدام است؟

۱) $\begin{cases}\frac{x}{2}=y+1\\z=2\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=\frac{y+1}{2}\\z=4\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=\frac{y+1}{2}\\z=2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\frac{x}{2}=y\\z=4\end{cases}$

۸ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M(0,1,2)$ از خط $D:2x-1=y=4-z$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{37}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{34}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{34}}{2}$

۹ـ زاویهٔ بین خط $D:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{5}$ و صفحهٔ $P:2x-3y+z-2=0$ چند درجه است؟

۱) ۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۱۰ـ معادلهٔ صفحه‌ای که در نقطه‌ای به طول ۲ از خط $D:\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=-2t+1\end{cases}$ براین خط عمود می‌شود کدام است؟

۱) $x+2y-z=18$ ۲) $x-y-2z=18$ ۳) $x+y+2z=18$ ۴) $x+y-2z=18$

دیفرانسیل و انتگرال ۱ پیش‌دانشگاهی

• احمد قندهاری

۱ـ معادله $|x^2-7x+6|=-x^2+7x-6$ وقتی $x\in Z$، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) بی شمار

۲ـ در دنباله $a_n=\begin{cases}k & , n=2k-1\\ \frac{1}{k+1} & , n=2k\end{cases}$، مجموع دو جمله هفتم و هشتم برابر کدام است؟

۱) $\frac{17}{5}$ ۲) $\frac{19}{5}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) $\frac{23}{5}$

۳ـ کدام یک از سری‌های زیر همگرا می‌باشند؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+n}$

۴ـ $\lim \frac{5}{30+4^{tg x}}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^+$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{6}$

۵ـ $\lim\frac{(4e)^n+(8e)^n}{(3e)^n+(10e)^n}$ وقتی $n\to+\infty$ کدام است؟

۱) $2e$ ۲) $\frac{1}{2}e$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) صفر

۶ـ اگر $0<x\le1$ و $f(x)=\sqrt{1-x}$، در این صورت $f(cotg\, x)$ در کدام یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $[0,\frac{\pi}{4}]$ ۲) $[0,\frac{\pi}{3}]$ ۳) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ ۴) $[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$

۷ـ اگر برای هر عدد حقیقی x و y داشته باشیم $f(x+y)=f(x).f(y)$ و تابع f در R مشتق‌پذیر باشد، چنانچه $f(3)=1$، $f(0)=1$، $f'(0)=3$ آنگاه $f'(3)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۸ـ تابع f به معادله $f(x)=\sqrt{(x-4)^2(x-1)}$ در نقطه $x_0=4$

۱) مشتق‌پذیر است. ۲) فقط مشتق راست دارد.
۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) مشتق‌پذیر نیست.

۹ـ حجم یک مکعب که طول ضلع آن x سانتی‌متر است برابر V می‌باشد. آهنگ متوسط تغییر حجم در هر سانتی‌متر تغییر طول ضلع آن وقتی x از ۲ تا ۲/۲ تغییر می‌کند کدام است؟

۱) ۱۲/۲۴ ۲) ۱۳/۲۴ ۳) ۱۴/۲۴ ۴) ۱۵/۲۴

۱۰ـ یک شرکت تولیدی رنگ، در روز $C(x)=0/2x^2+4x+5000$ تومان برای تولید (x) قوطی رنگ هزینه می‌کند. هزینه تولید (۵۰۱) امین قوطی رنگ چقدر است؟

۱) ۱۰۴ تومان ۲) ۲۰۴ تومان
۳) ۳۰۴ تومان ۴) ۴۰۴ تومان

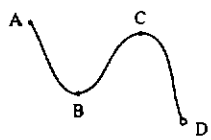
دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

• احمد قندهاری

۱ـ تابع f به معادله $f(x)=x^{\frac{6}{5}}+6x^{\frac{1}{5}}$ مفروض است، اعداد بحرانی این تابع کدام است؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{1,-1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{0,-1\}$

۲ـ کدام گزاره برای نمودار زیر درست است.



۱) نقطه A ماکزیمم مطلق و نقاط B و C، اکسترمم نسبی و نقطه D می‌نیمم مطلق است.
۲) نقطه C هم ماکزیمم مطلق است و هم ماکزیمم نسبی.
۳) نقطه A ماکزیمم مطلق و نقاط B و C اکسترمم نسبی‌اند.
۴) نقطه A ماکزیمم مطلق و نسبی و نقطه D می‌نیمم نسبی است.

۳ـ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است.

۱) اگر نقطه A اکسترمم نسبی یک تابع باشد، آنگاه $f'(x_A)=0$
۲) اگر $f'(x_A)=C\neq0$، آن‌گاه نقطه A اکسترمم نسبی است.
۳) اگر $f'(x_A)=0$، آن‌گاه نقطه A اکسترمم نسبی است.
۴) نقطه A اکسترمم نسبی است اگر $f'(x_A)=0$ یا $f'(x_A)$ وجود نداشته باشد.

۴ـ منحنی تابع به معادله $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x}$ مفروض است، کدام گزینه درست است؟

۱) دو نقطه عطف و یک اکسترمم دارد.
۲) سه نقطه عطف و دو اکسترمم دارد.
۳) سه نقطه عطف دارد ولی اکسترمم نسبی ندارد.
۴) سه اکسترمم و دو عطف دارد.

۵ـ کدام یک از روابط زیر ریشه تقریبی معادله $f(x)=0$ را به روش نیوتن معلوم می‌کند؟

۱) $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ۲) $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
۳) $x_n=x_{n-1}-\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$ ۴) $x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

۶ـ $\lim_{x\to b}\frac{\sin x-\sin b+\sin(x-b)}{\cos x-\cos b}$ برابر است با:

۱) $tg\frac{b}{2}$ ۲) $-tg\frac{b}{2}$ ۳) $cotg\frac{b}{2}$ ۴) $-cotg\frac{b}{2}$

۷ـ اگر $a<b<c<d$ و $a,b,c,d\in R$ و دو به دو مخالف یکدیگر باشند منحنی تابع به معادله $y=(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^3$ دقیقاً چه اکسترمم‌هایی دارد؟

۱) یک ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد.
۲) دو ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.
۳) دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی دارد.
۴) دو ماکزیمم نسبی و سه می‌نیمم نسبی دارد.

۸ـ حاصل $\int Arctg\, x dx$ کدام است؟

۱) $xArctg\, x+\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+c$
۲) $xArctg\, x-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+c$
۳) $xArccotg\, x+\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+c$
۴) $xArccotg\, x-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+c$

۹ـ حاصل $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{\sin(Arctg\, x)}+c$ ۲) $\frac{1}{\sin(Arctg\, x)}+c$
۳) $\frac{-1}{\cos(Arctg\, x)}+c$ ۴) $\frac{1}{\cos(Arctg\, x)}+c$

۱۰ـ حاصل $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ کدام است؟

۱) $tg\, x+\frac{1}{\cos x}+c$ ۲) $tg\, x+\frac{1}{\sin x}+c$
۳) $tg\, x-\frac{1}{\cos x}+c$ ۴) $tg\, x-\frac{1}{\sin x}+c$

ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی (رشتهٔ تجربی)

۱ـ اگر $u_n=(\frac{1+\sqrt5}{2})^n+(\frac{1-\sqrt5}{2})^n$ که در آن $n=1,2,3,\cdots$ آنگاه $\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}$ برابر است با:

(آ) $\frac{1-\sqrt5}{2}$ (ب) $\frac{1+\sqrt5}{2}$ (ج) ۱ (د) $+\infty$

۲ـ اگر $u_n=(\frac{1+\sqrt3}{2})^n+(\frac{1-\sqrt3}{2})^n$ که در آن $n=1,2,3,\cdots$ آنگاه u_{2k} برابر است با:

(آ) $\left[(\frac{1+\sqrt3}{2})^{2k}\right]$ (ب) $\left[(\frac{1+\sqrt3}{2})^{2k}\right]+1$
(ج) $\left[(\frac{1+\sqrt3}{2})^{2k}\right]-1$ (د) هیچکدام

۳ـ اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه $\left[\sqrt[4]{n^4+4n^3+6n^2+4n}\right]$ برابر است با :

(آ) $n+1$ (ب) n

(ج) $n-1$ (د) هیچکدام

۴ـ فرض می‌کنیم $u_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ که در آن $n=1,2,3,\cdots$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} u_n$ برابر است با :

(آ) e (ب) $\frac{1}{e}$

(ج) 0 (د) $+\infty$

۵ـ اگر $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{16}=\begin{pmatrix}610&987\\987&1597\end{pmatrix}$ آنگاه $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{8}$ برابر است با :

(آ) $\begin{pmatrix}13&21\\21&34\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}21&34\\13&21\end{pmatrix}$

(ج) $\begin{pmatrix}21&13\\34&21\end{pmatrix}$ (د) هیچکدام

۶ـ اگر $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ آنگاه A^2-A-I_2 که در آن $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ برابر است با :

(آ) A (ب) A^2

(ج) $\left(\underset{2\times2}{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ (د) هیچکدام

۷ـ منحنی نمایش تابع $y=\frac{\pi}{2}x-x\cos^{-1}x$ در مبدأ مختصات

(آ) برمحور xها مماس است

(ب) با محور xها زاویه $45°$ می‌سازد

(ج) بر محور yها مماس است

(د) هیچکدام

۸ـ فرض می‌کنیم $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ که در آن ضرایب a_0، a_1، …، a_k اعداد ثابت هستند، آنگاه $y^{(n)}$ برابر است با :

(آ) 0 (ب) $n!a_0$

(ج) $\frac{a_0}{n!}$ (د) هیچکدام

۹ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه که حاصلضرب فواصلشان از دو خطّ متقاطع این صفحه ثابت است.

(آ) یک بیضی است (ب) یک سهمی است

(ج) یک هذلولی است (د) یک دایره است

۱۰ـ مکان هندسی مراکز دسته دوایری که از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند و بر یک خطّ ثابت مماس هستند

(ا) یک بیضی است (ب) یک هذلولی است

(ج) یک سهمی است (د) یک دایره است

۱۱ـ منحنی مسطح(C) به معادله $y=e^x+e^{-x}$ مفروض، است که در آن $-5\le x\le 5$، حجم حاصل از دوران این منحنی حول محور xها برابر است با :

(آ) $\pi(e^{10}-e^{-10}+20)$ (ب) $\pi(e^{10}-e^{-10}+10)$

(ج) $\pi(e^{10}-e^{-10})$ (د) $\pi(e^{10}-e^{-10}-20)$

۱۲ـ (C) یک منحنی مسطح است که معادلات آن $x=\sin^2 t$ ، $y=\cos^{10} t$ می‌باشد که در آن $0\le t\le\frac{\pi}{2}$، مساحت محصور بین این منحنی محور xها و دو خطّ مستقیم $x=0$ و $x=1$ برابر است با :

(آ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{1}{12}$

(ج) $\frac{1}{6}$ (د) π

۱۳ـ اگر A و B مستقل باشند و $P(A)=0/3$ و $P(B)=0/6$ ، $P(A-B)$ کدام است؟

(الف) $0/12$

(ب) $0/8$

(ج) $0/4$

(د) $0/2$

۱۴ـ اگر در یک نمونه‌گیری داده‌ها را در عددی مانند a ضرب کنیم نمودار دایره‌ای چه تغییری می کند؟

(آ) بزرگتر می‌شود

(ب) تغییر نمی‌کند

(ج) کوچکتر می‌شود

(د) بعضی از زاویه‌ها بزرگتر و برخی کوچکتر می‌شوند.

۱۵ـ ظرفی شامل a مهره است. مهره‌ای از آن خارج کرده پس از علامت گذاشتن روی آن، آن را در داخل ظرف قرار داده و سپس یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم احتمال آنکه همان مهره خارج شود کدام است؟

(آ) $\frac{1}{a^2}$ (ب) $\frac{1}{a(a-1)}$

(ج) $\frac{1}{a}$ (د) $\frac{1}{a-1}$

ریاضی عمومی ۲ پیش دانشگاهی

• میرشهرام صدر

۱ـ معادله خط مماس برمنحنی $e^x+e^y-x^2-y^2-e=0$ در نقطه $A(1,0)$ کدام است؟

۱) $y+e^x=2x+e-2$ ۲) $y-e^x=2x+e+2$

۳) $y+e^x=2x-e+2$ ۴) $y+e^x=-2x+e+2$

۲ـ توابع f و g با ضابطه‌های

$f(x)=\log(\sqrt{4x^2+5}-2x)$

و $g(x)=\log(\sqrt{4x^2+5}+2x)$

موجود هستند، کدام یک از رابطه‌های زیر بین $f'(x)$ و $g'(x)$ همواره برقرار است؟

۱) $f'(x)=g'(x)$ ۲) $f'(x)+g'(x)=\log 4$

۳) $f'(x)\times g'(x)=0$ ۴) $f'(x)=-g'(x)$

۳ـ هرگاه شعاع یک کره با خطای ممکن ۰/۰۱ سانتیمتر برابر ۱۰ سانتیمتر است، خطای ماکزیمم ممکن در حجم و سطح کره به ترتیب برابر است با :

۱) 4π , $0/8\pi$

۲) $\pm 4\pi$, $\pm 0/8\pi$

۳) 8π , $1/6\pi$

۴) $\pm 8\pi$, $\pm 16\pi$

۴ـ فرض کنید تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و x_1 و x_2 که $x_1<x_2$ نقاط بحرانی f باشند، در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) اگر $f''(x_1)f''(x_2)<0$ ، آنگاه f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.

۲) اگر $f''(x_1)f''(x_2)>0$ ، آنگاه f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.

۳) اگر $f''(x_1)f''(x_2)=0$ ، آنگاه نمودار f یک نقطه عطف دارد.

۴) اگر $f''(x_1)=f''(x_2)$ ، آنگاه f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.

۵ـ کمترین فاصله مبدأ مختصات از تابع با ضابطه $y=x^2-1$ ، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) 1

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۶ـ منحنی با ضابطه

$3x^2(x-1)+2xy(x+1)+y^2(x^2-1)=0$

دارای چند مجانب قائم و افقی است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۷ـ اگر $f(x)=[2x+1]$ در این صورت $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 4

۸ـ مساحت ناحیه محدود به $y=\frac{\sqrt{2\tan x}}{\cos x}$ و محور xها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را حول محور xها دوران کامل می‌دهیم، حجم حاصل از این دوران کدام است؟

۱) π ۲) 4π

۳) 2π ۴) 3π

۹ـ زاویه بین دو دایره $C_1:x^2+y^2-2x-2y=0$ و $C_2:x^2+y^2+4x-4y=0$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۰ـ بیضی H به معادله $5x^2+8y^2=40$ مفروض است. معادله بیضی دیگری که طول قطر کوچک آن برابر با فاصله کانونی بیضی H بوده و مرکز آن بر مرکز H منطبق و قطر بزرگ آن همان قطر کوچک H باشد، کدام است؟

۱) $3x^2+5y^2=15$ ۲) $3x^2+8y^2=24$

۳) $5x^2+3y^2=15$ ۴) $8x^2+3y^2=24$

ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی

• میرشهرام صدر

۱ـ هرگاه $z>u+a$ و $x+a\ge y$ و $y=z$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) $x>u$ ۲) $x\ge u$

۳) $x=u$ ۴) u

۲ـ نسبت مجموع n عدد طبیعی نخست متوالی، به مجموع n عدد زوج طبیعی نخست متوالی، کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۳ـ اگر جمله عمومی دنباله‌ای $a_n = \frac{۴^{۳n}}{۴}$ باشد، $۲^{۷۶}$ جملهٔ چندم آن است؟

۱) هشتم ۲) دهم ۳) یازدهم ۴) سیزدهم

۴ـ جواب معادله $\log_۲(\log_۳(\log x)) = ۰$ کدام گزینه است؟

۱) $x = ۱۰$ ۲) $x = ۱۰۰$
۳) $x = ۱۰۰۰$ ۴) $x = ۱۰۰۰۰$

۵ـ شدت زلزله سال ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ الی ۷/۶ ریشتر گزارش شد. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده برحسب ژول حداقل کدام است؟

۱) $E = ۱۰^{۱۳/۷}$ ۲) $E = ۱۰^{۱۴/۷}$
۳) $E = ۱۰^{۱۵/۳}$ ۴) $E = ۱۰^{۱۵/۷}$

۶ـ استخری حداکثر ظرفیت ۲۰۰۰۰ عدد ماهی را دارد، اگر تعداد ماهیها در حال حاضر ۲۰۰۰ باشد و آهنگ رشد تعداد آنها ۲٪ در سال باشد، بعد از چند سال تعداد ماهیها به ۲۰۰۰۰ می‌رسد؟

۱) $\frac{۱}{\log ۱/۰۲}$ ۲) $\log_{۱/۰۲}^{۲۰}$ ۳) $\log_{۱/۰۲}^{۱۸۰۰۰}$ ۴) $\log_{۱/۰۲}^{۱۰}$

۷ـ یک کارگاه عروسک‌سازی می‌تواند هریک از عروسکهای خود را ۲۰۰ تومان بفروشد، اگر در هر روز x واحد عروسک تولید کند و به فروش برساند، معادله هزینه آن $c(x) = x^۲ + ۴۰x + ۱۰۰۰$ است، چند عروسک در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

۸ـ سکه‌ای در پرتاب طوری سنگینی می‌کند که احتمال آمدن «رو» برای آن دو برابر «پشت» است، احتمال وقوع هردوبار «رو» در دوبار پرتاب سکه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۹ـ فرض کنیم S فضای نمونه یک آزمایش و A و B دو پیشامد ناتهی در S باشند، اگر $P(A) = \frac{۳}{۸}$ و $P(B) = \frac{۱}{۲}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۴}$، در این صورت $P(A' \cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۱۰ـ جمله ششم در بسط $(۲x^۳ + y^۲)^۷$ کدام است؟

۱) $۸۴x^۶y^{۱۰}$ ۲) $۸۴x^{۱۰}y^۶$ ۳) $۸۴x^۸y^۸$ ۴) $۸۴x^۴y^{۱۲}$

پاسخ تشریحی پرسشهای چهارگزینه‌ای

پاسخ تشریحی پرسشهای هندسهٔ ۱

۱ ـ گزینهٔ (۳) درست است.

۲ ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با $\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}$ پس داریم:

$$\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲} = ۵۴\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

امّا بزرگترین قطر در شش ضلعی منتظم به ضلع a، برابر $۲a$ است. پس $d = ۲a = ۲ \times ۶ = ۱۲$

۳ ـ گزینهٔ (۴) درست است. از تشابه دو مثلث ADE و ABC داریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۴۰} = \frac{۸}{۲۰} \Rightarrow x = ۱۶$$

۴ ـ گزینهٔ (۲) درست است. زیرا نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه و نسبت محیطها، برابر نسبت تشابه است. پس

$$K^۲ = \frac{S}{S'} = \frac{۱۶}{۶۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow K = \frac{۱}{۲}، \frac{۲P}{۲P'} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲(\sqrt{۲۶} + \sqrt{۱۰} + ۸)}{۲P'} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲P' = ۴(\sqrt{۲۶} + \sqrt{۱۰} + ۸)$$

۵ ـ گزینهٔ (۴) درست است. زیرا اگر یال مکعب را a فرض کنیم، داریم:

$$a\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \text{حجم مکعب} = a^۳ = ۲^۳ = ۸$$

۶ ـ گزینهٔ (۱) درست است. ابعاد مکعب را ۲k، ۳k و ۴k فرض می‌کنیم مساحت کل این مکعب برابر است با:

$$۲(۲k + ۳k)(۴k) + ۲(۳k \times ۲k) = ۵۲k^۲$$

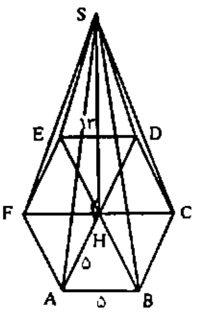
$$\Rightarrow ۵۲k^۲ = ۲۰۸ \Rightarrow k^۲ = ۴ \Rightarrow k = ۲$$

$$\Rightarrow \text{ابعاد مکعب مستطیل} = ۴،\ ۶،\ ۸$$

$$\Rightarrow \text{حجم مکعب مستطیل} = ۴ \times ۶ \times ۸ = ۱۹۲cm^۳$$

۷ ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا به‌دلیل مساوی بودن ارتفاع دو استوانه سطح جانبی آنها به نسبت شعاعهای دو قاعدهٔ آنهاست و این نسبت در داده‌های مسأله تنها $\frac{۳}{۵}$ است.

۸ ـ گزینهٔ (۴) درست است. زیرا قاعدهٔ هرم منتظم، شش ضلعی منتظم است. با معلوم بودن اندازهٔ یال و شعاع ۶ ضلعی منتظم، اندازهٔ ارتفاع هرم برابر است با:



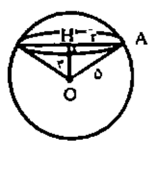
ارتفاع هرم $SH = \sqrt{SA^۲ - AH^۲} = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = ۱۲$

$$\text{قاعده}\ S = \frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳} \times ۵^۲}{۲} = \frac{۷۵\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{حجم} = \frac{۱}{۳}\ \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۷۵\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۲$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم} = ۱۵۰\sqrt{۳}$$

۹ ـ مقطع دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر است. زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA داریم:



$$AH = \sqrt{OA^۲ - OH^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴ = r$$

ارتفاع مخروط موردنظر برابر ۳ سانتی‌متر است. پس:

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}\ \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times (۱۶\pi) \times ۳ = ۱۶\pi$$

پس گزینه (۲) درست است.

۱۰ ـ گزینه (۴) درست است. زیرا داریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۲} \times ۴\pi R^۲ \Rightarrow R = \frac{۳}{۲} \Rightarrow V = \frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{۳}{۲}\right)^۳ = \frac{۹\pi}{۲}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای هندسهٔ ۲

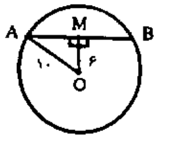
۱ ـ گزینه (۲) درست است. زیرا اگر ضلع سوم مثلث را a بنامیم، حدود a به‌صورت زیر است:

$$۸ - ۵ < a < ۸ + ۵ \Rightarrow ۳ < a < ۱۳$$

۲ ـ گزینهٔ (۴) درست است.

۳ ـ گزینهٔ (۱) درست است.

۴ ـ کوچکترین وتری که از یک نقطه در دایره رسم می‌شود وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است. بنابراین از نقطهٔ M عمودی بر OM رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند از A به O وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM با توجه به این که شعاع این دایره $OA = ۱۰$ است، داریم:



$$MA = \sqrt{OA^۲ - OM^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸ \Rightarrow AB = ۱۶$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.

۵ ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا قوس بزرگ AB برابر $۳۶۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۲۵۰^\circ$ و از آن‌جا:

$$\hat{M} = \frac{۲۵۰^\circ - ۱۱۰^\circ}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

۶ ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا داریم:

$$۵۰^\circ = \frac{x + ۲x + ۱۰^\circ}{۲} \Rightarrow x = ۳۰^\circ$$

و

$$۱۳۰^\circ = \frac{y + ۲۰^\circ + ۲y}{۲} \Rightarrow y = ۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x - y = ۹۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰^\circ$$

۷ ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا داریم:

$$AD^۲ = AB.AC \Rightarrow ۶^۲ = x(۵ + x) \Rightarrow x^۲ + ۵x - ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۴$$

۸ ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا داریم:

$E(3,-2)=(9-4,-10+2)=(5,-8)$

۹ ـ مختصات نقطه‌های داده شده، (۲، ۳) و (۳، ۲) نشان می‌دهد که محور تقارن این بازتاب نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y=x$ است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۱۰ ـ گزینه (۴) درست است. زیرا مرکز این تجانس مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ (۰،۰) است و مجانس نقطهٔ $A(3,-1)$ در تبدیل داده شده نقطهٔ $A'(6,-2)$ است و فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات $OA'=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$ است.

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$A=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 3\}\ ;\ A'=\{x\in\mathbb{R}|x<3\}$$
$$B=\{x\in\mathbb{R}|x<-2\}\ ;\ B'=\{x\in\mathbb{R}|x\geq -2\}$$
$$\Rightarrow A'\cap B'=\{x\in\mathbb{R}|-2\leq x<3\}$$

۲ ـ گزینهٔ (۲)، زیرا:

$$2\in A\Rightarrow\{2\}\subset A$$

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')$$
$$=(A\cup B)\cap M=A\cup B\xrightarrow{(A\subset B)}B$$

۴ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$2^{n+2}-112=2^{n+1}\Rightarrow 2^4\times 2^n-2\times 2^n=112$$
$$\Rightarrow(16-2)\times 2^n=112\Rightarrow 2^n=\frac{112}{14}$$
$$\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow 2^n=2^3\Rightarrow n=3$$

۵ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا:

$$A=\frac{a^6.a^{12}.b^6.b^{12}.c^{18}}{(abc)^2.(abc)^{16}}=\frac{a^{18}.b^{18}.c^{18}}{(abc)^{18}}=\frac{(abc)^{18}}{(abc)^{18}}=1$$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$P=\left(\frac{3^3\times 2^3\times a^{-5}\times b^{-4}\times c^{-3}\times 14}{4a^{-3}\times 28b^{-2}\times 27c^{-1}}\right)^{-3}$$
$$=\left(a^{-2}b^{-2}c^{-2}\right)^{-3}=(abc)^6$$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$K=\frac{2^4\times 2^x+2^2\times 2^x-2^3\times 2^x+5\times 2^x}{9\times 2^x+3\times 2\times 2^x+3\times 2^3\times 2^x-15\times 2\times 2^x}$$
$$=\frac{(16+4-8+5)2^x}{(9+6+24-30)2^x}=\frac{17\times 2^x}{9\times 2^x}=\frac{17}{9}$$

۸ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab \text{ و } a=x\ ,\ b=\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=4x(\frac{1}{x})$$
$$\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=(x+\frac{1}{x})^2-4$$
$$\text{و } x+\frac{1}{x}=k\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=k^2-4$$
$$\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^6=(k^2-4)^3$$

۹ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا:

$$x+y=\sqrt{2}\ ,\ xy=1:\ x^3+y^3=(x+y)^3-$$
$$3xy(x+y)=(\sqrt{2})^3-3(1)(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases}2x-6\geq 0\\x-2>0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 3\\x>2\\x>3\end{cases}\xrightarrow{(\text{از اشتراک نامعادله‌ها})}\{x\in\mathbb{R}|x>3\}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۲

۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases}y=-2x-1\\y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow -2x-1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{-3}{5}\text{ و } y=\frac{1}{5}$$
$$G(\frac{-3}{5},\frac{1}{5}):\ OG=\sqrt{(\frac{-3}{5})^2+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$mm'=-1\ (\text{شرط عمود بودن})\ ,\ m=-\frac{1}{k}\ ,$$
$$m'=-\frac{k}{n}\Rightarrow$$
$$mm'=(-\frac{1}{k})(\frac{-k}{n})=\frac{1}{n}=-1\ \Rightarrow n=-1$$
$$M(1,-2)\ ,\ n=-1:\ k(-2)+1=-1\Rightarrow k=1$$
$$\Rightarrow n+k=-1+1=0$$

۳ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$$x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\Rightarrow x^5=2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\Rightarrow x^{15}=16\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x^{30}=2^9\Rightarrow\left(x^6\right)^5=2^5\times 2^4\Rightarrow x^6=2\sqrt[5]{16}$$

روش دوم:

$$x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\Rightarrow x=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^4\sqrt{2}}}=\sqrt[15]{\sqrt{2^9}}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[30]{2^9}\Rightarrow x^6=\sqrt[5]{2^9}=2\sqrt[5]{16}$$

۴ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\frac{20\sqrt{8}}{\sqrt{320}}}=\sqrt{20\sqrt{\frac{8}{320}}}=\sqrt{\frac{20}{\sqrt{40}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{40}}}$$
$$=\sqrt{\sqrt{\frac{400}{40}}}=\sqrt[4]{10}$$

$$\frac{3(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}\times\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4})}{5-2}$$
$$=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}\Rightarrow P=\sqrt[4]{10}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}$$

۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$K=\frac{5\cot 45^\circ-\cos 60^\circ-2\sin 30^\circ-4\tan 45^\circ}{10\tan 45^\circ+\cos 90^\circ+\cot 45^\circ-20\sin 30^\circ}$$
$$=\frac{5-\frac{1}{2}-1-4}{10+0+1-10}=\frac{-1}{2}$$

۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$P=\frac{\cos^2 x+(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)\cos x}|\cos x|$$
$$=\frac{\cos^2 x+1+2\sin x+\sin^2 x}{(1+\sin x)\cos x}|\cos x|$$
$$=\frac{2+2\sin x}{1+\sin x}=\frac{2(1+\sin x)}{1+\sin x}=2\Rightarrow P=2$$

۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$y=x^2+px+q\ ;\ (x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}=y-q\ :$$
$$(x+\frac{p}{2})^2=(y+\frac{p^2-4q}{4})\ ,\ S(-\frac{p}{2},-\frac{p^2-4q}{4}),$$
$$S(-3,2)\Rightarrow\begin{cases}\frac{4q-p^2}{4}=2\\-\frac{p}{2}=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}p=6\\q=11\end{vmatrix}\Rightarrow p+q=17$$

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$2x-x\sqrt{m}=x-4\Rightarrow x(1-\sqrt{m})=-4\Rightarrow x=\frac{-4}{1-\sqrt{m}}$$
$$1-\sqrt{m}\neq 0,\ m\geq 0\Rightarrow\sqrt{m}\neq 1,\ m\geq 0\Rightarrow m\neq 1,\ m\geq 0$$

۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$x_1+x_2=1\ ,\ x_1x_2=-1\ ,\ k=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+(x_1x_2)^3\Rightarrow$$
$$k=\frac{x_2^3+x_1^3}{x_1^3x_2^3}+(-1)^3$$
$$=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}-1$$
$$=\frac{(1)^3-3(-1)(1)}{(-1)^3}-1=\frac{4}{-1}-1=-5$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{3\sqrt{x}+3}{6\sqrt{x}+2}\geq\frac{3}{4}\ :\ \frac{3(\sqrt{x}+1)}{2(3\sqrt{x}+1)}\geq\frac{3}{4}\ :\ \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}\geq\frac{1}{2}$$
$$\frac{2\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1}\geq 1\ ;\ \frac{2\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1}-1\geq 0\ ;\ \frac{2\sqrt{x}+2-3\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}+1}\geq 0$$
$$\frac{1-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1}\geq 0\ ,\ 3\sqrt{x}+1>0\Rightarrow 1-\sqrt{x}\geq 0\ ;\ \sqrt{x}\leq 1$$
$$\Rightarrow x\geq 0\ ,\ x\leq 1\ \Rightarrow\ 0\leq x\leq 1$$

مجموعه جوابهای نامعادله $=\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\leq 1\}$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۳

۱ ـ گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

نامعادله زیر را برای $x\geq 0$ حل می‌کنیم؛ در صورتی که طرفین نامعادله را در $3\sqrt{x}+1$ ضرب کنیم:

$$2\sqrt{x}+2>3\sqrt{x}+1\Rightarrow 1>\sqrt{x}\Rightarrow x<1$$
$$\begin{cases}x<1\\\text{و}\\x\geq 0\end{cases}\Rightarrow 0\leq x<1\Rightarrow x\in[0,1)$$

۲ ـ گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$P=\frac{(1+x^2)\sin x}{x^2+1}=\sin x$$

می‌دانیم که $\sin x$ در ربعهای اول و دوم همواره مثبت است؛ در نتیجه P در فاصله $(0,\pi)$ همواره مثبت است.

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$f(2)=2^3+2a\times 2=4\Rightarrow\ 8+4a=4\Rightarrow a=-1$$
$$f(-2)=a(-2)+b=0\Rightarrow -1(-2)+b=0\Rightarrow b=-2$$
$$\Rightarrow a+b=-3$$

۴ ـ گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{x+\Delta x+1}{x+\Delta x-1}-\frac{x+1}{x-1}$$
$$=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+x\Delta x-\Delta x+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{x\Delta x}+\cancel{x}-\cancel{x}-\Delta x+\cancel{1}}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$
$$\Delta y=\frac{-2\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}\ \Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

اگر از Δx صرف نظر کنیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

۵ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا تابع $f(x)$ یک به یک است پس وارون‌پذیر است:

چون دامنه تابع R^+ است، داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2$$

۶ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا قرینه نقطه A نسبت به خط $y=-x$ نقطه $A'\begin{vmatrix}-(n-2)\\-(m+1)\end{vmatrix}$ است:

$$(-n+2,-m-1)=(2m,n-1)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-n+2=2m\\-m-1=n-1\end{cases}\Rightarrow m=2\ ,n=-2$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$x\to -x\Rightarrow y^2=(-x)^2-\sin(-x)+\frac{6}{-x}$$
$$\Rightarrow y^2=x^2+\sin x-\frac{6}{-x}$$

محور تقارن قائم ندارد.

$$y \to -y = (-y)^2 = x^2 - \sin x + \frac{6}{x}$$

$\Rightarrow y^2 = x^2 + \sin x - \frac{6}{x}$ محور تقارن افقی دارد.

۸ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$A^2 = \begin{bmatrix} & 3 \\ \frac{1}{3} & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \Rightarrow (A^2)^{24} = (I)^{24} \Rightarrow A^{48} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۹ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$\frac{x+2}{5} > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$\log\frac{x+2}{5} < -1 = \log\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x+2}{5} < \frac{1}{10} \Rightarrow 2x+4 < 1$$

$$\Rightarrow 2x < -3 \to x < -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in (-2, -\frac{3}{2})$$

۱۰ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$\log 0/25 = \log\frac{25}{100} = \log 25 - \log 100 = 2\log 5 - 2$$
$$= 2\log\frac{10}{2} - 2 = 2\log 10 - 2\log 2 - 2$$
$$= 2 - 2a - 2 = -2$$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۴

۱ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا اگر داده‌های آماری را k برابر کنیم، انحراف معیار k برابر می‌شود و اگر به هر داده آماری k' را اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند، پس انحراف معیار جدید برابر $2s$ است.

۲ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا درستی سه گزینه دیگر با توجه به جدول واضح است.

۳ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$$\frac{3n-1}{4n-1} = \frac{11}{15} \Rightarrow 44n - 11 = 45n - 15 \Rightarrow n = 4$$

۴ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$\begin{cases} a_{15} = 34 \\ s_8 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 14d = 34 \\ 4(2a + 7d) = 20 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \ , \ a = -8$$

$$s_{50} = 25(2 \times (-8) + 49 \times 3) = 25 \times 131$$

۵ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$\log b = \frac{\log a + \log c}{2} \Rightarrow 2\log b = \log a + \log c$$
$$\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$$

در نتیجه، $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۶ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$A = \cos^2 x - \cos x = \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$
$$(\cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

کمترین مقدار A وقتی به دست می‌آید که $(\cos x - \frac{1}{2})^2 = 0$ بنابراین

$$\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

۷ ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} , \ \vec{V_2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \vec{V_1} . \vec{V_2} = 1 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1 = 0$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1} . \vec{V_2}}{|\vec{V_1}| |\vec{V_2}|} = \frac{0}{|\vec{V_1}| |\vec{V_2}|} = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90$$

۸ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا حداقل یکی از برادرها در کمیته باشند یعنی یک برادر یا دو برادر در کمیته شرکت داشته باشند :

$$\binom{10}{4} \times \binom{2}{1} + \binom{10}{3} \times \binom{2}{2} = 210 \times 2 + 120 \times 1 = 540$$

۹ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$n(s) = 36 \ , \ A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$\Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36}$$

۱۰ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

۲	۴	۳	۲

$\Rightarrow$ ۴۰۰۰ تعداد اعداد کمتر از $n(s) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

$n(A)$ تعداد اعداد کمتر از ۴۰۰۰ و بخش‌پذیر بر ۵

۲	۳	۲	۱

$$n(A) = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی ۵ تجربی

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :

$$\begin{cases} \frac{1-2x}{2x-2} \geq 0 \\ \frac{2x-3}{1-2x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]\frac{1}{2}, 1[$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\frac{2x-3}{1-2x}$	−		+		+		−
$\frac{1-2x}{2x-2}$	−		+		−		−
جواب	تعریف نشده		$\frac{1}{2} < x < 1$		تعریف نشده		

۲ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} : f(x) = \frac{|1-x^2|}{|x+1|} = \frac{|x^2-1|}{|x+1|}$$
$$= \frac{|x-1||x+1|}{|x+1|} = |x-1|$$
$$\Rightarrow f(-1) = |-1-1| = |-2| = 2 \ , \ f(x) \geq 0$$
$$\Rightarrow R_f = [0,2[\cup]2,+\infty[$$

۳ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :

$$f = \{(4,5),(3,1),(2,3)\} \ , \ g = \{(4,6),(3,5),(1,2)\}$$

$$4 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \ , \ 3 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} ?$$

$$1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \quad (fog)$$

$$fog = \{(1,3)\} \Rightarrow D_{fog} = \{1\} \ , \ R_{fog} = \{3\}$$
$$\Rightarrow D_{fog} \cup R_{fog} = \{1,3\}$$

۴ ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$$\begin{cases} \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to1^+}(2x+1) = \lim_{x\to1^-}(ax+b) \\ \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to-1^+}(ax+b) = \lim_{x\to-1^-}(2x^3-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1)+1 = a(1)+b \Rightarrow a+b=3 \\ a(-1)+b = 2(-1)^3-1 \Rightarrow -a+b=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \ , \ a = 3 \Rightarrow a.b = 3(0) = 0$$

۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است : زیرا :

$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to0}(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x})$$
$$\sim \lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2.x^2}$$
$$\sim \lim_{x\to0}\frac{(\frac{x^3}{6})(x+x)}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{2x^4}{6x^4} = \frac{1}{3}$$

۶ ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+2x+2}) \sim \lim_{x\to+\infty}(|x-1| - |x+1|)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x-1-x-1) = -2$$

۷ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}(x^2 \sin(\frac{2}{x^2})) = 0$$

(چون به ازای هر x حقیقی : $-1 \leq \sin(\frac{2}{x^2}) < 1$)

$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$ (تابع f در $x_0 = 0$ ، پیوسته است)

۸ ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

در توابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$ خط $cx+d=0$ مجانب قائم و خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی است. بنابراین برای تابع با ضابطهٔ $y = \frac{ax+b}{x+a}$ می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} x+a=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-a \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow -a=-2 \Rightarrow a=2$$

از طرفی چون منحنی محور xها را در $x_0 = -1$ قطع می‌کند سپس نقطهٔ $A(-1, 0)$ متعلق به منحنی است :

$$\frac{2(-1)+b}{(-1)+2} = 0 \Rightarrow b-2=0 \Rightarrow b=2$$

واسطهٔ هندسی a و b $= \sqrt{ab} = \sqrt{2\times2} = \sqrt{4} = 2$

۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :

$$y = (x-1)^3 + (x-2)^3 + \cdots + (x-76)^3 + (x-77)^3$$

$$y' = 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2 + \cdots + 3(x-77)^2 > 0$$

مشتق y همواره مثبت است، پس تابع همواره صعودی است. بنابراین منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ (۱) همواره محور

xها را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه معادلهٔ مورد نظر فقط دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=\frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}=\frac{-2\sin\alpha}{2\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}:A(x=2\sin\frac{\pi}{2}-3\ ,\ y=2\cos\frac{\pi}{2}+2)$$

$$\Rightarrow A(-1,\ 2)\ ,\ m=-\tan(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow m'=\cot(\frac{\pi}{2})=0$$ (ضریب زاویهٔ خط قائم)

ضریب زاویهٔ خط قائم صفر است. بنابراین معادلهٔ خط قائم به صورت زیر است:

$$y-2=0:\ y=2$$

پاسخ تشریحی پرسشهای حسابان ۱

۱ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا می‌دانیم اگر $x\in\mathbb{Z}$ همواره داریم $[x]+[-x]=0$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ داریم $0<x-[x]<1$ بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ x-[x] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow 0\le f(x)<1$$

$$\Rightarrow R_f=[0\ ,\ 1)$$

۲ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا: $f(x)=\sqrt{\log(1-[x])}$

$$\begin{cases}\log(1-[x])\ge 0\\ 1-[x]>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-[x]\ge 1\\ [x]<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]\le 0\\ [x]<1\end{cases}\Rightarrow x<1$$

$$D_f=(-\infty,1)$$

۳ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا شرط وجود دو ریشه حقیقی برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta'\ge 0$

$$(m+2)x^2+4x+(m-1)=0$$

$$\Delta'=4-(m+2)(m-1)\ge 0\Rightarrow -m^2-m+6\ge 0$$

$$-m^2-m+6=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3\le m\le 2$$

m	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$-m^2-m+6$	$-$	$+$	$-$	

۴ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا برای حل این گونه تستها دو نقطه اختیاری از تابع f را در نظر می‌گیریم. در این تابع نقاط (۰ ،۱-) و (۱ ،۳) را در نظر می‌گیریم، حال باید نقاط (۱- ،۰) و (۳ ،۱) در ضابطهٔ f^{-1} صدق کنند. هر گزینه‌ای که این دو نقطه در آن صدق کند جواب مسأله است.

۵ ـ گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$x\to 0^-\Rightarrow x<0\Rightarrow [x]=-1$$

$$x\to 0^-\Rightarrow 2x\to 0^-\Rightarrow 2x<0\Rightarrow [2x]=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]-[2x]}{[x]-2[x]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1+1}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$$

۶ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا: $f(x)=\frac{x}{[x]}\sqrt{-x}$

دامنه پیوستگی f زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است که به ازای هر عضو آن:

$$\begin{cases}[x]\ne 0\\ \text{و}\\ -x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0 \text{ یا } x\ge 1\\ \text{و}\\ x\le 0\end{cases}\Rightarrow x<0$$

۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است. در این مسأله از تعریف مشتق تابع f به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+nh)-f(x_0+mh)}{(n-m)h}$$

داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1+h)}{h}=6\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1+h)}{2h}=3$$

$$\Rightarrow f'(1)=3$$

$$y=f(\frac{4}{x^2})\Rightarrow y'=-\frac{8}{x^3}f'(\frac{4}{x^2})$$

$$\Rightarrow y'(2)=-\frac{8}{8}f'(1)=-f'(1)$$

$$\Rightarrow y'(2)=-3$$

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5h)-f(2h)}{h}=3f'(0)=-\frac{3}{2}$$

۹ ـ گزینه (۱) صحیح است.

$$y=f(x)=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y(x+1)=2x-1\Rightarrow yx+y=2x-1$$

$$\Rightarrow x(y-2)=-y-1\Rightarrow x=\frac{-y-1}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f^{-1}(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{-x-1}{x-2}=+\infty$$

۱۰ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا:

$$f(x+2)=x-\sqrt{x+2}\Rightarrow\begin{cases}x+2=t\\ x=t-2\end{cases}\Rightarrow f(t)=t-2-\sqrt{t}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}(x-\sqrt{x}-2)$$

این حد وجود ندارد زیرا $\sqrt{x}$ برای $x<0$ تعریف نمی‌شود.

پاسخ تشریحی پرسشهای حسابان ۲

۱ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا در تابع حقیقی $y=|f(x)|$ همواره ریشه‌های ساده معادله $f(x)=0$ نقاط زاویه‌دار نمودار f هستند. بنابراین در تابع $y=x|x-1|$ نقطه $x=1$ نقطهٔ زاویه‌دار می‌باشد. یعنی در نقطه $x=1$ مشتق چپ و راست وجود دارند ولی باهم برابر نیستند.

۲ ـ گزینه (۴) صحیح است، زیرا f در $x=1$ مشتق‌پذیر است. بنابراین در این نقطه پیوسته است. بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}ax^2=a\\ \qquad\qquad\Rightarrow a=b+2\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(bx^3+2x)=b+2\end{cases}$$

f در $x=1$ مشتق‌پذیر است در نتیجه داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax & x<1\\ 3bx^2+2 & x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(1)=2a\\ \qquad\Rightarrow 2a=3b+2\\ f'_+(1)=3b+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=b+2\\ 2a=3b+2\end{cases}\Rightarrow 2b+4=3b+2\Rightarrow b=2\Rightarrow a=4$$

$$a+b=6$$

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases}y=\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}\\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow y'=\frac{\cos x}{(1-2\sin x)^2}$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{\cos x}{(1-2\sin x^2)}=0$$

$$\Rightarrow\cos x=0\xrightarrow{\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Max}\,y=f(\frac{\pi}{2})=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow\text{Max}\,y=0$$

۴ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا:

$$y=\text{Arctg}\,x+\text{Arccotg}\,y-\frac{\pi}{2}$$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-y'}{1+y^2}$$

$$(0,0)\Rightarrow y'=1+\frac{-y'}{1}\Rightarrow y'=1-y'\Rightarrow 2y'=1\Rightarrow y'=\frac{1}{2}$$

۵ ـ گزینه (۳) درست است، زیرا اگر فرض کنیم (x,y) نقطه‌ای از منحنی $x^2=4-y$ باشد. تابع فاصله بین دو نقطه (x,y) و (0,2) را می‌نویسیم:

$$d=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\xrightarrow{x^2=4-y}d=\sqrt{4-y+(y-2)^2}$$

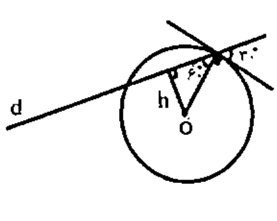
$$d=\sqrt{y^2-5y+8}\Rightarrow d'=0\Rightarrow\frac{2y-5}{2\sqrt{y^2-5y+8}}=0$$

$$\Rightarrow 2y-5=0\Rightarrow y=\frac{5}{2}$$

$$d=\sqrt{y^2-5y+8}\Rightarrow d=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+8}=\sqrt{8-\frac{25}{4}}$$

$$d=\sqrt{\frac{32-25}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

۶ ـ گزینه (۳) صحیح است، زیرا اگر فرض کنیم خط d دایره C را به زاویهٔ ۳۰° قطع کند. بنابراین زاویه بین خط و مماس بر دایره در نقطه تقاطع برابر با ۳۰° است. داریم:



h فاصله مرکز دایره از خط d می‌باشد که داریم:

$$h=R\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا :

$$M\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta\\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{cases}$$

$$x^2+y^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$$

$\Rightarrow x^2+y^2=2$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا :

$$f(x)=\int_1^{tgx}\frac{dt}{1+t^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+tg^2x}\times(1+tg^2x)=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow f'(\frac{1}{x})=1$$

$$y=f(\frac{1}{x})\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow y'(\frac{1}{2})=-4$$

۹ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا :

$$F(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{1+\sin t}dt$$

$$F(\frac{\pi}{2})-F(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin t}dt=Ln(1+\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=Ln2-Ln1=Ln2$$

۱۰ ـ گزینه (۱) صحیح است، زیرا :

$$\begin{cases}y=x\\ y=x^2-2\end{cases}\Rightarrow x^2-2=x\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-1\end{cases}$$

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(y_1-y_2)dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}(x^2-2-x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}\right|=\left|(\frac{8}{3}-4-2)-(-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2})\right|$$

$$=\left|\frac{8}{3}-6+\frac{1}{3}-2+\frac{1}{2}\right|=\left|3-8+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-5\right|=\left|-\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}$$

پاسخ تشریحی پرسشهای جبر و احتمال

۱ ـ گزینه (۴) : زیرا اگر ۴۰۰ نفر را کبوترها و روزهای یکسال را (۳۶۵ روز) لانه‌ها فرض کنیم طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند و به همین دلیل چون درسال فقط ۱۲ ماه وجود دارد حداقل دونفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند و نیز چون سال دارای ۵۲ هفته است، حداقل دونفر در یک هفته معین ازسال متولد شده‌اند.

۲ ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا در صورتی که عکس یک قضیه شرطی برقرار باشد (یعنی یک قضیه شرطی باشد)، قضیه دوشرطی ساخته می‌شود. در گزینه (۱) از این که $x^2=y^2$ نمی‌توان نتیجه گرفت x=y و در گزینه (۲) از $\sin x=\sin y$ نمی‌توان نتیجه گرفت x=y و در گزینه (۴) اگر $x^2=1$ نمی‌توان نتیجه گرفت $x=1$.

۳ ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا اگر A و B دو مجموعه جدا ازهم باشند :

$$\begin{cases}A-B=A\\ B-A=B\end{cases}\Rightarrow A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$$

۴ ـ گزینه (۴) زیرا :

$$5\times3\overset{9}{\equiv}2\times3\Rightarrow5\overset{9}{\not\equiv}2$$

۵ ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا توجه داریم که دراین مسأله وقتی کارتی را از کیسه خارج می‌کنیم و به کیسه برنمی‌گردانیم، از فضای نمونه‌ای یک عضو کم می‌شود. حال چون می‌خواهیم مجموع دو عدد فرد باشد باید اولی زوج و دومی فرد یا اولی فرد و دومی زوج باشد. پس

$$P(A)=(\frac{5}{10}\times\frac{5}{9})+(\frac{5}{10}+\frac{5}{9})=\frac{5}{9}$$

۶ ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا احتمال آن که مهرهٔ اول که خارج می‌شود، سبز باشد $\frac{4}{9}$ است و احتمال آن که مهرهٔ دوم نیز سبز باشد $\frac{4}{9}$ است (چون مهره اول را به کیسه برمی‌گردانیم، فضای نمونه تغییری نمی‌کند) :

$$P(A)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا طبق فرض مسأله اگر احتمال وقوع عدد ۱ را x بنامیم، احتمال وقوع عدد ۲، 2x است و ... احتمال وقوع عدد ۶، 6x است. ازطرفی باید

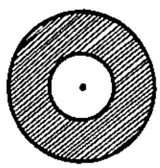
$$P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1$$

بنابراین :

$$x+2x+3x+\cdots+6x=1\Rightarrow x=\frac{1}{21}$$

احتمال وقوع عدد ۳ $P=3x=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

۸ ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا طبق شکل فضای نمونه سطح دایره بزرگتر است که اگر آن را S بنامیم، $S=25\pi$ و قسمت سایه خورده سطح مورد نظر است که اگر آن را A بنامیم : $A=25\pi-4\pi=21\pi$ بنابراین :

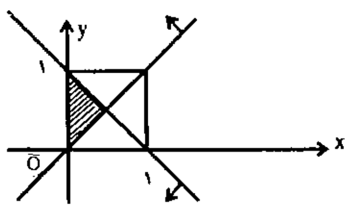


$$P(A)=\frac{A}{S}=\frac{21\pi}{25\pi}=\frac{21}{25}$$

۹ ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا مربع واحد همان مربع مزبور است که در شکل زیر مشخص شده است که با توجه به نابرابریهای $y\leq1-x$ و $x\leq y$ و مجموعه جواب این نامعادلات که در شکل سایه خورده است داریم :

$$P(A)=\frac{\text{مساحت مثلث سایه‌خورده}}{\text{مساحت مربع}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1\times1}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$$



۱۰ ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$Z=2+2\sqrt{3}i\Rightarrow r=\sqrt{4+12}=4$$

$$\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow Z=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

حل تشریحی پرسشهای ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی

۱ ـ گزینه (۳) : زیرا گزینه‌های (۱) ، (۲) و (۴) هرکدام بیانگر تعریف یا قضیه‌ای ازکتاب درسی بوده و از طرفی راجع به زوج بودن تعداد رأسهای زوج نمی‌توان حکم کلّی صادر کرد.

۲ ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$2q=\sum\deg v_i=(3\times4)+(2\times3)=18\Rightarrow2q=18$$

$$\Rightarrow q=9$$

۳ ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا اگر گراف G دارای P رأس باشد، چون هر رأس آن از درجهٔ ۴ است پس مجموع درجه‌های رأسهای G برابر است با 4p و چون $\sum\deg v_i=2q$ پس $4p=2q$ یا $q=2p$ که اگر در رابطهٔ $q=3p-2$ به‌جای q، 2p قرار دهیم :

$$q=3p-2\Rightarrow2p=3p-2\Rightarrow p=2\Rightarrow q=4$$

۴ ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا هر درایهٔ روی قطر اصلی ماتریس M^2 مربوط به گراف کامل k_p برابر است با درجه رأس متناظر با آن درایه و چون در k_p همه رأسها هم درجه و از درجه $(p-1)$ می‌باشند، پس $p-1=5$ یا $p=6$ پس $2q=\sum\deg v_i=6\times5=30$ و لذا $q=15$.

۵ ـ گزینه (۳) ؛ زیرا اگر A زیرمجموعه Z باشد و از بالا کراندار باشد، به شرط این‌که تهی نباشد، می‌توان گفت که عضو انتها دارد.

۶ ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$k=17q+15\Rightarrow3k=51q+45\Rightarrow3k-1=51q+44$$

$$\Rightarrow3k-1=51q+34+10=17(3q+2)+10\Rightarrow r=10$$

۷ ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$(a-2b,3a-b)=d\Rightarrow d|a-2b,d|3a-b$$

$$\Rightarrow d|-3(a-2b)\Rightarrow d|-3a+6b\Rightarrow d|(3a-b)+$$

$(-3a+6b)\Rightarrow d|5b\Rightarrow d|5\Rightarrow d=1$ یا $d=5$

۸ ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا دو عدد وقتی رقم یکان برابر به پیمانهٔ ۱۰ دارند، با یکدیگر هم‌نهشت هستند و برعکس، پس :

$$2a+7\overset{10}{\equiv}3a-2\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}9\Rightarrow a=9$$

$$\Rightarrow2a+5=2\times9+5=23\overset{10}{\equiv}3$$

۹ ـ گزینه (۱) صحیح است ؛زیرا :

$$a=7k+5,b=7k'-2\Rightarrow a\overset{7}{\equiv}5\ .$$

$$b\overset{7}{\equiv}-2\Rightarrow2b\overset{7}{\equiv}-4$$

$\Rightarrow a+2b\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow[a+2b]=[1]$ (به پیمانه ۷)

۱۰ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا هر جواب صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+(x_4+5)=27$ نظیر یک جواب صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=27$ با شرط $x_4>4$ است. پس باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=27-5$ را به‌دست آورد.

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ اخیر برابر است با :

$$\binom{22+4-1}{4-1}=\binom{25}{3}$$

۱۱ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا از A به B، 2^5 تابع وجود دارد که از این میان فقط ۲ تای آنها پوشا نیست. یکی از آنها تابع ثابت $f(x)=1$ و دیگری تابع ثابت $f(x)=2$ است. درنتیجه تعداد توابع پوشا از A به روی B برابر با $2^5-2=30$ است.

۱۲ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا فقط زیرمجموعه‌های رابطه همانی روی A، رابطه‌هایی هستند که هم‌متقارنند و هم پادمتقارن. چون در اینجا i_A، ۵ عضو دارد. پس $32 = 2^5$ رابطه در A وجود دارد که هم‌متقارن و هم پادمتقارن است.

۱۳ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا $m_{11}=0$، پس رابطه R بازتابی نیست. ماتریس مزبور متقارن نیست، بنابراین رابطه R متقارن نیست، چون درایه‌های m_{12} و m_{13} و m_{23} برابر ۱ می‌باشند، ولی درایه‌های m_{21} و m_{31} و m_{32} برابر۱ نیستند، پس R پادمتقارن است. چون $a_{12}=1$ و $a_{23}=1$ و $a_{13}=1$، پس رابطهٔ R ترایایی هم هست.

۱۴ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$$a_n - a_{n-1} = 3n+1-[3(n-1)+1] = 3n+1-3n+3-1=3$$

۱۵ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا اگر R پیشامد «قرمز بودن مهره» و B پیشامد «سیاه بودن مهره» باشند آنگاه باید $P(R|B')$ را به‌دست آورد. چون $R\cap B'=R$، پس :

$$P(R\cap B')=P(R)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$ و

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

درنتیجه :

$$P(R|B')=\frac{P(R\cap B')}{P(B')}=\frac{P(R\cap B')}{P(B')}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

۱۶ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا تعداد روشهای چیدن ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه کنار هم برابر !۷ است. تعداد روشهای چیدن ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه یک در میان کنار هم برابر !۴×!۳ است، پس احتمال مورد نظر برابر است با :

$$\frac{3!\times 4!}{7!}=\frac{1}{35}$$

۱۷ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

A = P(عیالوار)P(نمره‌بیست | عیالوار) + P(مردمجرد)P(نمره‌بیست | مردمجرد) + P(زن‌مجرد)P(نمره‌بیست | زن‌مجرد)

P(عیالوار | نمره بیست) = P(عیالوار)P(نمره‌بیست | عیالوار) / A

$$=\frac{\frac{5}{15}\times\frac{15}{65}}{\frac{5}{15}\times\frac{15}{65}+\frac{5}{30}\times\frac{30}{65}+\frac{2}{20}\times\frac{20}{65}}=\frac{5}{12}$$

۱۸ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا باید داشته باشیم $\sum f_X(x)=1$. برای این کار $\sum_{x=0}^{\infty} a(\frac{1}{3})^x=1$

$$a\left[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots\right]=1 \Rightarrow a\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

۱۹ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا باید داشته باشیم $\sum P_i x_i=1$ و $E(X)=3$. پس

$1\times a+2\times(0/1)+4b+5(0/3)=3$ و

$a+0/1+b+0/3=1$

درنتیجه $a+b=0/6$ و $a+4b=1/2$، درنتیجه $a=0/4$ و $b=0/2$. بنابراین: $a-b=0/2$

حل تشریحی پرسشهای جبر خطی

۱ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\1&0&2\end{bmatrix}$، همسازهٔ نظیر سطر سوم ستون دوم A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=(-1)\times(-2)=2$$

۲ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :

$$\left|\frac{3}{|A|}\times A\right|=(\frac{3}{|A|})^3|A|=\frac{27}{|A|^2}$$

۳ـ گزینهٔ (۲) صحیح است : زیرا :

$$\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :
زیر فضاهای برداری $\mathbb{R}^2$ فقط به‌صورت خطهایی هستند که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند پس :

$$2x+6y+(2m-1)=0 \xrightarrow{\text{باید از مبدأ عبور کند}} 2m-1=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

۵ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :
نگاشت از $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ است. پس ماتریس این نگاشت ماتریسی ۲×۳ است :

$$\begin{cases}y_1=0+2x_2\\y_2=x_1+x_2\\y_3=4x_1+0\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\4&0\end{bmatrix}$$

۶ـ گزینهٔ (۱) صحیح است : زیرا :
چون ماتریس نگاشت خطی f ماتریسی ۲×۳ است پس f نگاشتی است از $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ بنابراین :

$$\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x=0\\-x+y=0\\x+4y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

بنابراین فقط $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در هستهٔ f واقع است و بُعد آن صفر است.

۷ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :
f نگاشتی خطی است لذا f^{-1} نیز نگاشتی خطی است از طرفی طبق قضیه برای هر $b\in\mathbb{R}^3$، $f^{-1}(b)$ (به شرطی که تهی نباشد) یک زیرفضای $\mathbb{R}^2$ و موازی و هم‌بُعد با هستهٔ f است و می‌دانیم $f^{-1}(0,0,0)$ همان هستهٔ f را مشخص می‌کند لذا چون $f^{-1}(2,2,2)$ خطی به معادلهٔ $y=3x-1$ را مشخص می‌کند لذا هستهٔ f باید خطی موازی با این خط باشد.

۸ـ گزینهٔ (۲) صحیح است : زیرا :

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-y=x\\x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\x=y\end{cases}$$

$$x^2-y^2=1\Rightarrow y^2-(-x)^2=1\Rightarrow y^2-x^2=1$$

۹ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :
می‌دانیم اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژهٔ ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشند در این صورت $\lambda_1\lambda_2=|A|$ و $\lambda_1+\lambda_2=a+d$ پس اگر

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\4&-1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=(\lambda_1+\lambda_2)^2-2\lambda_1\lambda_2=(1)^2-2\times(-2)=5$$

۱۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است : زیرا :
اگر A را ماتریس نگاشت خطی f تصور کنیم که $f(x)=x'$ در این صورت نگاشت خطی f^{-1} می‌تواند x' را به x تبدیل کند که ماتریس آن A^{-1} است پس :

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\Rightarrow A^*=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix},\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*,$$

$$|A|=-2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

۱۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است : زیرا :
ابتدا هستهٔ f و بُعد آن را تعیین می‌کنیم

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\-2x+3y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

پس $k_f=\{(0,0)\}$ و بُعد آن صفر است. بنابراین طبق قضیهٔ f یک به یک است و نیز طبق قضیه اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک به یک باشد پوشا نیز می‌باشد.

پاسخ تشریحی پرسشهای هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱ـ گزینه (۲) درست است : زیرا برای برابری دو بردار باید مؤلفه‌های نظیر دو بردار برابر باشند. پس داریم :

$$\begin{cases}m-1=3\\2p+5=m+p-1\\m+n=4\end{cases}$$

از حل این دستگاه، $m=4$، $n=0$ و $p=-2$ به‌دست می‌آید که از آنجا $m+n+p=2$ به‌دست می‌آید.

نکته: از جمع طرفهای نظیر سه رابطهٔ دستگاه بالا $m+n+p=+2$ به‌دست می‌آید.

۲ـ گزینه (۳) درست است : زیرا :

$$3\sqrt{6}=\sqrt{m^2+4+m^2}\Rightarrow 2m^2+4=54\Rightarrow m=\pm5$$

۳ـ گزینه (۴) درست است : زیرا بردار یکهٔ محور xها $i=(1,0,0)$ است : پس :

$$\cos(\widehat{ox,a})=\frac{i.a}{|\vec{i}||\vec{a}|}=\frac{2}{1\times\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow(\widehat{ox,a})=\text{Arccos}\frac{2}{3}$$

۴ـ گزینه (۱) درست است : زیرا داریم :

$$V_1\perp V_2\Rightarrow V_1.V_2=0\Rightarrow 2m+2m+2-2m+10=0$$

$$\Rightarrow m=-6$$

$$\Rightarrow V_2=(2,-5,-2)\Rightarrow|\vec{V_2}|=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$$

۵ـ گزینهٔ (۱) درست است : زیرا قرینهٔ بردار a نسبت به راستای b از دستور زیر به‌دست می‌آید.

$$a''=\frac{2(a.b)}{b.b}b-a$$

$$\Rightarrow a''=\frac{2(4-4-9)}{16+4+9}(4,-2,3)-(1,2,-3)$$

$$\Rightarrow a''=\frac{-18}{29}(4,-2,3)-(1,2,-3)=(\frac{-101}{29},\frac{-22}{29},\frac{33}{29})$$

۶ـ گزینهٔ (۲) درست است : زیرا داریم :

$$a\times b=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&2\\-2&1&2\end{vmatrix}=-2i-6j+k$$

۷ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا پارامترهای هادی خط D، ($r=0$ و $q=2$ و $p=1$) است. بنابراین معادلهٔ خط خواسته شده به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}\\ z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{y+1}{2}\\ z=2\end{cases}$$

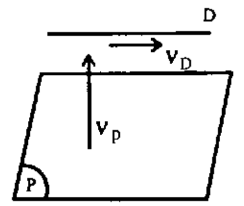
۸ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا داریم :

$$A\in D\begin{vmatrix}x=1\\ y=1\\ z=3\end{vmatrix}\quad M\begin{vmatrix}0\\ 1\\ 2\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{vmatrix}$$

$$V_D=(1,2,-2),\ \vec{AM}\wedge\vec{V}_D=(2,-3,-2)$$

$$MH=\frac{|\vec{AM}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{4+9+4}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

۹ـ بردار هادی خط $V_D=(2,3,5)$، و بردار نرمال صفحه $V_P=(2,-3,1)$ است. پس اگر زاویهٔ بین خط و صفحه را α بنامیم، داریم :



$$\sin\alpha=\frac{V_D.V_P}{|\vec{V_D}||\vec{V_P}|}=\frac{4-9+5}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+9+1}}$$

$\sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$ خط موازی صفحه است.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۱۰ـ گزینهٔ (۴) درست است ؛ زیرا داریم :

$$x=t-1 \text{ و } x=2\Rightarrow t-1=2\Rightarrow t=3$$
$$\Rightarrow A=(2,6,-5)$$
$$V_D=(1,1,-2)=V_P$$
$$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 1(x-2)+1(y-6)-2(z+5)=0$$
$$\Rightarrow x+y-2z-18=0$$
$$\Rightarrow x+y-2z=18$$

پاسخ تشریحی پرسشهای دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

$$x^2-7x+6=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=6\end{cases}$$

اگر $1\le x<6\Rightarrow -x^2+7x-6=-x^2+7x-6\Rightarrow 0=0$

درنتیجه کلیه xهای عدد صحیح که در بازه $[1,6)$ قرار دارد جواب مسأله است.

اگر $\begin{cases}x<1\\ \text{یا}\\ x\ge 6\end{cases}\Rightarrow x^2-7x+6=-x^2+7x-6$

$$\Rightarrow x^2-7x+6=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=6\end{cases}$$

پس $x=6$ جواب معادله است، پس جوابها عبارتند از : $\{1,2,3,4,5,6\}$

۲ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

$$a_7: n=7\Rightarrow 7=2k-1\Rightarrow k=4\Rightarrow a_7=4$$
$$a_8: n=8\Rightarrow 8=2k\Rightarrow k=4\Rightarrow a_8=\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow a_7+a_8=4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$$

۳ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

گزینه (۱) بنا بر متن کتاب درسی واگراست و حدّ جمله عمومی گزینه (۲) مساوی $\frac{1}{2}$ است پس واگرا است و حدّ جمله عمومی (۴) برابر ۱ است پس واگرا است. بنابراین گزینه (۳) درست است و امّا دلیل آن :

داریم : $0<\frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$

چون سری با جمله عمومی $\frac{1}{2^n}$ یا $(\frac{1}{2})^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت $(\frac{1}{2})$ است همگرا می‌باشد، بنابراین سری با جمله عمومی $\frac{1}{2^n+n}$ همگرا است.

۴ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$x\to\frac{\pi}{4}^+\Rightarrow tgx\to-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{5}{30+4^{tgx}}=\frac{5}{30+4^{-\infty}}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

۵ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$0<a<b<c\Rightarrow\begin{cases}a^n+b^n+c^n\sim c^n\\ n\to+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(4e)^n+(8e)^n}{(3e)^n+(10e)^n}\sim\lim\frac{(8e)^n}{(10e)^n}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{8}{10})^n\to 0$$

۶ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$\Rightarrow 0<\cot gx\le 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\\ \text{یا}\\ \frac{5\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

۷ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا :

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3).f(h)-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=3$$

۸ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$f(x)=|x-4|\sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{|x-4|\sqrt{x-1}}{x-4}$$

$$x\to 4^+\Rightarrow\lim\frac{(x-4)\sqrt{x-1}}{x-4}=\sqrt{3}=f'_+(4)$$

$$x\to 4^-\Rightarrow\lim\frac{-(x-4)\sqrt{x-1}}{x-4}=-\sqrt{3}=f'_-(4)$$

۹ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا :

$$V=x^3$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر حجم}=\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{V(2.2)-V(2)}{0.2}=\frac{10.648-8}{0.2}=\frac{2.648}{0.2}=13.24$$

۱۰ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا :

$$C'(x)=0.4x+4$$
$$C'(500)=0.4(500)+4=204 \text{ تومان}$$

پس هزینه (۵۰۱) امین قوطی رنگ (۲۰۴) تومان است.

حل تشریحی پرسشهای دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}+\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}}(x+1)$$

$$=\frac{6(x+1)}{5x^{\frac{4}{5}}}=\frac{6(x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$\Rightarrow x=0\ ,\ x=-1$ (نقاط بحرانی)

چون $x=0$ عضو دامنه تابع هست پس نقاط بحرانی $\{0,-1\}$ است.

۲ـ گزینه (۳) درست است ؛ زیرا بنا بر تعریف اکسترمم نسبی، نقاط B و C اکسترمم نسبی و بنا به تعریف اکسترمم مطلق نقطه A ماکزیمم مطلق است. چون طول نقطه D عضو دامنه نیست پس نقطه D نمی‌تواند می‌نیمم مطلق باشد. بنابراین گزینه (۳) درست است.

۳ـ گزینه (۳) درست است ؛ زیرا بنا بر نتایج تعریف اکسترمم نسبی در کتاب درسی برقرار است.

۴ـ گزینه (۲) درست است ؛ زیرا ریشه‌های ساده داخل رادیکال تابع به معادله $f(x)=\sqrt[2n+1]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}$ طولهای نقاط عطف است پس $x^3-3x=0$ درنتیجه $x=0,\pm\sqrt{3}$ طولهای نقاط عطف است و $f'(x)=\frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}$ ، $3x^2-3=0$ ، آنگاه $x=\pm 1$ ، ریشه‌های ساده $f'(x)=0$ است که طولهای نقاط اکسترمم نسبی تابع است. پس منحنی این تابع سه نقطه عطف و دو اکسترمم دارد.

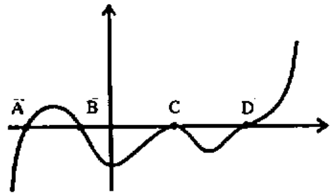
۵ـ گزینه (۲) بنا به متن کتاب درسی درست است.

۶ـ گزینه (۴) درست است ؛ زیرا :

$$\lim_{x\to b}\frac{\cos x+\cos(x-b)}{-\sin x}=\frac{\cos b+1}{-\sin b} \text{ حد : هوپیتال}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{b}{2}}{-2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}=-\cot g\frac{b}{2}$$

۷ـ گزینه (۳) درست است ؛ زیرا منحنی این تابع محور طولها را در سه نقطه به طولهای a,b,d قطع می‌کند، ضمناً به علت وجود جمله $(x-c)^2$ ، منحنی در نقطه $x=c$ بر محور xها مماس است و چون معادله منحنی دارای جمله $(x-d)^3$ است $x=d$ نقطه عطف منحنی تابع است به نمودار توجه کنید. منحنی دو ماکزیمم و دو می‌نیمم دارد. (نمودار با استفاده از قضیه مقدار میانگین قابل درک است.)



۸ـ گزینه (۲) درست است : زیرا این انتگرال به روش جزء به جزء حل می‌شود.

$\int Arctg\, x\, dx$

$u = Arctg\, x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

داریم : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int Arctg\, x\,dx = x Arctg\, x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x Arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$

$= x Arctg\, x - \frac{1}{2} Ln(1+x^2) + C$

۹ـ گزینه (۱) درست است : زیرا این انتگرال به روش تغیر متغیر حل می‌شود.

$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

فرض می‌شود

$x = tg\,\alpha \Rightarrow dx = (1+tg^2\alpha)d\alpha \quad (-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow I = \int \frac{(1+tg^2\alpha)d\alpha}{tg^2\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\times\frac{1}{\cos\alpha}}$

$= \int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin^2\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha}+C$

$= -\frac{1}{\sin(Arctg\, x)}+C$

۱۰ـ گزینه (۳) درست است : زیرا :

$\int\frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \int\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = tg\, x - \frac{1}{\cos x}+C$

پاسخ پرسشهای ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی (رشتهٔ تجربی)

۱ـ (ب)	۹ـ (ج)
۲ـ (آ)	۱۰ـ (ج)
۳ـ (ب)	۱۱ـ (آ)
۴ـ (ج)	۱۲ـ (ج)
۵ـ (آ)	۱۳ـ (آ)
۶ـ (ج)	۱۴ـ (ب)
۷ـ (آ)	۱۵ـ (ج)
۸ـ (ب)	

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی عمومی ۲

۱ـ گزینه (۱) صحیح است : زیرا :

$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{e^x - 3x^2}{e^y - 2y} \Rightarrow m_A = -\frac{e-3}{1} = 3-e$

$y - y_A = m_A(x-x_A) \Rightarrow y = (3-e)(x-1)$

$y = 3x - ex - 3 + e \qquad y+ex = 3x+e-3$

۲ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$f(x)+g(x) = \log(\sqrt{4x^2+5}-2x)$

$+\log(\sqrt{4x^2+5}+2x)$

$= \log(\sqrt{4x^2+5}-2x)(\sqrt{4x^2+5}+2x)$

$= \log(4x^2+5-4x^2)$

$\Rightarrow f(x)+g(x) = \log 5 \Rightarrow f'(x)+g'(x)=0$

$\Rightarrow f'(x) = -g'(x)$

۳ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا :

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \Delta V = 4\pi r^2\Delta r$

$\Rightarrow \Delta V = 4\pi(10)^2(\pm 0/01) = \pm 4\pi$

خطای ماکزیمم حجم $= 4\pi - (-4\pi) = 8\pi$

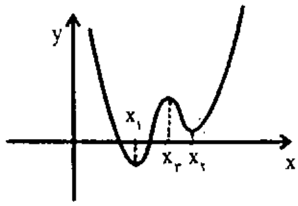
$S = 4\pi r^2 \Rightarrow \Delta S = 8\pi r\Delta r = 8\pi(10)(\pm 0/01) = \pm 0/8\pi$

خطای ماکزیمم سطح $= 0/8\pi - (-0/8\pi) = 1/6\pi$

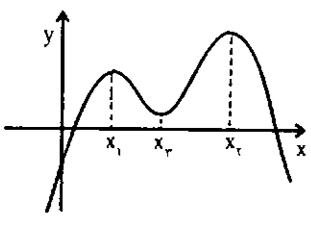
۴ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$f''(x_1)f''(x_2)>0 \Rightarrow$ (۱) $f''(x_1)>0\ ,\ f''(x_2)>0$ ، (۲) $f''(x_1)<0\ ,\ f''(x_2)<0$

در حالت (۱) چون x_1 و x_2 نقاط بحرانی تابع f بوده، بنابر آزمون مشتق دوم x_1 و x_2 هر دو نقاط مینیمم نسبی تابع f هستند، بنابراین تابع f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.



درحالت (۲) چون x_1 و x_2 نقاط بحرانی تابع f بوده، بنابر آزمون مشتق دوم x_1 و x_2 هر دو نقاط ماکزیمم نسبی تابع f هستند، بنابراین تابع f بین x_1 و x_2 نقطه بحرانی دیگری دارد.



۵ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا فرض کنیم نقطه (x,y) جواب مسأله باشد :

$D = d^2 = x^2+y^2\ ,\ y = x^2-1 \Rightarrow D = x^2+(x^2-1)^2$

$D'_x = 2x + 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

بنابر آزمون مشتق دوم چون $f''(\frac{\sqrt{2}}{2})>0$ و $f''(-\frac{\sqrt{2}}{2})>0$ پس نقاطی با طولهای x_2 و x_3 مینیمم نسبی تابع هستند. یعنی نقاطی که روی منحنی واقع باشند و کمترین فاصله را تا مبدأ مختصات داشته باشند، عبارتند از :

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$d^2 = x^2+y^2 \Rightarrow d^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2 \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۶ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا برای یافتن مجانب افقی کافی است ضابطه منحنی بالا را نسبت به x مرتب کنیم، سپس با تقسیم دو طرف برابری بر بزرگترین توان x و حدگیری وقتی $x \to \pm\infty$ ، مجانب افقی را بیابیم :

$3x^3 - 3x^2 + 2x^2y + 2xy + x^2y^3 - y^3 = 0$

$\Rightarrow 3x^3 + (-3+2y+y^3)x^2 + 2xy - y^3 = 0$

$3 + \frac{-3+2y+y^3}{x} + \frac{2y}{x^2} - \frac{y^3}{x^3} = 0$

با حدگیری از دو طرف برابری وقتی $x \to \pm\infty$ خواهیم داشت :

$3 = 0$

رابطه آخری غیرممکن است، بنابراین وقتی $x \to \pm\infty$ مقداری برای y به دست نمی‌آید، پس منحنی مجانب افقی ندارد.

اکنون برای یافتن مجانب قائم، ضابطه منحنی را نسبت به y مرتب می‌کنیم. سپس با تقسیم دو طرف برابری بر بزرگترین توان y وقتی $y \to \pm\infty$ ، مجانب قائم را می‌یابیم :

$y^3(x^2-1)+2xy(x+1)+3x^2(x-1)=0$

$\Rightarrow x^2-1+\frac{2x(x+1)}{y^2}+\frac{3x^2(x-1)}{y^3}=0$

با حدگیری از دو طرف برابری بالا وقتی $y \to \pm\infty$ خواهیم داشت :

$x^2-1=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-1$

درنتیجه تابع فوق دارای دو مجانب قائم است.

۷ـ گزینه (۲) صحیح است : زیرا :

$f(x) = [2x+1] = [2x]+1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-1)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(0)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}}(1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(2)dx$

$= -x\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + C\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + x\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} + 2x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= |\frac{1}{2}-1| + 0 + |\frac{1}{2}-0| + |2-1| = 2$

۸ـ گزینه (۴) صحیح است : زیرا :

$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \pi y^2 dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$

$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\tan^2 x)\tan x\, dx$

$= \pi \cot^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\pi$

۹ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$C_1: x^2+y^2-2x-2y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$

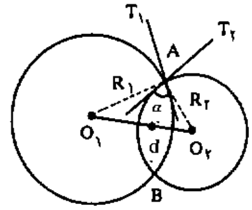
$\Rightarrow O_1(1,1)\ ,\ R_1=\sqrt{2}$

$C_2: x^2+y^2+4x-4y=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=8$

$\Rightarrow O_2(-2,2)\ ,\ R_2=2\sqrt{2}$

طول خط‌المرکزین

$d=O_1O_2=\sqrt{(1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$



$$\cos\alpha=\frac{d^2-(R_1^2+R_2^2)}{2R_1R_2}=\frac{10-(2+8)}{2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=0 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$$

۱۰ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$5x^2+8y^2=40 \Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ بیضی افقی

$C(0,0)\ ,\ a^2=8 \Rightarrow a=2\sqrt{2}, b^2=5 \Rightarrow b=\sqrt{5}=a'$

$c^2=a^2-b^2=8-5=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}=b'$

$C'(0,0)$ بیضی قائم است $\Rightarrow \frac{y^2}{a'^2}+\frac{x^2}{b'^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{3}=1$

$\Rightarrow 5x^2+3y^2=15$

پاسخ تشریحی پرسشهای ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی

۱ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$\begin{cases}x+a\geq y\\ y=z\end{cases} \Rightarrow x+a\geq z$$

$$\begin{cases}x+a\geq z\\ z>u+a\end{cases} \Rightarrow x+a>u+a \Rightarrow x>u$$

۲ـ گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$S=1+2+3+\cdots+n$

$S'=2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)$

$\Rightarrow S'=2S \Rightarrow \frac{S}{S'}=\frac{1}{2}$

۳ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$an=\frac{4^{3n}}{4}=4^{3n-1}=(2^2)^{3n-1}=2^{6n-2}$

$2^{6n-2}=2^{76} \Rightarrow 6n-2=76 \Rightarrow 6n=78 \Rightarrow n=13$

۴ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$\log_2(\log_3(\log x))=0 \Rightarrow \log_2(\log_3(\log x))=\log_2^1$

$\Rightarrow \log_3(\log x)=1=\log_3^3 \Rightarrow \log x=3 \Rightarrow x=10^3=1000$

۵ـ گزینه (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$M=\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} \Rightarrow E=E_0\times10^{\frac{3M}{2}}$.

$E_0=10^{4/4}$ (ژول) ، $M=7/2$ ریشتر

$E=10^{4/4}\times10^{\frac{3(7/2)}{2}}=10^{4/4}\times10^{10/8}=10^{15/2}$ (ژول)

۶ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$A_t=A_0(1+r)^t \Rightarrow 20000=2000(1+0/02)^t$

$\Rightarrow 10=(1/02)^t$

$\Rightarrow t=\log_{1/02}^{10}=\frac{\log10}{\log1/02}=\frac{1}{\log1/02}$

۷ـ گزینه (۳) صحیح است : زیرا اگر در روز x واحد عروسک تولیدکند و هرکدام از آنها را ۲۰۰ تومان بفروشد، معادله درآمد آن به‌صورت $R(x)=200x$ می‌باشد :

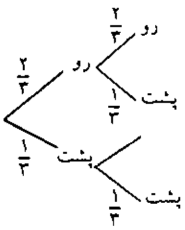
سود = درآمد − هزینه $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

$P(x)=200x-x^2-40x-1000=-x^2+160x-1000$

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-160}{-2}=80$ ماکزیمم

۸ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا اگر احتمال آمدن «پشت» را x درنظر بگیریم، احتمال آمدن «رو»، 2x می‌باشد :

$x+2x=1 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$



چون پیشامد اتفاق افتادن هر دوبار «رو» مستقل از هم می‌باشند :

$P=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

۹ـ گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

$A'\cap B'=(A\cup B)' \Rightarrow P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$

$=1-P(A\cup B)$

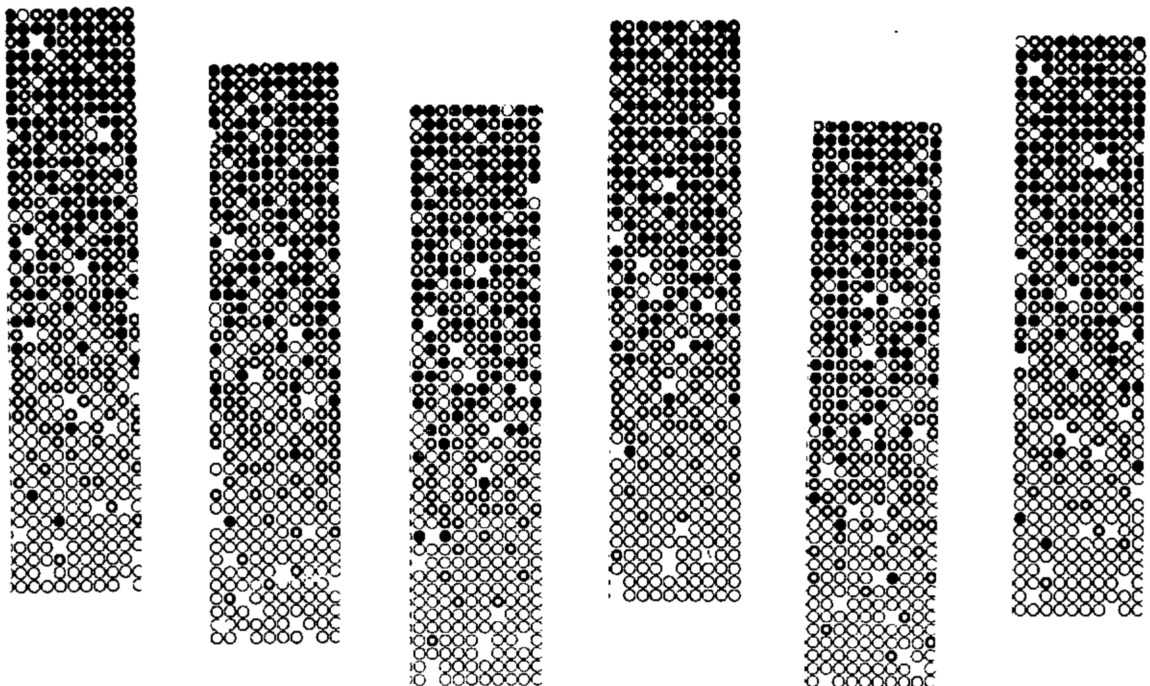
$\Rightarrow P(A'\cap B')=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

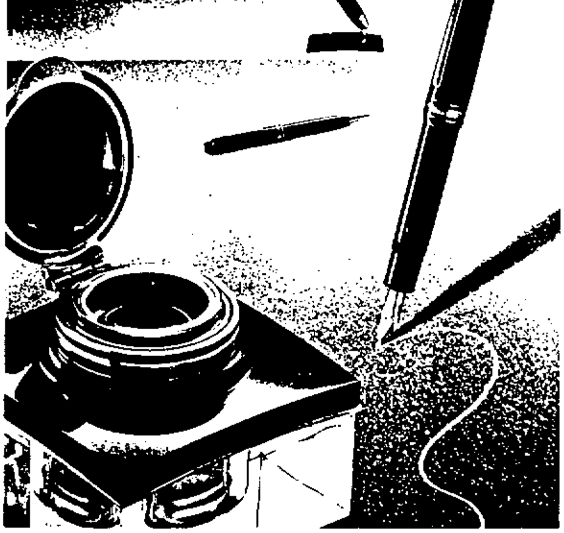
۱۰ـ گزینه (۱) صحیح است ؛ زیرا :

جمله kام $t_k=\binom{n}{k-1}(2x^3)^{n-(k-1)}(y^2)^{k-1}$

$t_6=\binom{7}{5}(2x^3)^{7-5}(y^2)^5$

$=\frac{7!}{5!\times2!}(2x^3)^2(y^2)^5=21(4x^6)(y^{10})=84x^6y^{10}$





جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ (۱)

ساده‌ترین راه حل این مسأله، استفاده از این حقیقت است که نسبت فاصله‌های پیموده شده توسط پیک و ارتش در یک زمان، برابر نسبت سرعتهای آنهاست.

نمودار زیر، مکانهای نسبی پیک و ارتش را در آغاز، هنگامی که پیام تحویل داده شده، و زمانی که پیک به عقب ارتش بازگشته است نشان می‌دهد.

زمانی که پیک می‌رسد، جلو ارتش x کیلومتر، و پیک $۱۰۰ + x$ کیلومتر راه رفته است. در زمانی که ارتش، با تکمیل مارش ۱۰۰ کیلومتری خود، $۱۰۰ - x$ کیلومتر حرکت می‌کند، پیک x کیلومتر به عقب بازمی‌گردد. به این ترتیب، پیک مجموعاً $۱۰۰ + ۲x$ کیلومتر حرکت می‌کند.

از آنجا که نسبت سرعتهای آنها ثابت است:

$$x : ۱۰۰ + x :: ۱۰۰ - x : x$$

که می‌شود

$$x^{۲} = ۵۰۰۰$$

$$x = \sqrt{۵۰۰۰}$$

$$x = ۷۰/۷۱$$

بنابراین، کل مسافتی که پیک پیموده عبارت است از:

$$۱۰۰ + ۲(۷۰/۷۱) = ۲۴۱/۴۲$$ کیلومتر

پاسخ (۲)

مسافتی را که مهرداد پیموده است L می‌نامیم، چون هر سه نفر همزمان به مقصد رسیده‌اند. پس مهرداد و کیوان زمانی را که پیاده طی کرده‌اند و مسافتی را که هر یک پیموده‌اند مساوی است. زمانی را که کیوان پیاده طی کرده است $\frac{L}{۶}$ ساعت است. در این مدت علی $۲L - ۸$ کیلومتر راه را برای پیدا کردن مهرداد پیموده است (یعنی طول مسافت L که به وسیله مهرداد پیموده شده است و L فاصله‌ای که به وسیله کیوان طی شده است).

همچنین علی $L - ۸$ کیلومتر را با مهرداد تا شهر پیموده است که جمعاً $۳L - ۱۶$ کیلومتر می‌شود. بنابراین علی $\frac{۱۶ - ۳L}{۳۰}$ ساعت راه رفته است و مهرداد و کیوان نیز همین قدر ساعت راهپیمایی کرده‌اند پس می‌توان نوشت:

$$\frac{L}{۶} = \frac{۱۶ - ۳L}{۳۰}$$

که از آنجا $L = ۲\,km$ و مجموع زمان مسافرت $\frac{L}{۶} + \frac{۱۶ - ۳L}{۳۰}$ است که اگر به جای L مقدارش را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{۶} + \frac{۱۶ - ۶}{۳۰} = \frac{۲}{۳}$$ ساعت = ۴۰ دقیقه

پاسخ (۳)

حجم شیر، آب و روغن به نسبت ۱، ۲ و ۴ است که مجموع این نسبتها ۷=۴+۲+۱ می‌باشد، بنابراین حجم مایعات ریخته شده در ظروف، مضرب ۷ می‌باشد، حال آنکه مجموع ظرفیت (گنجایش) ظرفها برابر ۱۲۹ است که مضربی از ۷ با باقیماندهٔ ۳ است (۱۲۹=۱۸×۷+۳). پس گنجایش ظرف خالی، مضربی از ۷ به اضافهٔ ۳ لیتر می‌باشد، بنابراین ظرف خالی یا ۲۴ لیتری یا ۳۸ لیتری است. اگر ظرف ۳۸ لیتری خالی باشد، مجموع حجم ظرفهای پر شده ۹۱ لیتر خواهد بود که در این صورت حجم شیر ۱۳ لیتر خواهد بود و این ممکن نیست (زیرا ظرف ۱۳ لیتری نداریم). بنابراین ظرف ۲۴ لیتری خالی است که در این صورت تنها جواب ممکن عبارت است از:

- شیر: در ظرف ۱۵ لیتری؛
- آب: در ظرفهای ۱، ۲، ۴، ۶ و ۱۲ لیتری؛
- روغن: در ظرفهای ۲۲ و ۳۸ لیتری.

پاسخ (۴)

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + (۸ \times ۹) = ۱۰۰$$

Borhan **In the name of God**
Vol. 7 No. 4
Serial numbers: 24 Spring 1998

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publicatios.
Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning high school education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 38. Sepand Street, Sepahbod ghrany Ave, Tehran, Iran, Post code: 14155/1949

Contents:

بوزجانی

ابوالوفا محمدبن یحیی بن اسماعیل بوزجانی ریاضیدان و منجم مسلمان ایرانی (۳۲۸ ـ ۳۸۸)یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگترین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی بوده است. بنا به گفتهٔ ابن ندیم وی در روز چهارشنبه اول ماه رمضان سال ۳۲۸ در شهر بوزجان (تربت جام فعلی) تولد یافت. علم عدد و هندسه را نزد عموی خود ابوعمر و مغازلی و دایی خود ابوعبدالله محمدبن عَنْبَسه آموخت. در سال ۳۴۸ یعنی در سن بیست سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست.

بوزجانی بدون تردید یکی از مشهورترین منجمان و مهندسان زمان خود بوده است و این مطلب از قضاوتی که معاصران وی و مورخان بعدی دربارهٔ او کرده‌اند کاملاً پیداست.

بوزجانی گاهی در کارهای علمی با معاصر خود، بیرونی به وسیلهٔ مکاتبه تشریک مساعی می‌کرده است. بیرونی در کتاب تحدید نهایات الاماکن نوشته است که در سال ۳۸۷ هنگامی که او در خوارزم و بوزجانی در بغداد بوده کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده و نتیجه را مقایسه کرده‌اند.

ابوعلی حبوبی که معاصر بوزجانی بوده و ظاهراً در حدود خوارزم می‌زیسته نیز با بوزجانی مکاتبه داشته و دستوری برای محاسبهٔ مساحت مثلث از او خواسته بوده و بوزجانی جواب او را در رسالهٔ مختصری داده بوده است.

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی: مثلثات

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی بیشتر به واسطهٔ سهم بسزایی است که وی در پیشرفت علم مثلثات دارد. کتاب اعمال هندسی وی نیز بدیعترین و جالبترین اثری است که در دورهٔ اسلامی دربارهٔ هندسهٔ عملی پدید آمده است.

بخش مهمی از کتاب مجسطی بوزجانی را می توان کتاب جامعی دربارهٔ علم مثلثات دانست که در آن دستورهای مهم مثلثات چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی ثابت شده و در مسایل متعدد و متنوع مورد استعمال قرار گرفته است.

در مثلث مسطح، بوزجانی صحَت روابط زیر را ثابت کرده و آنها را به کار بسته است:

$$\frac{\text{وتر}\frac{\alpha}{۲}}{R} = \frac{۲R - \text{وتر}(۱۸۰ - \alpha)}{\text{وتر}\frac{\alpha}{۲}} \qquad (۱)$$

در این دستور R شعاع دایرهٔ محیطی و α بر حسب درجه است. این دستور معادل است با دستور کنونی:

$$۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲} = ۱ - \cos\alpha$$

$$\frac{\text{وتر}(۱۸۰ - \frac{\alpha}{۲})}{R} = \frac{\text{وتر}\,\alpha}{\text{وتر}\frac{\alpha}{۲}} \qquad (۲)$$

این دستور معادل است با دستور کنونی:

$$\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$$

برای محاسبهٔ جیب مجموع و تفاضل دو قوس، دو استدلال هندسی بیان کرده که یکی از آنها به دستور پیچیدهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\sin(a \pm b) = \sqrt{\sin^۲ a - \sin^۲ a\sin^۲ b} \pm \sqrt{\sin^۲ b - \sin^۲ a\sin^۲ b}$$

و نتیجهٔ استدلال دومی چنین است:

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$$

در مثلث کروی غیر قائم‌الزاویه نیز بوزجانی رابطهٔ زیر را که در مثلث مسطح زیر صادق است به دست آورده و مورد استفاده قرار داده است:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad (۳)$$

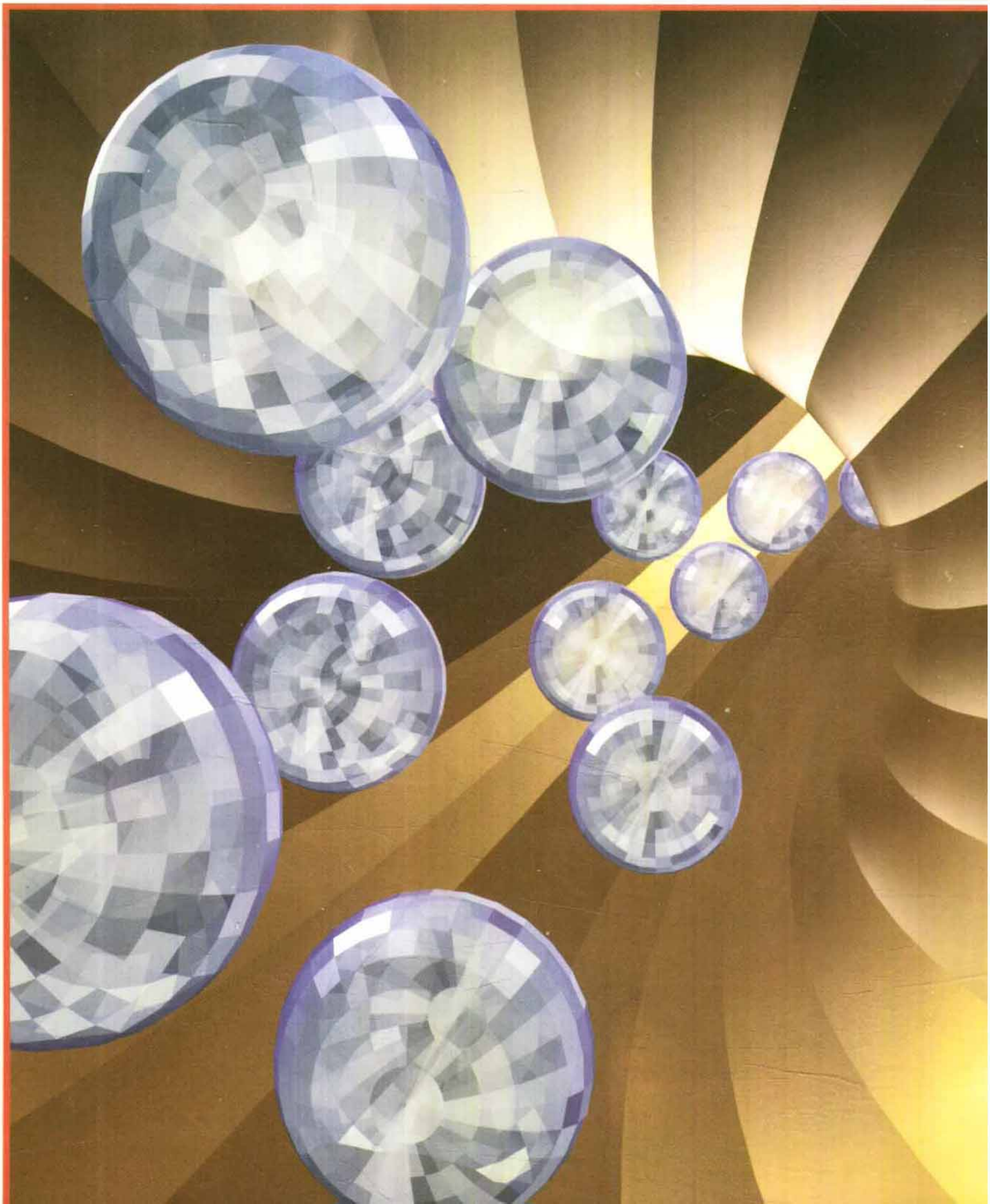
مجلهٔ ریاضی

برهان

۲۵

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شمارهٔ اوّل، تابستان ۱۳۷۷، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هشتم، تابستان ۱۳۷۷، شمارهٔ اول.

تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۶۵۱/۱

بدون اغراق باید گفت که جوانان ایران همیشه از بهترین، سالمترین و مسؤولیت‌پذیرترین جوانان جهان بوده‌اند. بر این ویژگیها باید پیشتاز بودن آنان را نیز افزود. حضور جوانان ما در هشت سال دفاع مقدس، بارزترین مصداق این مدعاست. و نیز نقش جوانان متعهد و متخصص در سالهای سازندگی، که بر کسی پوشیده نیست.

سرافرازی جوانان ایران زمین در عرصه‌های بین‌المللی، نه تنها در کسب عناوین ورزشی، بلکه در به دست آوردن عناوین بالای علمی، نشان از اقتدار جوانان ایرانی است.

وقتی در خبرها می‌خوانیم که جوانان ایران، مقام نخست المپیاد بین‌المللی ریاضی را در سطح جهان کسب کرده‌اند، ممکن است برای بسیاری هضم این موضوع مشکل باشد و این سؤال در اذهان به وجود آید که آیا می‌شود در بین ده‌ها کشور مقتدر از نظر علمی، جوانان کشور ایران به چنین مقامی دست یابند؟

در جواب باید گفت بله. مگر اقتدار علمی ـ فرهنگی ایرانیان مسلمان را در دورهٔ درخشان تمدّن اسلامی فراموش کرده‌اید.

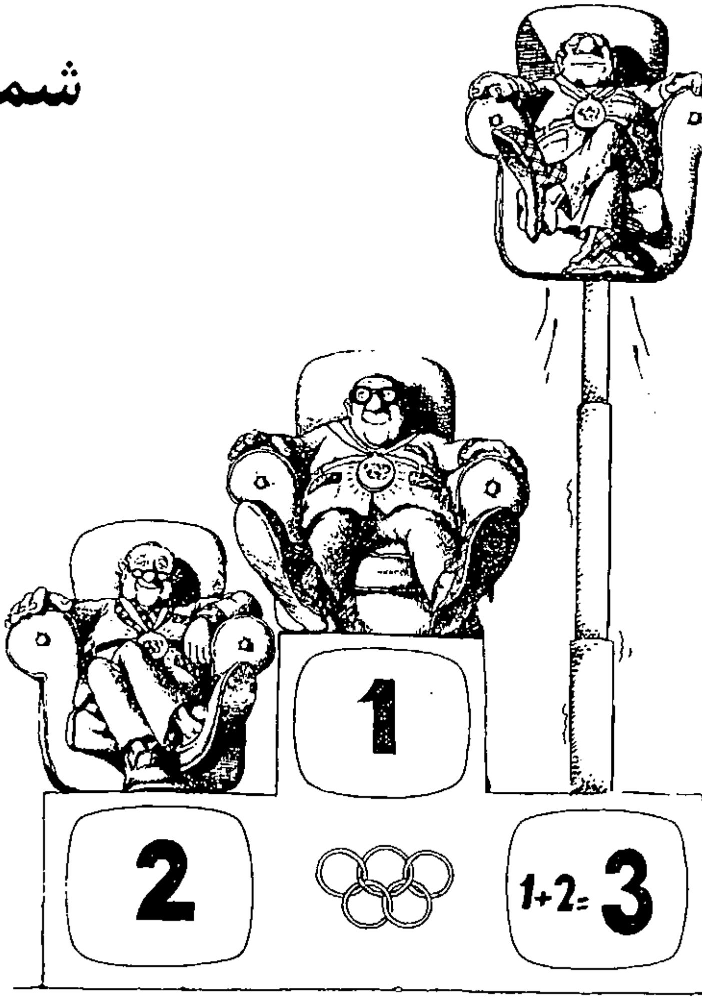
فقط باید کمی خود را باور کنیم. خود را باور کنیم تا بتوانیم استعدادهای نهفته و سرشار از توانمندی را در جوانان ایران شکوفا کنیم.

تیمهای مختلف شرکت‌کننده در المپیادهای جهانی عصارهٔ هزاران هزار جوانی است، که در مهد ایران اسلامی و در سایهٔ انقلاب شکوهمند اسلامی پرورش یافته‌اند. لذا باید جوانان بااستعداد و کوشا را دوست بداریم و در آغاز سال تحصیلی جدید به جوانانمان بیاموزیم، که با اتکای به قدرت لایزال الهی و با همّت و تلاش و توانمندی می‌توان مرزهای علم و دانش را گسترش داد و بر قله‌های رفیع پیروزیهای دیگر قدبرافراشت و نیز بر دولتمردان و اولیای جوانان است، که با هموار ساختن مشکلات جوانان و تشویق و حمایت آنان، موجبات تعالی جوانان را فراهم سازند.

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفّق باشید (۲۵)

● پرویز شهریاری



§.۲. روش برهان خلف

«برهان خلف» یکی از روشهای جالب برای اثبات قضیه‌ها در جبر و هندسه است. در برهان خلف، به جای این که درستی یک گزاره را به طور مستقیم ثابت کنیم، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم با نپذیرفتن درستی گزاره، به نتیجه‌ای نامعقول می‌رسیم. به زبان مثال، برای اثبات برابری دو عدد a و b، ثابت می‌کنیم: a از b بزرگتر یا کوچکتر نیست. اصطلاح برهان خلف، ترجمه‌ای از واژهٔ لاتینی Reduction ad absurdum، به معنای «اثبات از جهت مخالف» یا «اثبات از راه رد کردن حکم مخالف» است.

تا آنجا که می‌دانیم، «اقلیدس» نخستین کسی بود که از «برهان خلف» در کتاب مشهور خود به نام «مقدمات» استفاده کرد. او آن را «معمّای برهان خلف» می‌نامید و دربارهٔ آن می‌گفت: «گزارهٔ Aرا می‌توان ثابت شده دانست، وقتی که آن را نادرست بدانیم، باز هم درستی A را نتیجه می‌دهد.» برای بیان اقلیدس دربارهٔ برهان خلف، مثال ساده‌ای می‌آوریم.

مثال ۱: می‌دانیم هریک از عددهای طبیعی a، b، c و d بر عدد طبیعی ab ـ cd بخش‌پذیر است. ثابت کنید:

$$ab - cd = ۱$$

گزاره را نادرست می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$ab - cd = m \neq ۱$$

پس، با توجه به فرض مسأله، هریک از عددهای a، b، c و d بر m بخش‌پذیرند. وقتی دو عدد a و b بر m بخش‌پذیر باشند، آن وقت ab بر $m^۲$ بخش‌پذیر می‌شود؛ به همین ترتیب، cd هم بر $m^۲$ بخش‌پذیر خواهد بود، پس تفاضل آنها، یعنی ab ـ cd، یعنی m هم باید بر $m^۲$ بخش‌پذیر باشد و این ممکن نیست؛ مگر m برابر ۱ یا ۱- باشد. ولی بنا بر صورت مسأله، ab ـ cd، یعنی m عددی طبیعی است. به این ترتیب، با فرض $ab - cd \neq ۱$، نتیجه گرفتیم: $ab - cd = ۱$.

در طول تاریخ، تعریفهای دیگری هم از برهان خلف شده است: «اگر B درست باشد و درضمن، از درستی A، نادرستی B نتیجه شود، به معنای نادرستی A است.»

مثال ۲: عدّه‌ای از دانش‌آموزان یک دبیرستان، در یک مسابقهٔ شطرنج انفرادی شرکت کردند. هر دانش‌آموز با هریک از دانش‌آموزان دیگر شرکت کننده، تنها یک بار بازی کرد. در هر بازی به برنده، یک امتیاز مثبت و به بازنده یک امتیاز منفی دادند. اگر بازی برنده نداشت، یعنی به تساوی می‌انجامید، امتیازی داده نمی‌شد. در این مسابقه، یکی از شرکت‌کنندگان ۱۳ امتیاز و دیگری ۸ امتیاز آورد. ثابت کنید، در بین بازیهایی که انجام شده است، دست‌کم یک بازی، به تساوی رسیده است.

درستی این گزاره روشن است: «هیچ عدد فردی، زوج و هیچ عدد زوجی، فرد نیست.» (گزارهٔ B)

اکنون فرض می‌کنیم: «در این مسابقه شطرنج، تساوی وجود نداشته است.» (گزاره A)

ببینیم از گزارهٔ A چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟ هریک از شرکت‌کنندگان در مسابقه، در هر بازی، یکی از دو امتیاز ۱+ یا ۱− را گرفته است. اگر تعداد دانش‌آموزان، عددی فرد باشد، هر دانش‌آموز، به تعداد زوج، امتیاز ۱+ یا ۱− گرفته است. (چون دانش‌آموز با خودش بازی نمی‌کند و تعداد بقیهٔ دانش‌آموزان، عددی زوج است) پس مجموع امتیازهای هریک از دانش‌آموزان، باید عددی زوج باشد. به همین ترتیب، اگر تعداد کل دانش‌آموزان شرکت کننده، عددی زوج باشد، جمع امتیازهای هر دانش‌آموز، عددی فرد می‌شود (به شرطی که در مسابقه، تساوی نداشته باشیم). در صورت مسأله گفته شده است، یکی از دانش‌آموزان ۱۳ امتیاز آورده است، بنابراین اگر همهٔ بازیها، همراه با برد و باخت باشد، باید تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه، عددی زوج باشد؛ ولی چون دانش‌آموز دیگری ۸ امتیاز آورده است، باید تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده، عددی فرد باشد، یعنی باید (تعداد دانش‌آموزان) هم زوج و هم فرد باشد. با فرض درستی A، به نتیجه نادرستی B رسیدیم. پس A نادرست است یعنی در مسابقه تساوی وجود داشته است.

و تعریفی دیگر، برای «برهان خلف»:

«اگر گزارهٔ A را نپذیریم و به تناقض برخورد کنیم، به این معناست که باید A را بپذیریم.»

منظور از پدید آمدن تناقض، این است که: نتیجهٔ حاصل، حقیقت روشنی را نقض کند (مثلاً به دست آید ۴=۳) و یا منجر به نقض فرض مسأله بشود.

مثال ۳: a، b و c عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید، این نابرابری همیشه برقرار است:

$$\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt[4]{c}}} \ge \sqrt[32]{abc}$$

فرض می‌کنیم، این نابرابری درست نباشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt[4]{c}}} < \sqrt[32]{abc}$$

در این صورت، به‌طور طبیعی، هر بخشی از سمت چپ نابرابری، از سمت راست آن کوچکتر می‌شود:

$$\sqrt{a} < \sqrt[32]{abc} \ , \ \sqrt[6]{b} < \sqrt[32]{abc} \ , \ \sqrt[24]{c} < \sqrt[32]{abc}$$

این سه‌نابرابری را می‌توان این‌طور نوشت (توجه کنیم در هریک از نابرابریها، هردوطرف مقدارهایی مثبتند):

$$a^{16} < abc \ , \ b^{16} < (abc)^3 \ , \ c^{16} < (abc)^{12}$$

از ضرب این نابرابریها در یکدیگر به دست می‌آید:

$$a^{16}b^{16}c^{16} < (abc)^{16} \Rightarrow abc < abc$$

و این، یک حقیقت روشن را نقض می‌کند.

مثال ۴: یک تکه سیم به طول ۲ متر را به پنج بخش طوری تقسیم کرده‌ایم که، کمترین مقدار طول هر بخش برابر ۱۷ سانتیمتر باشد، ثابت کنید می‌توان از این پنج بخش، سه بخش را انتخاب کرد که بشود با آنها یک مثلث ساخت.

پنج بخش سیم را، با طولهای x، y، z، t و s می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$x \le y \le z \le t \le s$$

اگر با هیچ سه بخشی نتوان یک مثلث ساخت، باید داشته باشیم:

$$z \ge x+y \ , \ t \ge y+z \ , \ s \ge z+t$$

نابرابری $t \le y+z$ را با توجه به نابرابری $y \le x+y$، می‌توان چنین نوشت:

$$t \ge y+(x+y) = x+2y$$

و برای نابرابری $s \le z+t$:

$$s \ge z+t \ge (x+y)+(x+2y) = 2x+3y$$

اکنون سه نابرابری داریم:

$$\begin{cases} z \ge x+y \\ t \ge x+2y \\ s \ge 2x+3y \end{cases}$$

این سه نابرابری را با هم جمع و به دو طرف نابرابری حاصل،

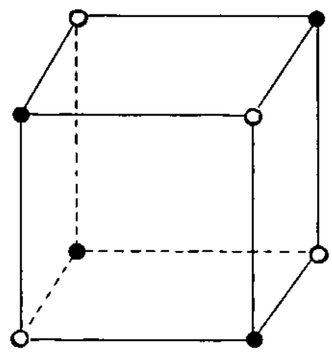
$x+y$ را اضافه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$x+y+z+t+s \geq ۵x+۷y$$

و چون طول هر بخش سیم از ۱۷ سانتیمتر کمتر نیست، پس:

$$x+y+z+t+s \geq ۵\times ۱۷+۷\times ۱۷=۲۰۴$$

که فرض مسأله را نقض می‌کند (در صورت مسأله گفته‌اند، طول تکّهٔ سیم اصلی ۲ متر (۲۰۰ سانتیمتر) است؛ در حالی که در این‌جا، طول مجموع پنج بخش، نمی‌تواند از ۲۰۴ سانتیمتر کمتر باشد).



(شکل ۱)

مثال ۵: یک هشت ضلعی فضایی (یا یک خط شکستهٔ بسته در فضا) چنان است که ضلعهای غیرمجاور آن یکدیگر را قطع نمی‌کنند (خط شکسته با خودش برخورد ندارد) و درضمن، هشت رأس آن، بر رأسهای یک مکعب منطبقند. ثابت کنید دست‌کم یکی از ضلعهای هشت‌ضلعی، بر یکی از یالهای مکعب قرار دارد.

فرض می‌کنیم این‌طور نباشد و هیچ ضلعی از هشت ضلعی فضایی، روی یالی از مکعب قرار نگیرد. رأسهای مکعب را به رنگهای سیاه و سفید، طوری درمی‌آوریم که هیچ رأسی، با رأس مجاورش، به یک رنگ نباشد (شبیه شکل ۱). هر ضلع هشت ضلعی، برای این که روی یال مکعب نباشد، باید دو رأس با رنگهای مختلف را به هم وصل کرده باشد؛ یعنی روی یکی از قطرهای یک وجه مکعب یا روی یکی از قطرهای خود مکعب قرار گیرد. مکعب دارای شش وجه است و در هر وجه، تنها یکی از قطرها را می‌توان برای ضلع هشت ضلعی درنظر گرفت (زیرا دو قطر هر وجه، یکدیگر را قطع می‌کنند). همچنین از بین چهار قطر مکعب، تنها یکی می‌تواند به عنوان ضلع هشت‌ضلعی انتخاب شود (زیرا قطرهای مکعب یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند).

بنابراین شش‌ضلع هشت ضلعی روی شش وجه (در امتداد یک قطر از هر وجه) و یک ضلع هم روی یکی از قطرهای مکعب قرار می‌گیرد و اگر ضلع هشتم را روی یکی دیگر از قطرهای مکعب یا روی یکی از قطرهای دوم یکی از وجه‌های مکعب انتخاب کنیم، دو ضلع هشت‌ضلعی، یکدیگر را قطع می‌کنند، که مخالف فرض مسأله است.

یادداشت: مسأله، در محدودهٔ آنچه خواسته شده بود، حل شد؛ ولی به این پرسش پاسخ داده نشد که: آیا می‌توان این هشت‌ضلعی را طوری رسم کرد که تنها یکی از ضلعهای آن، بر یک یال مکعب قرار گیرد؟ در این‌باره آزمایش کنید و اگر پاسخ به این پرسش ممکن است، نمونه‌ای از چنین هشت‌ضلعی را پیدا کنید.

به ذکر مثال ادامه می‌دهیم و نمونه‌های دیگری از کاربرد «برهان خلف» را می‌آوریم. ولی پیش از آن، به مناسبت یادداشتی که برای مثال ۵ آوردیم، مثال دیگری هم می‌آوریم تا محدودهٔ کاربرد «برهان خلف» روشنتر شود. در هرحال، باید دقّت کنیم به طور دقیق، چه نتیجه یا نتیجه‌هایی از استدلال ما، که بر پایهٔ برهان خلف انجام گرفته است، به دست می‌آید و چه نتیجه‌هایی به دست نمی‌آید.

مثال ۶: دنبالهٔ نامتناهی (a_k)، که همهٔ جمله‌های آن، عددهایی مثبتند، چنان است که برای هر $k \in N$، داریم:

$$(a_{k+۱}+k)a_k=۱ \qquad (۱)$$

ثابت کنید همهٔ عددهای این دنباله، عددهایی گنگ هستند.

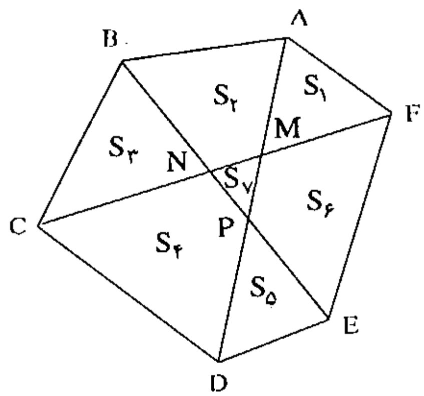
فرض می‌کنیم، یکی از جمله‌های دنباله، عددی گویا و به صورت $a_k=\frac{p}{q}$ باشد، که در آن، p و q را، عددهایی طبیعی گرفته‌ایم. با توجه به برابری (۱) می‌توان مقدار جملهٔ بعدی را به دست آورد:

$$a_{k+۱}=\frac{۱}{a_k}-k=\frac{q}{p}-k=\frac{q-pk}{p}$$

مجموع عددهای صورت و مخرج، در a_k برابر $p+q$ و در $a_{k+۱}$ برابر $p+q-pk$ است؛ یعنی این مجموع، در $a_{k+۱}$ کمتر از آن در a_k است و بنابراین بعد از چندگام، به جایی می‌رسیم که یکی از دو جملهٔ صورت یا مخرج، عددی منفی می‌شود و فرض را که باید همه جمله‌ها مثبت باشند، نقض می‌کند. این تناقض ثابت می‌کند که در این دنباله، جملهٔ گویا وجود ندارد.

توجه کنید ما ثابت کردیم دنباله‌ای که برای آن، دستور (۱) برقرار باشد، نمی‌تواند جمله گویا داشته باشد ؛ ولی ثابت نکردیم چنین دنباله‌ای با جمله‌های گنگ وجود دارد. خودتان در این‌باره بیندیشید. آیا چنین دنباله‌ای وجود دارد؟ و روشن است برای پاسخ مثبت یا منفی به این پرسش، استدلال ریاضی لازم است. البته اگر بتوان یک نمونهٔ عددی برای چنین دنباله‌ای پیدا کرد، کافی است تا حکم کنیم، چنین دنباله‌ای وجود دارد. ولی آیا می‌توانید چنین نمونه‌ای را پیدا کنید؟

مثال ۷: در یک شش‌ضلعی کوژ (محدب) که بریک صفحه قرار دارد، هر یک از سه قطر بزرگتر شش‌ضلعی را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند. ثابت کنید این سه قطر بزرگتر، از یک نقطه می‌گذرند.



(شکل ۲)

فرض می‌کنیم، قطرهای بزرگتر شش‌ضلعی، در یک نقطه به هم نرسیده و از برخورد با یکدیگر، مثلث MNP را به‌وجود آورده باشند (شکل ۲). مساحت بخشهایی از شش‌ضلعی را که به وسیلهٔ این سه قطر پدید آمده‌اند، طبق شکل (۲) نامگذاری می‌کنیم. چون هریک از دو قطر CF و AD، شش‌ضلعی را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کنند، باید داشته باشیم :

$$S_{۱}+S_{۲}+S_{۳}=S_{۴}+S_{۵}+S_{۶}+S_{۷}$$

$$S_{۱}+S_{۵}+S_{۶}=S_{۲}+S_{۳}+S_{۴}+S_{۷}$$

اگر این دو برابری را با هم جمع کنیم و سپس از جمله‌های مساوی، در دوطرف برابری صرف‌نظر کنیم، سرانجام به این برابری می‌رسیم :

$$S_{۱}=S_{۴}+S_{۷}$$

یعنی دو مثلث AMF و CMD ، مساحتهایی برابر دارند و از طرف دیگر :

$$۲S_{AMF}=|AM|.|FM|.\sin\hat{M}\ ;۲S_{CMD}=|CM|.|DM|.\sin\hat{M}$$

بنابراین $|AM|.|FM|=|CM|.|DM|$ ؛ یعنی

$$|AM.FM|>|CN.DP| \qquad (۱)$$

به همین ترتیب، می‌توان دو نابرابری دیگر به دست آورد :

$$|DP|.|EP|>|AM|.|BN| \qquad (۲)$$

$$|BN|.|CN|>|FM|.|EP| \qquad (۳)$$

اگر سه نابرابری (۱)، (۲) و (۳) را در هم ضرب کنیم، پس از حذف عاملهای مساوی از دو طرف نابرابری حاصل به نابرابری ناممکن ۱<۱ می‌رسیم. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

مثال ۸: سه زیر مجموعهٔ جدا از هم A، B و C را از مجموعهٔ عددهای طبیعی جدا کرده‌ایم ؛ به نحوی که هر عدد طبیعی، در یکی و تنها یکی از سه زیر مجموعه باشد، ثابت کنید می‌توان دو عدد طبیعی a و b را از دو زیرمجموعه مختلف انتخاب کرد ؛ به نحوی که مجموع آنها، یعنی $a+b$ عضو زیرمجموعهٔ سوم نباشد.

فرض می‌کنیم چنین نباشد ؛ یعنی مجموع هر دو عضو از دو مجموعهٔ A ، B و C ، عضوی از مجموعهٔ سوم باشد. دو عدد طبیعی پشت سر هم، مثل a و b را درنظر می‌گیریم بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان a را عددی زوج و عضو A و b را عددی فرد و عضو B درنظر گرفت. بنابه فرضی که کرده‌ایم، باید $a+b$ ، عضو C باشد. به همین ترتیب :

$$(a+b)+b=a+۲b\in A;$$

$$a+۳b\in C\ ;\ a+۴b\in A\ ;...;a+۲kb\in A\ ;$$

$$a+(۲k+۱)b\in C\ ;\ (a+b)+a=۲a+b\in B\ ;$$

$$۳a+b\in C\ ;...;$$

$$...۲ka+b\in B\ ;\ (۲k+۱)a+b\in C\ ;...$$

اکنون عدد $ab+a+b$ را درنظر می‌گیریم، a عددی زوج و bعددی فرد است، پس :

$$ab+(a+b)=a+(۲m+۱)b\in C$$

$$ab+(a+b)=(a+۱)b+a=(۲m+۱)b+a\in C$$

$$ab+(a+b)=(b+۱)a+b=۲ka+b\in B$$

عدد $ab+a+b$ هم‌عضو زیرمجموعهٔ C و هم‌عضو زیرمجموعهٔ B درآمد که فرض مسأله را نقض می‌کند، که به معنای درستی حکم مسأله است.

مثال ۹: ثابت کنید نمی‌توان عددهای درست a و b را طوری پیدا کرد که حاصل ضرب دو ریشه از چهار ریشهٔ معادلهٔ

$$x^{4}+ax^{3}+bx^{2}+ax+1=0 \qquad (1)$$

برابر با ۳ باشد.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و p و q را دو ریشه از معادلهٔ (۱) می‌گیریم که حاصل ضربی برابر ۳ داشته باشند. چون $x=0$ ریشه‌ای از معادلهٔ (۱) نیست، بنابراین می‌توان دوطرف معادله را بر x^2 بخش کرد که در نتیجه به این معادله می‌رسیم:

$$(x^{2}+\frac{1}{x^{2}})+a(x+\frac{1}{x})+b=0$$

که با فرض $x+\frac{1}{x}=y$ ، به این معادله درجه دوم می‌رسیم:

$$y^{2}+ay+b-2=0 \qquad (2)$$

عددهای $p+\frac{1}{p}$ و $q+\frac{1}{q}$ ، ریشه‌های این معادله‌اند؛ در ضمن، وقتی و تنها وقتی این دو ریشه برابرند که p و q برابر باشند، زیرا با توجه به شرط $pq=3$ ،داریم:

$$p+\frac{1}{p}=q+\frac{1}{q}\Rightarrow p-q=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow p-q-\frac{p-q}{3}=0\Rightarrow p=q$$

[توجه کنیم اگر شرط $pq=3$ را درنظر نگیریم، آن وقت برابری $p+\frac{1}{p}=q+\frac{1}{q}$ ، در یکی از دو حالت برقرار می‌شود، در حالت $p=q$ و در حالت $pq=1$.]

ابتدا حالت $p\neq q$ را درنظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ ویت (رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریبها)، از معادلهٔ (۲) به دست می‌آید:

$$\begin{cases}p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}=-a\\(p+\frac{1}{p})(q+\frac{1}{q})=b-2\end{cases}$$

با توجه به فرض $pq=3$ ، این دو برابری به این صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases}p+q=-\frac{3a}{4}\\\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=b-\frac{16}{3}\end{cases}$$

که باز هم با توجه به $pq=3$ ، به دست می‌آید:

$$\begin{cases}p^{2}+q^{2}=\frac{9a^{2}}{16}-6\\p^{2}+q^{2}=3b-16\end{cases}$$

با برابر قراردادن سمت راست برابریها، به برابری $48b-9a^{2}=160$ می‌رسیم که برای عددهای درست a و b ممکن نیست؛ زیرا سمت چپ برابری بر ۳ بخش‌پذیر و سمت راست آن بر ۳ بخش‌ناپذیر است.

در حالت $p=q$ ، دو ریشه برابر $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ می‌شوند. $\sqrt{3}$ باید در معادلهٔ (۱) صدق کند:

$$9+3a\sqrt{3}+3b+a\sqrt{3}+1=0$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{3}+(3b+10)=0$$

که برای برقراری آن، باید داشته باشیم:

$$a=0\ ,\ \ b=-\frac{10}{3}$$

برای b، عددی درست به دست نمی‌آید.

بنابراین، نمی‌توان برای a و b عددهای درستی پیدا کرد که به ازای آنها، معادلهٔ (۱)، دو ریشه به حاصل‌ضرب ۳ داشته باشد.

مثال ۱۰: آیا می‌توان همهٔ عددهای حقیقی را از بازهٔ [۰،۱] بین دو مجموعهٔ A و B طوری تقسیم کرد که تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعهٔ A، عددی گویا و تفاضل هردو عدد دلخواه از مجموعهٔ B ، عددی گنگ باشد؟

فرض می‌کنیم توانسته باشیم همهٔ عددهای بازهٔ [۰،۱] را به دو مجموعهٔ مورد نظر A و B تقسیم کرده باشیم. در مجموعهٔ B بیش از یک عدد گویا نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ زیرا تفاضل هردو عدد گویا، عددی گویا می‌شود. بنابراین، همهٔ عددهای گویا، به‌جز حداکثر یکی، عضو مجموعهٔ A هستند و در نتیجه، تفاضل هردو عضو آن عددی گویاست. به این ترتیب، همهٔ عددهای گنگ متعلق به بازهٔ [۰،۱] باید عضو مجموعهٔ B باشند؛ ولی در این صورت، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد که تفاضل آنها عددی گویاست؛ مثل $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{2}{5}$ و $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{5}$ ؛یعنی بازهٔ عددی [۰،۱] را نمی‌توان به دو مجموعهٔ مورد نظر فراز کرد.

مثال ۱۱: پاره‌خط های‌راست $a_1, a_2, \ldots, a_{1375}, b_1, \ldots, b_{1375}$ روی یک خط راست واقع هستند. می‌دانیم، هر پاره‌خط راست

a_k با هریک از دو پاره‌خط راست b_{k-1} و b_{k+1}، نقطهٔ مشترکی دارد. به‌جز این، پاره خط راست a_{1375} با پاره‌خط راست b_1، و پاره‌خط راست a_1 با پاره‌خط راست b_{1375}، دارای نقطهٔ مشترک است. ثابت کنید به ازای هر مقدار k، دو پاره‌خط راست a_k و b_k دارای نقطهٔ مشترکند.

فرض می‌کنیم به ازای مقداری از k، a_k و b_k نقطهٔ مشترک نداشته باشند. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، پاره‌خط راست a_1 را در سمت چپ پاره‌خط راست b_1 می‌گیریم؛ چون b_2 با a_1 و a_2 با b_1 نقطهٔ مشترک دارند، بناچار b_2 باید در سمت چپ a_2 باشد. اگر همین استدلال را برای پاره‌خطهای راست بعدی ادامه دهیم، که a_{1375} در سمت چپ b_{1375} و سپس b_1 در سمت چپ a_1 قرار دارد و این نشدنی است که هم a_1 در سمت چپ b_1 و هم b_1 در سمت چپ a_1 قرار گیرد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

مثال ۱۲: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ را عددهایی مثبت به حاصل‌ضرب برابر واحد می‌گیریم. ثابت کنید عدد طبیعی k با شرط $k < n$ وجود دارد؛ به نحوی که به ازای آن، داشته باشیم:

$$u_k(u_{k+1}+1) \ge 2$$

(u_{n+1} را باید برابر u_1 گرفت.)

فرض می‌کنیم، برای هر مقدار $k \le n$ داشته باشیم:

$$u_k(u_{k+1}+1) < 2$$

این نابرابری را برای همهٔ مقدارهای k می‌نویسیم:

$$u_1(u_2+1) < 2$$

$$u_2(u_3+1) < 2$$

......

$$u_n(u_n+1) = u_n(u_1+1) < 0$$

از ضرب همهٔ این نابرابریها در یکدیگر به دست می‌آید:

$$u_1u_2\ldots u_n(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1) < 2^n \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که نابرابری $u+1 \ge 2\sqrt{u}$ برای هر مقدار u برقرار است (چرا؟)، بنابراین:

$$(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1) \ge 2^n\sqrt{u_1u_2\ldots u_n} = 2^n \quad (2)$$

دو نابرابری (۱) و (۲) یکدیگر را نقض می‌کنند و بنابراین فرض ما مبنی بر این نابرابری $u_k(u_{k+1}+1) < 2$ به ازای هر مقدار k برقرار است، فرض نادرستی است که در نتیجه، حکم مسأله ثابت می‌شود.

مثال ۱۳: جوابهای حقیقی این دستگاه را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

یک جواب این دستگاه، بروشنی و بلافاصله به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

ثابت می‌کنیم این دستگاه، جواب منفی برای مجهولها ندارد، از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض بر این می‌گیریم که، یکی از مقدارهای x_i و مثلاً x_1، مقداری منفی باشد. x_1 را منفی می‌گیریم: $x_1 < 0$. از تفاضل معادله‌های چهارم و پنجم دستگاه به دست می‌آید:

$$x_4 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 \quad (1)$$

چون x_1 را منفی گرفته‌ایم، بنابراین $x_1 - x_4$ و در نتیجه $x_1^2 - x_2^2$ مقداری غیرمنفی می‌شود:

$$x_1^2 - x_2^2 \ge 0 \Rightarrow |x_1| \ge |x_2|$$

بنابراین $x_1 + x_2$ مقداری منفی یا صفر است:

$$x_1 + x_2 = x_3^2 \le 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

با توجه به (۱) داریم:

$$x_4 - x_1 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_4$$

یعنی x_4 عددی منفی است. اکنون به معادلهٔ سوم دستگاه توجه کنید. در این معادله $x_3 = 0$ و $x_4 < 0$، بنابراین باید داشته باشیم $x_5^2 < 0$، که نشدنی است.

یادداشت: اگر دوری بودن دستگاه را درنظر می‌گرفتیم، (دربارهٔ این مفهوم، کمی بعد صحبت خواهیم کرد) به این نتیجه می‌رسیدیم که اگر یکی از مجهولها منفی باشد، باید همهٔ مجهولها منفی باشند و در این صورت $x_1 + x_2$ یا x_3^2 عددی منفی می‌شود که نشدنی است.

به این ترتیب، باید در بین عددهای نامنفی، در جست و جوی جوابهای دستگاه باشیم. اگر در بین مقدارهایی که برای x_i به‌دست می‌آید، x_1 را بزرگترین و x_5 را کوچکترین آنها فرض کنیم (هر

فرض دیگر، با این فرض اختلافی پیدا نمی‌کند) آن وقت مثلاً از معادله چهارم دستگاه داریم :

$$x_1^2 = x_4 + x_5 \le 2x_1$$

و از معادلهٔ سوم دستگاه :

$$x_5^2 = x_3 + x_4 \ge 2x_5$$

از $x_5^2 \ge 2x_5$ به دست می‌آید : $x_5 \le 0$ یا $x_5 \ge 2$ و چون x_5 منفی نیست، پس $x_5 \ge 2$. به همین ترتیب، از نابرابری $x_1^2 \le 2x_1$ به دست می‌آید $x_1 \le 2$ ،درنتیجه خواهیم داشت :

$$2 \le x_5 \le x_1 \le 2$$

و این تنها برای $x_1 = x_5 = 2$ ممکن است. به این ترتیب، دستگاه یک جواب مثبت دارد :

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$$

مثال ۱۴: p را عددی طبیعی و بزرگتر از واحد، و n و k را دو عدد طبیعی فرض می‌کنیم. ثابت کنید دست کم یکی از عددهای $\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$ بر p بخش‌پذیر نیست ؛ به شرطی که :

$$\binom{m}{t} = C_m^t = \frac{m!}{t!(m-t)!}$$

فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد، در این صورت با توجه به اتحاد :

$$\binom{m}{t} = \binom{m+1}{t+1} - \binom{m}{t+1}$$

باید هریک از عددهای:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k};$$

$$\binom{n+k-2}{k-1} = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k};$$

....

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$$

بر p بخش‌پذیر باشند. به همین ترتیب همهٔ عددهای به صورت $\binom{n+i}{j}$، که در آن $i \le j$ عددهایی دلخواه، درست و غیر منفی‌اند، بر p بخش‌پذیر می‌شوند. ولی در میان این عددها، عدد $\binom{n}{0}$، به ازای $i = j = 0$ وجود دارد که برابر است با واحد و نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.



تفریح اندیشه ۱

برای اثبات این تساوی‌ها چه علائمی از چهار عمل اصلی در بین اعداد ۲ قرار می‌دهید؟

۲ ۲ ۲ ۲ = ۰

۲ ۲ ۲ ۲ = ۱

۲ ۲ ۲ ۲ = ۲

۲ ۲ ۲ ۲ = ۳

۲ ۲ ۲ ۲ = ۴

۲ ۲ ۲ ۲ = ۵

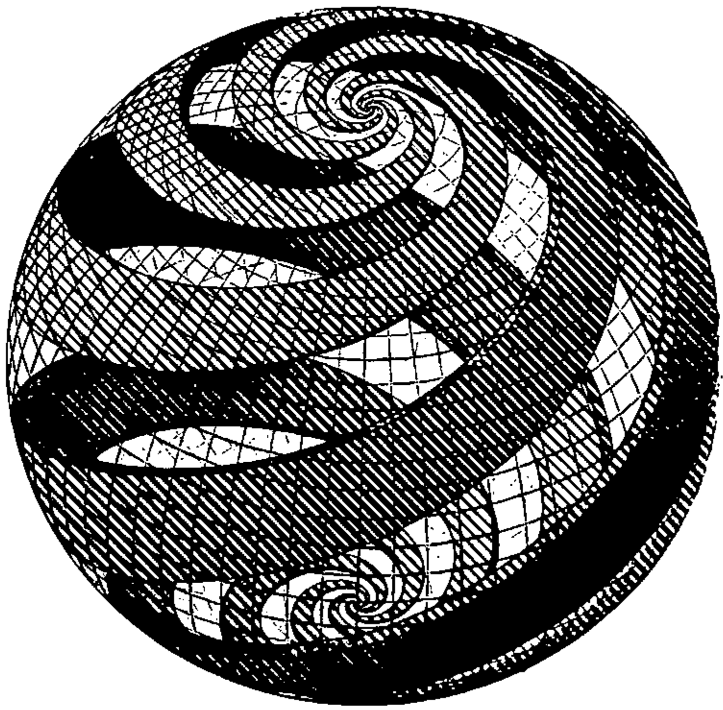
۲ ۲ ۲ ۲ = ۶

۲ ۲ ۲ ۲ = ۱۰

۲ ۲ ۲ ۲ = ۱۲

ترجمه: صمد پوراسدا...

جواب در صفحهٔ ۸۸



در حاشیهٔ مشتق و مشتق‌پذیری

● حمیدرضا امیری

معمولاً مشتق‌پذیر بودن یک تابع مانند f در نقطه‌ای به طول x_0، از دیدگاه «آنالیزی» مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و در واقع، با توجه به تعریف مشتق و مشتقهای چپ و راستِ تابع f در نقطه‌ای به طولِ x_0، پی به چگونگی وضع تابع در نقطه‌ای به طول x_0 می‌برند و روی مشتق‌پذیری یا مشتق‌ناپذیری آن بحث می‌کنند.

در این مقاله سعی شده است که حالتهای مختلف مشتق، وجود یا عدم وجود مشتق در نقطه‌ای به طولِ x_0 را ابتدا به طریق هندسی و شهودی شناسایی و بررسی کنیم و سپس از طریق تعریف مشتق، این یافته‌های هندسی و درک شهودی را آزمایش کرده و صحّت آنها را تأیید کنیم.

یادآوری: اگر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول x_0 پیوسته بوده و $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود و برابر با عددی حقیقی باشد، این عدد حقیقی را مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 نامیده و با $f'(x_0)$ نمایش می‌دهند. در این حالت، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر است.

توجه دارید که اگر فرض کنیم $x-x_0=h$، در این صورت:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

اگر تعبیر هندسی مشتق را به‌خاطر داشته باشید، $f'(x_0)$ را همان «ضریب زاویهٔ» خط مماس بر منحنی نمایش f، در نقطه‌ای به طول x_0 (نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی است) نامیدیم. بنابراین بحث روی حالتهای مختلف مشتق در یک نقطه، یا وجود و عدم وجود مشتق در یک نقطه، به بحث روی حالتهای مختلف ضریب زاویهٔ خط یا خطهای مماس بر آن نقطه می‌پردازد و درنتیجه به بحث روی حالتهای مختلف خط یا خطهای مماس و وجود یا عدم وجود مماس در آن نقطه می‌انجامد.

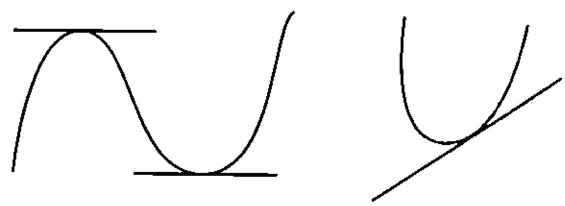
به عبارت دیگر، می‌خواهیم حالتهایی را که یک منحنی می‌تواند در نقطه‌ای دارای خط مماس باشد یا انواع مماس را که در نقاط مختلف منحنی یک تابع می‌توان بر آن رسم کرد، مورد بررسی قرار داده و از آن طریق، به انواع مشتق، وجود یا عدم وجود مشتق در یک نقطه، برسیم.

برای این منظور، همهٔ حالتهای ممکن را بررسی می‌کنیم و در هر حالت، نظر خودمان را با تعریف ریاضی مشتق، انطباق می‌دهیم.

حالت اوّل: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی به گونه‌ای واقع شده است که از آن نقطه نمی‌توان بیش از یک مماس بر منحنی عبور داد، بنابراین از آن نقطه، فقط یک خط مماس بر منحنی می‌توانیم رسم کنیم که در این حالت، بنابر تعریفِ «حدّ»، حدِّ چپ و حدّ راستِ کسر $\frac{f(x)-f(x_0)}{x\to x_0}$ وقتی $x\to x_0$ که به ترتیب مشتق چپ و مشتق راستِ تابع f نامیده می‌شوند، با هم برابر بوده و با عددی حقیقی و منحصر به‌فرد مانند L مساوی‌اند. (عدد L

همان ($f'(x_\circ)$ یا $tg\alpha$ یا ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ است.)

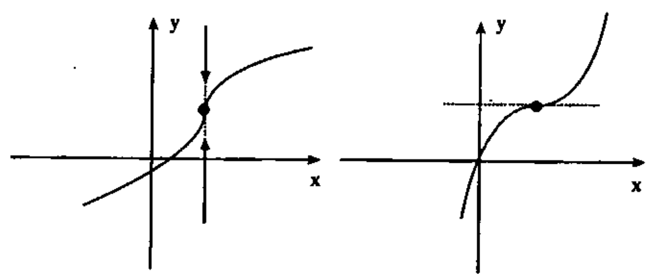
این حالت، حالتی است که تابع f در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ مشتق‌پذیر می‌باشد که قبلاً در تعریف مشتق به آن اشاره شد و بهترین نقاط برای نمایش این حالت، نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) هستند. به شکلهای زیر توجه کنید :



پرسش: چرا برای یافتن طول نقاط اکسترمم، مشتق تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم؟ یا به اصطلاح، ریشه‌های مشتق را می‌یابیم؟

(راهنمایی: خط مماس در نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم، موازی با محور xها بوده و ضریب زاویهٔ آن صفر است.)

حالت دوم: نقطه‌ای به طول $x_\circ$ روی منحنی، به گونه‌ای واقع شده است که اگر بخواهیم از آن نقطه، مماسی بر منحنی رسم کنیم، این مماس با محور xها یا با محور yها موازی بوده و منحنی را قطع می‌کند. به شکلهای زیر توجه کنید :



(الف) (ب)

همان‌طور که می‌دانید، این نقاط را نقاط «**عطف**» منحنی می‌نامند. در حالت (الف) مماس بر منحنی، موازی با محور xها بوده و همواره ضریب زاویهٔ آن صفر است. بنابراین مشتق در آن نقطه تعریف شده و مقدارش صفر است. در این‌گونه نقطه‌ها، تابع مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق نیز منحصر به فرد و برابر با صفر است.

به‌عنوان مثال، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^3+1$ را در نظر بگیرید که نمودار (الف) منحنی نمایش این تابع است :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left[(x-1)^3+1\right]-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x+1)}{(x-1)}=0$$

$\Rightarrow f'(1)=0=tg\alpha \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow$ مماس با محور xها موازی است.

امّا در حالتی که مماس در نقطهٔ عطف عمود بر محور xها باشد، ضریب زاویه‌اش نمی‌تواند عددی حقیقی باشد ؛ زیرا اگر $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $tg\alpha\to\infty$ و بسته به این که زاویهٔ α از چه سمتی به $\frac{\pi}{2}$ میل کند، $tg\alpha$ به سوی $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد. بنابراین $\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد شد و لذا طبق تعریف، تابع در این نوع نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست و می‌توان گفت :

اگر f در همسایگی نقطه‌ای به طول $x_\circ$ پیوسته بوده و مشتقهای راست و چپ آن در $x_\circ$ برابر با ∞ و هم علامت باشند، آن نقطه‌ای به طول $x_\circ$ نقطهٔ عطف منحنی خواهد بود.

تذکر: توجه دارید که عکس مطلب فوق، در حالت کلّی برقرار نیست ؛ یعنی اگر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_\circ\\y_\circ\end{matrix}\right.$ نقطهٔ عطف منحنی باشد، لازم نیست تابع در آن نقطه، مشتقی برابر با ∞ داشته باشد ؛ مانند تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^3+1$ که در مثال قبل بررسی شد.

به مثال زیر توجه کنید :

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)}+\frac{1}{2}$ را که نمودار (ب) منحنی نمایش آن می‌باشد، در نظر می‌گیریم :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left[\sqrt[3]{x-1}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)}{(x-1)^3}}$$

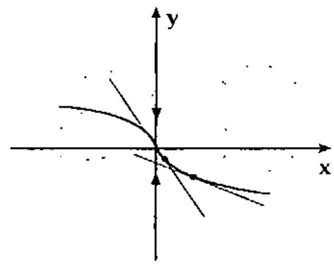
$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\sqrt[۳]{\frac{۱}{(x-۱)^۲}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty \quad ,$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\sqrt[۳]{\frac{۱}{(x-۱)^۲}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty \Rightarrow f'(۱)=+\infty$$

تذکر: با توجه به انحنای منحنی در نقطه‌ای به طول ۱، ملاحظه می‌کنید که وقتی مماس بر منحنی را به سمت نقطه‌ای به طول ۱ میل می‌دهید، در واقع زاویهٔ خط مماس از سمت چپ به سمت $\frac{\pi}{۲}$ میل می‌کند و می‌دانیم اگر زاویه‌ای از چپ به $\frac{\pi}{۲}$ میل کند (مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{۲}$)، تانژانت آن زاویه، به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد. در قسمت پایین منحنی (نسبت به نقطهٔ عطف) نیز رفتار مماس، مشابه قبل است.

اگر منحنی نمایش تابع f به صورت زیر باشد، برای رسم مماس در نقطهٔ عطف و میل کردنِ به سمت این مماس، ناچاریم زاویه را از سمت راست به $\frac{\pi}{۲}$ میل داده و درنتیجه، $tg\alpha$ به سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.



$$f(x)=-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sqrt[۳]{x}}{x}$$

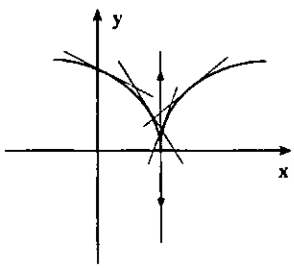
$$=\lim_{x\to ۰}-\sqrt[۳]{\frac{x}{x^۳}}=\lim_{x\to ۰}-\sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۲}}=-\frac{۱}{۰^+}=-\infty$$

حالت سوم: نقطه‌ای به طول $x_۰$ روی منحنی، به‌گونه‌ای قرار دارد که وقتی از راست به $x_۰$ نزدیک می‌شویم، زاویهٔ خط مماس از چپ یا راست، به $\frac{\pi}{۲}$ میل می‌کند و درنتیجه، مقدار $tg\frac{\pi}{۲}$ یا $f'(x_۰)$ به ترتیب به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند و وقتی از چپ به $x_۰$ نزدیک می‌شویم، زاویهٔ خط مماس از راست یا چپ به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شده و درنتیجه، مقدار $tg\frac{\pi}{۲}$ یا $f'(x_۰)$ به ترتیب به $-\infty$ یا $+\infty$ میل می‌کند.

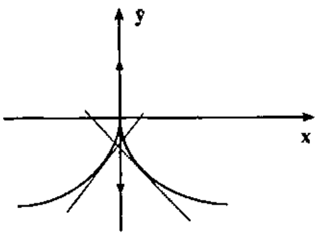
نقاطی که چنین وضعیتی دارند، به نقاط «**بازگشتی**» معروف بوده و با توجه به تعریف مشتق، بدیهی است که مشتقهای چپ و راست در $x_۰$ با هم برابر نبوده و تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

پس می‌توان گفت:

اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول $x_۰$ پیوسته و مشتقهای چپ و راستِ آن، یکی $-\infty$ و دیگری $+\infty$ باشد، آن نقطه، نقطهٔ بازگشت منحنیِ بوده و تابع در آن نقطه، مشتق‌پذیر نیست. به شکلهای زیر توجه کنید:



(الف)



(ب)

اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ را در نظر بگیریم (نمودار مربوط به آن (الف) است)، در این صورت خواهیم داشت:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}-۰}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}{(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{\frac{(x-۱)^۲}{(x-۱)^۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{\frac{۱}{(x-۱)}} \quad ,$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\sqrt[۳]{\frac{۱}{x-۱}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۰^+}}=+\infty \quad ,$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\sqrt[۳]{\frac{۱}{x-۱}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۰^-}}=-\infty$$

همان‌طور که تعریف ریاضی مشتق نیز نشان داد، دیدیم که $f'(۱^+)\neq f'(۱^-)$ و تابع f در نقطه به طول ۱ مشتق‌پذیر نمی‌باشد و این نقطه، یک نقطهٔ بازگشتی است. همچنین ملاحظه می‌کنید که وقتی $x\to ۱^+$ (از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شویم) زاویهٔ خط مماس بر منحنی، از چپ به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شود؛ یعنی $\alpha\to\frac{\pi}{۲}^-$ (در ناحیهٔ اوّل زاویه‌ها همگی کمتر از $\frac{\pi}{۲}$ هستند) و

در نتیجه، $tg\alpha = f'(۱)$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و در حالتی که $x \to ۱^-$ آن گاه $f'(۱) = tg\alpha \to -\infty$.

حال اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = -\sqrt[۳]{x^۲}$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که :

$$f'(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ} = \lim_{x\to\circ} \frac{-\sqrt[۳]{x^۲}}{x}$$

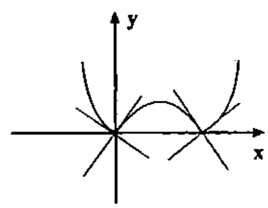
$$= \lim_{x\to\circ} -\sqrt[۳]{\frac{x^۲}{x^۳}} = \lim_{x\to\circ} -\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}} \ ,$$

$$\lim_{x\to\circ^+} -\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}} = -\sqrt[۳]{\frac{۱}{\circ^+}} = -\infty \ ,$$

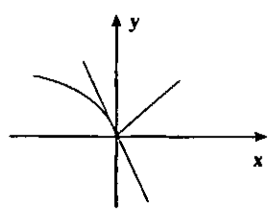
$$\lim_{x\to\circ^-} -\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}} = -\sqrt[۳]{\frac{۱}{\circ^-}} = +\infty$$

این نقطه نیز یک نقطهٔ بازگشتی بوده و طبق شکل (ب) اگر $x \to \circ^+$ ، در این صورت $\alpha \to \frac{\pi^+}{۲}$ و در نتیجه $f'(\circ) = tg\alpha \to -\infty$ و اگر $x \to \circ^+$ ، در این صورت $\alpha \to \frac{\pi^-}{۲}$ و درنتیجه $f'(\circ) = tg\alpha \to +\infty$.

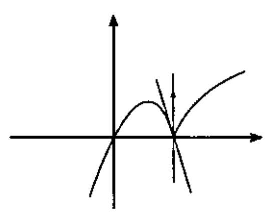
حالت چهارم: ممکن است نقطه‌ای به طول $x_\circ$ روی منحنی، به گونه‌ای قرار داشته باشد که از آن نقطه، بتوانیم دو مماس بر منحنی رسم کنیم، که البته یکی از این دو مماس، می‌تواند بر محور xها عمود باشد. به شکلهای زیر توجه کنید :



(الف)



(ب)



(ج)

واضح است که در این حالت نیز مشتقهای چپ و راست با هم برابر نبوده و حتّی یکی از آنها می‌تواند ∞ باشد که در هر صورت، تابع در چنین نقاطی که به نقاط «**زاویه‌دار**» معروف هستند، مشتق‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین می‌توان گفت :

هرگاه $f'(x_\circ^+) = L_۱$ و $f'(x_\circ^-) = L_۲$ و $L_۱ \neq L_۲$ و یا یکی از مشتق چپ یا راست در نقطهٔ به طول $x_\circ$ ، عددی حقیقی و دیگری $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، در این حالت، چنین نقطه‌ای نقطهٔ «**زاویه‌دار**» نامیده شده و تابع در آن نقطه ، مشتق‌پذیر نمی‌باشد و همواره در این نقطه، دو مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد.

به عنوان مثال، اگر فرض کنیم $y = |x^۲ - ۲x|$ ، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(x) = |x^۲ - ۲x| = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۲ \ \text{یا}\ x \leq \circ \\ -x^۲ + ۲x & \circ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

$$f'(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ} = \lim_{x\to\circ} \frac{|x^۲ - ۲x| - \circ}{x}$$

$$= \lim_{x\to\circ} \frac{|x|\ |x-۲|}{x},$$

$$\lim_{x\to\circ^+} \frac{|x|\ |x-۲|}{x} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{x|x-۲|}{x} = ۲ = f'(\circ^+) \ ,$$

$$\lim_{x\to\circ^-} \frac{|x|\ |x-۲|}{x} = \lim_{x\to\circ^-} \frac{-x|x-۲|}{x} = -۲ = f'(\circ^-)$$

و همان‌طور که در شکل (الف) مربوط به این تابع می‌بینید، در نقطه‌ای به طول صفر، دو مماس بر منحنی رسم شده است که یکی دارای ضریب زاویهٔ ۲ و دیگری ۲- است.

تمرین: این مطلب را برای $f'(۲)$ تحقیق کنید.

حال تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(x-۱)} & x \geq ۱ \\ -x^۲ + x & x < ۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع، نقطه‌ای به طول $x_\circ = ۱$ را بررسی می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$f'(۱) = \lim_{x\to۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \ ,$$

$$f'(۱^+) = \lim_{x\to۱^+} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to۱^+} \frac{\sqrt[۳]{x-۱} - \circ}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to۱^+} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}} = \frac{۱}{\circ^+} = +\infty \ ,$$

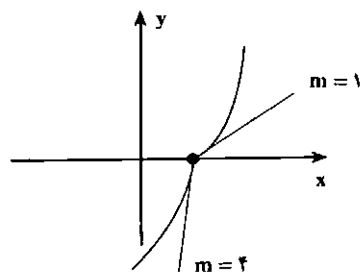
$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+x-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x(x-1)}{(x-1)}=-1$$

همان‌طور که روی شکل (ج) مشاهده شد و نیز همان‌طور که از تعریف ریاضی مشتق برای این تابع به‌دست آمد، در نقطه‌ای به طول ۱، دو مماس، یکی عمود بر محور xها و دیگری خطی با ضریب زاویهٔ ۱−، می‌توانیم بر منحنی نمایش آن رسم کنیم.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\geq 1\\ 2x^2-2 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$ نشان دهید که نقطه‌ای به طول $x_0=1$ یک نقطهٔ زاویه‌دار است.

(**راهنمایی:** نمودار آن رسم شده است.)



حالت پنجم: ممکن است نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به‌گونه‌ای باشد که از آن نقطه نتوانیم بر منحنی مماسی رسم کنیم. در واقع، رفتار تابع در آن نقطه مشخص نیست و درنتیجه برای $f'(x_0)$ مقدار معلومی حاصل نخواهد شد و تابع f در این نقاط، مشتق‌پذیر نیست. به عنوان مثال، تابع با ضابطهٔ

$f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

می‌دانیم f در همسایگی صفر پیوسته است و داریم $f(0)=0$ و از طرف دیگر :

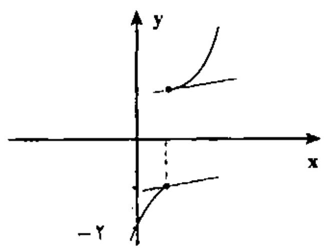
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cos\frac{1}{x}-0}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

و چون $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1$ ، بنابراین مقدار حدّ فوق، عددی حقیقی در بازهٔ $[-1,1]$ است ؛ امّا این مقدار نامعلوم است. پس $f'(0)$ وجود ندارد ؛ یعنی در نقطهٔ صفر، نمی‌توانیم بر منحنی نمایش تابع فوق، مماسی رسم کنیم.

تمرین: نقطهٔ به طول $x_0=0$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ چه نقطه‌ای است؟ آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟

حالت ششم: ممکن است نقطهٔ روی منحنی، به‌گونه‌ای واقع شده باشد که منحنی در آن نقطه، پیوسته نباشد ؛ در این حالت، مطابق شکل زیر، می‌توان دو مماس بر منحنی و در مجاورت آن نقطه رسم کرد که «**مشتقهای یکطرفه**» ایجاد شده و در این‌گونه نقاط نیز به طور مسلّم تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد.



مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+1 & x\geq 1\\ -(x-1)^2-1 & x<1\end{cases}$ مفروض است. این تابع در نقطهٔ $x_0=1$ دارای مشتقهای یکطرفه بوده و شکل فوق مربوط به همین تابع است.

مسائل برای حل

۱ ـ نقطهٔ به طول $x_0=-1$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\big|2x+|x-1|\big|$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

۲ ـ نقطهٔ به طول $x_0=2$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-2)^2[x-2]$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

۳ ـ نقطهٔ به طول $x_0=0$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+x[x]$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟



• غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۲۴)

در کار بررسی مجله‌های ریاضی ایران، می‌رسیم به فصلنامهٔ مجموعه، که مجموعه‌ای است از مقاله‌ها و مسائل ریاضی ؛ شمارهٔ اوّل این فصلنامه، در بهار ۱۳۷۲، در ۱۳۶ صفحه، با قطع وزیری چاپ شده است و نویسندگان آن به نامهای موسی آذرنوش، پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، مهدی قمصری اصفهانی، احمد قندهاری، سید محمدرضا هاشمی موسوی، سید حسین سید موسوی و غلامرضا یاسی‌پور می‌باشند.

در مقدمهٔ ویراستار این مجموعه چنین آمده است که :

«قصدمان از نشر مجموعه، آشنا کردن خوانندهٔ علاقه‌مند، با وقایع و مطالب کهنه و نویی است که در جهان ریاضیات مطرح می‌شود و در این سرزمین وسیع دانش بشری اتفاق می‌افتد. کهنه‌ها را با حدیثی نو بیان می‌کنیم، سقفشان را می‌شکافیم و طرحی نو درمی‌اندازیم. نوها را نیز با روایتی دلنشین، آن چنان که نشان مردان راه شد، به بیان می‌نشینیم و به ضمان می‌ایستیم. آری قصدمان این است!

اما، قطع این مرحله بی‌همراهی خضر نتوانیم کرد که دراز است ره مقصد و ما نوسفریم.»

با سر مقالهٔ فصلنامه آشنا شدیم. اکنون برای آشنایی بیشتر با مقاله‌های آن، یکی از مقاله‌های آن را انتخاب کرده، به تمامی ذکر می‌کنیم. این مقاله، نظریهٔ بازیهاست به ترجمهٔ «غلامرضا یاسی‌پور»، از مرجع زیر :

J. Von Neumann and O. Morge stern, Theory of Games and Economic Behaviour, (John Wiley, 1953)

نظریهٔ بازیها* (قسمت اوّل)

مقدمه

تمام ماجرا در سال ۱۹۲۸ آغاز شد و آن، هنگامی بود که «جان فون نویمان[1]» ریاضیدان، در سالنامهٔ ریاضیات[2]، مقاله‌ای تحت عنوان «راجع به نظریهٔ بازیهای دسته جمعی[3]» به چاپ رساند. توسعه‌های بعدی این نظریه، در کتاب عالی، **نظریهٔ بازیها و رفتار اقتصادی**[4] نوشتهٔ جی. فون نویمان و او. مورگنسترن که ابتدائاً در ۱۹۴۴ به چاپ رسید و در ۱۹۴۷ در آن تجدید نظر شد، داده شده است. فرض این کتاب، این است که نظریهٔ اقتصاد می‌تواند از بررسی بازیهای استراتژی بهره‌مند شود. در حال حاضر، چنین احساس می‌شود که نظریهٔ بازیها، باید پیش از این که بتواند از ارزش عملی در موقعیّتهای بغرنج برخوردار شود، پیشرفت بیشتری داشته باشد. اما این آغاز کار و مقدمه‌ای است که می‌شود آن را از لحاظ خودش جالب یافت.

مدلهای اقتصاد[5]

وضعیت ناجور «رابینسون کروزوئه»ی بیچاره را، که تک و تنها در جزیره‌ای رها شده بود و باید خود، معاش خود را به بهترین وجهی که می‌توانست تأمین می‌کرد، در نظر بگیرید. هر چند او در گوشهٔ انزوا و تقلای خود برای زنده ماندن از امتیازی منحصر به فرد برخوردار بود ؛ زیرا رقیبی نداشت که با او برای

جیرهٔ اندکی که به زور از چنگ طبیعتِ بی‌عاطفه به دست می‌آورد، به رقابت بپردازد؛ چون لوازم زندگی‌اش (با در دست داشتن منابع کافی در جزیره) صرفاً با سعی و کوشش خود او تأمین می‌شد.

فرض می‌کنیم در آن جزیره، چندین کشتی شکسته بودند که هر یک، تنها در قصد فراهم کردن مصالح خود بود. از آن جا که کوشش دیگران می‌تواند منافی موفقیّت هر یک از اشخاص باشد، هر یک از آنان باید برای به حساب آوردن رفتار قابل انتظار رقبای خود، استراتژی خود را مشخص کند. امروزه، بررسی ریاضی استراتژیهایی که باید در چنین مواقعی که در آنها تنازع منافع رخ می‌دهد، به کار گرفته شود، به عنوان «نظریهٔ بازیها» شناخته می‌شود.

می‌توان آن‌چه را که موفقیّت هر فرد (یا گروه) را تشکیل می‌دهد، به عنوان ماکزیمم کردن کمیّت نمایش دهندهٔ «رضایت» توصیف کرد. اندازه‌گیری چنین مفهومِ ظاهراً مبهمی، آن طور که باید و شاید، **کار نظریهٔ «منفعت[۶]»** است. اما این فرض که اصلاً می‌توان چنین مقیاس عددی را تشکیل داد، جزءِ لاینفک بنیادهای نظریهٔ اقتصادی و در واقع در خود وجود پول است. بنابراین در تمام وضعیتها، وجود مقیاس عددی مناسبی را ـ که می‌توان راجع به آن به عنوان ارزش پولی فکر کرد ـ فرض می‌کنیم. این ارزش، مقیاس خطی رضایت یا منفعت در نظر گرفته شده و بنابراین ماکزیمم ارزش (پولی) مزبور، متناظر با بیشترین درجهٔ منفعت است و درجات نسبی سودمندی، به طور کامل، توسط ارزشهای وابسته با آنها نمایش داده می‌شوند.

در مورد رابینسون کروزوئه، یا هر وضعیت معادل آن، مسأله به ماکزیمم کردن یک تابع برمی‌گردد. از اختیارهای در دسترس، تمام کاری که شخص باید انجام دهد، انتخاب موردی است که متناظر با منفعت بزرگتری باشد. اما هنگامی که چندین رقیب موجود باشند، هر یک تابع منفعت خود را دارد و در حالت کلّی، امکان ندارد که هر بار ماکزیممِ بیش از یک تابع را مشخص کنیم و این همان عامل کلیدی است که نظریهٔ بازیها را از بهینه‌سازی ساده[۷] متمایز می‌کند.

حتی در بررسی بیش از یک فرد، تعریف این که چه چیز جواب منصفانه را به دست می‌دهد، مشکل است؛ به عنوان مثال: ممکن است انتخابی که (مثلاً) ماکزیمم مجموع توابع منفعت را مشخص می‌کند، به بعضی از افراد، کم یا هیچ و به دیگران زیاد بدهد. از طرف دیگر، ممکن است انتخابی که به همه کم و بیش یکسان می‌پردازد، به اکثریّتی بسیار کمتر از آن مقداری که با انتخاب دیگر می‌توانستند به دست آورند، بدهد. ملاحظات و مسائل عدالت اجتماعی[۸]، بیشتر از آن که به اقتصاد تعلّق داشته باشد، به سیاست مربوط می‌شود و در این مورد، صرفاً با نظریه‌ای ریاضی و نه با استلزامات کاربرد آن، سر و کار داریم. همچنین کافی است که خاطرنشان کنیم که بعضی از استنباطهای وجدان اجتماعی[۹] را می‌توان به سادگی، با تعدیلی در توابع منفعت افراد انجام داد. از این مرحله به بعد، از مسألهٔ انصاف به کلی چشم‌پوشی می‌کنیم و مطالب را صرفاً با توجه به سود شخصی[۱۰] افراد در نظر می‌گیریم.

بازیهای دو نفره

بازیهای مستطیلی[۱۱]: می‌خواهیم برای وضعیت مورد بررسی مقدمه، مدلی ریاضی[۱۲] به دست دهیم. برای سادگی کار، توجه‌مان را به تضادّ منافع بین دو فرد، که آنان را «B» و «R» می‌نامیم، معطوف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که B می‌تواند m انتخاب داشته باشد و آنها را با انتخاب عددی از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,m\}$ مشخص می‌کند. به همین ترتیب، فرض می‌شود که R دارای n اختیار، که با عددی از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ مشخص می‌شود باشد.

باید فرض کنیم دستاورد[۱۳] هر شخص به انتخاب دیگری، نیز به انتخاب خودش، بستگی دارد، چه در غیر این صورت، به وضعیتی غیر رقابتی[۱۴] برمی‌گردیم. a_{ij} را برای دستاورد B در صورتی که انتخاب او عدد i و انتخاب R، عدد j باشد، می‌نویسیم؛ و b_{ij} را در مورد دستاورد R، که از همین انتخابها حاصل شده باشد، در نظر می‌گیریم. برای واضحتر ملاحظه کردن مسألهٔ روبه‌رو شدن دو شرکت کننده، می‌توانیم مقادیر a_{ij} و b_{ij} را ـ که معمولاً در این زمینه «**پی‌آمد[۱۵]**» نامیده می‌شوند، به صورت جدولی درآوریم:

موارد انتخاب B	موارد انتخاب R						
۱	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	…	a_{1j}, b_{1j}	…	a_{1n}, b_{1n}
۲	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	…	a_{2j}, b_{2j}	…	a_{2n}, b_{2n}
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
i	a_{i1}, b_{i1}	a_{i2}, b_{i2}	…	a_{ij}, b_{ij}	…	a_{in}, b_{in}
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
m	a_{m1}, b_{m1}	a_{m2}, b_{m2}	…	a_{mj}, b_{mj}	…	a_{mn}, b_{mn}

باید از همین ابتدا تأکید شود که هیچ یک از دو شرکت‌کننده، هنگام انجام مورد انتخاب خود، از مورد انتخاب دیگری خبر ندارد. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم که هر شرکت‌کننده، از جمیع اطلاعات واقع در جدول فوق، یعنی مقادیر جمیع اعداد a_{ij} و b_{ij} آگاه است.

برای بحث ریاضی وضعیتهایی چنین، مفید است که شرکت‌کنندگان را به عنوان *بازیکنی* در یک *بازی* در نظر بگیریم. در این صورت، با در دست داشتن جدولی چون جدول فوق، بازی دو بازیکن می‌تواند به این صورت درآید که از هر یک بخواهیم که بدون آگاه بودن از انتخاب بازیکن دیگر، حرکت خود را با انتخاب سطر یا ستونی انجام دهد. در این صورت، نتیجهٔ انتخاب، توسط درایهٔ واقع در آن سطر و ستون جدول مشخص می‌شود. نوع بازی‌ای که در کار بررسی آنیم، به عنوان *بازی مستطیلی*[16] (یا بازی دو نفری[17]) معروف است.

با مثالی، مسائلی را که دو بازیکن، در یک چنین بازی‌ای با آن روبه‌رو می‌شوند، نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که جدول پی‌آمد به صورت زیر باشد.

موارد انتخاب R

موارد انتخاب B	X		Y		Z	
A	۸	۲	۰	۹	۷	۳
B	۳	۶	۹	۰	۲	۷
C	۱	۷	۶	۴	۸	۱
D	۴	۲	۴	۶	۵	۱

B می‌تواند با ملاحظهٔ جدول، چنین استدلال کند که: «جرأت انتخاب A را ندارم؛ زیرا اگر طرف Y را انتخاب کند، آن وقت من چیزی به دست نمی‌آورم. اگر B را انتخاب کنم، ممکن است که فقط یک ۲ نصیبم شود (البته اگر طرف Z را انتخاب کند) و انتخاب C، اگر او X را انتخاب کند، تنها یک ۱ به دستم می‌دهد. اما اگر D را انتخاب کنم، آن گاه حداقل ۴ نصیبم می‌شود، بنابراین D را انتخاب می‌کنم.»

با استدلالی مشابه، **R** به خود چنین می‌گوید: «ستون دوم وسوسه کننده است، از ۹ بالای آن خوشم می‌آید. اما اگر طرف B را انتخاب کند چه؟ در این صورت، اصلاً چیزی به من نمی‌رسد. ستون سوم مطمئن‌تر است؛ اما در این‌جا نیز اگر او C یا D را انتخاب کند، تنها یک ۱ نصیبم می‌شود. حداقل ستون اول بی‌توجه به این که چه پیش می‌آید، یک ۲ را برایم تضمین می‌کند. بنابراین اولین ستون، یعنی X را انتخاب می‌کنم.»

به این ترتیب، اگر هر دو بازیکن، با احتیاط بازی کرده، سعی در مینیمم نگاه داشتن باخت خود کنند، **B**، ۴ و **R**، ۲ به دست می‌آورد. اما فرض می‌کنیم **B** حدس بزند که **R** چه عملی انجام می‌دهد؟ چه بالاخره، او تمام جدول را ملاحظه می‌کند و بنابراین کاملاً توان استنباط استدلالی را که برای **R** دادیم، دارد. بنابراین شاید B اینک (به جای آنچه که قبلاً گفته) چنین استدلال کند: «برای من شانس به دست آوردن ۹ در سطر دوم وجود ندارد؛ زیرا طرف از انتخاب Y که با آن به موازات ۹ من ۰ می‌گیرد، حتماً ابا خواهد کرد. می‌شود برای به دست آوردن ۸ سراغ سطر سوم رفت؛ اما در این صورت، ممکن است (اگر او X را انتخاب کند) کارم تنها با یک ۱ تمام شود. اما در مورد هشت سطر اول چه؟ در این مورد، لازم نیست که نگران به دست آوردن ۰ باشم؛ زیرا طرف جرأت نمی‌کند به انتخاب Y که در این صورت ۰ خواهد گرفت (در سطر دوم) دست زند. حتی اگر Z را انتخاب کند، باز یک ۷ نصیبم می‌شود، که برایم از هر مورد سطر چهارم بهتر است. بنابراین A را انتخاب می‌کنم.»

این نقشه، البته به شرطی که R محتاط باشد، به خوبی به کار B می‌خورد؛ اما در صورتی که R حدس بزند که B به چه خیالی است، چه؟ در این صورت، ستون دوم را انتخاب می‌کند و با ۰ ی برای B، ۹ را نصیب خود می‌کند!

حتی بدون یک چنین حدس الهام‌آمیزی، R می‌تواند، انتخاب سطر سوم را بعد از استدلال اول، پیش‌بینی کند و بنابراین، برای این که ۶ را نصیب خود کند، به انتخاب ستون دوم بپردازد و با این کار، بار دیگر B را در صورتی که از استدلال دوم پیروی کرده، سطر اول را انتخاب کند، به بلا مبتلا نماید.

به نظر می‌رسد که نتیجهٔ تمام این مطالب این باشد که تا زمانی که هر دو بازیکن با احتیاط بازی می‌کنند، می‌توانیم نتیجهٔ بازی را پیش‌بینی کنیم؛ اما اگر یکی از آنها یا هر دو، سعی در پیش‌بینی کردن پیش‌بینی دیگری کند، هر اتّفاقی می‌تواند رخ دهد.

تمرین (موقعیت دشوار**[18] زندانیان)

دو مرد به علت داشتن تعداد کمی اسکناس تقلّبی، توسط پلیس دستگیر شده‌اند. در قرارگاه پلیس، آنان را برای استنطاق در دو اتاق جداگانه بردند. کارآگاه مسئول رسیدگی به این واقعه،

معتقد است که جاعلان اسکناس، خودِ این دو نفرند ؛ اما نمی‌تواند این موضوع را در دادگاه اثبات کند. به همین دلیل، مطلب زیر را با هریک از آنان به طور جداگانه مطرح می‌کند. اگر هیچ یک از آنان اقرار به جاعل بودن نکند، در این صورت، هر دو به کوشش در رد کردن اسکناسهای تقلّبی متهم شده و هر یک به هجده ماه زندان محکوم می‌شوند. اگر هر دو اقرار کنند، در این صورت، به علت جعل کردن، مورد تعقیب قرار می‌گیرند ؛ اما به مجازات سبک سه سال حبس محکوم می‌شوند. اما اگر تنها یکی از آنان اقرار کند، در این صورت، آزاد می‌شود ؛ در حالی که دیگری به هفت سال زندان محکوم خواهد شد.

با کنار گذاشتن هر گونه امکان «شرافت بین دزدان»، موقعیت دشواری را که هر یک از زندانیان با آن روبه‌رو شده، تحلیل کرده و نتیجهٔ کار را در صورتی که هر دو «به احتیاط بازی کنند»، معین کنید.

ابتدا جدول زیر را، برای نشان دادن امکانهای هر یک از زندانیان مورد اقرار یا انکار، رسم می‌کنیم :

	انکار		اقرار	
اقرار	۷	۰	۳	۳
انکار	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	۰	۷

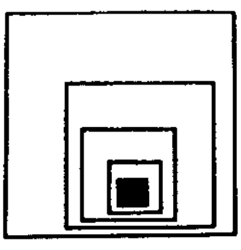
در این مورد، اعداد جدول «دستاوردهای» منفی را نمایش می‌دهد ؛ و هر زندانی، مایل است که به کمترین تعداد سال زندانی شود. اگر از «صحبت» خودداری کند، در این صورت به شرطی که همدستش نیز همین کار را کند، به هجده ماه زندان محکوم می‌شود. اما اگر همدستش اقرار کند، پیه ۷ سال زندان را به تنش مالیده است. فرض می‌کنیم به جای این کار، اقرار کند، در این صورت، اگر همدستش از اقرار خودداری کند، آزاد می‌شود و در بدترین حالت، اگر همدستش نیز اقرار کند، سه سال زندان نصیبش می‌شود. بنابراین، محتاطانه‌ترین کار برای او اقرار است. همدستش نیز با استدلالی مشابه، به همین نتیجه می‌رسد. بنابراین اگر هر دو زندانی، به احتیاط عمل کنند، کارآگاه به رغم این واقعیت که دو زندانی، با اقرار نکردن، می‌توانند ایام محبس خود را نصف کنند، در اقرار گرفتن از آنان توفیق می‌یابد.

یادداشتها:

* - J. Von Neumann and O.Morgenstern, Theory of Games and Economic Behaviour
۱ - John Von Neumann
۲ - Mathematische Annalen
۳ - Zur Theorie der Gesellschaftss Piele
۴ - Theory of Games and Economic Behaviour
۵ - Medels of the Economy
۶ - Theory of Utility
۷ - Simple Optimization
۸ - Social Justics
۹ - Social Conscience
۱۰ - Self - Interest
۱۱ - Rectangular Games
۱۲ - Mathematical Model
۱۳ - Gain
۱۴ - Non - Competitive Situation
۱۵ - Pay - Off
۱۶ - Rectangular Game = Matrix Game
۱۷ - Two - Person Game
۱۸ - Dilemma

** - برهان ذوحدین، قیاس ذوحدین

مسائل مسابقه ای



۱) ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم دهگانش زوج و رقم یکانش ۶ باشد. مربع کامل نیست.

۲) ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم یکان آن، ۱ یا ۴ یا ۹ و رقم دهگانش فرد باشد، مجذور کامل نیست.



مبهم یا تعریف نشده؟

● احمد قندهاری

اغلب سؤال می‌شود که $\frac{0}{0}$ برابر با چه عددی است؟ یا مقدار $\frac{0}{0}$ چیست؟ آیا $\frac{0}{0}$ مبهم است؟ یا می‌پرسند : عدد تقسیم بر صفر، برابر چه عددی است یا صفر تقسیم بر هر عدد، مساوی چند است و ...؟

در این مقاله قصد داریم هم سؤالها را بهتر و دقیق‌تر مطرح کنیم و هم پاسخ دقیق آنها را بیان کنیم.

سؤال (۱) : صفر تقسیم بر هر عدد، برابر چیست؟

خود سؤال اشکال دارد، باید پرسید : صفر تقسیم بر هر عدد به‌جز صفر، برابر چند است؟

در جواب باید گفت :

صفر تقسیم بر هر عدد به جز صفر، برابر صفر است.

مثال بزنیم : فرض کنید صفر ریال پول را می‌خواهیم بین پنج نفر تقسیم کنیم، به طور مسلم، به هر نفر هیچ پولی نمی‌رسد. در نتیجه اگر به جای صفر ریال پول، صفر کیلو سیب هم داشتیم و می‌خواستیم بین پنج نفر تقسیم کنیم، نتیجه همان می‌شد.

سؤال (۲) : ∞ (بی‌نهایت) چه گونه عددی است؟

جواب: ∞ (بی‌نهایت) عدد نیست ؛ بلکه یک نماد ریاضی برای بیان اعداد خیلی بزرگ است. ابتدا توضیحی دربارهٔ اعداد بزرگ بیان می‌شود، سپس ∞ به طور دقیق تعریف می‌شود.

یک عدد بزرگ مثال می‌زنیم ؛ مثلاً ۱۰ میلیارد یا ۱۰۰ میلیارد یا ۲۰۰ میلیارد. گرچه در زندگی روزمره با اعداد سر و کار داریم و امروزه بدون بیان اعداد، نمی‌توان زندگی کرد ؛ مثلاً ساعت ده صبح به خیابان انقلاب، خیابان فروردین،کوچهٔ هشتم، پلاک شمارهٔ (۷۵) مراجعه می‌کنیم. در همین جملهٔ معمولی و عادی، از سه عدد (۱۰)، (۸) و (۷۵) استفاده کرده‌ایم. اگر ادامه دهیم : پس از ۴۵ دقیقه با اتوبوس خط (۱۱۲) به منزل می‌رویم و ... اگر کمی دقت کنیم، در هر روز، همهٔ ما با بسیاری از اعداد سر و کار داریم.

به طور معمول اعداد را به سه دسته به نام‌های اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد شناسایی تقسیم‌بندی می‌توان کرد.

الف: اعداد اصلی : برای بیان کمیّت به کار می‌روند ؛ مثلاً ساعت ده صبح، مثلاً نمرهٔ (۱۵) در درس فیزیک یا ۲۰۰۰۰ تومان قرض. این اعداد قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم می‌باشند. این اعداد به این پرسش : چقدر یا چند تا پاسخ می‌دهند.

ب: اعداد ترتیبی : که صرفاً در مقایسه به کار می‌روند؛ مثلاً حسین در درس شیمی نفر دوم کلاس شد، یا علی نفر نهم در صف شیر است.

ج: اعداد شناسایی : که صرفاً برای شناسایی به کار می‌روند؛

مانند کوچهٔ پنجم، یا اتوبوس خط (۱۱۲).

همان طور که گفته شد، همهٔ ما در هر روز، با این سه دسته اعداد کم و بیش سر و کار داریم؛ ولی در زندگی روزمره با اعداد ۱۰ میلیارد یا ۱۰۰ میلیارد سر و کار نداریم. گرچه آنها را می‌شناسیم؛ اما بزرگی آنها برای ما قابل لمس نیست، لذا کمی بیشتر در مورد اعداد بزرگ بحث خواهیم کرد.

شاید شنیده باشید که سرعت نور ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه است. با توجه به این که طول و عرض کشور عزیزمان ایران، حدود ۲۵۰۰ کیلومتر است، سیصد هزار کیلومتر در ثانیه غیر قابل لمس است؛ ولی وجود دارد و همه آن را قبول دارند. قابل لمس نبودن، دلیل عدم وجود نیست.

به عدد ۱۰۰ میلیارد باز گردیم. این عدد چند رقمی است؟

یک میلیارد عددی ده رقمی و ۱۰۰ میلیارد عددی دوازده رقمی است. وقتی در ریاضی بحث دربارهٔ عددهای بزرگ است، تعداد ارقام مورد نظر است. ممکن است عددی بیست رقمی یا صد رقمی یا سه هزار رقمی یا بیشتر داشته باشیم، به مثال زیر دقت کنید:

می‌دانیم $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$، می‌خواهیم بدانیم عدد $N = ۲^{۱۰۰۰۰۰}$، عددی چند رقمی است؟

می‌نویسیم:

$$N = ۲^{۱۰۰۰۰۰} \Rightarrow \log N = \log ۲^{۱۰۰۰۰۰}$$

$$\Rightarrow \log N = ۱۰۰۰۰۰ \log ۲$$

$$= ۱۰۰۰۰۰(۰/۳۰۱۰۳) = ۳۰۱۰۳/۰۰$$

عدد (۳۰۱۰۳) مفسّر $\log N$ است. بنا به قاعده اگر به مفسّر، یک واحد اضافه کنیم، تعداد ارقام عدد N به دست می‌آید، پس عدد N عددی (۳۰۱۰۴) رقمی است.

با مقایسهٔ عدد N که عددی است (۳۰۱۰۴) رقمی با عدد ۱۰۰ میلیارد که عددی است دوازده رقمی، متوجه می‌شویم که عدد N، عدد بزرگی است.

حال اگر همین عدد N را به توان ۱۰۰۰ برسانیم و آن را M بنامیم، می‌توان نوشت:

$$M = N^{۱۰۰۰} = (۲^{۱۰۰۰۰۰})^{۱۰۰۰} = ۲^{۱۰^۸}$$

$$\Rightarrow \log M = \text{Log}\, ۲^{۱۰^۸} = ۱۰^۸ \log ۲$$

$$= ۱۰^۸(۰/۳۰۱۰۳) = ۳۰۱۰۳۰۰۰/۰۰$$

با توجه به مطالب گفته شده، عدد M عددی است (۳۰۱۰۳۰۰۱) رقمی. با مقایسه با عدد ۱۰۰ میلیارد که فقط دوازده رقم دارد، عدد فوق‌العاده بزرگی است. این عدد بیش از سی میلیون رقم دارد حال به بررسی ∞ می‌پردازیم.

تعبیری برای مفهوم (∞+): فرض کنیم متغیر x، عددی است در حال زیاد شدن و به طور مرتب مقدار آن افزایش می‌یابد و اگر از هزار و میلیون و میلیارد و صد میلیارد و... و N و ... و M بزرگتر شود، می‌گوییم x به سمت عدد بسیار بزرگی میل می‌کند و یا در این حالت می‌گوییم x به سمت (∞+) میل می‌کند.

اگر به همین تعریف دقیق شویم و چند بار آن را بخوانیم، ملاحظه می‌کنیم که (∞+) یک عدد نیست؛ بلکه یک علامت یا نماد ریاضی برای نشان دادن اعداد خیلی بزرگ است.

به عبارت دیگر، می‌توان گفت اگر متغیر x، ضمن زیاد شدن از هر عدد فوق‌العاده بزرگ مفروضی مانند M بزرگتر شود، می‌گوییم x به سمت (∞+) میل می‌کند. در واقع ∞+ از هر عدد مثبت به دلخواه بزرگی مانند M، بزرگتر است.

∞ ها قابل سنجش نمی‌باشند

اگر به تعبیر «نقطه» در هندسه دقت کنیم، می‌بینیم، نقطه، طول و عرض و ارتفاع ندارد. این نقطه اگر در صفحه باشد، طول و عرض ندارد. چنانچه در فضا باشد، طول، عرض و ارتفاع ندارد. بنابراین، همین صفحهٔ مجلهٔ «برهان»، از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است (منظور آن است که از تعداد نامتناهی نقطه تشکیل شده است) و سطح میز تحریر نیز از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است و نمی‌توان گفت که تعداد نقاط روی سطح میز تحریر، از تعداد نقاط صفحهٔ مجله برهان بیشتر است. مثال دیگری می‌آوریم.

مجموعهٔ اعداد طبیعی: N را در نظر می‌گیریم.

$$N = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد طبیعی است، آن را (2N) می‌نامیم.

$$۲N = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$$

چون مجموعهٔ اعداد طبیعی نامتناهی است، پس مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج هم نامتناهی است. با این حال، نمی‌توان گفت تعداد

اعضای مجموعهٔ اعداد طبیعی بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج است.

تعبیری برای مفهوم (∞−) : اگر متغیر x ضمن کم شدن از هر عدد منفی فوق‌العاده کوچکی مانند $-N, \ldots, -M$ کوچکتر شود، می‌گوییم x به سمت عدد بسیار کوچک منفی میل می‌کند و می‌گوییم x به سمت (∞−) میل می‌کند.

سؤال (۳) : آیا حاصل (∞− و ∞+) برابر صفر است؟

همان طور که پیش از این گفته شد، ∞ ها قابل سنجش نیستند، پس نمی‌توان گفت حاصل (∞− و ∞+) صفر است. این نماد، یکی از صورتهای مبهم در جبر است.

سؤال (۴) : هر عدد تقسیم بر صفر برابر چیست؟ یعنی $\frac{\text{عدد}}{\circ} = ?$ آیا این که می‌گویند $\frac{\text{عدد}}{\circ}$ برابر(∞)است، درست است؟

در پاسخ به این سؤال، باید گفت اولاً : $\frac{\text{عدد}}{\circ}$ در ریاضی تعریف نشده است ؛یعنی $\frac{\text{عدد}}{\circ}$ بی‌معناست. مانند این است که بگوییم می‌خواهیم ۱۰۰۰۰ تومان پول را بین صفر نفر تقسیم کنیم. ملاحظه می‌کنیم خود عبارت بی‌معناست. ثانیاً : هیچ چیز در ریاضی مساوی ∞ نیست.

مثلاً نمی‌توان نوشت $x = \infty$ یا $y = \infty$ یا $t = \infty$.

باید نوشت $x \to \infty$ یا $y \to \infty$ یا $t \to \infty$.

حال سؤال (۴) را به صورت دقیقتر مطرح می‌کنیم :

هر عدد (به جز صفر) تقسیم بر $\circ^+$ یا $\circ^-$ به سمت چه عددی میل می‌کند؟

در پاسخ باید گفت مثبت یا منفی بودن خود عدد (بجز صفر) هم مطرح است. برای درک بهتر به مثالهای زیر دقت کنیم که به طور طبیعی مفهوم حدّ را وارد این بحث خواهد کرد (که خود حدّ، بحث مفصل و جداگانه‌ای است).

$$\left\{\lim_{x\to\circ^+} \frac{+5}{x} = \frac{+5}{\circ^+} \to +\infty\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to\circ^-} \frac{+5}{x} = \frac{+5}{\circ^-} \to -\infty\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to\circ^+} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{\circ^+} \to -\infty\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to\circ^-} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{\circ^-} \to +\infty\right.$$

و به طور کلی‌تر می توان نوشت :

$$a \neq \circ \ , \ \begin{cases} a > \circ \Rightarrow \left\{\lim_{x\to\circ^+} \frac{a}{x} = \frac{a}{\circ^+} \to +\infty\right. \\ a > \circ \Rightarrow \left\{\lim_{x\to\circ^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{\circ^-} \to -\infty\right. \end{cases}$$

$$a \neq \circ \ , \ \begin{cases} a < \circ \Rightarrow \left\{\lim_{x\to\circ^+} \frac{a}{x} = \frac{a}{\circ^+} \to -\infty\right. \\ a < \circ \Rightarrow \left\{\lim_{x\to\circ^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{\circ^-} \to +\infty\right. \end{cases}$$

حال به پاسخ سؤال تصحیح شده (۴) می‌پردازیم :

عدد مثبت تقسیم بر $\circ^+$ به سمت ∞+ میل می‌کند.

عدد مثبت تقسیم بر $\circ^-$ به سمت ∞− میل می‌کند.

عدد منفی تقسیم بر $\circ^+$ به سمت ∞− میل می‌کند.

عدد منفی تقسیم بر $\circ^-$ به سمت ∞+ میل می‌کند.

مثال: مقدار حد کسر $\frac{[x]-2}{x-2}$ وقتی $x \to 2^-$ چقدر است؟

حل:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2^-]-2}{\circ^-} = \frac{1-2}{\circ^-} = \frac{-1}{\circ^-} \to +\infty$$

سؤال (۵) : مقدار $\frac{\circ}{\circ}$ چیست؟

جواب: $\frac{\circ}{\circ}$ در ریاضی تعریف نشده است و آنچه به نام $\frac{\circ}{\circ}$ در کتابها ملاحظه می‌کنید، عبارتهایی نظیر $\frac{\circ^+}{\circ^+}$ یا $\frac{\circ^+}{\circ^-}$ یا $\frac{\circ^-}{\circ^+}$ یا $\frac{\circ^-}{\circ^-}$ است.

در کسرهایی مانند $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر $g(a) = f(a) = \circ$ وقتی $x \to a$ در این صورت، $f(x)$ و $g(x)$ به سمت صفر میل می‌کنند و دقیقاً مساوی با صفر نیستند، بنابراین بسته به این که x از چه سمتی به a میل کند، کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از صورتهای $\frac{\circ^\pm}{\circ^\pm}$ تبدیل می‌شود که به اصطلاح آن را $\frac{\circ}{\circ}$ می‌گوییم.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال: مقدار حدّ کسر $\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ وقتی $x \to ۱^+$ چیست؟

حل:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\frac{۱^+-۱}{۱^+-۱}=\frac{۰^+}{۰^+}$$ مبهم است

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲^+ \text{ یا } ۲$$

مثال دیگر: مقدار حدّ کسر $\frac{۸-x^۳}{x^۲-۴}$ وقتی $x \to ۲^+$ چیست؟

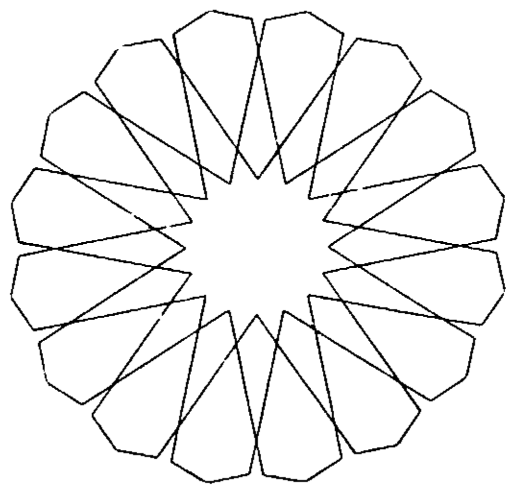
حل:

$$\left\{\lim_{x\to ۲^+}\frac{۸-x^۳}{x^۲-۴}=\frac{۸-۸^+}{۴^+-۴}=\frac{۰^-}{۰^+}\right.$$ مبهم است

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{۸-x^۳}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(۲-x)(۴+x^۲+۲x)}{-(۲-x)(۲+x)}$$

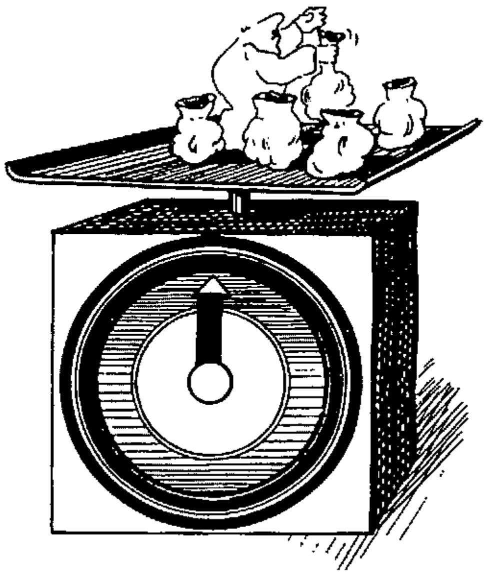
$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۴+x^۲+۲x}{-(۲+x)}=\frac{۴+۴^++۴^+}{-(۴^+)}$$

$$=\frac{۱۶}{-۴}=-۴$$





تفریح اندیشه ۲



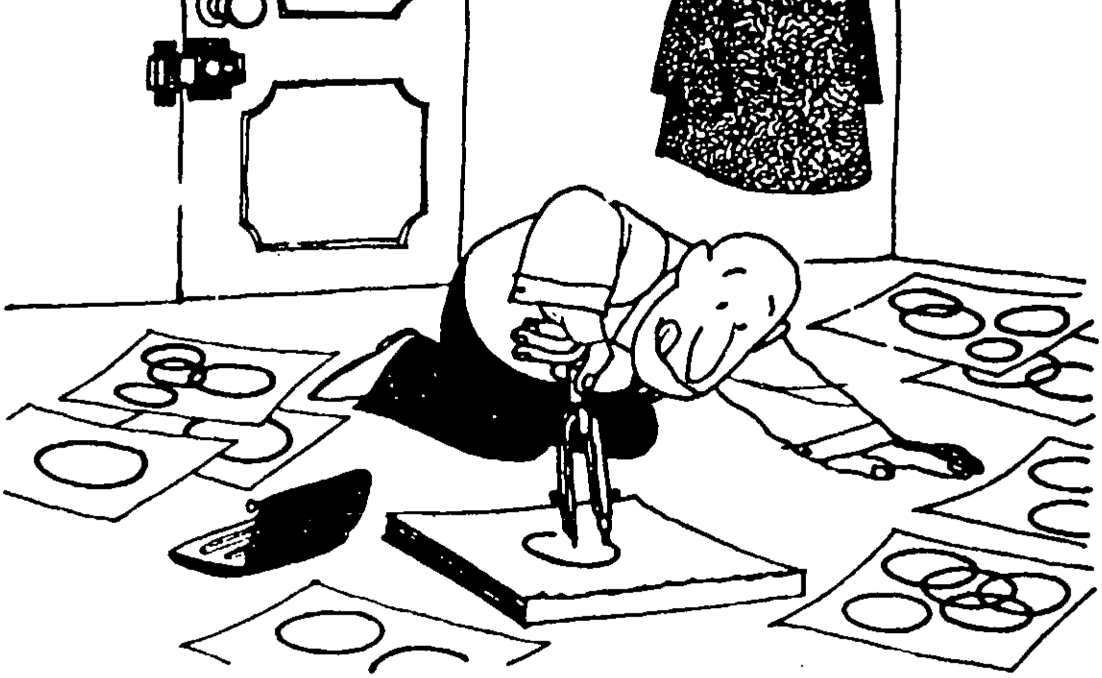
۵ کیسه داریم که در هرکدام ۲۰ سکه وجود دارد. وزن هر سکه باید ۱۰ گرم باشد، اما در سه کیسه وزن هر سکه ۱۰ گرم، در یک کیسه ۹ گرم و در کیسه دیگر ۱۱ گرم است.

چگونه می‌توانیم فقط با یک بار وزن کردن، کیسه‌ای را که دارای سکه‌های سنگین‌تر است و کیسه‌ای را که سکه‌های آن سبکتر می‌باشد مشخص کنیم.

این اندازه گیری توسط یک **ترازوی یک کفه‌ای** انجام می‌گیرد که وزن وزنه‌های گذاشته شده روی آن را بادقت نشان می‌دهد.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



مسألهٔ حل مسأله‌های ریاضی (۱)

• عبدالحسین مصحفی

نه تنها بیشتر دانش‌آموزان، بلکه بیشتر مردمان، حلّ مسأله‌های ریاضی را کاری مشکل می‌پندارند. اینان در واقع با مسألهٔ چگونگی حلّ مسأله‌های ریاضی درگیرند؛ امّا کمابیش با این مسأله بیگانه‌اند. دربارهٔ آن بخوبی نمی‌اندیشند، نمی‌دانند با چه ابزاری باید با آن روبه‌رو شوند، گاه ناخودآگاه این ابزار را بدرستی به کار نمی‌برند، گاه مسأله‌ای را ناتمام حل می‌کنند و گمانشان این است که آن را بتمامی حل کرده‌اند. گاه به جای راه حل سادهٔ مسأله، راه حلّی طولانی و وقت‌گیر را در پیش می‌گیرند، گاه شتاب‌زده مسأله را عوضی می‌فهمند و مسأله‌ای دیگر را به جای آن حل می‌کنند و ناهنجاریهایی دیگر. چنین ناهنجاریها زادهٔ چه علتهایی‌اند؟ در جستجوی پاسخ با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شویم که می‌توانیم آن را مسألهٔ حل مسأله‌های ریاضی بنامیم. مسأله‌ای که گستره‌اش نه تنها هر سطحی از آموزش ریاضی، بلکه رفتارها و رابطه‌های فردی، خانوادگی، اجتماعی و روان‌شناختی را نیز دربرمی‌گیرد و بررسی همه جانبهٔ آن، زمینهٔ چندین جلد کتاب می‌تواند باشد. در این نوشتار گوشه‌هایی از این مسألهٔ گسترده یادآوری می‌شود.

حفظ کردن و نه خوب فهمیدن

دانش‌آموز اگر چنان بار آمده باشد که یادگیری ریاضیات را حفظ کردن قاعده‌های آن بداند، از درک صحیح تعریفها و مفهومهای ریاضی بازمانده باشد و یا سرسری از آن بگذرد، برای حلّ مسأله‌های ریاضی توانایی لازم را نخواهد داشت. توانایی در حلّ مسأله‌های ریاضی، ذهن خلاق می‌خواهد که چنین دانش‌آموزی از آن محروم مانده است. دانش‌آموزانی از این گونه اگر ده‌ها کتاب حل مسأله را فراهم آورند، به کلاسهای تقویتی جوروا‌جور بروند، به آموزش مکاتبه‌ای روی آورند، معلم سرخانه هم بگیرند، اما اگر آنچه را در عمل انجام می‌دهند مرور حل مسأله‌ها باشد، بدون آن‌که بر آن شوند آنها را به فکر خود حل کنند، آن‌گاه که با مسأله‌ای ناآشنا روبه‌رو شوند، از حل آن درمی‌مانند و در آزمونها هم به کامیابی‌های درخشان دست نمی‌یابند و آن گونه که می‌خواهند به خواستشان نمی‌رسند. اینان اگر مسأله‌ای را چندین بار هم مرور کرده باشند، چون آن مسأله را با تغییری در ساختارش یا در نوع بیانش در برابرشان قرار دهند، آن را ناآشنا می‌یابند و در حلّ آن سرگردان می‌مانند.

مثال ۱. در یک ماشین حساب، کلید عمل جمع از کار افتاده است، اما کلیدهای مربوط به عملهای دیگر حساب همه بخوبی کار می‌کنند. اگر خواسته باشیم حاصل عبارت:

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

را به ازای مقدارهای داده شده با همین ماشین حساب به دست آوریم، چگونه باید عمل کنیم؟

دانش‌آموزی که برای حل مسأله‌ها تنها در فکر به کار بردن قاعده‌هایی باشد که آنها را حفظ کرده است، مسألهٔ با این بیان را ناآشنا می‌یابد. درصورتی که مسأله‌ای ساده است؛ اگر این عبارت در $x-1$ ضرب و بر آن تقسیم شود به صورت:

$$\frac{x^6-1}{x-1}$$

در می‌آید و در محاسبهٔ این عبارت به ازای هر مقدار داده شده، عمل جمع به کار نمی‌رود.

مثال ۲. y بر حسب x یک دوجمله‌ای از درجهٔ یکم است. اگر همان عملی که روی x انجام می‌گیرد تا y به دست آید، روی y انجام گیرد، دو جمله‌ای $4x+15$ به‌دست می‌آید. دو جمله‌ای برابر با y کدام است؟

این مسأله با این گونه بیان نیز برای چنین دانش‌آموزانی نمودی ناآشنا دارد و درمی‌مانند که کدام قاعده را باید روی آن به کار ببرند. در صورتی که اگر گفته می‌شد «اگر $y=f(x)=ax+b$، به فرض $f(y)=4x+15$، مقدار a و مقدار b را حساب کنید.» دیگر ناآشنا نمی‌نمود و پی بردن به راه حل آن دشواری نداشت:

$$f(y)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

$$a^2x+ab+b\equiv 4x+15$$

$$\begin{cases}a^2=4\\ ab+b=15\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{matrix}a=2\\ b=5\end{matrix}\right.\quad \text{یا}\quad \left|\begin{matrix}a=-2\\ b=-15\end{matrix}\right.$$

$$y=2x+5 \quad \text{یا}\quad y=-2x-15$$

ناآگاه ماندن از راه حلّ سادهٔ مسأله

تکیه بر به کار بردن قاعده‌ها برای حل مسأله‌ها، گاه موجب می‌شود که دانش‌آموز به جای راه حل بسیار سادهٔ مسأله‌ای، راهی طولانی و وقت‌گیر را در پیش بگیرد، که بویژه در آزمونهای با وقت محدود برای او زیان‌آور خواهد بود.

مثال ۳. در یک پرسش چند گزینه‌ای باید معلوم شود تا مجموعهٔ جوابهای مثبت معادلهٔ

$$x^3+3x+2=0$$

چند عضوی است. دانش‌آموزی که برای حل هر مسأله‌ای تنها در فکر به کار بردن قاعده‌ای از قاعده‌های آموخته شده باشد، به محاسبهٔ مبین $4p^3+27q^2$ و به یافتن علامت آن و به یافتن علامت ریشه‌ها روی می‌آورد و وقت زیادی را روی این کار از دست می‌دهد. اما آن دانش‌آموزی که ذهنش خلّاق و بارور بار آمده باشد، با یک نگاه به معادله درمی‌یابد که اگر x مثبت باشد، طرف اول معادله که مجموع سه مقدار مثبت است، مثبت می‌باشد و نمی‌تواند صفر باشد، و خیلی زود و بدون هیچ عملی پی می‌برد که مجموعهٔ جوابهای مثبت معادله، مجموعهٔ تهی است.

ذهن پویا و نه ذهن راکد

به هنگام حلّ هر مسأله، ذهن باید مانند یک رادار به همهٔ آموخته‌های قبلی توجه داشته باشد و روی مبحثی معین متمرکز نباشد. بیشتر دانش‌آموزان به آنچه بتازگی آموخته‌اند بیشتر توجه دارند، که گاه موجب می‌شود از توجه به راه حلّ سادهٔ مسأله‌ای غافل بمانند.

مثال ۴. در مجموعهٔ عددهای حقیقی، معادلهٔ زیر به ازای چه مقدار از a دارای جواب است؟

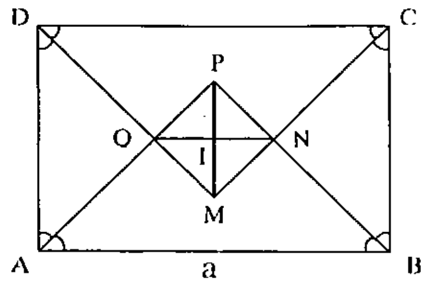
$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=a$$

برای حلّ این مسأله، بیشتر دانش‌آموزان به مرتب کردن معادله و تبدیل آن به معادله‌ای درجه دوم و یافتن شرط جواب داشتن آن روی می‌آورند و مدتی را برای آن صرف می‌کنند. اما آن دانش‌آموزانی که ذهنشان پویایی لازم را داشته باشند، با توجه به این ویژگی که «مجموع هر عدد حقیقی و عکس آن از ۲ ناکوچکتر و از ۲- نابزرگتر است»، و با توجه به این که هیچ یک از کسرهای به کار رفته در معادله نمی‌تواند برابر با ۱ باشد، بدون هیچ محاسبه به پاسخ $a>2$ یا $a\le -2$ دست می‌یابد.

مثال ۵. در یک مسابقه، یکی از مسأله‌های داده شده چنین بوده است: «از برخورد نیمسازهای زاویه‌های یک مستطیل با بعدهای a و b، یک چهارضلعی پدید می‌آید. ثابت کنید این چهارضلعی مربع است و درازای قطر آن را بر حسب a و b به‌دست آورید.»

در حل مسأله‌های محاسبه‌ای هندسه، ذهن دانش‌آموزان بیشتر متوجه قضیهٔ فیثاغورس و قضیه‌های دیگر رابطه‌های اندازه‌ای می‌شود. از این رو بعید نیست که دانش‌آموزانی مسأله را چنین حل کرده باشند، که نخست ثابت کنند هر یک از مثلثهای پدید آمده روی هر ضلع مستطیل، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و نتیجه بگیرند زاویه‌های چهارضلعی پدید آمده، همه قائمه‌اند و این چهارضلعی مستطیل است. آن‌گاه از راه به کار بردن قضیهٔ

فیثاغورس در مثلثهای APB و BNC به‌دست آورند :



$$AP = BP = \frac{a\sqrt{2}}{2} \ , \ BN = CN = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$PN = PB - BN = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$$

$$PQ = PA - AQ = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$$

و نتیجه بگیرند : چون دو ضلع مجاور مستطیل MNPQ اندازه‌های برابر دارند این مستطیل مربع است و برای به‌دست آوردن درازای قطر مربع، باز قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث PQN به‌کار ببرند و درازای QN را برابر با $a - b$ به‌دست آورند.

اما باز هم بعید نیست که دانش‌آموزان دیگری، راه ساده‌تر زیر را به کار برده باشند : پس از اثبات این‌که هر یک از چهار مثلث پدید آمده روی ضلعهای مستطیل قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین و چهارضلعی پدیده آمده، مستطیل است، با توجه به این قضیه که نیمساز زاویهٔ رأس در مثلث متساوی الساقین، عمود منصف قاعده است، نتیجه بگیرند که نیمسازهای دو زاویهٔ M و P و همچنین نیمسازهای دو زاویهٔ N و Q، عمود منصفهای دو ضلع روبه‌رو از مستطیل ABCD هستند و بر هم واقع‌اند و بنابر آن، دو قطر MP و NQ از مستطیل MNPQ بر هم عمودند و این مستطیل، مربع است. به دنبال این، نیز نتیجه بگیرند که I مرکز مربع از AB به فاصلهٔ $\frac{b}{2}$ و از BC به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ است و :

$$IN = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \Rightarrow NQ = a - b$$

در مسابقه‌ها که نوع راه حلِّ به کاررفته هم برای مسأله امتیاز داشته باشد، آن دانش‌آموزی جلو می‌افتد که راه حلی ساده‌تر و کوتاهتر را به کار برده باشد.

توجه به مفهوم صحیح تعریفها

عادت کردن به حلِّ مسأله‌ها از راه به کار بردن قاعده و بی‌توجهی به مفهوم صحیح تعریفها، که متأسفانه دامنگیر بیشتر دانش‌آموزان است، از جمله عاملهایی است که گمراهی و اشتباه در حلِّ مسأله‌ها را به دنبال دارد.

مثال ۶. مقدار m را به دست آورید که نقطهٔ M با مختصهای زیر از دو محور مختصها به یک فاصله باشد :

$$M(x = 4m + 1 \ , \ y = m^2 - 3)$$

دانش‌آموزانی که مفهوم دقیق تعریف مختص نقطه را درنیافته باشند، دو مفهوم فاصله و مختص را با هم اشتباه می‌گیرند و چنین عمل می‌کنند :

$$4m + 1 = m^2 - 3$$

$$m^2 - 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

و دو جواب مسأله را از دست می‌دهند. یکی گرفتن دو مفهوم فاصله و مختص نقطه، اشتباهی فاحش است که متأسفانه نمونهٔ آن در کتابها و بسیاری از جزوه‌های مکاتبه‌ای نیز به چشم می‌خورد. فاصله، یک عدد مطلق است و مختصهای نقطه، عددهایی جبری‌اند و راه حل صحیح مسأله چنین است :

$$|4m + 1| = |m^2 - 3|$$

$$4m + 1 = \pm(m^2 - 3)$$

یا : $m^2 - 4m - 4 = 0 \ , \ m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

یا : $m^2 + 4m - 2 = 0 \ , \ m = -2 \pm \sqrt{6}$

مثال ۷. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{x+1}.\sqrt{x-1}$ را به‌دست آورید.

ممکن است دانش‌آموزانی این تابع را به $y = \sqrt{x^2 - 1}$ تبدیل کنند و دامنهٔ آن را چنین بدانند :

$$D = \{x : x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1\}$$

که اشتباه فاحش است. عملهای ضرب، تقسیم و توان رادیکالها در مجموعهٔ عددهای حقیقی تعریف شده‌اند و نمی‌توان آنها را روی رادیکالهای غیر حقیقی به کار برد. در تابع داده شده باید نابرابریهای $x + 1 \geq 0$ و $x - 1 \geq 0$ هر دو با هم برقرار باشند، که نتیجه می‌شود $x \geq 1$ و دامنهٔ تابع عبارت است از :

$$D = \{x : x \geq 1\}$$

به عبارت دیگر داریم :

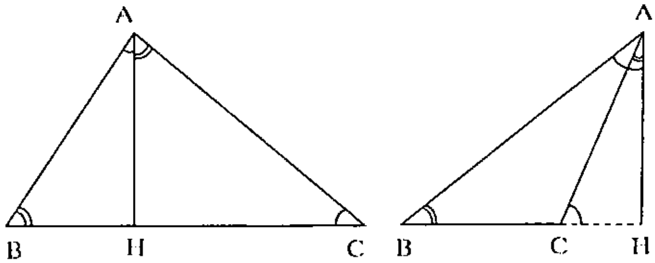
$$y=\sqrt{x+1}.\sqrt{x-1}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{x^2-1}\\x\geq 1\end{cases}$$

نادیده گرفتن همهٔ حالتهای ممکن شکل

در مسأله‌های هندسه، و مسأله‌هایی دیگر، عموماً شکلی که رسم می‌شود، به یافتن راه حل مسأله کمک می‌کند. این شکل اگر همهٔ شرطهای مربوط به داده‌ها را دارا نباشد، چه بسا گمراه‌کننده باشد و اگر همهٔ حالتهای ممکن آن رسم نشوند، چه بسا که جوابهایی از مسأله از قلم بیفتند.

مثال ۸. در مثلث ABC، ارتفاع AH واسطهٔ هندسی بین BH و CH است. بین اندازه‌های دو زاویهٔ B و C چه رابطه‌ای برقرار است؟

ممکن است دانش‌آموزانی بر این گمان باشند که عکس قضیهٔ «در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو پاره خطی که روی وتر جدا می‌کند» نیز صحیح است و بنابر آن نتیجه بگیرند که مثلث قائم‌الزاویه و مجموع دو زاویهٔ B و C برابر با ۹۰ درجه است، اما این نتیجه‌گیری کامل نیست. ارتفاع نظیر هر رأس از مثلث، بنابر آن که دو زاویهٔ روبه‌رو به آن، هر دو حادّه یا یکی از آنها منفرجه یا قائمه باشد، یا در درون مثلث یا در بیرون آن و یا روی یک ضلع آن می‌تواند واقع باشد، و همهٔ این حالتها را باید در نظر گرفت. در این مسأله، ارتفاع AH نمی‌تواند روی AB یا AC واقع باشد زیرا در چنین حالت یا BH یا CH صفر است و AH هم باید صفر باشد و مثلث به یک پاره خط تبدیل می‌شود. از این رو برای شکل مسأله باید دو حالت را در نظر بگیریم :

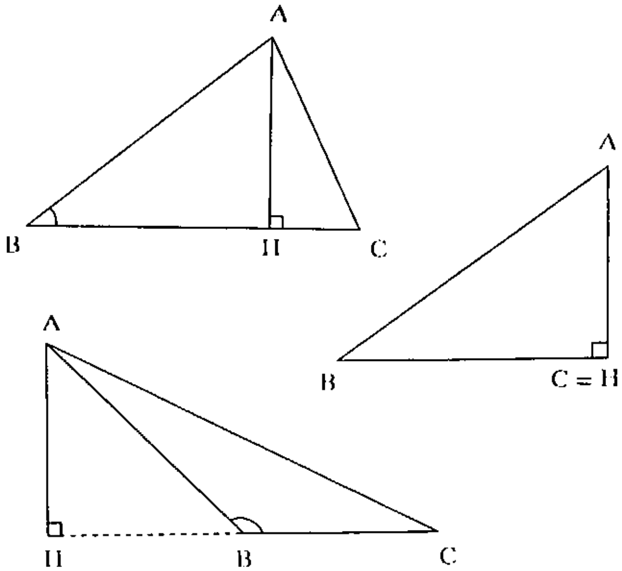


در هر دو حالت از فرض $\overline{AH}^2=BH.CH$ تناسب $AH/BH=CH/AH$ به دست می‌آید و نتیجه می‌شود دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و دو زاویهٔ ABH و CAH با هم و دو زاویهٔ ACH و BAH نیز با هم برابرند. در حالتی که AH درون مثلث ABC باشد، به دست می‌آید که مجموع دو زاویهٔ B و C از آن برابر 90° (و مثلث در زاویهٔ A قائمه) است، و در حالتی که AH بیرون مثلث ABC باشد، به‌دست می‌آید که تفاضل دو زاویهٔ B و C از آن برابر 90° (و مثلث در زاویهٔ A شبه قائمه) است. بنابراین :

$$\overline{AH}^2=BH.CH\Rightarrow|\angle B\pm\angle C|=90^\circ$$

مثال ۹. در مثلث ABC، ارتفاع AH با نصف ضلع AB برابر است. زاویهٔ B از مثلث، چند درجه می‌تواند باشد؟

در این مسأله هم بنابر آن که ارتفاع AH، درون یا بیرون مثلث یا روی AC باشد، سه حالت را باید در نظر گرفت : C و H در



یک طرف، یا در دو طرف B، یا این‌که H روی C باشد. در هر یک از سه حالت، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، چون ضلع AH نصف وتر AB است، زاویهٔ ABH به اندازهٔ ۳۰ درجه است و زاویهٔ B در حالت کلّی با زاویهٔ ABH یا برابر یا مکمل است یعنی ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه است.

تمرین ۱

۱ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=2$$

۲ـ در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ AB برابر با a و قاعدهٔ CD برابر با b است، دو پاره خط

$$MN = \frac{a+b}{۲}\ ,\ PQ = \sqrt{ab}$$

موازی با دو قاعده و محدود به دو ساق رسم شده‌اند که از این دو، MN به AB نزدیکتر است. از دو عدد a و b کدام کوچکتر و کدام بزرگتر است؟

۳ـ دو مجموعهٔ A و B به شرح زیر نسبت به هم چه وضعی دارند:

A = {x | x حرفی از واژهٔ «ایران» است}

B = {x | x حرفی از واژهٔ «ایرانیان» است}

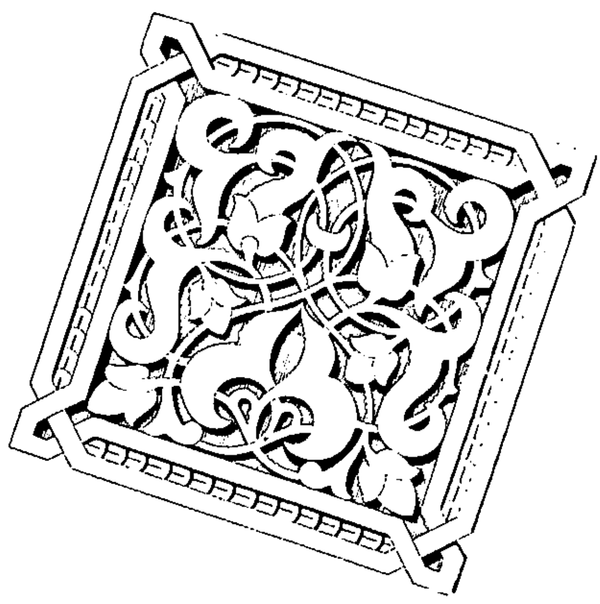
۴ـ در مستطیل ABCD، ضلع AB به اندازهٔ a و ضلع BC به اندازهٔ b است. عمودی که از C بر قطر BD رسم شود، با AB در M برخورد می‌کند. اندازهٔ پاره خط AM را به دست آورید.

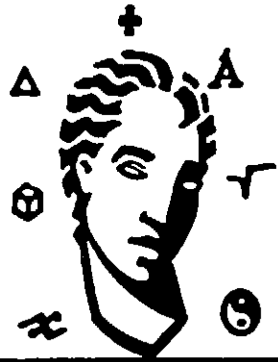
۵ـ اگر a، b، c، ...، e و f عددهای حقیقی مثبت باشند، به گونه‌ای که:

$$\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=\frac{f}{g} \\ g=۹a \end{cases}$$

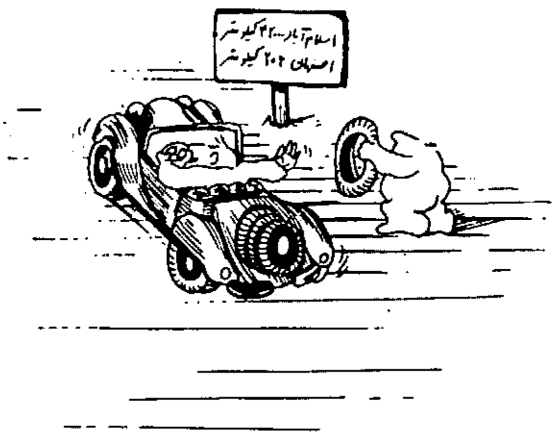
عدد b چند برابر عدد a است؟

۶ـ در مثلث ABC، میانهٔ AM با ارتفاع CH برابر است. اندازهٔ زاویهٔ BAM را به‌دست آورید.





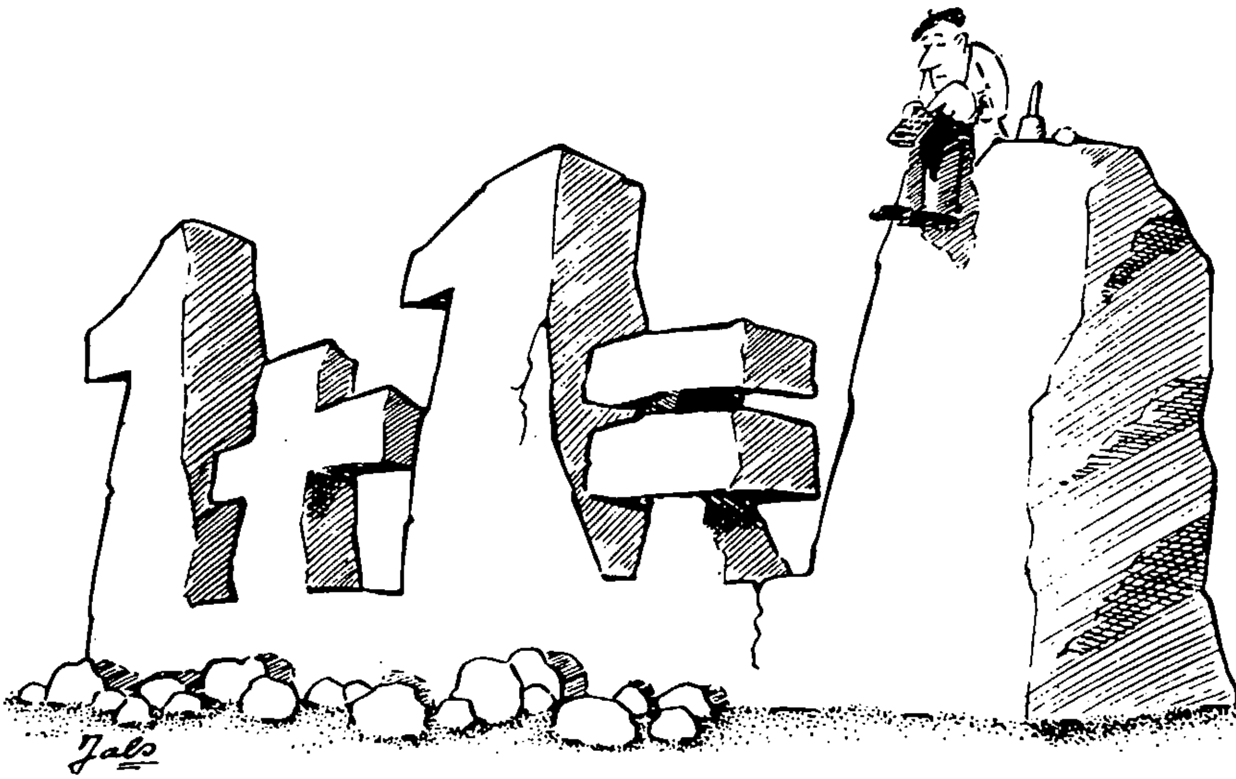
تفریح اندیشه۳



مهرداد خودش را برای یک مسافرت ۴۲۰۰۰ کیلومتری آماده می‌کند. اتومبیل او ۴ چرخ دارد که بعد از پیمودن هر ۲۴۰۰۰ کیلومتر باید توییهای لاستیکها را عوض کند. مهرداد فکر می‌کند که برای پیمودن این راه، ۷ تویی برایش کافی است؛ آیا حق با اوست؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



چند کلمه دربارهٔ مبانی ریاضی

● ترجمهٔ دکتر منوچهر وصال/ویراستهٔ سیامک کاظمی

اقتباس از کتاب مبانی ریاضیات «کارول شوماخر»[1]

استدلال ریاضی

در استدلال ریاضی، برای استنباط نتایج **(قضایا)** از فرضهای اساسی **(اصول موضوع)**، استدلالهای منطقی را به کار می‌بندند. تقریباً همهٔ ریاضیات بر پایهٔ مجموعه‌ها بنا شده است؛ بنابراین فرضهای اساسی اصول موضوع، نظریهٔ مجموعه‌ها هستند. اما در عمل بندرت به طور مستقیم به این اصول موضوع استناد می‌شود. ریاضیدان، بیشتر اوقات، از فرضهای فرعی و بیش از همه از تعریفها، که طبق اصول با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها قابل توجیه‌اند، استفاده می‌کند. فرضها، خواه اصول موضوع واقعاً بنیادی باشند، خواه اصول موضوع فرعی و تعریفها، نقطهٔ آغازین زنجیره‌های استدلال منطقی دقیقی هستند که به قضیه‌ها می‌انجامند. در این کار، از گونهٔ خاصی از زبان طبیعی استفاده می‌شود. این «زبان ریاضی» برای بیان دقیق و بدون ابهام مفهومهای ریاضی، طرّاحی شده است.

تصمیم گیری دربارهٔ فرضها

کمی از موضوع خارج می‌شویم. اغلب ما با پنج اصل موضوع هندسه مسطحهٔ اقلیدس که سیصد سال پیش از میلاد وضع شده، آشنا هستیم. این اصول موضوع، به زبان امروز، به صورت زیر بیان می‌شوند:

۱ ـ خط با دو نقطه مشخص می‌شود.
۲ ـ پاره‌خط را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد.
۳ ـ دایره با یک نقطه و یک شعاع مشخص می‌شود.
۴ ـ دو زاویهٔ قائمه برابرند.
۵ ـ به ازای هر خط و هر نقطهٔ مفروضی که روی این خط نباشد، یک و تنها یک خط از این نقطه به موازات خط اوّل می‌گذرد. (این در واقع روایت «جان پلی‌فر» (۱۸۱۹ ـ ۱۷۴۸) از اصل موضوع پنجم است. بیان اصلی اقلیدس، کمی پیچیده‌تر است.)

اقلیدس توانست از این پنج حکم همهٔ هندسهٔ زمان خودش را به طور دقیق نتیجه بگیرد. روش اصل موضوعی، آن قدر موفق بود که الگوی تفکّر ریاضی شد. **«اصول اقلیدس»** بیش از ۲۰ قرن کتاب درسی هندسه بود و حتی امروز، اکثر شاگردان هندسه، با روش کلی اصول اقلیدس هندسه می‌آموزند.

پس اقلیدس، کار بسیار بزرگی انجام داده است. او در وهلهٔ اوّل، نقطهٔ آغاز کار خود را چگونه انتخاب کرد؟ اقلیدس و همهٔ هندسه‌دانان، تا قرنها بعد از او، بر این باور بودند که اصول موضوع او نوعی حقیقت مطلق را دربارهٔ صفحه دربر دارد. او مفهومهایی شهودی از صفحه، خط و جز اینها، در نظر داشت و اصول موضوعی را که فکر می‌کرد آنها را توصیف می‌کنند وضع کرد. هندسه‌دانان، چهار اصل موضوع اول او را پسندیدند؛ اما بحثهای زیادی دربارهٔ اصل موضوع پنجم درگرفت. (هیچ‌کس در درستی آن شک نداشت؛ اما بسیاری تصور می‌کردند به عنوان فرض اصلی لازم نیست. فکر می‌کردند که می‌توان آن را از چهار اصل موضوع اوّل نتیجه گرفت.) این حکایت طولانی را کوتاه می‌کنیم، در نیمهٔ اوّل قرن نوزدهم، هندسه‌های نااقلیدسی اختراع شدند؛ یعنی دستگاه‌هایی هندسی که هر یک در درون خود کاملاً سازگار بودند، بر پایهٔ اصول موضوع یک تا چهارم و یک اصل موضوع جدید دربارهٔ خطوط موازی که اصل پنجم اقلیدس را نقض می‌کند، ابداع شدند. مثلاً اصل موضوع جدید ممکن است این باشد:

۵ـ به ازای هر خط و هر نقطهٔ مفروضی که روی این خط نباشد، **بیش از یک خط** موازی با خط مفروض می‌گذرد.

هندسه‌ای که از این مجموعهٔ اصول موضوع جدید حاصل می‌شود، هندسهٔ «نااقلیدسی» نامیده می‌شود؛ این هندسه را می‌توان هندسهٔ «رویهٔ خمیده» تعبیر کرد که در آن خمهایی در رویه، نقش خطها را بازی می‌کنند. سرانجام «صفحه»، «خط» و «نقطه» به‌رغم تعبیری که اقلیدس از آنها کرده است، اصطلاحهای **تعریف نشده** هستند. بنابراین آیا این که فکر می‌کردند اصول اقلیدس، حقیقت مطلق است، درست است.

آری و نه. در واقع این سؤال نادرست است. درست پس از کشف هندسهٔ نااقلیدسی، ریاضیدانان به این نتیجه رسیدند که انتخاب اصول موضوع ریاضی **کاملاً دلخواه است**؛ به شرط این که اصول موضوع انتخاب شده، باهم سازگار باشند (یعنی تناقضی به وجود نیاورند).

کاملاً می‌توان جهانی را تصور کرد که از قوانین هندسهٔ نااقلیدسی پیروی می‌کند[۲]. بنابراین، مجموعه‌های مختلف اصول موضوع، ممکن است به یک اندازه معتبر باشند ولی برابری اعتبار، به این معنا نیست که هر مجموعهٔ اصول موضوع باهم سازگار، به خوبی هر مجموعهٔ دیگری است. وقتی مجموعهٔ خاصی از اصول موضوع را می‌پذیریم، معمولاً منظوری در ذهن داریم. اقلیدس، اصول موضوعش را برای بیان دقیق درک شهودی خود از صفحهٔ هندسه انتخاب کرد. اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، تصور معمولی ما را از مجموعه بیان می‌کند. همچنین اصول موضوع اعداد حقیقی، اعداد حقیقی را توصیف می‌کنند. در هر یک از این حالتها، با اصول موضوع، ایدهٔ مجردی به صورتی دقیق بیان می‌شود و به این ترتیب، تحلیل ریاضی دقیق آن ممکن می‌شود.

آنچه گفتیم، برای تعریفها هم درست است. تعریفها اختیاری هستند؛ اما با دقت انتخاب می‌شوند. مثلاً در هندسهٔ مسطحه، می‌توانیم دایره و سه نقطه را که روی دایره نباشند، تعریف یک شیء اختیار کنیم. اما این شیء جدید، احتمال دارد خیلی مفید نباشد. همچنین اگر از بی‌توجهی، مربع را یک چهار ضلعی با اضلاع مساوی تعریف کنیم، بزودی می‌بینیم که ممکن است زاویه‌های آن قائمه نباشند و سپس می‌توانیم تعریف را اصلاح کرده، مربع را چهارضلعی با اضلاع مساوی و زاویه‌های قائمه تعریف کنیم. وانگهی، لغت «مربع» معنای معمولی و شایع خود را دارد. برای حفظ ارتباطات و سهولت (و احترام به دیگران)، صلاح در این است که هر وقت ممکن است، از قراردادهای ریشه‌دار ریاضی پیروی کنیم. تعریفها، مانند اصول موضوع، برای بیان دقیق مفهومهای مفید، به نحوی که منطبق با عرف باشد ابداع شده‌اند.

برای کارکردن در ریاضیات چه چیز لازم داریم؟

اصول موضوع و تعریفها، نقطهٔ آغاز هستند. همین که در مورد فرضهای اساسی تصمیم گرفتیم، می‌توانیم کار را ادامه دهیم و اثبات قضیه‌ها را شروع کنیم. «برهان»، زنجیره‌ای از استدلالهای منطقی (و گاه بسیار طولانی) است که توسط آن، یک قضیهٔ ریاضی را از فرضهای اساسی نتیجه می‌گیریم. زنجیرهٔ استدلال، از اصول موضوع شروع و به گزاره‌ای که سعی در اثبات آن داریم، ختم می‌شود؛ اما در عمل، بندرت همهٔ حلقه‌های زنجیرهٔ استدلال را عرضه می‌کنیم. کافی است نشان دهیم که این گزاره، از قضیه‌هایی که پیش از این ثابت شده است، نتیجه می‌شود. وقتی قضیه‌ای را ثابت کردیم، درستی آن به اندازهٔ خود اصول موضوع، محرز شده است.

در مسأله‌ای که زنجیره‌های استدلال آن طویلند، یک حلقهٔ بد در یک زنجیره، آن‌را خراب می‌کند. اگر برهانی، یک مرحلهٔ نادرست داشته باشد، دیگر به هیچ وجه برهان نیست (اگرچه ممکن است بتوان اشتباه را رفع کرد و از آن یک برهان ساخت). بنابراین

اجتناب از خطا در هر مرحله بسیار مهم است.

کار اصلی برای اجتناب از برهانهای غلط، پیروی دقیق از قواعد منطق قیاسی است. در هر مرحلهٔ استدلال، برای ثابت کردن یک گزارهٔ جدید بر پایهٔ گزاره‌های قبلی، ازاین قواعد استفاده می‌شود. مرحله‌ای از استدلال که طبق قواعد منطق نباشد، بی‌اعتبار است؛ *حتی اگر به‌طوراتفاقی، گزارهٔ جدید راست باشد.* استدلال، متشکل از گزاره‌های راست معتبر نیست؛ اگر منطق به استنتاجهایی که گزاره‌ها را به هم مربوط می‌کنند، صحّه نگذاشته باشد. بنابراین لازم است که هر ریاضیدان، قواعد منطق قیاسی را بداند و با دقت زیاد، آنها رابه کار برد.

این کار، مشکلتر از آن است که به نظر می‌رسد. حکم ریاضی، ممکن است خیلی پیچیده باشد، در این صورت، تجزیه کردن آن به چند قسمت و فهمیدن این که چگونه با هم ترکیب می‌شوند، تا حدّی نیاز به مهارت دارد. مثلاً حتی نقیض گزاره ـ یعنی بیان گزارهٔ مخالف ـ که به نظر ساده می‌رسد، اگر گزاره پیچیده باشد، ممکن است چندان ساده نباشد. کوشش کنید نقیض گزارهٔ زیر را بیان کنید: «اگر هر وقت به فروشگاه می‌روید، مردم شما را بشناسند، آن‌گاه یا شما در شهر کوچکی زندگانی می‌کنید یا شخص خیلی مشهوری هستید.»

اگر زبانی که از آن استفاده می‌شود، نادقیق و مبهم باشد، حتی پیروی دقیق از منطق، کافی نیست. به همین دلیل است که ریاضیدانان، قراردادهای خاصی در مورد اصطلاحها و دستور زبان به وجود آورده‌اند که به مراتب، دقیقتر از زبان محاوره‌ای است. بنابراین، ریاضیدانان باید «زبان ریاضی» را بفهمند و بتوانند آن را به کار بندند.

دربارهٔ زبان ریاضی، نکته‌های زیادی وجود دارد. روشنترین نکته این است که زبان ریاضی، متضمّن تعداد خیلی زیادی اصطلاح است که با اصطلاحهایی که در زندگانی روزانه به کار می‌روند، متفاوت است و دربین آنها، نمادهای مجرّد فراوان است. از نمادها صرفاً برای راحتی کار استفاده می‌شود: نوشتن « x^2 » از نوشتن «مربع x » راحت‌تر است، و « $x \in A$ » جمع‌وجورتر از «x عضو مجموعهٔ A است» می‌باشد. در هرحالت، عبارت نمادی و عبارت غیرنمادی یک معنا دارند.

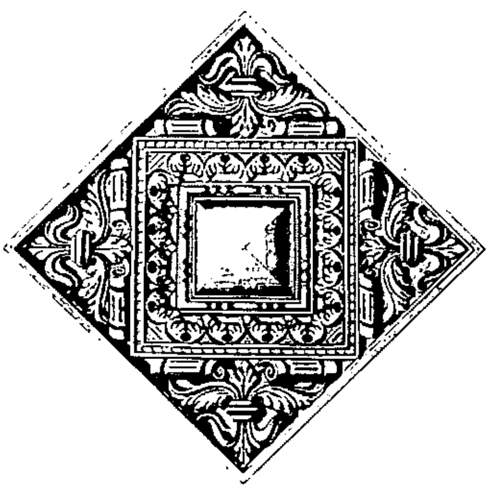
اما زبان ریاضی، خیلی بیش از اصطلاحهای غریب و عجیب و نمادهای رازآمیز، زبانی است بسیار صوری، دقیق و قاعده‌مند. اداتی مانند «اگر و تنها اگر»، «به ازای هر»، «وجود دارد» و جز اینها، بارها و بارها تکرار می‌شوند. این عبارتها، برای بیان رابطه‌های منطقی، با کمترین ابهام، با دقت انتخاب شده‌اند. نه تنها عبارتها، بلکه **ترتیب** آنها نیز بسیار اهمیت دارد. به تفاوت بین این دو گزاره بیندیشید: «برای هر زهری، داروی پادزهر وجود دارد.»، «دارویی وجود دارد که پادزهر هر زهری است.» دقت زبان معمولی، به قدری کم است که با این که زبان ریاضیات گونه‌ای از زبان طبیعی است، شاگرد مبتدی در ریاضیات مجرّد، ممکن است احساس کند که با یک زبان خارجی مواجه شده است.

با زبانی دقیق و منطقی دقیق، می‌توان استدلالهای ریاضی معتبر ساخت. اما مشارکت در کارهای گسترده‌تر ریاضی به معلومات عمومی در ریاضیات نیاز دارد. این معلومات عمومی، شامل ایده‌ها، قضایا و تکنیکهایی است که تقریباً در همهٔ شاخه‌های ریاضیات وجود دارد. کتابی در ریاضیات مجرّد را باز کنید، درآن به مجموعه‌ها، رابطه‌ها، تابعها، برهان مبتنی برعکس نقیض، استقرای ریاضی، رابطهٔ نزدیک بین رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها برمی‌خورید. به طور خلاصه، مجموعه‌ای از ایده‌هایی است که هر ریاضیدان می‌داند و به کار می‌بندد.

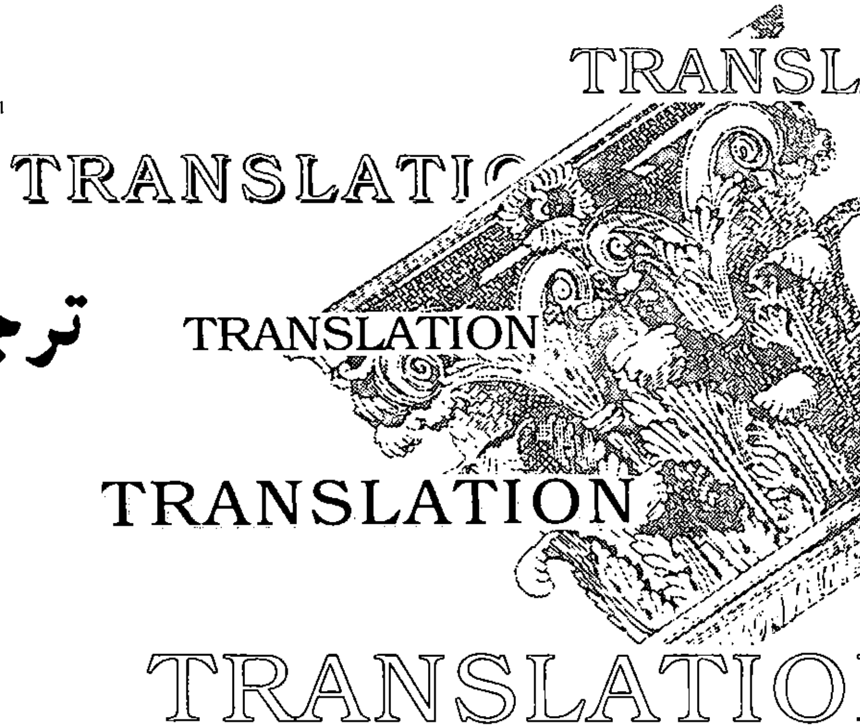
یادداشتها

۱ـ C. Schumächer–Chapter Zero : Fundamental Notions of Abstract Mathematics. Addison weseley, 1996.

۲ـ در واقع، در نظریهٔ نسبیت عام، فرض می‌شود که هندسهٔ جهان فیزیکی نااقلیدسی است.



آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۱)



• حمیدرضا امیری

Test 6

Time allowed: $1\frac{1}{4}$ hours

SECTION I

Questions 1–20 **(Twenty questions)**

تست ۶

زمان پیشنهادی: $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ ـ ۲۰ **(بیست سؤال)**

1. $\sin 5\theta - \sin 9\theta \equiv$

- **A** $-2\sin 7\theta\cos 2\theta$
- **B** $-2\sin 2\theta\cos 7\theta$
- **C** $-2\cos 7\theta\cos 2\theta$
- **D** $2\sin 2\theta\sin 7\theta$
- **E** $2\sin 2\theta\cos 7\theta$

۱. حاصل عبارت sin ۵θ − sin ۹θ کدام است؟

۱) −۲sin ۷θ cos ۲θ

۲) −۲sin ۲θ cos ۷θ

۳) −۲cos ۷θ cos ۲θ

۴) ۲sin ۲θ sin ۷θ

۵) ۲sin ۲θ cos ۷θ

2. The modulus of $(1-i)^6$ is

A 1 **B** $\sqrt{2}$ **C** 2

D $2\sqrt{2}$ **E** 8

۲. قدر مطلق $(۱-i)^{۶}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲

۴) $۲\sqrt{۲}$ ۵) ۸

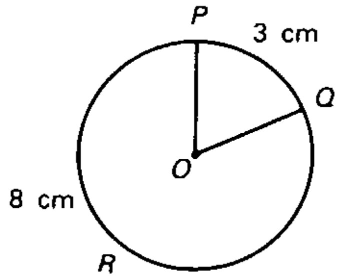
3. $\sum_{r=1}^{10} (2r)^2 =$

A 12 100 **B** 3025 **C** 2870 **D** 1540 **E** 770

۳. حاصل عبارت $\sum_{r=۱}^{۱۰}(۲r)^{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲۱۰۰ ۲) ۳۰۲۵ ۳) ۲۸۷۰ ۴) ۱۵۴۰ ۵) ۷۷۰

4.



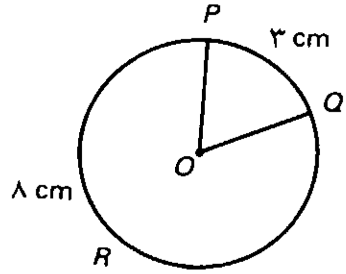
The minor arc PQ is of length 3 cm. The major arc QRP is of length 8 cm.
$\angle POQ =$

A $\frac{3}{8}$ radians B $\frac{3\pi}{11}$ radians

C $\frac{6\pi}{11}$ radians D $\frac{33}{2\pi}$ radians

E $\frac{8\pi}{11}$ radians

.۴



اندازهٔ کمان کوچک PQ، ۳ سانتیمتر است. اندازهٔ کمان بزرگ QRP، ۸ سانتیمتراست. اندازهٔ ∠POQ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ رادیان ۲) $\frac{۳\pi}{۱۱}$ رادیان

۳) $\frac{۶\pi}{۱۱}$ رادیان ۴) $\frac{۳۳}{۲\pi}$ رادیان

۵) $\frac{۸\pi}{۱۱}$ رادیان

5. In a convergent geometric progression the first term is 3 and the sum to infinity is 4. The fourth term of the progression is

A $\frac{3}{4}$ B $\frac{3}{64}$

C $\frac{3}{256}$ D $-\frac{3}{64}$

E $-\frac{3}{256}$

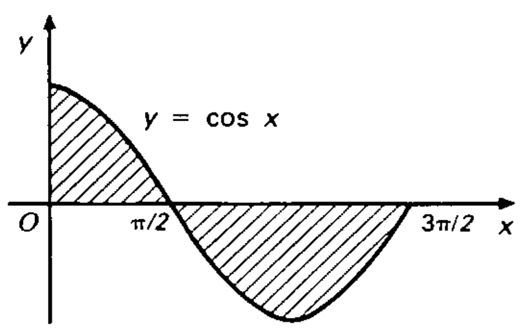
.۵ در یک تصاعد هندسیِ همگرا، جملهٔ اول ۳ و مجموع نامتناهی (حد مجموع) ۴ است. چهارمین جملهٔ این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۶۴}$

۳) $\frac{۳}{۲۵۶}$ ۴) $-\frac{۳}{۶۴}$

۵) $-\frac{۳}{۲۵۶}$

6.



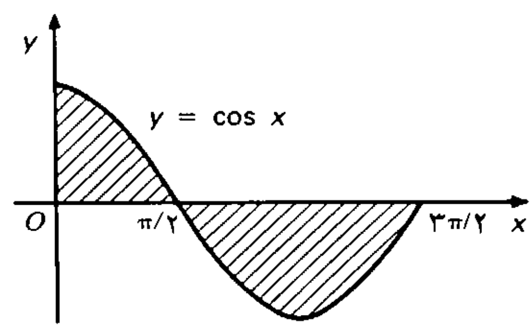
The total area, in square units, of the shaded regions is

A 3 B − 1

C 1 D 2

E − 2

.۶



مساحت کل، در واحد مربع، از قسمت هاشورخورده کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱−

۳) ۱ ۴) ۲

۵) ۲−

7. The complete solution set of the inequality
$$2|x| > |x - 1|,$$
where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x < -1\}$

B $\{x : x > \frac{1}{3}\}$

C $\{x : -1 < x < \frac{1}{3}\}$

D $\{x : x < -1\} \cup \{x : x > \frac{1}{3}\}$

E $\{x : x < -\frac{1}{3}\} \cup \{x : x > 1\}$

۷. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $2|x| > |x-1|$ که $x \in \mathbb{R}$ کدام است؟

۱) $\{x : x < -1\}$

۲) $\left\{x : x > \frac{1}{3}\right\}$

۳) $\left\{x : -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$

۴) $\{x : x < -1\} \cup \left\{x : x > \frac{1}{3}\right\}$

۵) $\left\{x : x < -\frac{1}{3}\right\} \cup \{x : x > 1\}$

8. The complex number z has modulus 20 and argument $\tan^{-1}(-4/3)$, where $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$.
$z =$

A $12 + 16i$ B $16 + 12i$

C $12 - 16i$ D $16 - 12i$

E $-16 - 12i$

۸. قدر مطلق عدد مختلط z برابر ۲۰ و آرگومان آن $tg^{-1}(-\frac{4}{3})$ است، که $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$. z برابر است با :

۱) $12 + 16i$ ۲) $16 + 12i$

۳) $12 - 16i$ ۴) $16 - 12i$

۵) $-16 - 12i$

9. An equation of the straight line which passes through the point (1, 0) and through the centre of the circle
$$x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$$
is

A $x - 3y - 1 = 0$ B $x - 2y - 1 = 0$

C $x + 2y - 1 = 0$ D $2x + y + 2 = 0$

E $2x + y - 8 = 0$

۹. معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ (۱,۰) و مرکز دایرهٔ $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$ عبور می‌کند، کدام است؟

۱) $x - 3y - 1 = 0$ ۲) $x - 2y - 1 = 0$

۳) $x + 2y - 1 = 0$ ۴) $2x + y + 2 = 0$

۵) $2x + y - 8 = 0$

10. $\frac{d}{dx} \cos(x^2) =$

A $\sin(x^2)$ B $-\sin(x^2)$

C $\cos 2x$ D $-2x \sin(x^2)$

E $2x \sin(x^2)$

۱۰. حاصل $\frac{d}{dx}\cos(x^2)$ کدام است؟

۱) $\sin(x^2)$ ۲) $-\sin(x^2)$

۳) $\cos 2x$ ۴) $-2x\sin(x^2)$

۵) $2x\sin(x^2)$

11. $f(x) \equiv (1 - 2x)^{-1} + (1 + x)^{-1}$
$f(x)$ can be expanded as a series of ascending powers of x if

A $-1 < x < \frac{1}{2}$ B $-1 < x < 1$

C $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

E $-2 < x < 2$

۱۱. فرض کنیم $f(x) \equiv (1-2x)^{-1} + (1+x)^{-1}$. f(x) می‌تواند برحسب قوای صعودیِ x بسط داده شود، اگر :

۱) $-1 < x < \frac{1}{2}$ ۲) $-1 < x < 1$ ۳) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ۵) $-2 < x < 2$

12. Given that $f(x) = e^{-x}$, for $x \in \mathbb{R}^+$, then $f^{-1}(x) =$

A e^x B $-e^x$
C $\ln x$ D $-\ln x$
E $e^{-1/x}$

۱۲. فرض کنیم $f(x)=e^{-x}$، برای $x\in\mathbb{R}^+$، در این صورت $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) e^x ۲) $-e^x$
۳) $\ln x$ ۴) $-\ln x$
۵) $e^{-\frac{1}{x}}$

13. The equation $2x^2 + 5x - 6 = 0$ has roots α and β.
$\alpha^2 + \beta^2 =$

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{13}{4}$
C $\frac{25}{4}$ E $\frac{49}{4}$
D $\frac{37}{4}$

۱۳. معادلهٔ $۲x^۲+۵x-۶=۰$ دارای ریشه‌های α و β است. حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$
۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳۷}{۴}$
۵) $\frac{۴۹}{۴}$

14. The radius of a sphere is increasing at a constant rate. When the radius is 20 cm, the rate of increase of the surface area is 30 $cm^2\ s^{-1}$. At this moment the rate of increase of the volume, in $cm^3 s^{-1}$, is

A 300π B 300
C 200 D 15
E 3

۱۴. شعاع یک کره با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. وقتی که شعاع ۲۰ سانتیمتر است، آهنگ افزایش مساحت جانبی $۳۰s^{-۱}$ است. در این لحظه آهنگ افزایش حجم، در $cm^۳s^{-۱}$، برابر است با:

۱) ۳۰۰π ۲) ۳۰۰
۳) ۲۰۰ ۴) ۱۵
۵) ۳

15. Given that
$f: x \mapsto \frac{e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}^+$,
then $f^{-1}: x \mapsto$

A $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ B $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ C $\frac{x}{x+1}$
D $\frac{1-e^x}{e^x}$ E $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

۱۵. فرض کنیم $f:x\mapsto\frac{e^x}{۱-e^x}$، $x\in\mathbb{R}^+$ در این صورت $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\ln(\frac{x}{x+۱})$ ۲) $\ln(\frac{x+۱}{x})$ ۳) $\frac{x}{x+۱}$
۴) $\frac{۱-e^x}{e^x}$ ۵) $\frac{e^{-x}}{۱-e^{-x}}$

16. The points P, Q and R are collinear.
$\overrightarrow{OP} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$,
$\overrightarrow{OR} = 2\mathbf{i} + p\mathbf{j} + q\mathbf{k}$.

A $p = -3, q = 2$, B $p = -3\frac{1}{2}, q = 2$,
C $p = -\frac{1}{2}, q = 0$, D $p = 3, q = -2$,
E $p = -\frac{1}{2}, q = 2$

۱۶. نقاط P، Q و R بر یک استقامت می‌باشند و $\overrightarrow{OP}=۳i+j-k$، $\overrightarrow{OQ}=i-۲j+k$، $\overrightarrow{OR}=۲i+pj+qk$. در این صورت (کدام گزینه درست است؟)

۱) $p=-۳, q=۲$ ۲) $p=-۳\frac{۱}{۲}, q=۲$
۳) $p=-\frac{۱}{۲}, q=۰$ ۴) $p=۳, q=-۲$
۵) $p=-\frac{۱}{۲}, q=۲$

17. Given the following two statements,
(1) $x^2 < 1$,
(2) $x < 1$,
where $x \in \mathbb{R}$, which one of the following statements is always true?

A (1) $\Rightarrow$ (2) but (2) $\not\Rightarrow$ (1)

B (2) $\Rightarrow$ (1) but (1) $\not\Rightarrow$ (2)

C (1) $\Leftrightarrow$ (2)

D (1) $\not\Rightarrow$ (2) and (2) $\not\Rightarrow$ (1)

E None of the above

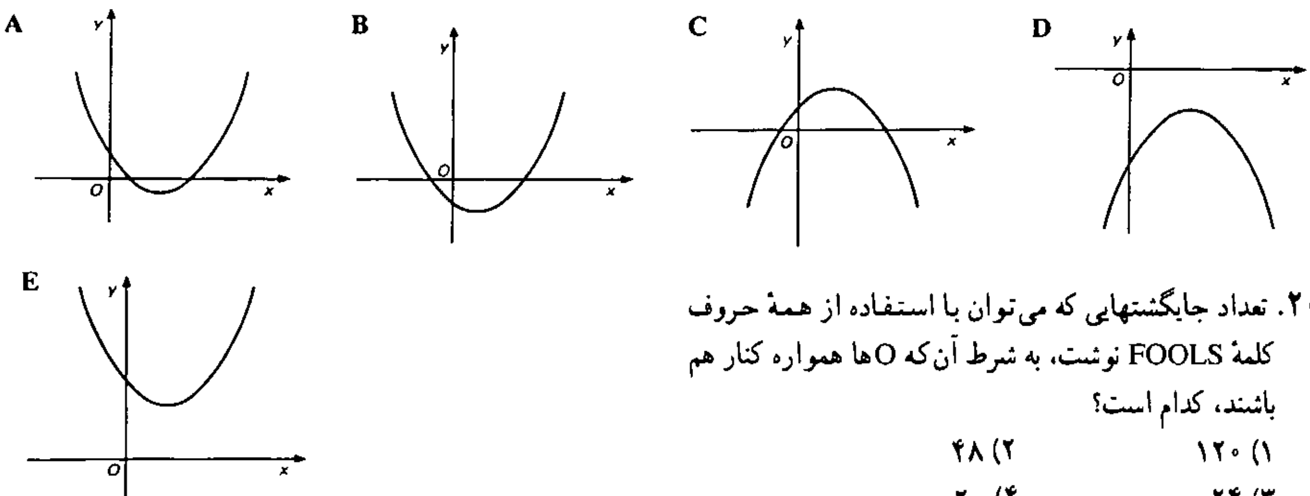
18. $\int \ln x \, dx =$

A $\frac{1}{x} + c$ B $x \ln x + c$

C $x \ln x - x + c$ D $\frac{1}{x} \ln x + c$

E $x \ln x + x + c$

19. Given that $a > 0$ and $b^2 < ac$, a sketch of the curve $y = ax^2 + 2bx + c$, could be



20. The number of different arrangements which can be made using all the letters of the word FOOLS, if the O's are never separated, is

A 120 B 48

C 24 D 20

E 10

۱۷. دو گزاره زیر مفروض می‌باشند $(x \in \mathbb{R})$، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

(۱) $x^2 < 1$

(۲) $x < 1$

۱) (۱) $\not\Rightarrow$ (۲) ولی (۲) $\Rightarrow$ (۱)

۲) (۲) $\not\Rightarrow$ (۱) ولی (۱) $\Rightarrow$ (۲)

۳) (۲) $\Leftrightarrow$ (۱)

۴) (۱) $\not\Rightarrow$ (۲) و (۲) $\not\Rightarrow$ (۱)

۵) هیچ‌کدام از موردهای بالا

۱۸. حاصل $\int \ln x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x} + c$ ۲) $x \ln x + c$

۳) $x \ln - x + c$ ۴) $\frac{1}{x} \ln x + c$

۵) $x \ln x + x + c$

۱۹. فرض کنیم $a > 0$ و $b^2 < ac$، نمایش منحنی $y = ax^2 + 2bx + c$ کدام است؟

۲۰. تعداد جایگشتهایی که می‌توان با استفاده از همهٔ حروف کلمهٔ FOOLS نوشت، به شرط آن‌که Oها همواره کنار هم باشند، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۴۸

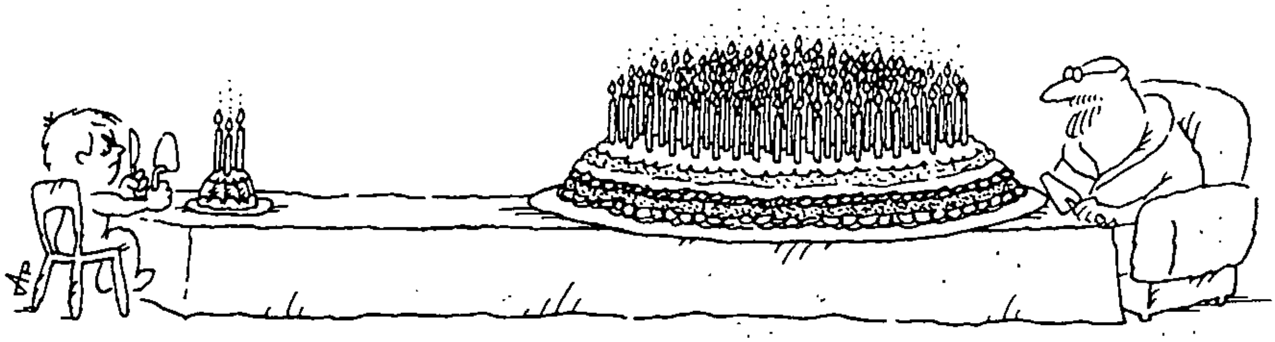
۳) ۲۴ ۴) ۲۰

۵) ۱۰

• میر شهرام صدر

نابرابری‌ها

(قسمت اوّل)



برای مقایسهٔ دو عدد حقیقیِ متمایز، از نمادهای نابرابری > یا < استفاده می‌کنیم ؛ به‌طور مثال، برای مقایسه دو عدد ۸ و ۱۲، نابرابری زیر را می‌نویسیم :

$$۸ < ۱۲$$

و می‌خوانیم «۸ کوچکتر از ۱۲» یا می‌نویسیم :

$$۱۲ > ۸$$

و می‌خوانیم «۱۲ بزرگتر از ۸».

تعریف $a < b$ $(b > a)$

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند ؛ a را کوچکتر از b یا b را بزرگتر از a گوییم، هرگاه عدد حقیقیِ مثبتی مانند P یافت شود، به‌گونه‌ای که داشته باشیم :

$$a + p = b \qquad (P > ۰)$$

در این صورت می‌نویسیم :

$$a < b$$

و می‌خوانیم « aکوچکتر از b» یا می‌نویسیم :

$$b > a$$

و می‌خوانیم «b بزرگتر از a».

تعریف $a \le b$ و $a \ge b$

اگر به هر عدد حقیقی یک عدد نامنفی[1] را بیفزاییم، در این صورت حاصل، بزرگتر یا مساوی با عدد حقیقی اوّلیه است ؛ یعنی : اگر a عددی حقیقی و m نامنفی باشد :

$$a + m \ge a$$

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند ؛ به‌طوری که $a > b$ یا $a = b$، در این صورت می‌نویسیم : $a \ge b$

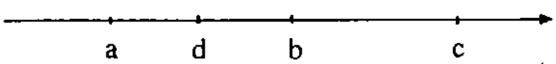
و می‌خوانیم «a بزرگتر یا مساوی با b» یا «a ناکمتر از b» است.

هرگاه $a < b$ یا $a = b$ در این صورت می‌نویسیم :

$$a \le b$$

و می‌خوانیم «a کوچکتر یا مساوی با b» یا «a نابیشتر از b» است.

مفهوم نمادهای < و > را می‌توان روی محور اعداد حقیقی بیان کرد ؛ اگر $a < b$، در این صورت روی محور، a در سمت چپ b و اگر $c > d$، در این صورت، c در سمت راست d روی محور قرار دارد (شکل ۱)



(شکل ۱)

عددهای مثبت و منفی و اصل تثلیث

عدد حقیقی a را مثبت گوییم، هرگاه $a > ۰$ و آن را منفی گوییم، هرگاه $a < ۰$ ؛ بنا بر اصل تثلیث به‌ازای هر عدد حقیقی دلخواه مانند a، همواره یکی از رابطه‌های $a = ۰$، $a < ۰$ و $a > ۰$ برقرار است.

عددهای نامنفی و نامثبت

عدد حقیقی a را نامنفی گوییم، هرگاه $a \geq ۰$ و آن را نامثبت گوییم، هرگاه $a \leq ۰$.

نابرابری دو گانه (مضاعف)

نابرابری دوگانه $a < x \leq b$ به این مفهوم است که $\begin{cases} x > a \\ \text{و} \\ x \leq b \end{cases}$

یعنی x می‌تواند بین a و b و برابر با b باشد ؛ اما x برابر با a نیست. مجموعه همهٔ عددهایی چون x را که در نابرابری دوگانهٔ $a < x \leq b$ صدق می‌کنند ، یک «بازه» (فاصله) می‌نامند و در این حالت، آن را با نماد $(a,b]$ نشان می‌دهند :

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

در نابرابری بالا عدد a را نقطهٔ پایانی چپ بازه گویند و نماد«)» بیان کننده این است که بازه شامل a نیست و عدد b را نقطه پایانی راست بازه گوییم و نماد «]» به این معناست که بازه شامل b است.

نمادهای مختلف بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی، در جدول زیر مشخص شده است :

نام بازه	نمودار خطی	نماد نابرابری	نماد بازه
۱. بسته		$a \leq x \leq b$	$[a , b]$
۲. نیم‌باز از طرف راست		$a \leq x < b$	$[a , b)$
۳. نیم باز از طرف چپ		$a < x \leq b$	$(a , b]$
۴. باز		$a < x < b$	(a , b)
۵. بازهٔ بی‌کران		$x \geq a$	$[a , \infty)$
۶. بازهٔ بی‌کران		$x \leq a$	$(-\infty , a]$
۷. بازهٔ بی‌کران		$x > a$	(a , ∞)
۸. بازهٔ بی‌کران		$x < a$	$(-\infty , a)$

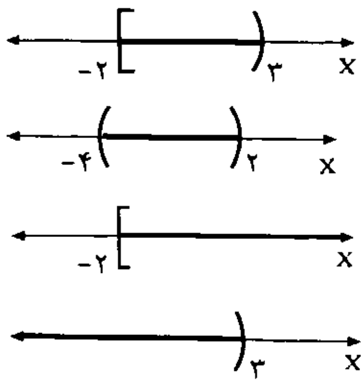
ما از علامت ∞ (بی‌نهایت مثبت) و علامت ∞− (بی‌نهایت منفی) استفاده کرده‌ایم ؛ اما باید مراقب باشید که این علامتها را با عددهای حقیقی اشتباه نکنید ؛ زیرا آنها از خواصّ عددهای حقیقی پیروی نمی‌کنند، به همین جهت است که از نماد «)» برای بازه‌های بی‌کران استفاده کرده‌ایم.

مثال: بازه‌های زیر را ابتدا روی محور اعداد حقیقی و سپس آنها را به صورت نابرابری مشخص کنید.

۱) $[-۲ , ۳)$ ۲) $(-۴ , ۲)$

۳) $[-۲ , \infty)$ ۴) $(-\infty , ۳)$

حل:



۱) $-۲ \leq x < ۳$

۲) $-۴ < x < ۲$

۳) $x \geq -۲$

۴) $x < ۳$

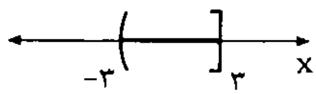
مثال: نابرابریهای زیر را ابتدا به صورت فاصله و سپس آنها را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید.

۱) $-۳ < x \leq ۳$ ۲) $۲ \geq x \geq -۱$

۳) $x > ۱$ ۴) $x \leq ۲$

حل:

۱) $(-۳ , ۳]$

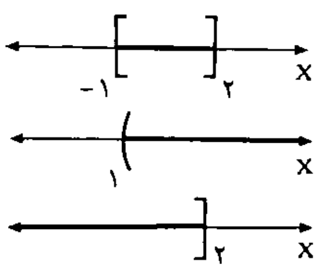


۲ ـ برای از بین بردن اشتباه، بهتراست نابرابری دو گانه $۲ \geq x \geq -۱$ را به‌صورت $-۱ \leq x \leq ۲$ نمایش دهیم، سپس آن‌را به‌صورت بازه مشخص کنیم :

$[-۱ , ۲]$

۳) $(۱ , \infty)$

۴) $(-\infty , ۲]$



اجتماع و اشتراک بازه‌ها

چون بازه‌ها مجموعه‌هایی از عددهای حقیقی هستند، بنابراین وقتی در مورد بازه‌ها مطالعه می‌کنیم، دو عمل اجتماع و اشتراک روی بازه‌ها مفید خواهند بود.

تعریف اجتماع و اشتراک

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، اجتماع مجموعهٔ A و B را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف

می‌کنیم :

$A\cup B=\{x|x\in A$ یا $x\in B\}$

$\{a,b,c\}\cup\{b,c,d,e\}=\{a,b,c,d,e\}$

اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$A\cap B=\{x|x\in A$ و $x\in B\}$

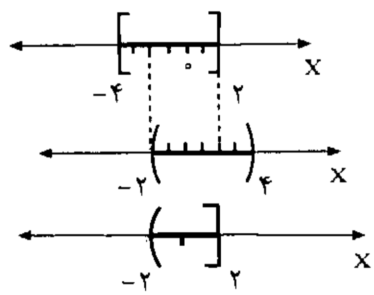
$\{a,b,c\}\cap\{b,c,d,e\}=\{b,c\}$

مثال: فرض کنیم $A=[-۴\ ,\ ۲]$ و $B=(-۲\ ,\ ۴)$ و $C=[۵\ ,\ \infty)$ مطلوب است :

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A\cap C$ ۴) $A\cup C$ ۵) $A\Delta B$

حل:

۱ـ ابتدا بازه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس اشتراک دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت یک بازه مشخص می‌نماییم :

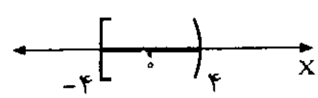


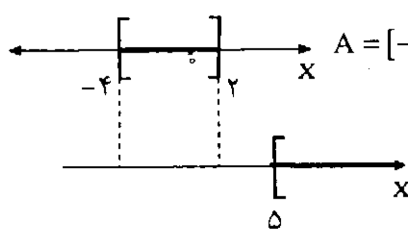
$A=[-۴\ ,\ ۲]$

$B=(-۲\ ,\ ۴)$

$A\cap B=(-۲\ ,\ ۲]$

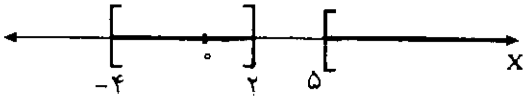
تذکر: اگر نقطه‌های پایانیِ اشتراک دو بازه، به هر دو بازه تعلق داشته باشد، در این صورت از نماد «[» برای نقطهٔ پایانی استفاده می‌کنیم و اگر نقطه‌های پایانیِ اشتراک دو بازه، فقط به یکی از بازه‌ها متعلق باشد، در این صورت از نماد «)» استفاده می‌نماییم.

۲)  $A\cup B=[-۴\ ,\ ۴)$

۳)  $A=[-۴\ ,\ ۲]$

$C=[۵\ ,\infty)$

$A\cap C=\varnothing$

۴) 

$A\cup C=[-۴\ ,\ ۲]\cup[۵\ ,\ \infty)$

۵) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=[-۴\ ,\ ۴)-(-۲\ ,\ ۲]$

$\Rightarrow A\Delta B=[-۴\ ,\ -۲]\cup(۲\ ,\ ۴)$

مثال: در صورتی که $A=[۱\ ,\ \infty)$ و $B=(-\infty\ ,\ ۳)$ و $C=[-۲\ ,\ ۲]$، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید :

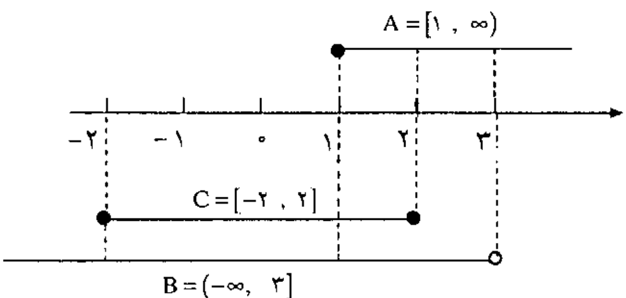
۱) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۲) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۳) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

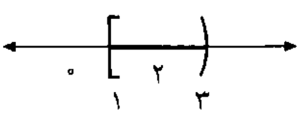
حل:

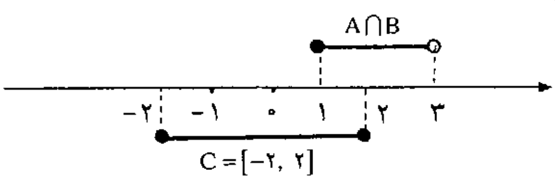
۱ـ ابتدا بازه‌های A، B و C را روی محور مشخص می‌کنیم :



شکل (۲)

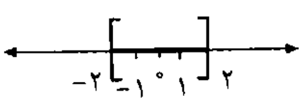
با توجه به شکل بالا ملاحظه می‌کنیم :

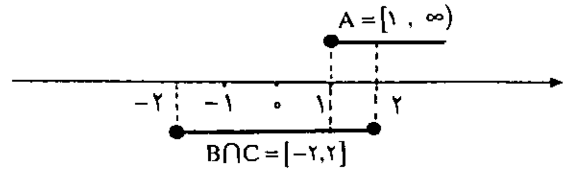
 $A\cap B=[۱\ ,\ ۳)$



$(A\cap B)\cap C=[۱\ ,\ ۲]$ (۱)

با توجه به شکل (۲) :

 $B\cap C=[-۲\ ,\ ۲]$



$A\cap(B\cap C)=[۱ \ , \ ۲]$ (۲)

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) :

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۲ ـ با توجه به (شکل ۲) ملاحظه می‌کنیم که :

$B\cap C=[-۲ \ , \ ۲]$ و $A\cap C=[۱ \ , \ ۲]$

، $A\cup B=(-\infty \ , \ \infty)=\mathbb{R}$

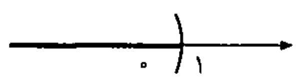
$(A\cup B)\cap C=\mathbb{R}\cap C=C=[-۲ \ ,۲]$ (۳)

$(A\cap C)\cup(B\cap C)=[۱ \ , \ ۲]\cup[-۲, \ ۲]=[-۲, \ ۲]$ (۴)

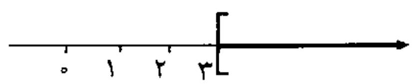
با مقایسهٔ رابطه‌های (۳) و (۴) داریم :

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۳ ـ چون $A\cup B=\mathbb{R}$ ، بنابراین $(A\cup B)'=\varnothing$ (۵)



$A'=(-\infty \ , \ ۱)$



$B'=[۳ \ , \ \infty)$

$A'\cap B'=(-\infty \ , \ ۱)\cap[۳ \ , \ \infty)=\varnothing$ (۶)

با توجّه به رابطه‌های (۵) و (۶) داریم :

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

تمرین

۱ ـ هرگاه $A=[-۴ \ , \ ۱)$، $B=(-۱ \ , \ ۳]$ و $C=[۲ \ , \ \infty)$، مجموعه‌های زیر را ابتدا روی محور، سپس به‌صورت بازه مشخص کنید.

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $B\cup C$

۴) $B\cap C$ ۵) $A\Delta B$ ۶) $A'\Delta B'$

۲ ـ با فرض این که $A=(-۴ \ , \ ۷)$ و $B=[-۸ \ , \ ۳)$ و $C=(-\infty \ , \ ۰]$، درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید :

۱) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

۲) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

۳) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

۴) $A-B=A\cap B'$

۳ ـ به‌جای علامت سؤال، نمادهای > یا < را جایگزین کنید :

۱) اگر $a-b=۱$ ، در این صورت $a?b$.

۲) اگر $u-v=-۲$ ، در این صورت $u?v$.

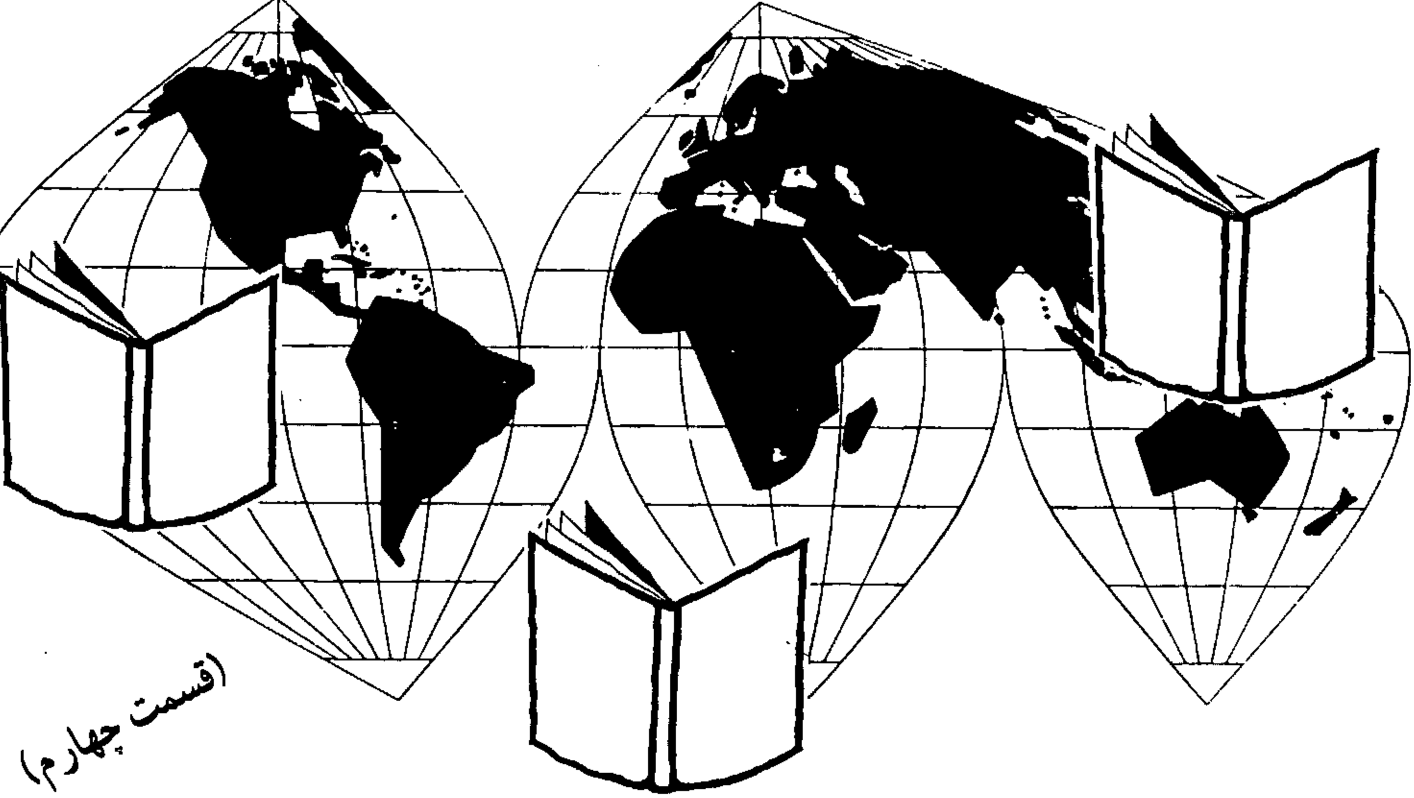
۳) اگر $۲(p-۱)=۲q-۳$ ، در این صورت $p?q$.

۴ ـ علامت عددهای حقیقی a، b و c را به گونه‌ای تعیین کنید که نابرابریهای زیر برقرار باشد.

۱) $\frac{ab}{c}>۰$ ۲) $abc>۰$ ۳) $\frac{a}{bc}>۰$ ۴) $\frac{a^۲}{bc}<۰$

یادداشتها

۱ ـ عددی را نامنفی گوییم که بزرگتر یا مساوی صفر باشد. عدد حقیقی a نامنفی است هرگاه $a\geq ۰$.



مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۲)

قضیه‌های «سِوا»، «مِنِلائوس» و اصل سطح

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۴. تعمیمهای قضیهٔ هواِهْن

در این بخش، قضایایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که با قضیه‌های بخش پیشین در این ویژگی مشابهند، که به ازای هر n ضلعی، حاصل‌ضرب n نسبت طولهای قطعه خطها دارای مقداری ثابت، یعنی ۱+ یا ۱− است. اما در این جا، حالتهایی را بررسی می‌کنیم که، چون در مورد قضیهٔ هواِهْن، قطعه خطها بر یک خط واقع شوند ؛ اما نباشند. در این صورت، دو نقطهٔ W_i ، Z_i را بر یالها یا قطرهای $[V_i, V_j]$ از یک n ضلعی مشخص و حاصل‌ضربهای به صورت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_iW_i}{Z_iV_j}\right]$$

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ اوّل هواِهْن برای n ضلعیها)

فرض می‌کنیم $P=[V_1,\dots,V_n]$ یک n ضلعی مفروض و j عددی صحیح چنان باشد که به ازای هر i، اعداد صحیح i، $i+j$ ، $i+2j$ ، $i+3j$ ، $i+4j$ (به پیمانهٔ n) متمایز باشند. W_i را (به ازای $i=1,\dots,n$) نقطهٔ تقاطع $V_i\ V_{i+2j}$ و $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، نقطه‌های W_i و W_{i+j} بر خط $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ واقع می‌شوند و

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_{i+j}\ W_i}{W_{i+j}\ V_{i+3j}}\right]=1 \qquad (۹)$$

باید توجه داشت که اگر V_i ، V_{i+j} ، V_{i+2j} ، V_{i+3j} و V_{i+4j} نقاطی متمایز نباشند، در این صورت، اتحاد مورد بحث بی‌معنا یا بدیهی خواهد شد. گذشته از این، تنها ضروری است که حالتهای $j=1,2,\dots,[(n-1)/2]$ در نظر گرفته شوند ؛ زیرا مقادیر دیگر j به تکرار همین نتایج منجر می‌شوند.

شکل (۱۰) قضیه را به ازای n = ۷ ، j = ۱,۲,۳ نشان می‌دهد. گزارهٔ اوّلیهٔ (۳) از قضیهٔ هواِهْن (شکل (۴) را ملاحظه کنید) متناظر با حالت n = ۵ ، j = ۱ است.

اثبات: در مورد اوّلین اظهار، توجه می‌کنیم که W_i تقاطع $V_i\ V_{i+2j}$ و $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ و W_{i+j} تقاطع $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ و $V_{i+2j}\ V_{i+4j}$ است. در نتیجه چنانچه گفته شد، هر دوی این نقاط بر $V_{i+j}\ V_{i+3j}$ قرار دارند.

در مورد اظهار دوم، توجه می‌کنیم که چون در (5a)، با استفاده از مثلثهای با پایه‌های $[V_i, V_{i+2j}]$ و $[V_{i+2j}, V_{i+4j}]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{V_{i+j}\ W_i}{W_{i+j}\ V_{i+3j}}\right]=\left[\frac{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+2j}}{V_{i+2j}\ V_{i+3j}\ V_{i+4j}}\right]\times$$

$$\left[\frac{V_{i+2j}\ V_{i+3j}\ V_{i+4j}\ V_{i+j}}{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+2j}\ V_{i+3j}}\right]$$

با درج این عبارتها، در سمت چپ (۹) حاصل‌ضربی به‌دست می‌آوریم که در آن مساحتهای مثلثها و نیز مساحتهای چهارضلعیها، جمیعاً حذف می‌شوند. در نتیجه، مقدار حاصل‌ضرب ۱ می‌شود و قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۵ (دومین قضیهٔ هواهن در مورد n ضلعیها)

فرض می‌کنیم $P=[V_1,\dots,V_n]$ یک n ضلعی باشد و j، k عددهای صحیح و مثبتی چنان باشند که $j+2k=n$ و به ازای هر $i=1,\dots,n$، اعداد صحیح i، $i+k$، $i+j$، $i+j+k$ (به پیمانهٔ n) متمایز باشند و اعداد صحیح i، $i+k$، $i+2k$، $i+3k$ نیز (به پیمانهٔ n) متمایز باشند. W_i را به عنوان تقاطع $V_i\ V_{i+k}$ و $V_{i+j}\ V_{i+j+k}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، نقاط W_i و W_{i+2k} بر خط $V_i\ V_{i+k}$ واقع می‌شوند و

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{V_i\ W_i}{W_{i+2k}\ V_{i+k}}\right]=1 \qquad (10)$$

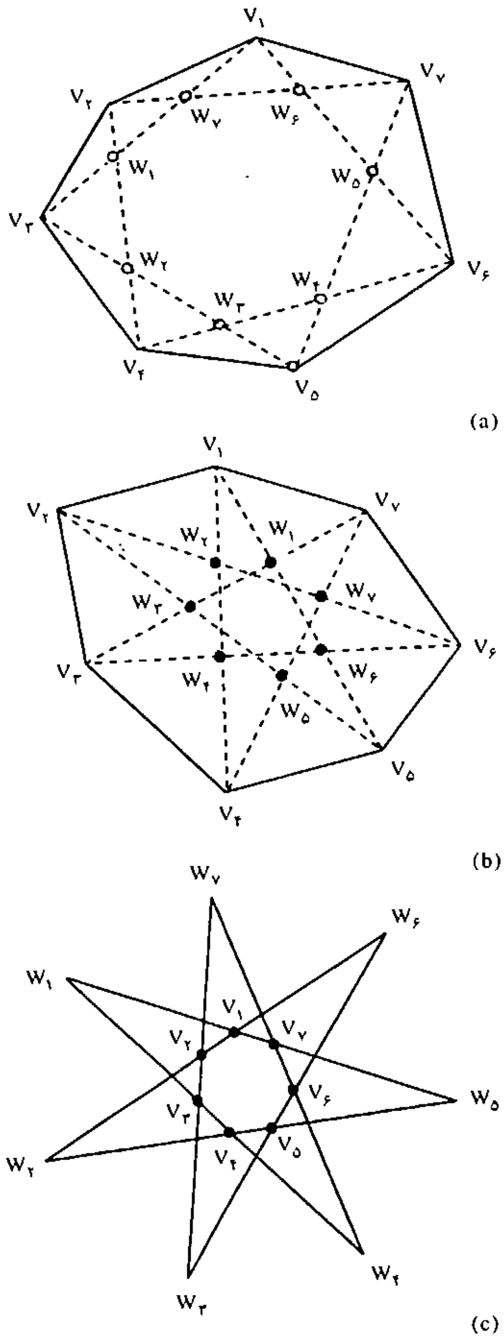
اثبات: در مورد اظهار اوّل، توجه می‌کنیم که W_i تقاطع $V_i\ V_{i+k}$ و $V_{i+j}\ V_{i+j+k}$ و W_{i+2k} تقاطع $V_{i+2k}\ V_{i+3k}$ و $V_{i+j+2k}\ V_{i+j+3k}$ است، که همان خط $V_i\ V_{i+k}$ است؛ زیرا $j+2k=n$.

در مورد اظهار دوم، بار دیگر اصل سطح را چون در (5a)، برای مثلثهای با پایه‌های $[V_{i+j}, V_{i+j+k}]$ و $[V_{i+2k}, V_{i+3k}]$ به کار برده، به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{V_i\ W_i}{W_{i+2k}\ V_{i+k}}\right]=\left[\frac{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+j+k}}{V_{i+k}\ V_{i+2k}\ V_{i+3k}}\right]\times$$

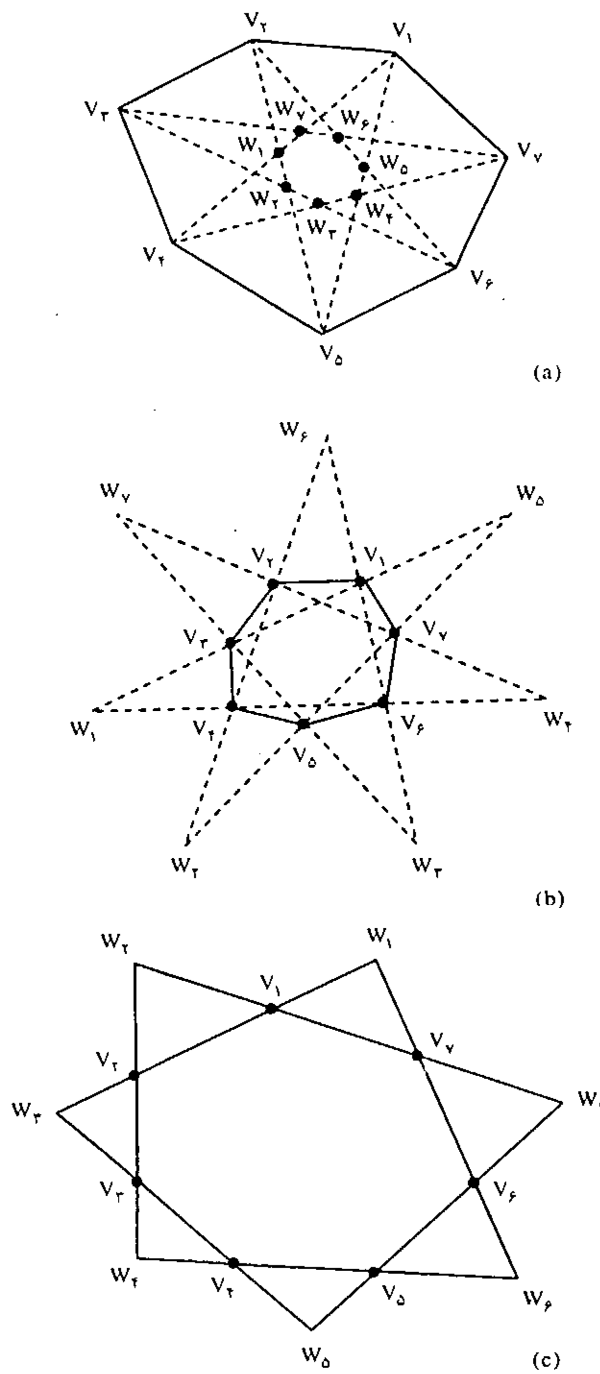
$$\left[\frac{V_{i+k}\ V_{i+2k}\ V_{i+3k}}{V_i\ V_{i+j}\ V_{i+j+k}}\right]$$

با قرار دادن در سمت چپ (۱۰) و استفاده از رابطهٔ $j+2k=n$، ملاحظه می‌کنیم که سطحهای مثلثها و سطحهای چهارضلعیهای واقع در حاصل‌ضرب نتیجه، جمیعاً حذف شده، مقدار ۱ را به‌دست می‌دهند و به این ترتیب، قضیه اثبات می‌شود.



شکل (۱۰). مثالهای قضیهٔ اوّل هواهن در مورد n ضلعیها، به ازای n = 7 و (a) j = 1، (b) j = 2 و (c) j = 3. در هر حالت، حاصل‌ضرب هفت نسبت موجود $[V_{i+j}\ W_i / W_{i+j}\ V_{i+3j}]$ (به ازای $i=1,\dots,7$) مقدار ۱ را اختیار می‌کند.

قضیهٔ مورد نظر را در شکل (۱۱) به ازای $n = ۷$ و : $(j, k) = (۱,۳),(۳,۲),(۵,۱)$ مشخص کرده‌ایم. گزارهٔ اولیهٔ (۴) از قضیهٔ هواهِن متناظر با حالت $n = ۵$ ، $j = ۱$ ، $k = ۲$ است.



شکل (۱۱). قضیهٔ دوم هواهِن درمورد n ضلعیهٔ به ازای $n = ۷$ و (a) $j = ۱$ ، $k = ۳$ ؛ (b) $j = ۳$ ، $k = ۲$ ؛ و(c) $j = ۵$ ، $k = ۱$. در هر حالت، حاصل‌ضرب هفت نسبت $[V_i \quad W_i / W_{i+2k} \quad V_{i+k}]$ (به ازای $i = ۱,\dots,۷$) مقدار ۱ را اختیار می‌کند.

۵. توضیحات و تفسیرها

قضیهٔ «مِنلائوس» در مورد n ضلعیها، قضیهٔ جدیدی نیست. از اوایل قرن نوزدهم شناخته شده است، مراجع [۲,P.۲۹۵]، [۶,P.۷۵]، [۷,P.۶۳]، [۹,P.۷۵] را ملاحظه کنید. و همان‌طورکه در بالا متذکر شدیم، حالتهای خاصّی از قضیهٔ سوا در مورد n ضلعیها نیز مشخص شده بوده است ؛ به عنوان مثال، مراجع [۶,P.۸۶]، [۷,P.۶۴] را ملاحظه کنید.

جالب‌ترین و غیرمنتظره‌ترین نتایج این مقاله، این است که حاصل‌ضربهای گوناگون یال ـ نسبتها و قطر نسبتها برابر ۱+ یا ۱- اند، نیست ؛ بلکه این است که مقادیر این حاصل‌ضربها مستقل از چند ضلعی P اند که کارمان را با آن آغاز کردیم (البته با توجه به شرایط بیان شده در آغاز بخش ۳). در این صورت، با توجه به این موضوع، ممکن است شخص تصوّر کند جمیع حاصل‌ضربهای n نسبت در یک n ضلعی دارای همین ویژگی است ؛ در حالی که چنین نیست. به عنوان مثال، در شکل (۴)، مقدار

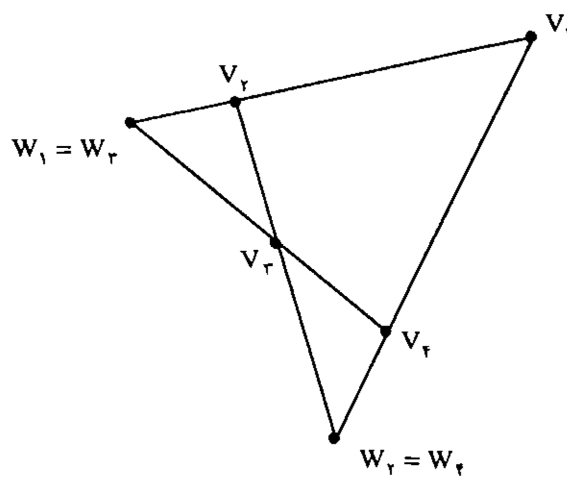
$$\prod_{i=1}^{5}\left[\frac{W_i \quad W_{i+1}}{V_i \quad V_{i+2}}\right] \qquad (۱۱)$$

به پنج ضلعی Pی انتخاب شده وابسته است ؛ به رغم این واقعیت که یک چنین حاصل‌ضربی، در وهلهٔ اوّل، بسیار شبیه حاصل‌ضربهایی به نظر می‌رسد که در گزارهٔ اولیهٔ قضیهٔ هواهِن رخ می‌دهند. این موضوع را که (۱۱) ثابت نیست، می‌توان با آزمایش مختصری با مثالهای عددی نشان داد. در واقع، گمان می‌کنیم حاصل‌ضرب (۱۱) بیشترین مقدار خود را زمانی به‌دست می‌آورد که $P = [v_1, \dots, v_5]$ نگارهٔ «آفینی» از یک پنج ضلعی منتظم باشد. اثبات این گزاره را در دست نداریم و بررسی و بحث مسائلی از این قبیل نیز در این جا مناسب به نظر نمی‌رسد.

ملاحظهٔ این موضوع مشکل نیست که قضایای ۴ و ۵ شامل تمام حالتهای مذکور در مقدمهٔ بخش (۴) اند ؛ یعنی حالتهایی که در آنها حاصل‌ضرب n عامل، مقدار ثابتی را اختیار می‌کند که به انتخاب چندضلعی اوّلیهٔ P وابسته نیست. اگر تحقیقاتمان به بررسی حاصل‌ضربهای ۲n ، ۳n ، ۴n و ... عامل (که هر یک از آنها خارج قسمت طولهای قطعه خطهای واقع در یک n ضلعی است) تعمیم دهیم، آن گاه امکانات بسیار دیگری به وجود می‌آیند. البته خواننده، خود می‌تواند به بررسی این حالتها بپردازد، اما نتایج بیان شده در این جا و قدرت اصل سطح را در اثبات نتایجی از

این قبیل نشان می‌دهند.

حالت ۴ = n ، ۲ = j و ۱ = k قضیهٔ (۵) شایستهٔ تذکری خاص است. این حالت را در شکل (۱۲) نشان داده‌ایم و آشکار است که می‌توان آن را به عنوان بیان کنندهٔ این موضوع تعبیر کرد که حاصل‌ضرب نسبتهای معیّنی از طولهای واقع در یک چهارضلعی کامل برابر ۱ است. گرچه چند ضلعیهای کامل، طی دو قرن، به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، نتوانستیم هیچ گونه ذکری از این نتیجهٔ خاص دربارهٔ آنها بیابیم.



شکل (۱۲). حالت ۴ = n ، ۲ = j ، ۱ = k از قضیهٔ دوم هواهِن. حاصل‌ضرب چهار نسبت $[V_i\, W_i \,/\, W_{i+2}\, V_{i+1}]$ (به ازای ۱،۲،۳،۴ = i) برابر ۱ است.

با توجه به این که جمیع قضیه‌های این مقاله، بسیار ساده و اثباتهای آنها بسیار مقدماتی‌اند، ممکن است شگفت‌آور به نظر برسد که این قضیه‌ها چرا دو یا سه قرن پیش کشف نشده‌اند. این موضوع را می‌توان از لحاظی با این واقعیت توضیح داد که مؤلّفان پیشین، برخلاف ما، از امتیاز روشهای جدید برخوردار نبوده‌اند. البته، زمانی که ما بررسیمان را آغاز کردیم، از قضیه های «سِوا» و «مِنلائوس» در مورد مثلثها آگاه بودیم ؛ اما این قضیهٔ «هواهِن» بود که نشان داد ممکن است بررسی حاصل‌ضربهای نسبتهای دیگر در n ضلعیهای با ۳ < n مفید باشد. با استفاده از برنامه‌ای ساده در نرم افزار متمتیکا «Mathematica» توانستیم مقادیر حاصل‌ضربهای دوری نسبتهای گوناگون را در مورد تعداد بسیاری از n ضلعیها با صحّت محاسبه کنیم و نتایج حاصلهٔ قضایای ۱ تا ۵ مان را مطرح کنیم. (بعدها کشف کردیم که صورتهای n ضلعی قضایای سِوا و مِنلائوس شناخته شده‌اند و می‌توان آنها را در کتابهای مزبور یافت. اما تاکنون نتوانسته‌ایم نتیجه‌ای بیابیم که بتوان آن را حتی به صورت حالت خاصّی از قضیهٔ «خود تَراگردی مان» «Selftrans versality Theorem» تعبیر کرد.) ملاحظه کردیم که «اصل سطح» روشی ساده در اثبات (به مفهوم سنّتی) جمیع نتایجی است که به تجربه کشف شده‌اند. گذشته از این، اصل مزبور، علاوه بر این که توانایی بیان قضایای مربوط به n ضلعیها را با n دلخواه به‌دست می‌دهد، امکانهای دیگری را نیز مطرح می‌نماید و علاوه بر این، به تعمیمهای با بعدهای بالاتری منجر می‌شود که در جای دیگر مطرحشان خواهیم کرد.

تبصره: پس از تکمیل دستنوشته مقاله از باپتیست «Baptist» [۱ , P.۶۱] ، دریافتیم که «اصل سطح» ـ البته بدون ذکر هیچ گونه نام خاصّی ـ در اثبات سریل «Crelle» از قضیهٔ سِوا [۵] به کار رفته، اما به فایدهٔ عمومی آن توجه نشده و این اصل، با تمام فواید عملی‌اش، به طور کامل در بوتهٔ فراموشی سپرده شده است.

اعداد جالب ریاضی

$(۱۵۷)^۲ = ۲۴۶۴۹$

$(۱۵۸)^۲ = ۲۴۹۶۴$

$(۱۰۳)^۲ = ۱۰۶۰۹$

$(۳۰۱)^۲ = ۹۰۶۰۱$

$(۹۱۳)^۲ = ۸۳۳۵۶۹$

$(۹۱۴)^۲ = ۸۳۵۳۹۶$

$(۱۱۲)^۲ = ۱۲۵۴۴$

$(۲۱۱)^۲ = ۴۴۵۲۱$

$۱^۳ + ۵^۳ + ۳^۳ = ۱۵۳$

$(۱۳)^۲ = ۱۶۹$

$(۱۴)^۲ = ۱۹۶$

$۳^۳ + ۷^۳ + ۰^۳ = ۳۷۰$

$(۱۱۳)^۲ = ۱۲۷۶۹$

$(۳۱۱)^۲ = ۹۶۷۲۱$

$۳^۳ + ۷^۳ + ۱^۳ = ۳۷۱$

$(۱۲۲)^۲ = ۱۴۸۸۴$

$(۲۲۱)^۲ = ۴۸۸۴۱$

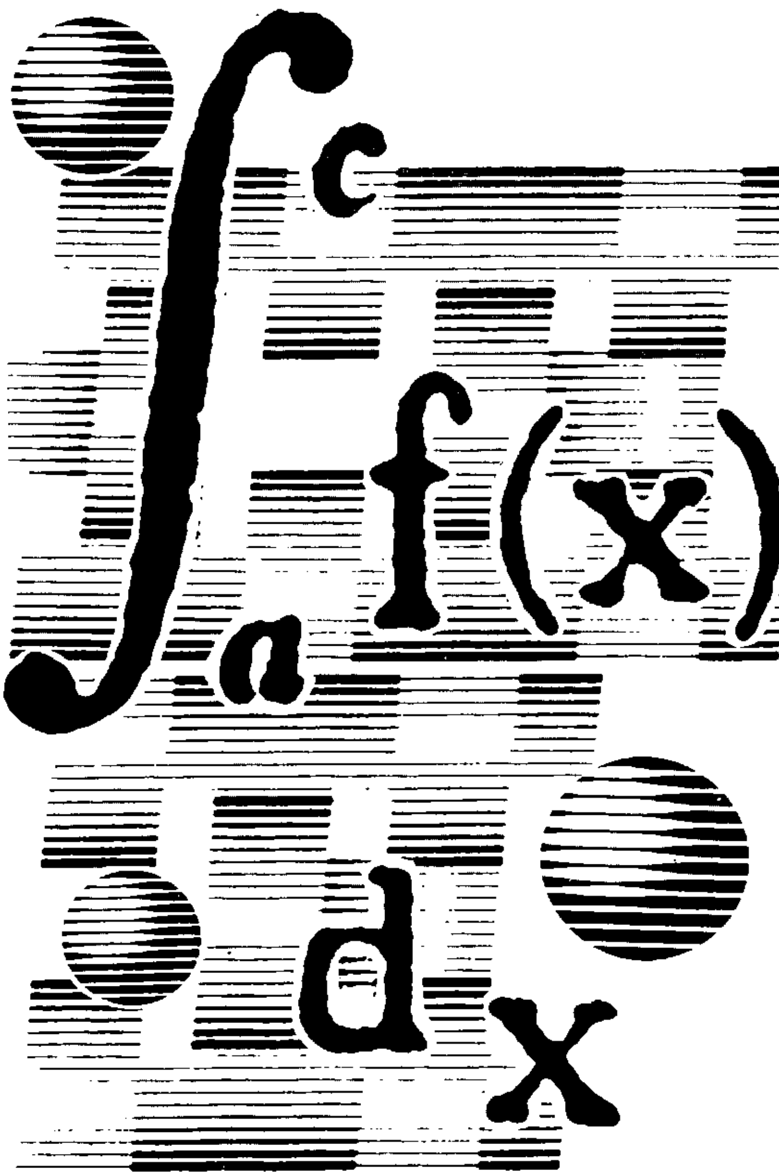
$۴^۳ + ۰^۳ + ۷^۳ = ۴۰۷$

ترجمه: صمد پوراسدا...

انتگرال کسرهای گویا

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

(قسمت اول)



تجزیهٔ کسرهای گویا

در این مقاله، ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان هر کسر گویا را به صورت مجموع چند کسر ساده نوشت. یادآور می‌شویم کسرهایی را **گویا** می‌نامیم که صورت و مخرج آنها یک عبارت چند جمله‌ای به صورت $p(x)=ax^n+bx^{n-1}+...+k$ باشد؛ **درحالتی که صورت و مخرج کسر، کسرهایی گویا باشند، می‌توان با ضرب صورت و مخرج در کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها به یک کسر گویا رسید.**

به طور مثال، کسرهایی مانند:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+2}, \quad \frac{\cos^2 x+\cos x}{3\sin x+x}, \quad \frac{e^x+x}{x^2+\ln x}, \quad \frac{\sqrt{x}+x^2}{x^3+x+1}$$

و ... را کسر گویا نمی‌نامیم. ولی کسرهایی نظیر: $\frac{x^3-x+1}{x^2+x+1}$.

$\frac{x^7+x-1}{x^5+x^4}$ ، $\frac{x^2+x}{x^3-3x+1}$ و ... را کسرهای **گویا** می‌نامیم.

همچنین $\dfrac{x+1}{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$ ، $\dfrac{\dfrac{x}{x^4+1}}{\dfrac{x^3-x+1}{x^2+4}}$ و کسرهایی نظیر اینها را می‌توان به کسر گویا تحویل داد:

$$\frac{x+1}{\frac{x-1}{x^2+1}}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x-1}$$

$$\frac{\frac{x}{x^4+1}}{\frac{x^3-x+1}{x^2+4}}=\frac{(x^2+4)(x^4+1)\frac{x}{x^4+1}}{(x^2+4)(x^4+1)\frac{x^3-x+1}{x^2+4}}=$$

$$=\frac{x^3+4x}{x^7-x^5+x^4+x^3-x+1}$$

تعریف: کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می‌نامیم اگر $p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x باشند. مانند:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{ax^n+bx^{n-1}+...+k}{a'x^m+b'x^{m-1}+...+k'}$$

هر کسر گویا را می‌توان به صورت مجموع کسرهای ساده‌تر

نوشت. به این ترتیب محاسبهٔ انتگرال یک کسر گویا منجر به محاسبهٔ انتگرال کسرهای گویای ساده‌تری خواهد شد. به طور مثال به برابری زیر توجه کنید :

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}=\frac{۲}{x^{۲}-۱}$$

در این‌جا این سؤال را مطرح می‌کنیم که اگر $\frac{۲}{x^{۲}-۱}$ داده شده باشد، چگونه می‌توان آن را به صورت مجموع دو کسر نوشت؟

برای نوشتن $\frac{۲}{x^{۲}-۱}$ به مجموع دو کسر، ابتدا مخرج کسر را به عاملهای درجهٔ اوّل تجزیه می‌کنیم و سپس پارامترهای A و B را چنان تعیین می‌کنیم که اتّحاد زیر برقرار باشد :

$$\frac{۲}{x^{۲}-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}$$

برای تعیین A و B می‌توان به دو روش عمل کرد.

روش اوّل:

$$\frac{۲}{x^{۲}-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}=\frac{A(x+۱)+B(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\frac{(A+B)x+A-B}{x^{۲}-۱}$$

چون مخرجهای دو کسر برابرند، باید صورتهای آنها نیز متحد باشند :

$$(A+B)x+A-B\equiv ۲$$

بنابراین :

$$\begin{cases}A+B=۰\\A-B=۲\end{cases}\Rightarrow A=۱\ ,\ B=-۱$$

روش دوم:

عبارت $\frac{۲}{x^{۲}-۱}$ را به F(x) نشان می‌دهیم، و سپس ریشه‌های مخرج کسر مورد نظر را محاسبه می‌کنیم. در این صورت، پارامترها از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند :

$$F(x)=\frac{۲}{x^{۲}-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}$$

$$A=(x-۱)F(x)\Big|_{x=۱}\qquad B=(x+۱)F(x)\Big|_{x=-۱}$$

$$A=\frac{۲}{x+۱}\Big|_{x=۱}=\frac{۲}{۱+۱}=۱\ ,\quad B=\frac{۲}{x-۱}\Big|_{x=-۱}=\frac{۲}{-۱-۱}=-۱$$

درستی مطلب فوق را به صورت زیر بررسی می‌کنیم :

$$F(x)=\frac{۲}{x^{۲}-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}\qquad(۱)$$

برای محاسبهٔ A دو طرف برابری (۱) را در مخرج کسر $\frac{A}{x-۱}$ یعنی $x-۱$ ضرب می‌کنیم :

$$(x-۱)F(x)=(x-۱)\frac{۲}{x^{۲}-۱}=(x-۱)\left[\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}\right]$$

$$(x-۱)F(x)=\frac{۲}{x+۱}=A+\frac{(x-۱)B}{x+۱}\qquad(۲)$$

حال دو طرف برابری (۲) را به ازای $x=۱$ محاسبه می‌کنیم :

$$(x-۱)F(x)\Big|_{x=۱}=\frac{۲}{x+۱}\Big|_{x=۱}=\left(A+\frac{(x-۱)B}{x+۱}\right)\Big|_{x=۱}$$

$$\Rightarrow (x-۱)F(x)\Big|_{x=۱}$$

$$=\frac{۲}{۱+۱}=A+\frac{(۰)B}{۱+۱}\Rightarrow A=(x-۱)F(x)\Big|_{x=۱}=۱$$

به همین ترتیب برای محاسبه B دو طرف برابری (۱) را در مخرج کسر $\frac{B}{x+۱}$ یعنی $x+۱$ ضرب می‌کنیم :

$$(x+۱)F(x)=(x+۱)\frac{۲}{x^{۲}-۱}=(x+۱)\left[\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}\right]$$

$$(x+۱)F(x)=\frac{۲}{x-۱}=\frac{(x+۱)A}{x-۱}+B\qquad(۳)$$

حال، دو طرف برابری (۳) را به ازای $x=-۱$ محاسبه می‌کنیم :

$$(x+۱)F(x)\Big|_{x=-۱}=\frac{۲}{x-۱}\Big|_{x=-۱}=\left(\frac{(x+۱)A}{x-۱}+B\right)\Big|_{x=-۱}$$

$$\Rightarrow (x+۱)F(x)\Big|_{x=-۱}=\frac{۲}{-۱-۱}=\frac{(۰)A}{-۱-۱}+B$$

$\Rightarrow B=(x+1)F(x)|_{x=-1}=-1$

مثال: کسر زیر را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده بنویسید:

$$F(x)=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$$

حل: فرض می‌کنیم $F(x)$ به صورت مجموع چند کسر ساده نوشته شود:

$$F(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{x+2}$$

حال، پارامترهای A ، B ، C ، D و E را از رابطه‌های زیر محاسبه می‌کنیم:

$$A=xF(x)\Big|_{x=0}=\frac{x^4+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\Big|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{(-1)(-4)}=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{4}}$$

$$B=(x-1)F(x)\Big|_{x=1}=\frac{x^4+1}{x(x+1)(x^2-4)}\Big|_{x=1}$$

$$=\frac{2}{(2)(-3)}=\frac{-1}{3}\Rightarrow \boxed{B=\frac{-1}{3}}$$

$$C=(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{x^4+1}{x(x-1)(x^2-4)}\Big|_{x=-1}$$

$$=\frac{2}{(-1)(-2)(-3)}=\frac{-1}{3}\Rightarrow \boxed{C=\frac{-1}{3}}$$

$$D=(x-2)F(x)\Big|_{x=2}=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x+2)}\Big|_{x=2}$$

$$=\frac{17}{(2)(3)(4)}=\frac{17}{24}\Rightarrow \boxed{D=\frac{17}{24}}$$

$$E=(x+2)F(x)\Big|_{x=-2}=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x-2)}\Big|_{x=-2}$$

$$=\frac{17}{(-2)(3)(-4)}=\frac{17}{24}\Rightarrow \boxed{E=\frac{17}{24}}$$

بنابراین:

$$F(x)=\frac{x^4+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$$

$$=\frac{1}{4x}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{17}{24(x-2)}+\frac{17}{24(x+2)}$$

توجه: لازم به توضیح است که حل این مسأله به روش اول (به کمک اتحاد) به حل یک دستگاه پنج معادلهٔ پنج مجهولی (A و B ، C ، D ،E) منجر می‌شود که بسیار وقت‌گیر و از نظر محاسبه بسیار پرحجم است. به همین دلیل برای کاهش در وقت و عملیات روش دوم توصیه می‌شود.

تذکر: در توابع گویا اگر درجهٔ صورت بیشتر از درجهٔ مخرج باشد، با تقسیم صورت بر مخرج به یک چند جمله‌ای و کسر دیگری خواهیم رسید که درجهٔ صورت این کسر از مخرج آن کمتر خواهد بود. در توابع گویا به طور عمومی می‌توان مخرج آنها را به حاصل ضرب چند عبارت درجهٔ یک یا دو یا توانهایی از آنها تحویل کرد.

مثال: کسر زیر را به صورت حاصل جمع چند کسر ساده و یک چند جمله‌ای بنویسید:

$$\frac{5x^3+2}{x^2-1}$$

حل: چون درجهٔ صورت بیشتر از درجهٔ مخرج است، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، خارج قسمت و باقی‌مانده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{5x^3+x^2+1}{x^2-1}=5x+1+\frac{5x+2}{x^2-1}$$

حال، عبارت $\frac{5x+2}{x^2-1}$ را به $F(x)$ نمایش می‌دهیم؛ و چون درجهٔ صورت آن کمتر از درجهٔ مخرج و تحویل ناپذیر است، $F(x)$ را به مجموع دو کسر ساده می‌نویسیم:

$$F(x)=\frac{5x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$A=(x-1)F(x)\Big|_{x=1}=\frac{5x+2}{x+1}\Big|_{x=1}=\frac{7}{2}\Rightarrow \boxed{A=\frac{7}{2}}$$

$$B=(x+1)F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{5x+2}{x-1}\Big|_{x=-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{B=\frac{3}{2}}$$

بنابراین:

$$\frac{5x^3+x^2+1}{x^2-1}=5x+1+\frac{7}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x+1)}$$

همان‌طورکه در این مثال دیدیم، اگر کسر گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ را در نظر بگیریم.($p(x)$ و $q(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x هستند) و درجهٔ $p(x)$ بیش از درجهٔ $q(x)$ باشد، آنگاه

چندجمله‌ایهای $s(x)$ و $r(x)$ وجود دارند، به طوری که داشته باشیم: $p(x)=q(x)s(x)+r(x)$

که در آن درجهٔ $r(x)$ کمتر از درجهٔ $q(x)$ است.

بنابراین:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx=\int s(x)dx+\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

چون $s(x)$ یک چند جمله‌ای است، محاسبهٔ $\int s(x)dx$ بسیار آسان است، پس محاسبهٔ $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ به محاسبهٔ $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ منجر می‌شود که در آن درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $q(x)$ کوچکتر است. بنابراین کافی است فقط حالتی را در نظر بگیریم که درجهٔ $p(x)$ کمتر از درجهٔ $q(x)$ باشد.

پس، **قرارداد** می‌کنیم، بعد از این کسرهایی را در نظر بگیریم که درجهٔ صورت آنها کمتر از درجه مخرج، و علاوه بر آن، کسر تحویل‌ناپذیر باشد (یعنی صورت و مخرج کسر ریشه یا ریشه‌های مشترک نداشته باشند).

تعریف: کسرهایی گویا به صورتهای زیر را، که در آنها a ، A ، B ، p و q عددهای حقیقی ثابت و $n\in\mathbb{N}$ باشد، کسرهای ساده می‌نامیم:

$$۱)\ \frac{A}{(x-a)^n} \qquad ۲)\ \frac{Ax+B}{(x^۲+px+q)^n}\ ,p^۲-۴q<۰$$

در کسر سادهٔ نوع دوم، فرض می‌شود که مبین مخرج $(p^۲-۴q)$ منفی باشد؛ زیرا در غیر این صورت مخرج، حاصل ضرب دو عبارت خطی می‌شود.

قضیه: اگر a یک ریشهٔ حقیقی مرتبهٔ n ام مخرجِ کسر گویای $\frac{F(x)}{g(x)}$ باشد، یعنی،

$$g(x)=(x-a)^n t(x)$$

و $t(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر نباشد، یا $t(a)\neq ۰$، آنگاه کسرِ گویایِ $\frac{F(x)}{g(x)}$ را می‌توان به صورت مجموع دو کسر سادهٔ زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{F_۱(x)}{(x-a)^{n-۱}t(x)} \qquad (۱)$$

در برابری (۱)، $A\neq ۰$ عددی ثابت است و درجهٔ $F_۱(x)$ از درجهٔ $(x-a)^{n-۱}t(x)$ کوچکتر است.

برهان: فقط به ذکر یک راهنمایی برای اثبات اکتفا کرده و تکمیل اثبات را به عهدهٔ خودتان واگذار می‌کنیم کسر $\frac{F(x)}{g(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^n t(x)}=\frac{At(x)+F(x)-At(x)}{(x-a)^n t(x)}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{F(x)-At(x)}{(x-a)^n t(x)}$$

رابطهٔ بالا برای هر $A\in\mathbb{R}$ برقرار است، در اینجا A را چنان تعیین کنید که چند جمله‌ای $F(x)-At(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد.

نتیجه: اگر قضیهٔ بالا را n مرتبه برای کسر $\frac{F_۱(x)}{(x-a)^{n-۱}t(x)}$ نیز به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{A_۱}{(x-a)^n}+\frac{A_۲}{(x-a)^{n-۱}}+\dots+\frac{A_n}{(x-a)}+\frac{F_n(x)}{t(x)} \quad (۲)$$

در برابری (۲) کسر $\frac{F_n(x)}{t(x)}$، کسری گویا و تحویل‌ناپذیر است. اگر $t(x)$ ریشه‌های دیگری غیر از a داشته باشد، قضیهٔ اخیر را برای این ریشه‌ها نیز می‌توان به کار برد.

مثال: کسر $\frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x+۲)}$ را به مجموع چند کسر ساده بنویسید.

حل: با توجه به قضیه، می‌توان فرض کرد که کسر مورد نظر به مجموع چند کسر ساده نوشته شود:

$$\frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x+۲)}=\frac{A_۱}{(x-۱)^۲}+\frac{A_۲}{(x-۱)}+\frac{A_۳}{x+۲}$$

$$A_۱=\left.\frac{x+۱}{x+۲}\right|_{x=۱}=\frac{۲}{۳}\ ,\quad A_۳=\left.\frac{x+۱}{(x-۱)^۲}\right|_{x=-۲}=\frac{-۱}{۹}$$

برای محاسبهٔ $A_۲$ کافی است عددی را از مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۱\}$ برای x اختیار کنیم و در برابری زیر قرار دهیم:

$$\frac{x+۱}{(x-۱)^۲(x+۲)}=\frac{۲}{۳(x-۱)^۲}+\frac{A_۲}{(x-۱)}-\frac{۱}{۹(x+۲)} \qquad (۱)$$

برابری (۱) به ازای $x=0$، به معادلهٔ یک مجهولی زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{(-1)^2(2)}=\frac{2}{3(-1)^2}+\frac{A_2}{(-1)}-\frac{1}{9(2)}\Rightarrow A_2=\frac{1}{9}$$

بنابراین:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{2}{3(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}-\frac{1}{9(x+2)}$$

نکتهٔ مهم: اگر در کسرِ گویای $\frac{F(x)}{G(x)}$ داشته باشیم:

$$G(x)=(x^2+px+q)^m T(x)$$

و $T(x)$ بر x^2+px+q بخش‌پذیر نباشد.

آنگاه کسر گویای $\frac{F(x)}{G(x)}$ به مجموع دو کسر ساده و گویای زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{kx+s}{(x^2+px+q)^m}+\frac{u(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}T(x)}$$

در این رابطه، $u(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجهٔ آن از درجهٔ چند جمله‌ای $(x^2+px+q)^{m-1}T(x)$ کمتر است، و x^2+px+q ریشهٔ حقیقی ندارد ($p^2-4q<0$).

از اثبات این قضیه صرف‌نظر می‌شود.

نتیجه: اگر نکته و قضیهٔ قبل را برای کسر گویای $\frac{F(x)}{f(x)}$ با فرض:

$$f(x)=(x-a)^n\dots(x^2+px+q)^m$$

به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\dots+\frac{An}{x-a}+\dots+$$

$$\frac{k_1x+s_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{k_2x+s_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\dots+$$

$$\frac{k_mx+s_m}{x^2+px+q}$$

در این برابری ضرایب ثابت A_i ، k_i ، s_i و ... را چنان باید تعیین کنیم که برابری به یک اتحاد تبدیل شود. برای این منظور، می‌توان پس از مخرج مشترک گرفتن بین کسرها، ضرایب توانهای برابر x را در صورتها برابر هم قرار داد و از معادله‌های به دست آمده، ضرایب فوق را حساب کرد. روش دیگر برای محاسبهٔ این ضرایب، آن است که به x مقادیر دلخواه و مناسب بدهیم، تا معادله‌هایی بین ضرایب بالا به دست آیند و از حل این معادله‌ها، ضرایب را حساب کنیم.

مثال: کسر زیر را به صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

$$N(x)=\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{-3x^5+5x^4-5x^3+6x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

حل: با توجه به قضیه، می‌توان فرض کرد که کسر مورد نظر به مجموع چند کسر ساده به صورت زیر نوشته شود:

$$N(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{k_1x+s_1}{(x^2+1)^2}+\frac{k_2x+s_2}{x^2+1}$$

$$A_1=(x-1)^2N(x)\Big|_{x=1}$$

$$=\frac{-3x^5+5x^4-5x^3+6x^2-2x+3}{(x^2+1)^2}\Bigg|_{x=1}=1$$

برای محاسبهٔ ضریبهای دیگر، می‌توان از روشهایی که بیان شد استفاده کرد و به نتایج زیر رسید:

$A_1=1$ ، $A_2=-2$ ، $K_1=1$ ، $K_2=-1$ ، $S_1=S_2=0$

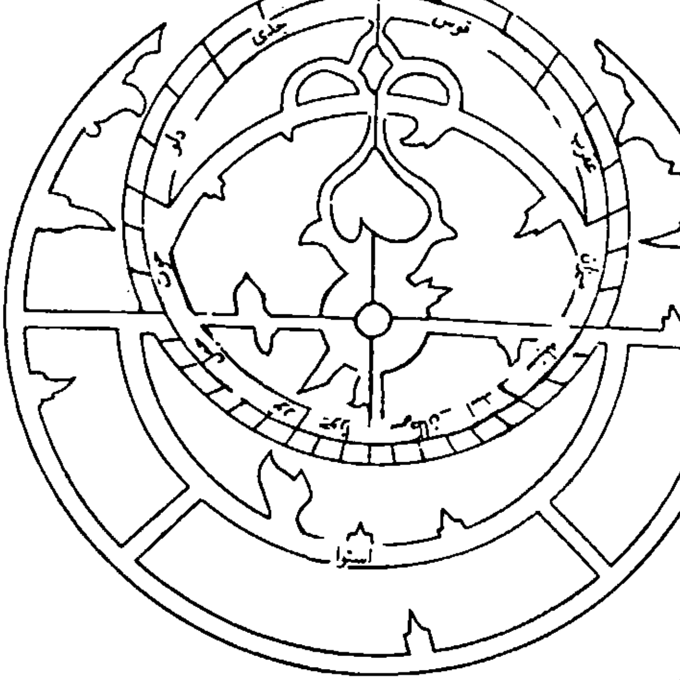
بنابراین، کسر گویای $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$$

تمرین: کسر گویای $\frac{x-1}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)^2(x+1)^4}$ را به‌صورت مجموع چند کسر ساده بنویسید.

راهنمایی: از قضایای پیش استفاده کنید.

◇ادامهٔ مقاله در شمارهٔ آینده



گزارشی از اوّلین سمینار تاریخ ریاضیات در ایران

نخستین سمینار «تاریخ ریاضیات در ایران» در تاریخ ۶ و ۷ اسفند ماه ۱۳۷۶ در شهر «بندرعباس» (دانشگاه هرمزگان) تشکیل شد.

در این سمینار که در آستانهٔ سال جهانی ریاضیات (سال ۲۰۰۰) و در راستای هدفهای سال جهانی ریاضیات تشکیل شد، بسیاری از ریاضیدانان، پیشکسوتان ریاضی، علاقه‌مندان به ریاضیات و تنی چند از میهمانان خارجی شرکت داشتند.

برگزارکنندگان این سمینار، دانشگاه هرمزگان، دانشگاه صنعتی امیرکبیر و انجمن ریاضی ایران بودند که نهایت سعی و تلاش خود را برای هر چه بهتر و باشکوه‌تر برگزار کردن این سمینار، به عمل آورده بودند.

برگزاری چنین سمینارهایی در کشور ریاضیدانان بزرگی همچون خوارزمی، خیام، بیرونی، ماهانی، کاشانی و ... جای بسی مباهات و خوشحالی دارد و به اعتقاد کمیتهٔ علمی سمینار : «هدف از تشکیل چنین سمینارهایی ــ که امیدواریم تکرار شود و تداوم یابد ــ صرفاً بیان کارهای این بزرگان و بالیدن به وجود آنها نیست ؛ بلکه افروختن چراغی است که الگوی جوانان فرهیختهٔ امروز باشد، تا بار دیگر نور پرفروغ دانش ریاضی بر این سرزمین، درخشان‌تر از گذشته، تابیدن گیرد.»

این سمینار در صبح روز ۶ اسفندماه در محل ساختمان مرکزی دانشگاه هرمزگان افتتاح شد. در جلسهٔ افتتاحیه، مسؤولان دانشگاه و کمیتهٔ علمی سمینار، ضمن خوش‌آمدگویی به حاضران و تشریح هدفهای سمینار، برنامه‌های سمینار را نیز بازگو کردند.

از جمله کسانی که صحبتهای بسیار شیوا و قابل استفاده ارائه دادند، جناب حجّت‌الاسلام والمسلمین «حاج آقا نعیم آبادی» امام جمعه و نمایندهٔ ولی فقیه در بندرعباس بودند که ضمن بیان مطالبی دربارهٔ ریاضیات و نقش آن در جامعه، در مورد سال جهانی ریاضیات و بهره‌برداریهای احتمالیِ جهان غرب از این سال در جهت منافع و هدفهای خودشان، به مسؤولان، دست‌اندرکاران و پیشکسوتان ریاضیات، پیشنهادهایی را ارائه کردند.

همچنین در جلسهٔ افتتاحیه، جناب آقای دکتر «احمد شرف‌الدین»، مسؤول گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان، سخنرانی



بسیار جالب و قابل استفاده‌ای ایراد کرد که به دلیل اهمیت آن، متن این سخنرانی را به طور کامل برای مطالعه و استفادهٔ خوانندگان عزیز می‌آوریم.

این سمینار در بعد از ظهر روز ۷ اسفندماه و طی یک میزگرد با حضور مسؤولان و دست‌اندرکاران سمینار، جهت نتیجه‌گیری و جمع‌بندی مطالب و نیز ترسیم خطّ مشی آینده برای تشکیل چنین سمینارهایی، به کار خود خاتمه داد. در جلسهٔ اختتامیه تصمیمهای مهمّی اتخاذ شد که از جملهٔ این مصوّبات، تشکیل یک کمیتهٔ ثابت در طول سال تا برگزاری سمینار بعدی بود تا جوابگوی سؤالها و پذیرای مقاله‌های علاقه‌مندان باشد.

لازم است از همهٔ مسؤولان و دست‌اندرکاران سمینار که به نحوی در برگزاری این سمینار نقش داشتند، کمال تشکر را به عمل آورده و آرزو می‌کنیم خداوند توفیق و موفقیت روزافزون به آنان عطا نماید.

متن کامل سخنرانی آقای دکتر احمد شرف‌الدین در پی می‌آید:

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

موضوع این کنفرانس، «تاریخ ریاضیات ایران» است، موضوع بسیار جالب و ارزنده‌ای است. فرهنگ ایران بسیار غنی و باشکوه است. طی قرنها از این سرزمین دانشمندان، شاعران و فلاسفهٔ بزرگی برخاسته‌اند. معرفی بزرگان این سرزمین، اقدامی مهم در جهت مبارزه با «تهاجم فرهنگی» است. باید دانست که فرهنگ غرب با ارزش است؛ «ویکتور هوگو»ها، «کانت»ها، «دکارت»ها، «نیوتن»ها، «اینشتین»ها و ... فرهنگ غرب را می‌سازند. آنچه ما به عنوان مبارزه با تهاجم فرهنگی می‌گوییم، مبارزه با جنبه‌های منفی فرهنگ غرب است؛ مانند بعضی از فیلمهای غرب که مبتذل و گمراه کننده‌اند. هنگامی که جوان ایرانی از فرهنگ غنی و باشکوه سرزمین خود آگاه شود، جنبه‌های منفی فرهنگ غرب را نمی‌پذیرد.

در ارائه تاریخ ریاضی و به طور کلی «تاریخ علم»، باید به صلح جهانی توجه کامل داشت. در دوره‌های مختلف تاریخ که ستمگران و زورمندان، اقوام را علیه یکدیگر تحریک می‌کردند و به جنگ با یکدیگر وامی‌داشتند، دانشمندان از اقوام مختلف در مسائل علمی با یکدیگر صمیمانه همکاری می‌کردند و هر یک از آنان، تحقیقات و نظرات خود را می‌نوشت و برای دانشمندان دیگر که در کشوری دوردست می‌زیست، می‌فرستاد. واژه paper که در زبان انگلیسی به معنای «نامه» است، در معنای اثر تحقیقی که به صورت نامه‌ای ارسال شده است، به کار می‌رود. واژهٔ paper در معنای اخیر، درست ترجمهٔ واژهٔ «رساله» است که مشتق از واژهٔ «ارسال» به معنای «فرستادن» است. دانشمندان قدیم، تحقیق خود را در نامه‌ای می‌نوشتند و برای دانشمندی دیگر ارسال می‌کردند. این واژهٔ رساله، به تنهایی نشان می‌دهد که چگونه دانشمندان از اقوام مختلف در اعصار تاریخ، با یکدیگر همکاری داشتند. این امر، روح صلح دوستی آنان را نشان می‌دهد.

ما ایرانیان که در طول تاریخ همواره نسبت به اقوام گوناگون، با نظر برادری و صمیمیت می‌نگریستیم، باید در تدریس تاریخ علم و ارائه آن، همواره صلح جهانی را مدّ نظر قرار دهیم و بر این مطلب تکیه کنیم که همکاری دانشمندان اقوام مختلف، از ارکان مهم «صلح» است. ایرانیان ۲۵۰۰ سال پیش، منشور حقوق بشر را تدوین کردند؛ در حالی که در اروپا، پس از جنگ بین‌الملل به چنین کاری دست زدند. ادبیات ایران سرشار از روح عرفانی و «عشق» نسبت به ملتهاست؛ به این شعر سعدی توجه کنیم:

به جهان خرّم از آنم که جهان خرّم از اوست
عاشقم بر همه عالم که همه عالم از اوست

عشق نسبت به ملتها، همواره از موضوعهای اساسی ادبیات ایران بوده است. در سالهای اخیر، ایران برای استقرار صلح در «تاجیکستان» کوشش بسیار نمود و بتازگی دبیر کل سازمان ملل، کوششهای ایران را برای استقرار صلح در تاجیکستان تمجید نمود. در این سالها، ایران کوشش بسیار کرده است تا بین کشورهای ساحل «خلیج فارس»، روابط صمیمانه و صلح‌جویانهٔ مستمر حاصل شود.

مطلب دیگری که می‌خواهم عرض کنم، این است که در معرفی تاریخ ریاضیات ایران، لازم است همراه با معرفی دانشمندانی مانند خوارزمی، ابوریحان، کاشانی و ... آثار استادان نقشگر ایرانی در کاشیکاریهای اماکن متبرّکه و قالیهای نفیس عرضه شود. معرفی این آثار در کنار آثار ریاضیدانان ایرانی، بسیار اهمیت دارد؛ به سه دلیل:

۱ـ نقوش هندسی همدید (synoptiqire) اند یعنی تمام اجزای یک اثر با هم دیده می‌شوند و این بسیار جالب

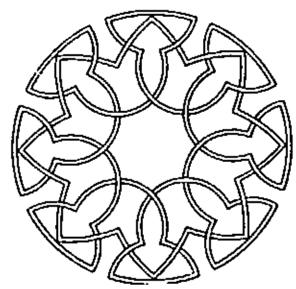
است. برای مطالعهٔ یک مسأله ریاضی یا درک یک قطعهٔ موسیقی، ساعتی وقت لازم است؛ در صورتی که هر یک از کاشیکاریهای اماکن متبرکه و نقشهای قالیهای نفیس، تنها در چند ثانیه، اثر خود را بر بیننده می‌گذارد و او را از قدرت تخیّل هندسی استاد نقشگر ایرانی، به اعجاب وامی‌دارد.

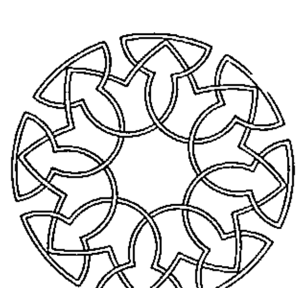
۲ـ نقوش هندسی کاشیکاریهای اماکن متبرکه و قالیهای نفیس، هندسه‌ای است که با زبان هنر بیان شده است و چون «هنر زبان همگانی جهان است» می‌توان این هندسه را در افق بسیار گسترده‌ای عرضه کرد.

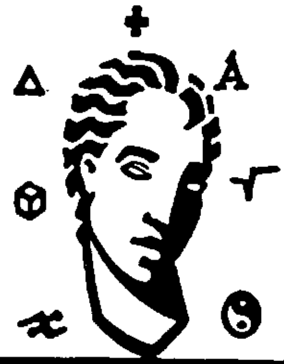
در این جلسه، لازم می‌دانم از آقای «ابوالقاسم قربانی» با احترام یاد کنم. ایشان مدت چهل سال به مطالعه و پژوهش در تاریخ ریاضی ایران پرداختند و در این زمینه، کتابهای متعدّدی منتشر کرده‌اند و این، خدمت فرهنگیِ بزرگی است. اگر در مواردی می‌گوییم:

هرگز حدیث حاضر غایب شنیده‌ای
من در میان جمع و دلم جای دیگر است

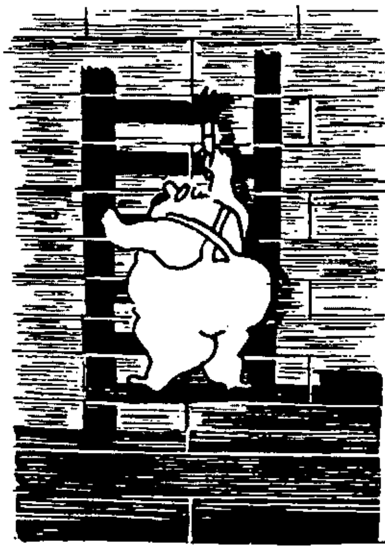
در این مورد باید بگوییم «هرگز حدیث غایب حاضر شنیده‌ای»؛ آقای قربانی در این جلسه حضور ندارند؛ ولی برای ما که کارهای ایشان را خوانده‌ایم و ارزش آنها را می‌دانیم، حضور ایشان را در بین خود احساس می‌کنیم.







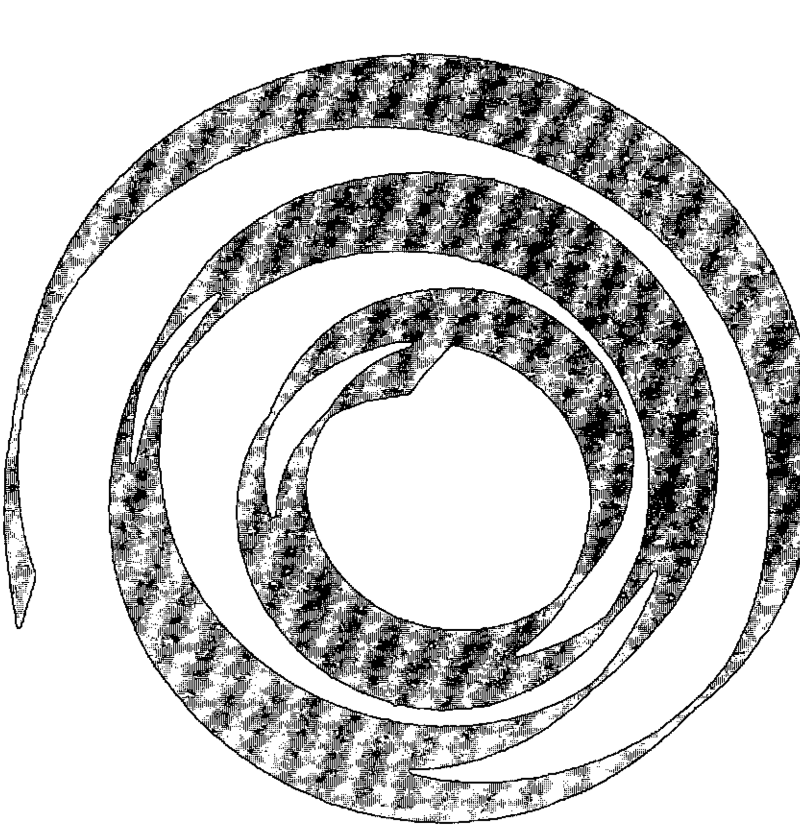
تفریح اندیشه ۴



مهرداد روی پلهٔ وسط نردبانی که به دیوار تکیه دارد ایستاده است و نقاشی می‌کند. او نخست ۵ پله بالا می‌رود، سپس ۷ پله پایین می‌آید و مجدّداً ۴ پله بالا می‌رود.
در این حالت او ۹ پله با آخرین پله فاصله دارد. این نردبان چند پله دارد؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



توابع مولّد

●سید محمّدرضا میرفتّاح
دانش‌آموزدبیرستان سروش
ترجمه از کتاب، رالف ـ پ ـ گریمالدی

تعاریف و امثله (روشهای محاسباتی)

در این بخش ما تعدادی از فرمولها و مثالهایی را که در ارتباط با رشته‌های توانی هستند، بررسی می‌کنیم. این فرمولها برای به‌دست آوردن ضریب جمله‌های خاصی در یک تابع مولّد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. با تعریف زیر آغاز می‌کنیم:

تعریف ۱: $a_0, a_1, a_2, \cdots$ رشته‌ای از اعداد حقیقی است $(a_i \in R)$. تابع

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

تابع مولّد برای رشتهٔ داده شده نامیده می‌شود.

مثال ۱: برای هر $n \in Z^+$ داریم:

$$f(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$$

$$+\binom{n}{n}x^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots$$

با توجه به تعریف فوق تابع $(1+x)^n$، تابع مولّد رشتهٔ زیر است:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \cdots$$

مثال ۲: الف) برای هر $n \in Z^+$ داریم:

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$$

پس:

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots$$

لذا تابع $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ تابع مولّد رشتهٔ زیر است:

$$1, 1, 1, \cdots, 0, 0, 0, \cdots$$

به‌طوری که $n+1$ جملهٔ اوّل یک، و بقیه صفر هستند.

ب) برای $|x| < 1$ و وقتی که n به سمت بینهایت میل می‌کند، اتّحاد قسمت الف به شکل زیر درخواهد آمد:

$$1 = (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

یا

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

درنتیجه $\frac{1}{1-x}$ تابع مولّد رشتهٔ $1, 1, 1, 1, \cdots$ است.

ج) با گرفتن مشتق از طرفین رابطهٔ «ب» خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

یا

$$\frac{+1}{(1-x)^{2}}=1+2x+3x^{2}+\cdots$$

درنتیجه $\frac{1}{(1-x)^{2}}$ تابع مولّد رشتهٔ ۱,۲,۳,۴ ,.... است، درحالی که $\frac{x}{(1-x)^{2}}$ تابع مولّد رشتهٔ ۰,۱,۲,۳ ,.... است.

د) با ادامهٔ مطالب بخش «ج» خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^{2}}\right)=\frac{d}{dx}(0+x+2x^{2}+3x^{3}+\ldots.)$$

یا

$$\frac{x+1}{(1-x)^{3}}=1+2^{2}x+3^{2}x^{2}+4^{2}x^{3}+\ldots.$$

درنتیجه $\frac{x+1}{(1-x)^{3}}$ رشتهٔ $1^{2}, 2^{2}, 3^{2}, 4^{2}, \ldots.$ و $\frac{x(x+1)}{(1-x)^{3}}$ رشتهٔ $0^{2}, 1^{2}, 2^{2}, 3^{2}, \ldots.$ را تولید می‌کند.

مثال ۳: الف) از بخش «ب» مثال ۲ می‌دانیم که تابع مولّد رشتهٔ تمام یک $f(x)=\frac{1}{1-x}$ است.

پس تابع :

$$g(x)=f(x)-x^{2}=\frac{1}{1-x}-x^{2}$$

تابع مولّد رشتهٔ ۱,۱,۰,۱,۱,۱,..... است، درحالی که تابع :

$$h(x)=f(x)+2x^{3}=\frac{1}{1-x}+2x^{3}$$

رشتهٔ ۱,۱,۱,۳,۱,۱,۱,.....را تولید می‌کند.

ب) آیا می‌توان به کمک جواب مثال ۲ برای به‌دست آوردن تابع مولّد رشته ۰,۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,۴۲ ,..... اقدام کرد؟

پاسخ به این پرسش آسان است. مشاهده می‌کنیم که :

$$a_0=0=0^{2}+0$$
$$a_1=2=1^{2}+1$$
$$a_2=6=2^{2}+2$$
$$a_3=12=3^{2}+3$$
$$a_4=20=4^{2}+4$$
$$\vdots$$

در حالت کلّی داریم $(n\ge 0)\, a_n=n^{2}+n$. با استفاده از جوابهای بخشهای «ج» و «د» مثال ۲ تابع مولّد رشته فوق به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$f(x)=\frac{x(x+1)}{(1-x)^{3}}+\frac{x}{(1-x)^{2}}=\frac{x(x+1)+x(1-x)}{(1-x)^{3}}$$
$$=\frac{2x}{(1-x)^{3}}$$

واضح است که حل مسألهٔ فوق به حدس ما در جملهٔ عمومی رشته برمی‌گردد و اگر نتوانیم حدس بزنیم، امکان پاسخگویی به پرسش وجود ندارد. البته در مواردی که بین جمله‌های رشته یک رابطهٔ بازگشتی[1] برقرار باشد، روشهایی برای به‌دست آوردن جملهٔ عمومی آن وجود دارد که منوط به مطالعهٔ بحث روابط بازگشتی است.

با توجه به بسط دوجمله‌ای خیّام برای هر $n\in Z^{+}$ داریم :

$$(1+x)^{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^{2}+\cdots+\binom{n}{n}x^{n}$$

ما با دو مثال، رابطهٔ فوق را برای nهای منفی و nهای غیرصحیح توسعه می‌دهیم. قبل از پرداختن به مثالها باید در تعریف ترکیب تغییراتی ایجاد کنیم. به تعریف زیر توجّه کنید :

تعریف ۲:

$$\forall n\in Z^{+}\binom{-n}{r}=\frac{[(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)]}{r!}$$
$$=\frac{(-1)^{r}[n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)]}{r!}$$
$$=(-1)^{r}\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}=(-1)^{r}\binom{n+r-1}{r}$$

در حقیقت با تعریف فوق تعریف ترکیب را برای nهای منفی توسعه داده‌ایم.

تذکّر: برای nهای غیرصحیح $\binom{n}{r}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$\forall n\in R\ \binom{n}{r}=\frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

حال آماده‌ایم که مثالهای زیر را مورد بررسی قرار دهیم.

1_ Recurrence Relation

مثال ۴: برای هر $n \in Z^+$ بسط سری ماکلورن[1] برای $(1+x)^{-n}$ به‌صورت زیر است:

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!} + (-n)(-n-1)(-n-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$$

رابطهٔ فوق تعمیم بسط دوجمله‌ای خیّام است که بیانگر تابع مولّد رشتهٔ $\binom{-n}{0}$ ، $\binom{-n}{1}$ ، $\binom{-n}{2}$ ، ... است.

مثال ۵: برای هر $n \in R$ سری ماکلورن برای $(1+x)^n$ عبارت است از:

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} x^r$$

به عنوان مثال:

$$(1+3x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})\cdots(\frac{-3r+2}{3})}{r!} (3x)^r$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+2)}{r!} x^r$$

و $(1+3x)^{-\frac{1}{3}}$ تابع مولّد رشته 1 ، (-1) ، $\frac{(-1)(-4)}{2!}$ ، $\frac{(-1)(-4)(-7)}{3!}$ ، ... ، $\frac{(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+2)}{r!}$ است.

پیش از ادامه مطالبی را که تاکنون بررسی کرده‌ایم، در جدول زیر برای مرورهای آینده جمع‌آوری می‌کنیم.

$\forall m, n \in Z^+ \ , \ a \in R$

۱) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

۲) $(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n x^n$

۳) $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm}$

۴) $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

۵) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \qquad |x|<1$

۶) $\frac{1}{(1+x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i$$

$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}x + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} x^i$$

۷) $\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i$$

$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}(-x)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ و $h(x) = f(x)g(x)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

به‌طوری که:

$$\forall k \geq 0 \ ; \ c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

مثال ۶: ضریب x^{15} را در $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$ تعیین کنید.

از آنجا که داریم:

$$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = x^2(1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$$

---

[1] Maclaurin

ضریب x^{15} در $f(x)$، ضریب x^{15} در $(\frac{x^{2}}{1-x})^{4} = \frac{x^{8}}{(1-x)^{4}}$ خواهد بود. درنتیجه ضریب مورد جستجو ضریب x^{7} در تابع $\frac{1}{(1-x)^{4}}$ است که عبارت است از :

$$(-1)^{7}\binom{-4}{7} = (-1)^{7}(-1)^{7}\binom{+4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$

در حالت کلی برای هر $n \in Z^{+}$ اگر $0 \le n \le 7$ باشد، در آن‌صورت ضریب x^{n} در $f(x)$ برابر صفر است. برای $n \ge 8$ ضریب x^{n} در $f(x)$، ضریب x^{n-8} در تابع $\frac{1}{(1-x)^{4}}$ است که آن برابر است با :

$$(-1)^{n-8}\binom{-4}{n-8} = (-1)^{n-8}(-1)^{n-8}\binom{+4+n-8-1}{n-8}$$

$$= \binom{n-5}{n-8}$$

مثال ۷: به چند طریق می‌توان r شیء را از n شیء مجزا انتخاب کرد، اگر جابجایی مهم نباشد و تکرار مجاز باشد؟ (این مسأله در حقیقت ترکیب با تکرار است که در آنالیز ترکیبی مورد بحث قرار گرفته است.) ما در اینجا تلاش می‌کنیم این مسأله را با استفاده از معلومات خود در مورد تابع مولّد حل کنیم.

برای هریک از n شیء مجزا سری هندسی $1 + x + x^{2} + \cdots$ را در نظر می‌گیریم. توان هر جمله بیانگر تعداد انتخاب آن شیء است که مثلاً می‌تواند صفر، یک، دو و ... باشد.

با درنظرگرفتن همهٔ n شیء، تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$f(x) = (1 + x + x^{2} + x^{3} + \cdots)^{n}$$

که در حقیقت حاصلضرب n تا سری هندسی فوق است. حال ضریب جملهٔ x^{r} در تابع فوق بیانگر تعداد حالتهایی است که از میان n شیء مجزا می‌توان r شیء را انتخاب کرد. حال کافی است که به‌جای سری هندسی، تابع مولد آن را قرار دهیم، داریم :

$$f(x) = (\frac{1}{1-x})^{n} = \frac{1}{(1-x)^{n}} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^{i}$$

که ضریب x^{r}، $\binom{n+r-1}{r}$ خواهد شد.

مثال ۸: یک پلیس به چند طریق می‌تواند ۲۴ اسلحه را میان ۴ سرباز تقسیم کند، به‌طوری که هرکس حداقل ۳ و حداکثر ۸ اسلحه دریافت کند؟

با توجّه به مثال ۷ تعداد انتخابها برای هر سرباز توسط سری هندسی $x^{3} + x^{4} + \cdots + x^{8}$ معین می گردد. چون ۴ سرباز وجود دارد، تابع مولّد $f(x) = (x^{3} + x^{4} + \cdots + x^{8})^{4}$ است. کافی است ضریب جملهٔ x^{24} را در $f(x)$ تعیین کنیم. جواب مسأله فوق همین عدد خواهد بود. برای این کار چنین عمل می‌کنیم :

$$f(x) = x^{12}(1 + x + x^{2} + \cdots + x^{5})^{4} = x^{12}(\frac{1-x^{6}}{1-x})^{4}$$

اگر ضریب x^{12} را در تابع $(\frac{1-x^{6}}{1-x})^{4}$ جستجو کنیم، گویی ضریب x^{24} را در $f(x)$ یافته‌ایم.

$$(1-x^{6})^{4}(1-x)^{-4} = \left[1 - \binom{4}{1}x^{6} + \binom{4}{2}x^{12} - \cdots + x^{24}\right]$$

$$\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^{2} + \cdots\right]$$

ضریب x^{12} به ترتیب زیر به‌دست می‌آید :

$$\left[(-1)^{12}\binom{-4}{12} - (-1)^{6}\binom{4}{1}\binom{-4}{6} + \binom{4}{2}\binom{-4}{0}\right]$$

$$= \left[\binom{15}{12} - \binom{4}{1}\binom{9}{6} + \binom{4}{2}\right] = 125$$

مثال ۹: اتّحاد زیر را اثبات کنید.

$$\forall n \in Z^{+} \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{2}$$

از آنجا که داریم :

$$(1+x)^{2n} = \left[(1+x)^{n}\right]^{2}$$

با مقایسهٔ ضرایب جمله‌های x^{n} در دو طرف تساوی فوق به اتحاد بالا دست می‌یابیم. ضریب جملهٔ x^{n} در سمت چپ تساوی $\binom{2n}{n}$ است. برای به‌دست آوردن ضریب x^{n} در سمت راست تساوی فوق، سمت راست را بسط می‌دهیم :

$$\left[(1+x)^{n}\right]^{2} = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^{2} + \cdots + \binom{n}{n}x^{n}\right]^{2}$$

با توجه به بسط فوق ضریب x^n به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

و با توجه به تساوی اثبات شده در آنالیز ترکیبی $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ مجموع فوق به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

حکم اثبات شد.

مثال ۱۰: ضریب x^8 را در $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$ به‌دست آورید.

از آنجا که برای هر a مخالف صفر داریم :

$$\frac{1}{x-a}=\frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=-\frac{1}{a}\left[1+(\frac{x}{a})+(\frac{x}{a})^2+\cdots\right]$$

پس برای حلّ مسأله می‌بایست ضریب x^8 را در رابطهٔ زیر جستجو کرد :

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=$$

$$(-\frac{1}{3})\left[1+(\frac{x}{3})+(\frac{x}{3})^2+\cdots\right](\frac{1}{4})(\frac{1}{1-\frac{x}{2}})^{+2}$$

$$=(-\frac{1}{3})(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\cdots)(\frac{1}{4})\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}(-\frac{x}{2})+\binom{-2}{2}(-\frac{x}{2})^2+\cdots\right]$$

روش دیگری که برای حلّ مسأله وجود دارد استفاده از روش «تجزیه به کسرهای جزئی»[1] است.

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

با متّحد قراردادن طرفین خواهیم داشت :

$$1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-3)+C(x-3)$$

یا

$$1=(A+B)x^2+(-4A-5B+C)x+(4A+6B-3C)$$

از مقایسهٔ ضرایب به دست می‌آید که :

$$\begin{cases}A+B=0\\-4A-5B+C=0\\4A+6B-3C=1\end{cases}$$

و از حلّ دستگاه سه معادله سه مجهول فوق، به جوابهای زیر می‌رسیم :

$$A=1\quad,\quad B=-1\quad,\quad C=-1$$

پس :

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$=(-\frac{1}{3})\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)+(\frac{1}{2})(\frac{1}{1-\frac{x}{2}})+(-\frac{1}{4})\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=(-\frac{1}{3})\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^i+(\frac{1}{2})\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^i$$

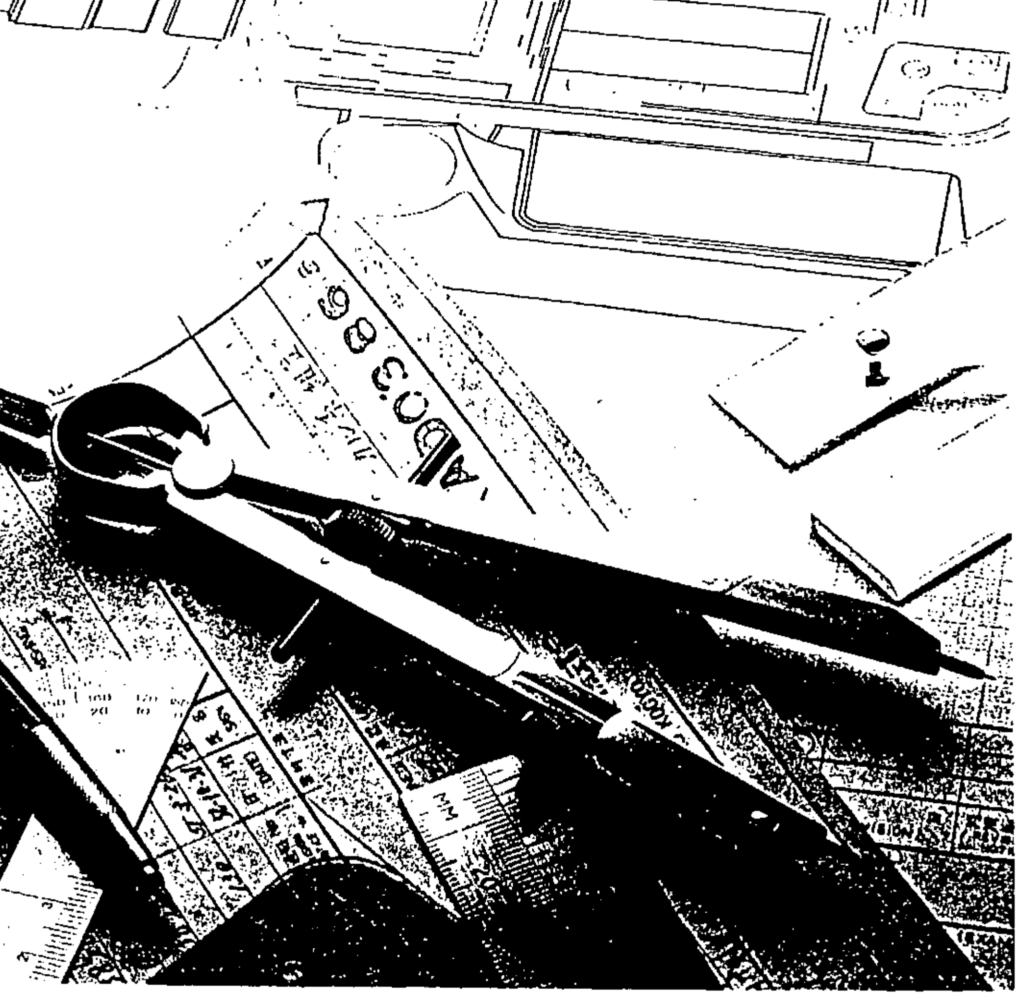
$$+(-\frac{1}{4})\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}(-\frac{x}{2})+\binom{-2}{2}(-\frac{x}{2})^2+\cdots\right]$$

ضریب x^8 بدین ترتیب است :

$$(-\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^8+(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^8+(-\frac{1}{4})\binom{-2}{8}(-\frac{1}{2})^8$$

$$=-\left[(\frac{1}{3})^9+7(\frac{1}{2})^{10}\right]$$

۱ـ Partial Fraction Decomposition



تربیت خلاقیت ریاضی [در دبیرستان]

• پرویز شهریاری

اگر بخواهید، می‌توانید ذهن ریاضی خود را تربیت کنید و نیروی خلاق خود را در زمینهٔ ریاضیات (که به‌صورتی پنهانی، در همهٔ شما وجود دارد) ظاهر کنید و تکامل دهید. برای گام‌نهادن در این راه، چند شرط بنیادین وجود دارد:

۱) به ریاضیات علاقه‌مند باشید و در راه رسیدن به خلاقیت ریاضی، بخشی از وقت و انرژی خود را به‌کار ببرید؛

۲) به این باور رسیده باشید که ریاضیات، کمتر به حافظه و بیشتر به اندیشه نیاز دارد؛ اندیشهٔ منطقی، که در سرشت همهٔ شما به‌طور طبیعی نهاده شده است؛

۳) در ساعت‌هایی که خارج از کلاس به مطالعه و یا تمرین مسائل ریاضیات می‌پردازید، خود را از دغدغهٔ برنامهٔ کلاس، کتاب درسی، امتحان و به‌ویژه کنکور آزاد کنید: به‌خاطر درک واقعی مفهوم‌ها و استدلال‌های ریاضی کار کنید، نه به دلیل تکلیفی که به عهدهٔ شما گذاشته شده است و یا به دلیل نمره‌ای که بعد از امتحان یا شرکت در مسابقه و کنکور انتظار دارید. البته، باید به این حقیقت روشن هم اعتقاد داشته باشید که ورود در ژرفای ریاضیات و درک کامل مفهوم‌های ریاضی، به‌خودی خود، شما را در امتحان‌ها و کنکور هم موفق می‌کند. خلاقیت ریاضی، شرط لازم و کافی برای موفق شدن در هر امتحان و مسابقه‌ای است، گرچه برخی گمان می‌کنند که می‌توان بدون آن‌هم، موفقیت‌هایی به‌دست آورد. شاید این دیدگاه، برای برخی موفقیت‌های زودگذر، درست باشد، ولی بی‌تردید، برای درازمدت و برای کسی که می‌خواهد ریاضی را به درستی دریابد، نادرست است و سرانجام، موجب ناکامی می‌شود.

□

یکی از راه‌های رسیدن به ذهن فعال و کاوشگر در زمینهٔ ریاضیات، تجزیه و تحلیل مسأله و کاوش در مفهوم‌ها و مسأله‌های پیرامون آن است. وقتی یک مسأله را حل می‌کنید، تلاش کنید، به این پرسش‌ها و پرسش‌های مشابه آن پاسخ بدهید:

ـ آیا عکس مسأله درست است؟

ـ آیا در مسأله، شرط یا شرط‌های اضافی وجود دارد، یعنی آیا می‌توان حکم مسأله را با فرض‌های کمتری ثابت کرد؟

ـ حالتهای خاص مسأله کدام‌اند؟

ـ آیا می‌توان مسأله را تعمیم داد؟ و اگر پاسخ مثبت است، به‌چه صورت‌هایی؟

ــ چه مسأله‌هایی با این مسأله شباهت دارند؟

ــ اگر با مسأله‌ای از هندسهٔ روی صفحه سر و کار دارید، چه هم‌ارزهایی در فضا پیدا می‌کند؟ یا اگر قانونی رادربارهٔ عددهای درست ثابت می‌کنید، دربارهٔ عددهای مختلط درست، چگونه می‌شود؟ دربارهٔ چندجمله‌ای‌های درست چه‌طور؟ ...

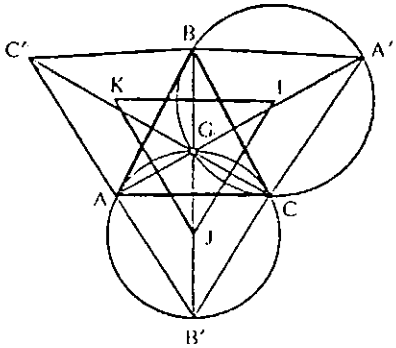
این پرسش‌ها را می‌توان بازهم ادامه داد. خود مسأله ما را در انتخاب پرسشها راهنمایی می‌کند، بنابراین، بسته به نوع مسأله، جستجوی ما می‌تواند گسترده‌تر یا محدودتر باشد. تنها به‌یاد داشته باشید که اگر فقط یک مسأله را به‌طور کامل حل کنید و به‌اصطلاح «ته آن را درآورید» بسیار سودمندتر از آن است که ده‌ها مسأله را برای شما حل کنند یا از روی کتابهای حل مسأله فرا بگیرید. نکتهٔ آخر این که، اگر به پرورش ذهن ریاضی خود علاقه‌مندید، باید به‌خودتان اعتماد داشته باشید، ازاین‌که مسأله‌ای به سادگی تسلیم شما نمی‌شود، نهراسید. دوباره به آن «حمله» کنید و مطمئن باشید،اگر آن دژ قابل گشودن باشد سرانجام به دست شما گشوده خواهد شد... حتی اگر موفق به‌فروریختن برج و باروی «مستحکم» دژ نشوید، می‌توانید در «دیوارده‌ای» آن رخنه کنید و ضمن این رخنه، به بسیاری نکته‌های جانبی دست یابید.

هیچ‌چیز بهتر از مثال، مطلب را روشن نمی‌کند. دراین مقاله، برای این که مطلب دراز نشود، تنها به یک مسأله پرداخته‌ایم؛ تازه دراین مسأله هم، به جستجوی همه جانبه نرفته‌ایم و تنها به برخی از آنها پرداخته‌ایم. به‌عنوان نمونه، مسأله را (که یک مسألهٔ ساده از هندسهٔ مسطحه است) به فضا نبرده‌ایم که مثلاً، اگر به‌جای مثلث، یک چهاروجهی و به‌جای مثلث متساوی‌الاضلاع، یک چهاروجهی منتظم داشته باشیم، چه‌می‌شود! درخود هندسهٔ مسطحه هم، خیلی دور نرفته‌ایم و به حالتهای کم و بیش بغرنج نپرداخته‌ایم. در واقع، خواسته‌ایم نمونه‌ای بیاوریم که بتواند تا حدی راهنمای شما ریاضیدان‌های آینده باشد. چه بسا بازهم فرصتی پیش‌آید و بتوانیم نمونه‌های دیگری را در برابر شما قرار دهیم.

□

مسأله: روی ضلع‌های یک مثلث غیرمشخص و در بیرون آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. ثابت کنید، مرکزهای این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

مسألهٔ مشهوری است و در بسیاری از کتابهای هندسه آمده است. حل آن هم دشوار نیست؛ دراین‌جا یکی از راه‌حلها را می‌آوریم.



شکل ۱

مثلث مفروض را ABC، رأسهای سوم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را A'، B' و C' و مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را I، J و K می‌نامیم (شکل ۱). ثابت می‌کنیم، هریک از زاویه‌های داخلی مثلث IJK، برابر با ۶۰ درجه است.

دایره‌های ACB' (به مرکز J) و BCA' (به مرکز I) یکدیگر را در نقطه‌های C و G قطع کرده‌اند. داریم:

$$A\hat{G}C = ۱۸۰^\circ - A\hat{B'}C = ۱۲۰^\circ ;$$

$$B\hat{G}C = ۱۸۰^\circ - B\hat{A'}C = ۱۲۰^\circ$$

بنابراین $A\hat{G}B = ۱۲۰^\circ$، یعنی

$$A\hat{G}B + A\hat{C'}B = ۱۸۰^\circ$$

و دایرهٔ ABC' (به مرکز K) هم، از نقطهٔ G می‌گذرد.

سپس $IJ \perp CG$ و $IK \perp BG$ (خط راستی که از مرکز دو دایره بگذرد، بر وتر مشترک دو دایره عمود است) و چون $B\hat{G}C = ۱۲۰^\circ$، پس $J\hat{I}K = ۶۰^\circ$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $I\hat{J}K = ۶۰^\circ$ و $J\hat{K}I = ۶۰^\circ$، یعنی مثلث IJK متساوی‌الاضلاع است.

در حالتی هم که، نقطهٔ G، در بیرون مثلث ABC باشد، می‌توان با روشی مشابه، استدلال کرد.

اکنون به تجزیه و تحلیل حل مسأله می‌پردازیم:

۱) با اندک دقتی معلوم می‌شود که خط راست CG، زاویهٔ AGB را نصف می‌کند (ثابت کنید!) و می‌توان نتیجه گرفت که خط راست CG، از نقطهٔ C' وسط کمان AB ازدایرهٔ ABC'

می‌گذرد. به همین ترتیب، خط‌های راست BG و AG، به‌ترتیب از نقطه‌های ′B و ′A می‌گذرند. به این ترتیب، مسألهٔ دیگری ثابت می‌شود:

مسألهٔ ۱: روی ضلع‌های مثلث غیرمشخص ABC و در بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع ′BCA، ′CAB و ′ABC را ساخته‌ایم. ثابت کنید، خط‌های راست ′AA، ′BB و ′CC از یک نقطه می‌گذرند و در آن‌جا شش زاویهٔ برابر تشکیل می‌دهند (هرکدام برابر ۶۰ درجه).

۲) اگر بار دیگر، راه‌حل مسأله را مرور کنیم، متوجه می‌شویم که از شرط مربوط به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث‌های ′BCA، ′CAB و ′ABC استفاده نکردیم. تنها چیزی که ضمن حل مسأله، مورد استفاده قرار گرفت، این بود که «هریک از زاویه‌های رأس‌های ′A، ′B و ′C، برابر ۶۰ درجه است». بنابراین، در مسألهٔ اصلی، می‌توان فرض را «ضعیف‌تر» و مسأله را به این صورت تنظیم کرد:

مسألهٔ ۲: اگر روی ضلع‌های مثلث غیرمشخص ABC و در بیرون آن، مثلث‌های ′BCA، ′CAB و ′ABC را با زاویهٔ برابر ۶۰ درجه در رأس‌های ′A، ′B و ′C بسازیم، آن‌وقت مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

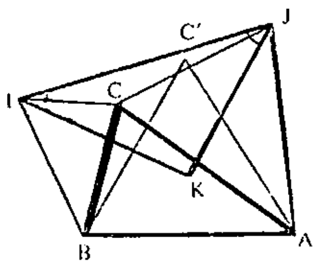
۳) مسأله را می‌توان باز هم تعمیم داد. با اندکی تلاش، می‌توانید درستی مسألهٔ زیر را ثابت کنید:

مسألهٔ ۳: اگر روی ضلع‌های مثلث ABC و در بیرون آن، مثلث‌های ′BCA، ′CAB و ′ABC را با این شرط بسازیم که داشته باشیم:

$$\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180^\circ$$

آن وقت، مثلث IJK (I، J و K مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها هستند)، زاویه‌هایی برابر $\hat{A}'$، $\hat{B}'$ و $\hat{C}'$ خواهد داشت.

در حالت خاص $\hat{A}'=\hat{B}'=\hat{C}'=60^\circ$، همان مسألهٔ ۲ به‌دست می‌آید. همچنین می‌توان ثابت کرد: اگر $\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=360^\circ$، آن‌وقت زاویه‌های مثلث IJK برابر $\frac{\hat{A}'}{2}$، $\frac{\hat{B}'}{2}$ و $\frac{\hat{C}'}{2}$ خواهند بود. در حالت خاصی که داشته باشیم: $\hat{A}'=\hat{B}'=\hat{C}'=120^\circ$ آن وقت مثلث IJK متساوی‌الاضلاع می‌شود.

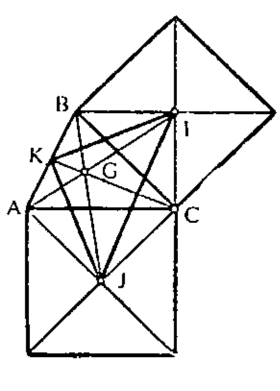


شکل۲

به نکتهٔ دیگری هم توجه کنیم: نقطه‌های I و J و K، در این‌جا بر مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ″BCA، ″CAB و ″ABC منطبق‌اند، به شرطی که A و ″A در یک طرف BC، B و ″B در یک طرف AC و C و ″C در یک طرف AB باشند (چهارضلعی ″AA′BA و چهارضلعی‌های شبیه آن قابل محاط در دایره‌اند). با همین استدلال، مسألهٔ اصلی را، به این صورت هم می‌توان تنظیم کرد:

مسألهٔ ۴: اگر مثلث‌های ′BCA، ′CAB و ′ABC را، با زاویه‌های ۱۲۰ درجه در رأس‌های ′A، ′B و ′C طوری رسم کنیم که A و ′A در یک طرف BC، B و ′B در یک طرف AC و C و ′C در یک طرف AB واقع باشند، آن‌وقت مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلث‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

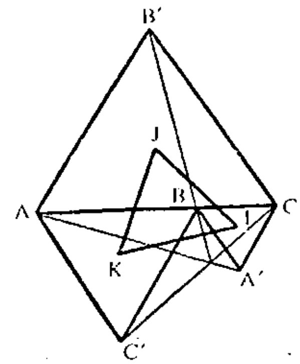
۴) اکنون به بررسی بعضی حالتهای خاص می‌پردازیم.



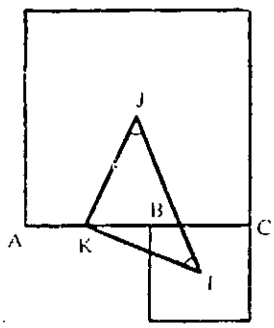
شکل۳

مسألهٔ ۵: به ازای $\hat{A}' = \hat{B}' = 45°$ و $\hat{C}' = 90°$، مثلث IJK، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در این حالت می‌توان I و J را مرکز مربعهایی دانست که روی ضلع‌های BC و AC ساخته شده‌اند و k وسط ضلع AB است (شکل ۳).

مسألهٔ ۶: اگر $\hat{A}' = \hat{B}' = 30°$ و $\hat{C}' = 120°$، آن‌وقت مثلث IJK متساوی‌الساقین و با زاویهٔ رأس K برابر ۱۲۰ درجه خواهد بود (شکل ۲). دراین‌جا، I و J، رأس‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی هستند که روی ضلع‌های BC و CA و در بیرون مثلث ساخته شده‌اند و K مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC′ است که روی AB طوری ساخته شده است که C و C′ در یک طرف AB باشند.

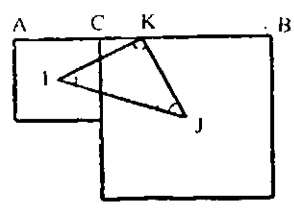


شکل ۴

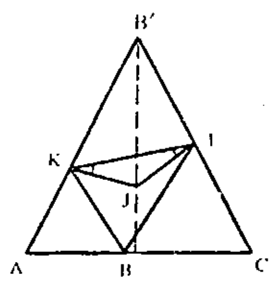


شکل ۵

مسألهٔ ۷: حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که در آن زاویه‌های B و C از مثلث ABC برابر صفر باشند، یعنی نقطه‌های A، B و C روی یک خط راست قرار گیرند. این حالت را روی شکل‌های ۴ تا ۷ نشان داده‌ایم. شکل ۴ حالت خاص شکل ۱، شکل‌های ۵ و ۶ حالت‌های خاص شکل ۳ و شکل ۷ حالت خاص شکل ۲ است.

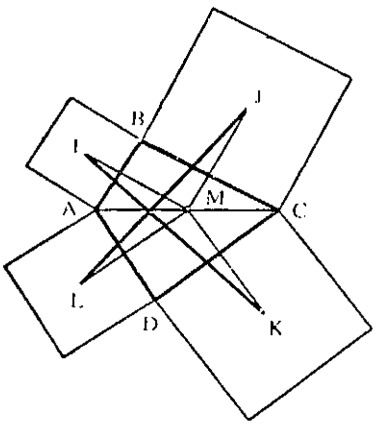


شکل ۶



شکل ۷

حالا صورت مسأله را اندکی تغییر می‌دهیم و به‌جای واژهٔ «مثلث» از واژهٔ «چهارضلعی» استفاده می‌کنیم. درشکل ۸ دیده می‌شود، چهارضلعی IJKL مربع نیست، یعنی با تبدیل مثلث به چهارضلعی و با تبدیل مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به مربع، نتوانستیم به نتیجه‌ای شبیه مسألهٔ اصلی برسیم. ولی آیا چهارضلعی IJKL، ویژگی دیگری ندارد؟ اگر از مسألهٔ ۵ استفاده کنیم، به سادگی ثابت می‌شود که قطرهای چهارضلعی IJKL برهم عمودند و طول‌هایی برابر دارند.



شکل ۸

در واقع، اگر وسط قطر AC را M بنامیم، مثلث‌های IMJ و KML، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین‌اند (مسأله ۵). بنابراین، با دوران به مرکز M و به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰ درجه، مثلث MJL بر مثلث MIK منطبق می‌شود، یعنی $(IK) \perp (JL)$، $|IK| = |JL|$ به این ترتیب، مسألهٔ تازه‌ای به‌دست می‌آید:

مسألهٔ ۸: اگر روی ضلع‌های یک چهارضلعی غیرمشخص و در بیرون آن، مربع هایی رسم کنیم، آن وقت مرکزهای این مربع‌ها، رأس‌های یک چهارضلعی‌اند که قطرهای آن برهم عمودند و طول‌هایی برابر دارند.

توجه به حالت‌های خاص مسألهٔ ۸، جالب است.

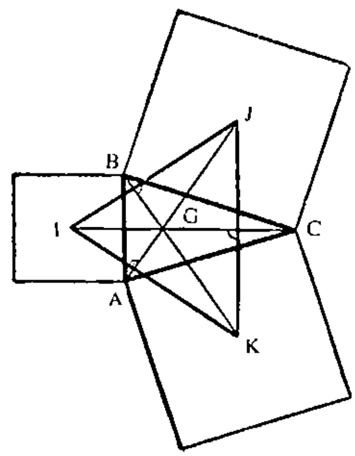
اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، نقطهٔ M در محل برخورد قطرهای آن خواهد بود و مسأله‌ای شبیه مسألهٔ اصلی مثلث به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۹: روی ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع و در بیرون آن، مربع‌هایی ساخته‌ایم. ثابت کنید که مرکزهای این

مربع‌ها، رأس‌های یک مربع‌اند.

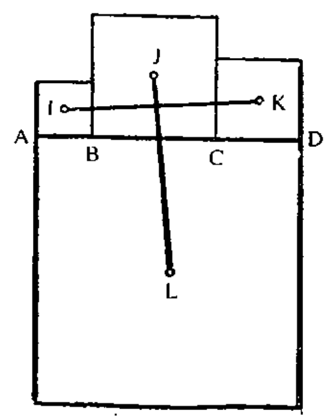
اگر به جای چهارضلعی ABCD، مثلث ABC را درنظر بگیریم، آن‌وقت به این مسأله می‌رسیم.

مسألهٔ ۱۰: روی ضلع‌های یک مثلث غیرمشخص و در بیرون آن، مربع‌هایی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که ارتفاع‌های مثلثی که رأس‌های آن، مرکزهای این مربع‌هاست، از رأس‌های مثلث مفروض می‌گذرند (شکل ۹).

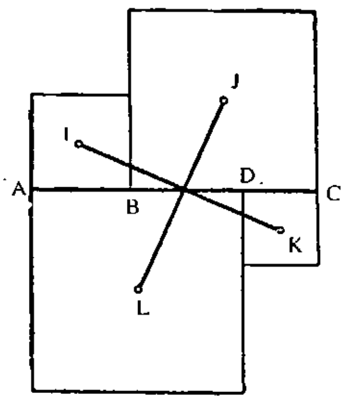


شکل ۹

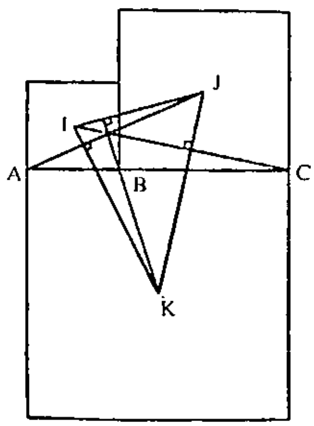
مسألهٔ ۱۱: می‌توان حالت خاصی را درنظرگرفت که نقطه‌های A، B، C و D بر یک خط راست واقع باشند. دراین صورت شکل‌های ۱۰ و ۱۱ (به‌عنوان حالت خاص شکل ۸) و شکل ۱۲ (به‌عنوان حالت خاص شکل ۹) به‌دست می‌آیند.



شکل ۱۰

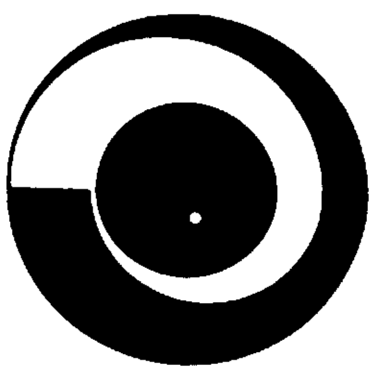


شکل ۱۱



شکل ۱۲

بی‌تردید حدس می‌زنید که این بررسی را می‌توان همچنان ادامه داد.





تثلیث زاویه

(قسمت دوم)

● سیامک جعفری

امتناع

حل یک مسأله هندسی، همیشه به روش هندسی، ساده یا ممکن نیست. بلکه گاهی نیز مسائل هندسه به روشهای مثلثاتی یا جبری قابل حل است. یکی از برهانهای دقیق امتناع تثلیث زاویه، به کمک دو ابزار هندسی پرگار و خط‌کش، شبیه‌سازی جبری است.

شبیه‌سازی: بعضی مسائل هندسی را با شبیه‌سازی آن در جبر حل و بحث می‌کنند و پدیدهٔ شبیه‌سازی امروزه درحل و طرح مسائل روش کاربردی مورد توجه است.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin x.\cos y$$

با جایگزینی $u = \sin x, v = \cos y$

معادلهٔ اصلی به شکل زیر خواهد شد :

$$u^4 + v^4 + 2 = 4u.v$$

و اکنون پس از شبیه‌سازی در جبر، این معادله را حل خواهیم کرد.

$$\Rightarrow (u^4 + 1) + (v^4 + 1) - 4u.v = 0$$

$$\Rightarrow (u^4 - 2u^2 + 1) + (v^4 - 2v^2 + 1) + 2u^2 + 2v^2 - 4u.v = 0$$

$$\Rightarrow (u^2 - 1)^2 + (v^2 - 1)^2 + 2(u - v)^2 = 0$$

مجموع مربعات سه عدد، برابر صفر شده است.

بنابراین $u - v = 0$ و $v^2 - 1 = 0$ و $u^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

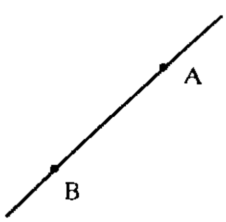
و حل این معادله‌ها ساده خواهد بود و در نهایت با جایگذاری برگشتی، چنین خواهد شد :

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad y_1 = 2k\pi$$

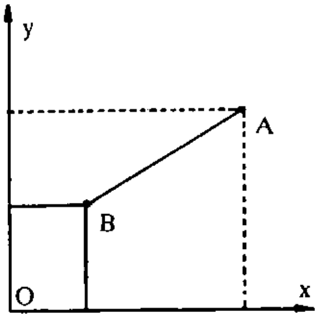
$$(n , k \in z)$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad y_2 = \pi + 2k\pi$$

به‌خاطر دارید که هر دو نقطه متمایز، نمایش یک خط راست است.



ش ۱



ش۲

معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ متمایز می‌گذرد به‌صورت زیر است :

$(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$

روی محور طول‌ها اگر، x_A و x_B معلوم باشند، آشکار است که $(x_B - x_A)$ نیز معلوم خواهد بود. دربارهٔ $(y_B - y_A)$ همین‌طور خواهد بود. معادلهٔ بالا را ساده می‌کنیم.

$(x_B - x_A)y + (y_A - y_B)x + y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = 0$

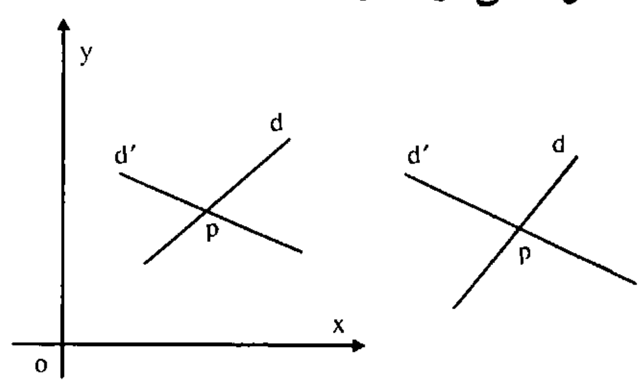
در هندسهٔ مقدماتی خوانده‌اید که : $x_A(y_B - y_A)$ و $y_A(x_A - x_B)$ را می‌توان به کمک خط‌کش به‌دست آورد. آشکار است که هر نقطه به مختصات (x , y) را می‌توان به کمک این وسیله تعیین کرد. بازهم معادلهٔ خط را ساده‌تر می‌کنیم.

$Ay + Bx + C = 0$

بنابراین هرگاه A، B وC به کمک خط‌کش قابل نمایش باشند، هر نقطه روی این خط نیز به کمک این وسیله قابل نمایش است. به یاد داشته باشیم که منظور از خط‌کش، ابزاری است که دو نقطهٔ متمایز را به هم وصل می‌کند و نمایش خط راست عبور کننده از دو نقطه متمایز است.

اکنون باز می‌گردیم به هندسه و مطلب دیگری را در جبر مدل‌سازی خواهیم کرد.

● محل تلاقی دوخط راست



ش۳ ش۴

دو خط به معادله‌های زیر درنظر بگیریم

$Ax + By + C = 0$

$A'x + B'y + C' = 0$

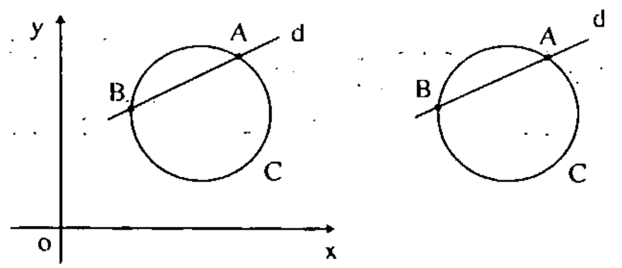
ضرایب A, B, C, A', B' و C' از نوع ضرایب ساختنی به کمک خط‌کش می‌باشند. محل تلاقی دوخط، چنین خواهد شد :

$$x = \frac{C'B - CB'}{AB' - A'B} \; , \; y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B}$$

در هندسهٔ مقدماتی، خوانده‌اید که اگر دو قطعه خط با طول‌های معلوم داشته باشیم، دراین صورت به راحتی می‌توان با روش‌های ساده (به کمک خط‌کش)، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، دو قطعه را ترسیم کرد. بنابراین (x , y) را می‌توان به کمک ترسیم به‌دست آورد.

ملاحظه می‌کنید تمام چیزهایی را که ممکن است با مثلاً واحد طول به وسیلهٔ اعمال گویای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم حاصل شود، با خط‌کش رسم کنیم و عبارتند از تمام اعمال گویا بر روی اعداد گویا $\frac{a}{b}$، که a و $b \neq 0$ اعداد صحیح هستند. این مجموعه، نسبت به این اعمال بسته است. هرمجموعه‌ای که دارای این خاصیت باشد، هیأت (میدان) نامیده می‌شود.

پرگار نیز مانند خط‌کش، به کمک مدل‌سازی جبری قابل بحث است. به‌یاد دارید که خط و دایره یا دو دایره نسبت به هم چه حالتهایی داشتند. اکنون، حالت متقاطع را بررسی خواهیم کرد :



ش۵ ش۶

مطابق شکل ۶ معادله دایره و خط راست، خواهد شد :

$Ax + By + C = 0$

$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$

فرض کنید A, B, C, α, β و γ درمیدان F قرار دارند. با حذف y بین این دو معادله، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر به‌دست می‌آید.

$ax^2 + bx + c = 0$

$a = A^2 + B^2$ و $b = 2(AC + B^2\alpha - AB\beta)$,

$c = C^2 - 2BC\beta + B^2\gamma$

الف: ملاحظه می‌کنید که ضرایب a , b و c با اعمال گویا به‌دست می‌آیند، بنابراین درمیدان F هستند.

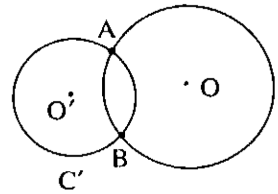
ب : جوابهای معادله به صورت زیر است :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

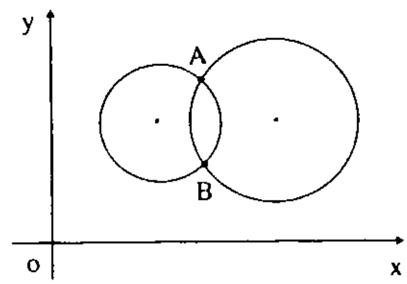
یا

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=p+q\sqrt{k}$$

در آینده، نتایجی را از تساوی اخیر به‌دست می‌آوریم.
اکنون، حالت تقاطع دو دایره را درنظر بگیرید :



ش۷



ش۸

معادله‌های دو دایره :

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$
$$x^2+y^2+2a'x+2b'y+c'=0$$

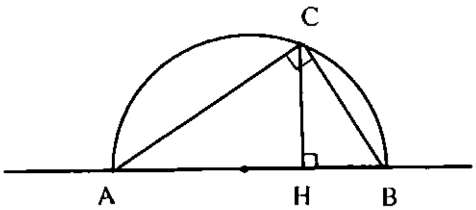
طرفین معادلهٔ دوم را از طرفین معادلهٔ اوّل کم می‌کنیم، معادلهٔ فصل مشترک و خط راست، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$2(a-a')x+2(b-b')y+c-c'=0$$

در حالتی که a و b در میدان F باشند، ملاحظه می‌کنید، ازآنجا که اعمال گویای اصلی در کار باشد، [مانند خط راست عابر بر دو نقطه متمایز، محل تلاقی دوخط راست، محل تلاقی دو دایره] می‌توان با عمل خط‌کش و ترسیم خطوط راست مسأله را حل کرد. ولی در حالت تلاقی خط با دایره، عنصر $\sqrt{k}$ وارد شد که در میدان F نیست.

در این حال، مجموعه‌ای جدید را که اعضای آن به شکل $a+b\sqrt{k}$ است، تعریف می‌کنیم و اگر k برابر ۹ باشد، به همان مجموعه اوّل F برمی‌گردد. در این صورت، مجموعهٔ جدید را توسیع مجموعه قبل می‌نامند.

در دورهٔ دبیرستان، با توسیع میدان اعداد حقیقی به مجموعهٔ اعداد مختلط آشنا شدید. اکنون به ترسیم $\sqrt{k}$ توجه کنید :



ش ۹

با توجه به خواص مثلث‌قائم‌الزاویه، اگر $BH=1$ و $AH=k$ باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه‌ای است که بر وتر ایجاد می‌کند. یعنی : $CH=\sqrt{k}$

بنابراین اگر قطعه خط k معلوم باشد، دراین صورت می‌توان $\sqrt{k}$ را با خط‌کش و پرگار رسم کرد. به‌طور کلی به کمک خط‌کش و پرگار اعمال زیر یا مسایل هندسی را که به اعمال زیر می‌انجامد، می‌توان حل کرد :

۱ ــ خطی رسم کنیم که از دو نقطه معلوم (متمایز) بگذرد.
۲ ــ نقطه تلاقی دوخط راست را به‌دست آوریم.
۳ ــ دایره‌ای با مرکز معلوم و شعاع معین رسم کنیم.
۴ ــ نقاط تلاقی دایره با خط راست را به‌دست آوریم.
۵ ــ نقاط تلاقی دایره با دایرهٔ دیگر را به‌دست آوریم.

اکنون که به کمک پرگار عدد $\sqrt{k}$ را ساختیم ــ که در هیأت اعداد گویا قرار ندارد ــ می‌توانیم به وسیلهٔ اعمال گویا، تمام اعدادی را که به‌صورت زیر هستند، با ترسیم به‌دست آوریم :

$$Z=a+b\sqrt{k}$$

چهار عمل اصلی برای میدان توسیع F_1 به‌سادگی به‌دست می‌آیند. این میدان را با وارد کردن $\sqrt{k_1}$ ، $\sqrt{k_2}$ و ... می‌توان وسیع‌تر کرد.

اگر میدان اولیه را F_0 و توسیع آن F_1 و ... نشان دهیم، می‌توان نشان داد که اعداد هیأت F_1 همگی ریشه معادله درجهٔ دوم و اعداد هیأت F_2 در حالت کلی ریشه معادله درجهٔ چهارم هستند و ... اعداد هیأت F_k ریشه‌های معادله‌ای از درجهٔ 2^k با ضرایب گویا هستند. موضوع بالا را برای F_2 ثابت می‌کنیم :

$$x=p+q\sqrt{k}$$

p و q و k عضو F_1 هستند، یعنی :

$$p=p_1+q_1\sqrt{k_1}$$
$$q=p_2+q_2\sqrt{k_1}$$
$$k=p_3+q_3\sqrt{k_1}$$

معادلهٔ بالا به راحتی قابل تبدیل است :

$x^2 - 2px + p^4 = q^2 k$

ملاحظه می‌کنید که ضرایب این معادله در F_1 قراردارند. برحسب $\sqrt{k_1}$، خواهد شد :

$x^2 + ux + v = \sqrt{k_1}(rx + t)$

که در آن u,t,s,r و v اعداد گویا هستند، اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم،

$(x^2 + ux + v)^2 = k_1(rx + t)^2$

معادله‌ای درجهٔ چهارم که ضرایب آن همگی گویا هستند و حکم ثابت شد.

دیدید که از میدان F_0 شروع کردیم تا به F_k رسیدیم، و معادله‌ای از درجهٔ 2^k به‌دست آمد. عکس این مطلب نیز درست است، می‌توان نشان داد که هر x متعلق به هیأت F_k، در معادله درجه دومی صدق می‌کند که ضرایب آن متعلق به میدان F_{k-1} می‌باشد، و این روش ادامه می‌یابد تا به F_0 برسیم.

تعریف: عددی جبری است که در معادله، $n \geq 1$، با ضرایب صحیح زیر صدق کند :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

می‌توان نشان داد که همهٔ اعداد قابل ترسیم، جبری هستند.

مثال: اعداد ($\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$) عضو F_1 هستند و ریشه‌های معادله زیر خواهند شد :

$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

اکنون معادله‌ای می‌سازیم که ضرایب آن از F_1 باشند، به‌طور مثال :

$(1+\sqrt{0})x^2 + (2+\sqrt{4})x + (1+\sqrt{2}) = 0$

یا

$x^2 + 4x + (1+\sqrt{2}) = 0$

از نوع F_2 خواهد بود. با بردن $\sqrt{2}$ به‌طرف دیگر و به توان ۲ رساندن، معادله مشخصه آن به‌دست می‌آید. ریشه‌های این معادله $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ و $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ است.

$x = -2 + \sqrt{3-\sqrt{2}} \Rightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 1 = 0$

این اعداد، جبری و قابل ترسیم هستند.

مطالبی را دربارهٔ معادلات یادآوری می‌کنیم :

الف) اگر معادله‌ای دارای ضرایب درست باشد و درضمن، ضریب بزرگترین درجهٔ مجهول آن برابر ۱+ باشد، در آن صورت، هر ریشهٔ درست معادله باید مقسوم علیه درستی از مقدارثابت (جملهٔ آزاد) معادله خواهد بود.

ب) اگر هیچ‌یک از مقسوم‌علیه‌های درست مقدار ثابت در معادله صدق نکند، به معنای آن است که معادلهٔ مفروض دارای ریشهٔ گویا نیست.

ج) هرمعادله‌ای که دارای ریشه‌های گویا باشد، به کمک رادیکال‌هایی با فرجهٔ ۲ قابل حل است.

به سبب اهمیت مسأله، بخش ج را برای معادلهٔ درجهٔ سوم حل می‌کنیم [البته متن آن را کمی تغییر خواهیم داد.]

متن اول: یک معادلهٔ درجهٔ سوم، به شرطی که ریشه گویا نداشته باشد، نمی‌توان به کمک ریشه های دوم حل کرد.

متن دوم: اگرمعادلهٔ درجهٔ سومی با ضرایب گویا، دارای ریشهٔ گویا نباشد. دراین صورت، اگر ساختمان هندسی را ابتدا از میدان اعداد گویای F_0 شروع کرده باشیم، هیچ‌یک از این ریشه‌ها را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

اثبات متن ۱:

معادلهٔ کلی درجهٔ سه زیر

$Z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$

با تبدیل $Z = x - \frac{A}{3}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود :

$x^3 + ax = b$

اکنون با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌ها :

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

این ریشه‌ها گویا نیستند و با رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ قابل بیان نیستند.

برهان خلف: فرض کنیم x_1 برحسب رادیکال با فرجه ۲ قابل بیان باشد. بنابراین $x_1 = m + n\sqrt{k}$

k ، m و n متعلق به حوزه قبلی اعمال گویاست. x_1 در معادله صادق است، بنابراین

$(m + n\sqrt{k})^3 + a(m + n\sqrt{k}) = b$

خواهد شد :

$M + N\sqrt{k} = 0$

$M = m^3 + 3mn^2k + am - b, N = 3m^2n + n^3k + an$

پس، M ، N و K متعلق به حوزه عمل‌های گویای قبلی هستند. ولی $\sqrt{k}$ متعلق به آن نخواهد بود. امّا

$M + N\sqrt{k} = 0 \Rightarrow \sqrt{k} = -\frac{M}{N}$

این تساوی نمی‌تواند برقرار باشد، مگر وقتی که $M = 0$ و $N = 0$ که دراین حال $m - n\sqrt{k}$ نیز در معادله صدق خواهد

کرد، (امتحان کنید) پس:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -(x_1 + x_2)$$
$$\Rightarrow x_3 = -(m + n\sqrt{k} + m - n\sqrt{k})$$
$$\Rightarrow x_3 = -2m$$

x_3، متعلق به حوزهٔ قبلی می‌شود، و x_1 یا x_2 باید به حوزهٔ پیش ازاین تعلق داشته باشند و به همین ترتیب، تا آنجا که به میدان اعداد گویا می‌رسیم. یعنی با فرض بیان کردن یکی از ریشه‌ها برحسب رادیکالی با فرجهٔ ۲، به این نتیجه رسیدیم که یکی از ریشه‌ها، عددی گویا خواهد شد؛ و این تناقض است.

یک نتیجه کلّی را به‌یاد داشته باشید؛ هر مسأله‌ای که منجر به معادله‌ای غیر قابل حل به کمک ریشه‌های دوم بشود، نمی‌تواند با رسم خط‌های راست و رسم دایره‌ها (یعنی خط‌کش و پرگار) حل شود.

امتناع:

اتّحاد مثلثاتی

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

را درنظر بگیرید، فرض کنید که:

$$2\cos\theta = a \ , \ 2\cos\frac{\theta}{3} = x$$

آنگاه به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$x^3 - 3x = a$$

به معادله‌ای رسیدیم که جهت حل آن بحث کردیم.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی از زوایا وجود دارند که به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تثلیث هستند.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی از زوایا وجود دارند که به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تثلیث نیستند.

مثال: زاویهٔ $45°$ را به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کنید.

$$2\cos\frac{\pi}{4} = a \Rightarrow a = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$$

ریشه‌های این معادله $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ است.

[**مثال:** زاویهٔ $60°$ را نمی‌توان به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کرد.]

$$2\cos\frac{\pi}{3} = a \Rightarrow a = 1$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$$

مقسوم‌علیه‌های (۱) در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین ریشهٔ گویا ندارد و در نتیجه قابل بیان برحسب رادیکال با فرجهٔ ۲ نیست، و درنتیجه به کمک خط‌کش و پرگار قابل ترسیم نیست.



ادب ریاضی

اصول مذهب فیثاغورس این بود که چه چیز مهمتر از عدد است و از توافق و هم‌آهنگی چه عامل زیباتری وجود دارد؟ و پیش خود خیال کردند که چون عدد مبدأ هم‌آهنگی موسیقی می‌باشد، ممکن است اساس و مبدأ بسیاری چیزهای دیگر و شاید اساس همه‌چیز باشد. دنیا و آسمان همه از نسبت و توافق به‌وجود آمده‌اند و نتیجه آن شد که گنبد فلکی را یک جعبهٔ بزرگ موسیقی تصور کردند و فواصل سیارات را با فواصل نوتهای موسیقی در یک گام معین وابسته دانستند: از زمین تا ماه یک تون و از ماه تا مریخ نیم تون فاصله است و غیره. برای ما باور نکردنی است که چگونه جمعی مردم باهوش از این قبیل مهملات می‌گفتند ولی نکته اینجاست که در چنین دستگاهی که فیثاغورس بنا نهاد، برای اولین بار زمین را از مقام خود که مرکز عالم بود خارج کرد و آن را در عداد سیاراتی که به دور آتش مرکزی در حرکت‌اند جای داد.

تاریخ علوم، پی‌یرروسو

ترجمه: حسن صفاری



اثبات یکتا بودن جواب در حلِ یک مسألهٔ هندسه

● دکتر احمد شرف‌الدّین

چکیده : یکی از مسائل مشهور هندسه، محاط کردن مثلثی با محیط مینیمم در یک مثلث مفروض است که زاویه‌های آن حادّه باشند. حلی که برای این مسأله عرضه شده است، مثلثی را که رأسهای آن پایهای سه ارتفاع مثلث مفروضند، به عنوان جواب معرّفی می‌کند. ما در این مقاله، حلّی را ارائه می‌کنیم که علاوه بر همان جواب، نشان می‌دهد که جواب یکتاست.

مسأله : در مثلث مفروض ABC که زاویه‌های آن حادّه‌اند، مثلث DEF را چنان محاط کنید که رأسهای D، E و F آن به ترتیب بر پاره‌خطهای BC، AC و AB قرار داشته باشند و محیط آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ابتدا راه حلی را که در کتابها مذکور است، یاد می‌کنیم و سپس راه حلی را که یکتا بودن جواب را نیز نشان می‌دهد، ارائه می‌کنیم.

حل اوّل

برای حل مسأله، مطالب زیر را به ترتیب ذکر می‌کنیم :

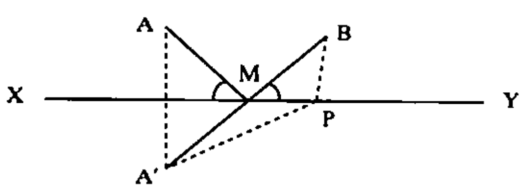
۱ ـ خط XY و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروض‌اند. بر خط XY نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که مجموع (MA + MB) مینیمم باشد.

برای حل این مسأله نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط XY به دست می‌آوریم. نقطهٔ مطلوب M محلّ برخورد خط $A'B$ با خط XY است. چه اگر نقطهٔ $P \neq M$ را بر خط XY اختیار کنیم، چنین داریم :

$$PA + PB = PA' + PB > A'B = A'M + MB$$
$$= MA + MB$$

اگر M نقطهٔ مطلوب باشد، چنین داریم :

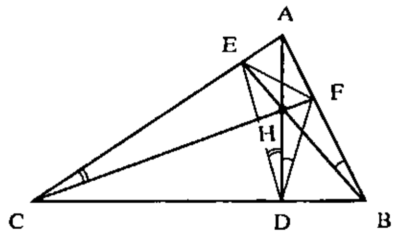
اندازهٔ زاویهٔ BMY = اندازهٔ زاویهٔ AMX



۲ ـ تعریف مثلث ارتفاعی: در مثلث ABC ارتفاعهای AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. مثلث DEF که رأسهای آن پایهای ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشد، مثلث ارتفاعی مثلث ABC نامیده می‌شود.

۳ ـ حکم: ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی DEFاند.

برهان: در مثلث ABC سه ارتفاع AD، BE و CF را رسم می کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم خطوط AD ، BE و CF به ترتیب زاویه‌های EDF، DEF و EFDاند.



چون دو زاویهٔ CFB و CEB قائمه‌اند، پس دایره‌ای به قطر BC بر دو نقطهٔ E و F می‌گذرد ؛ یعنی چهارضلعی BCEF محاطی است. در این چهار ضلعی محاطی، دو زاویهٔ EBF وECF دو زاویهٔ محاطی مقابل به کمان EFاند ؛ پس :

اندازهٔ زاویهٔ EBF = اندازهٔ زاویهٔ ECF (۱)

نقطهٔ برخورد سه ارتفاع مثلث ABC را H می‌نامیم. چهارضلعی HFBD که دو زاویهٔ مقابل آن، یعنی HFB و HDB قائمه‌اند، محاطی است. دراین چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ HBF و HDF دو زاویهٔ محاطی مقابل به کمان HFاند ؛ پس :

اندازهٔ زاویهٔ HBF = اندازهٔ زاویهٔ HDF (۲)

همچنین چهارضلعی HDCE محاطی است ؛ زیرا دو زاویهٔ مقابل آن، یعنی HDC و HEC محاطی‌اند. در این چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ HCE و HDE دو زاویهٔ محاطی مقابل به کمان HEاند ؛ پس :

اندازهٔ زاویهٔ HCE = اندازهٔ زاویهٔ HDE (۳)

از سه رابطهٔ (۱)، (۲) ، (۳) نتیجه می‌شود :

اندازهٔ زاویهٔ HDE = اندازهٔ زاویهٔ HDF (۴)

به همان شیوهٔ استدلال ثابت می کنیم که :

اندازهٔ زاویهٔ HFE = اندازهٔ زاویهٔ HFD (۵)

اندازهٔ زاویهٔ HED = اندازهٔ زاویهٔ HEF (۶)

پس ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای مثلث ارتفاعی DEFاند.

۴ ـ نتیجه: چون AD، BE و CF ارتفاعهای مثلث ABCاند، از سه رابطهٔ (۴)، (۵) و (۶) رابطه های زیر حاصل می‌شود (منظور اندازهٔ زاویه‌هاست.) :

(۷) $\angle FDB = \angle EDC$

(۸) $\angle DFB = \angle EFA$

(۹) $\angle FEA = \angle DEC$

۵ ـ مثلث محاط در مثلث ABCبا محیط مینیمم: مثلث MNP محاط در مثلث ABC را درنظر می گیریم. بنابر (۴ ـ نتیجه) محیط مثلث MNP مینیمم است، اگر تساویهای زیر برقرار باشد (منظور اندازهٔ زاویه‌هاست.):

(۱۰) $\angle PMB = \angle NMC$

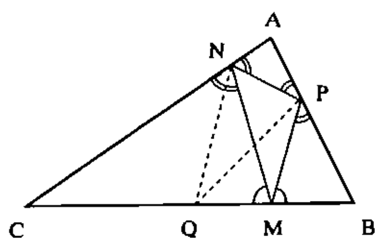
(۱۱) $\angle MNC = \angle PNA$

(۱۲) $\angle NPA = \angle MPB$

چه اگر به جای نقطهٔ M نقطهٔ Q را روی خط XY اختیار کنیم، بنابر مطلب شمارهٔ (۱) داریم :

$$QN + QP > MN + MP$$

همین شیوهٔ استدلال را دربارهٔ وضعیت مناسب برای دو نقطهٔ N و P به کار می بریم.

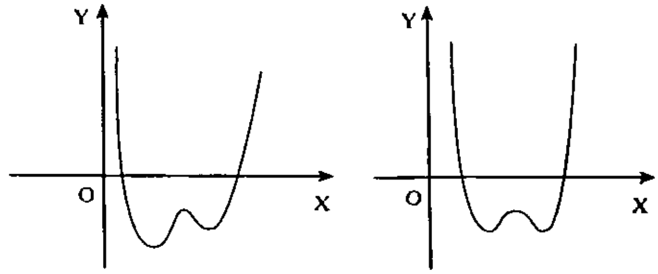


اکنون می گوییم برای مثلث ارتفاعی، سه رابطهٔ (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) برقرار است ؛ پس مثلث ارتفاعی دارای محیط مینیمم است.

حلّ دوم

در حل اوّل، ثابت شد که محیط مثلث ارتفاعی یک مثلث، دارای مینیمم است، اما این دلیلی نیست بر این که در بین مثلثهای محاط در مثلث مفروض، مثلثهای دیگری با محیط مینیمم وجود ندارد ؛ چرا که می‌دانیم که یک تابع، ممکن است دارای چند مینیمم باشد. در شکل زیر، تابعی نشان داده شده است که دارای دو مینیمم است. (ممکن است دو مینیمم مساوی باشند.)

اکنون مثلث MNP محاط در مثلث ABCرا درنظر می گیریم



و فرض می‌کنیم که محیط آن مینیمم باشد. دراین صورت بنابر مطلب شماره (۱) چنین داریم:

(۱۳) $\angle BMP = \angle CMN$

(۱۴) $\angle CNM = \angle ANP$

(۱۵) $\angle APN = \angle BPM$

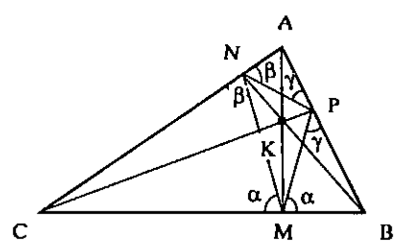
مقدار زاویه‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) را به ترتیب α، β، و γ می‌نامیم. روابط مسلّم زیر را می‌نویسیم:

$$\alpha+\beta+C=\beta+\gamma+A=\alpha+\gamma+B=180^\circ$$

از رابطه‌های مذکور، نتیجه می‌شود:

$$\alpha=A \quad , \quad \beta=B \quad , \quad \gamma=C$$

از تساوی $\beta = B$ نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ CNP و B مکمّل یکدیگرند؛ پس چهارضلعی BCNP محاطی است. با همین شیوهٔ استدلال، ثابت می‌شود که چهارضلعیهای CAPM و ABMN محاطی‌اند.



چون چهارضلعی BCNP محاطی است، پس بنابر قضیهٔ قوت نقطه نسبت به دایره، چنین داریم:

(۱۶) $AP.AB = AN.AC$

دایره‌های محیطی مثلثهای BMP، APN و CMN را به ترتیب O_1، O_2 و O_3 می‌نامیم. نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ O_2 و O_3 به‌جز نقطهٔ M را K می‌نامیم (ممکن است نقطهٔ K روی M باشد). چون AP.AB و AN.AC به ترتیب قوتهای نقطهٔ A نسبت به دو دایرهٔ O_2 و O_3 می‌باشند و از طرفی بنابر رابطهٔ (۱۶) این دو قوت برابرند؛ پس نقطهٔ A روی خط MK قرار دارد و در نتیجه، خط AM محور اصلی دو دایرهٔ O_2 و O_3 است.

با همین شیوهٔ استدلال، نتیجه می‌شود که خط CP محور اصلی دو دایرهٔ O_1 و O_2 است و همچنین خط BN محور اصلی دو دایرهٔ O_1 و O_3 است.

از طرفی می‌دانیم که سه محور اصلی سه دایره، از یک نقطه می‌گذرند (یکی از قضایای هندسه). پس سه خط AM، BN و CP بر یک نقطه می‌گذرند و این نقطه، همان نقطهٔ K می‌باشد.

پس دایره‌های O_1 ، O_2 و O_3 بر نقطهٔ K می‌گذرند لذا چهار ضلعیهای APKN، BMKP و CNKM محاطی‌اند. در چهار ضلعی محاطی KMBP دو زاویهٔ KBP و KMP محاطی‌اند و مقابل به کمان KP اند؛ پس:

(۱۷) $\angle KMP = \angle KBP$

در چهار ضلعی محاطی KMCN، دو زاویهٔ محاطی KMN و KCN محاطی‌اند و مقابل به کمان KNاند؛ پس:

(۱۸) $\angle KMN = \angle KCN$

همچنین در چهارضلعی محاطی BCNP، دو زاویهٔ PBN و PCN محاطی‌اند و مقابل به کمان NPاند؛ پس:

(۱۹) $\angle PBN = \angle PCN$

از سه رابطهٔ (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) نتیجه می‌شود که:

(۲۰) $\angle PBN = \angle PCN$

از رابطه‌های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) نتیجه می‌شود:

(۲۱) $\angle AMP = \angle AMN$

از رابطهٔ فوق با توجه به تساوی $\angle PMB = \angle NMC$، نتیجه می‌شود که خط AM بر خط BC عمود است.

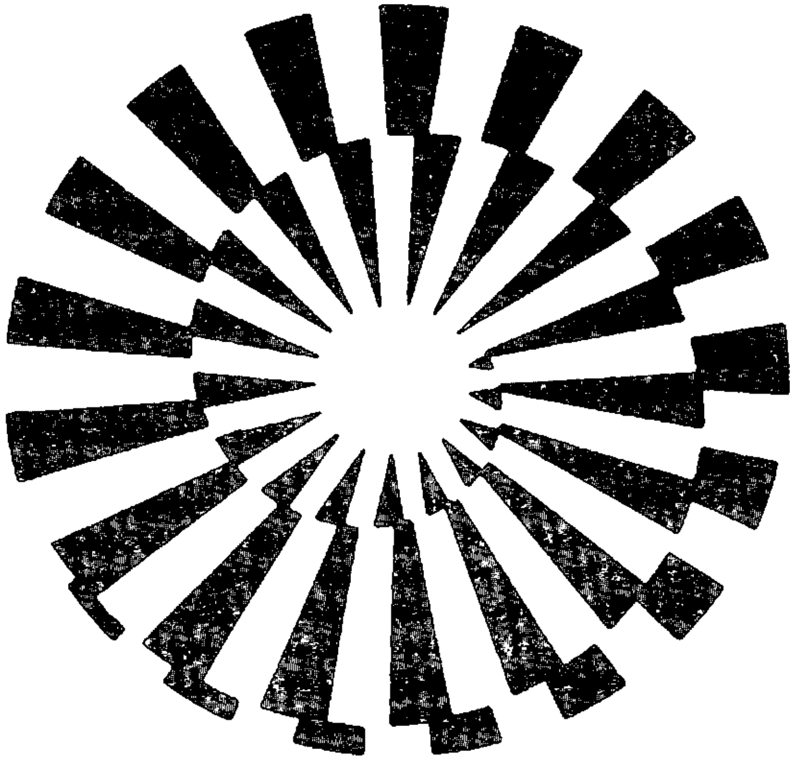
با همین شیوهٔ استدلال، نتیجه می‌شود که خطهای BN و CP به ترتیب بر خطهای AC و AB عمودند. نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ M، N و P که رأسهای مثلث با محیط مینیمم‌اند، همان رأسهای مثلث ارتفاعی‌اند.

حلّ دوم نشان می‌دهد که مسألهٔ مورد نظر، فقط یک جواب دارد؛ یعنی فقط یک مثلث وجود دارد که در مثلث ABC محاط و محیط آن مینیمم می‌باشد.

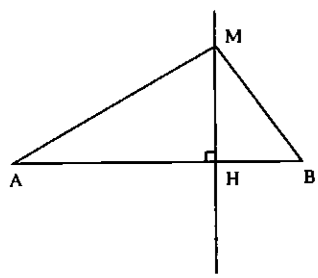
مکان هندسی

(قسمت چهاردهم)

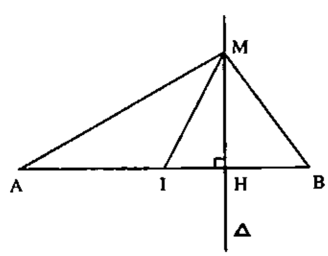
● محمدهاشم رستمی



۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت K ($K > ۰$) باشد، خطی است راست عمود بر خط AB.



برهان به روش هندسی. وسط پاره‌خط AB را I می‌نامیم. اگر M، یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، با فرض



$MA > MB$ ، داریم :

$$MA^۲ - MB^۲ = K \qquad (۱)$$

در مثلث MAB، میانهٔ MI را رسم می‌کنیم و از M عمود MH را بر خط AB فرود می‌آوریم. بنا به رابطهٔ دوم میانه‌ها در مثلث MAB داریم :

$$MA^۲ - MB^۲ = ۲AB.IH \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$۲AB.IH = K$$

با فرض $AB = a$ ، داریم $۲a.IH = K$ ؛ از آن‌جا :

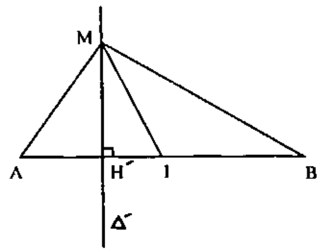
$$IH = \frac{K}{۲a} = \text{مقدار ثابت}$$

از رابطهٔ بالا با توجه به ثابت بودن نقطهٔ I نتیجه می‌شود که H نقطهٔ ثابتی است ؛ یعنی همهٔ نقطه‌هایی مانند M که برای آنها $MA^۲ - MB^۲ = K$ است، روی خط راستی مانند Δ قرار دارند که در نقطهٔ ثابت H بر خط AB عمود است.

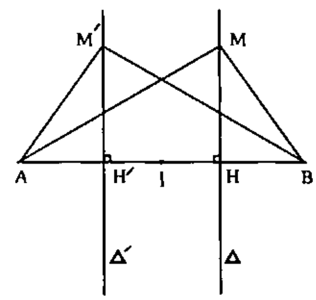
بعکس بسادگی دیده می‌شود که هر نقطهٔ واقع بر این خط عمود (Δ)، تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K است.

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت K باشد، خطی است راست عمود بر خط AB در نقطه‌ای مانند H، به قسمی که اگر نقطهٔ I وسط پاره‌خط AB و $AB = a$ باشد، $IH = \frac{K}{۲a}$ است.

نکتهٔ ۱. اگر $MB > MA$ ، یعنی $MB^2 - MA^2 = K$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی مانند Δ' ، عمود بر خط AB در نقطه‌ای مانند H' است، به قسمی که H' قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به نقطهٔ I است. بنابراین خط Δ' قرینهٔ خط Δ نسبت به نقطهٔ I وسط پاره‌خط AB می‌باشد.



نکتهٔ ۲. اگر $|MA^2 - MB^2| = K$ اختیار شود، هر دو خط Δ و Δ' مکان هندسی نقطهٔ M را تشکیل می‌دهند.



نکتهٔ ۳ (قرارداد). برای روشن شدن رابطهٔ تفاضل مربعها، ترتیب نقطه‌ها را مورد نظر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب که اگر گفته شود : مکان هندسی نقطهٔ M را بیابد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، یعنی $MA^2 - MB^2 = K$ می‌باشد. و اگر گفته شود : مکان هندسی نقطهٔ M را چنان بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از B و A برابر عدد ثابت K است، یعنی $MB^2 - MA^2 = K$ ، مورد نظر است ؛ مگر این که مسأله، رابطه را به صورت دیگری مطرح کرده باشد.

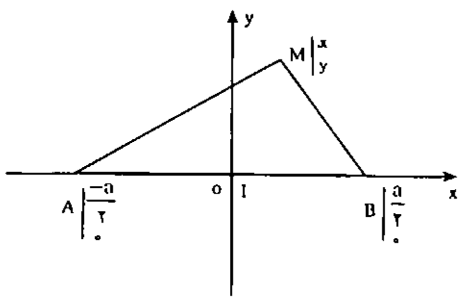
برهان به روش تحلیلی. محور xها را منطبق بر خط AB و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. با فرض $AB = a$ ، $A(\frac{-a}{2},0)$ و $B(\frac{a}{2},0)$ خواهد بود. اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای باشد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، داریم :

$$A(\frac{-a}{2},0)\ ,\ B(\frac{+a}{2},0)\ ,\ M(x,y)$$

$$MA^2 - MB^2 = K$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2 + y^2 - (x-\frac{a}{2})^2 - y^2 = K$$

$$\Rightarrow 2ax = K \Rightarrow x = \frac{K}{2a} = \text{مقدار ثابت}$$



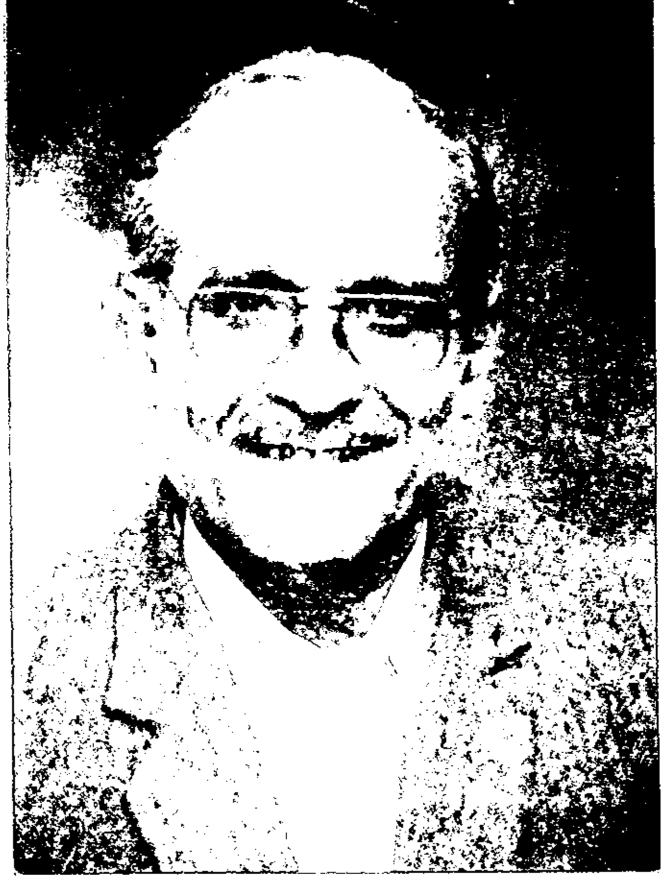
همان‌طوری که دیده می‌شود، مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی عمودی بر خط AB است. بدیهی است که هر نقطهٔ واقع بر این خط به مکان هندسی نقطهٔ M تعلق دارد.

یک عدد جالب ریاضی

این عدد ۹ رقمی را خوب نگاه کنید، عدد جالبی است.
در این عدد کلیه اعداد از یک تا ۹ هر کدام یک مرتبه آمده‌اند و خاصیت جالب دیگر این عدد آن است که دو عدد اوّل عدد به عدد ۲ و سه عدد اوّل آن به عدد ۳ و چهار عدد اوّل آن به عدد ۴ و پنج عدد اوّل آن به عدد ۵ و بالاخره نه عدد کل آن به عدد ۹ قابل قسمت است.

۳۸۱۶۵۴۷۲۹

ترجمه: صمد پوراسدا...



در باغ تجربه‌ها

(قسمت دوم)

گفتگو با آقای میرزا جلیلی

□ **قرار شد یک خاطره از یک دانش‌آموز شیطان خود تعریف کنید؟**

■ یک روز صبح سرد زمستانی، در کلاس درس می‌دادم. پنجره‌های کلاس نیز به‌علت سرما بسته بود، در حین تدریس، ناگهان یک گنجشک در کلاس به پرواز درآمد و شروع به این طرف و آن طرف رفتن نمود. نظم کلاس به‌هم خورد. بچه‌ها درس را فراموش کردند و با هیاهو قصد گرفتن گنجشک را داشتند. بالاخره پنجره‌ها را باز کردیم و گنجشک بیرون رفت. بچه‌ها عذرخواهی کردند و قرار شد فرصت بدهیم تا خاطی را خودشان پیدا کنند. زنگ تفریح به صدا درآمد و از کلاس بیرون رفتیم. چند دقیقه بعد، دانش‌آموزی که گریان و ترسیده بود، به من مراجعه کرد که من قصد شیطنت نداشتم ؛ صبح زود که آمدم این گنجشک از شدت سرما زیر درختهای مدرسه ؛ نیمه جان افتاده بود. من آن را در جیبم گذاشتم که به بچه‌ها نشان بدهم، ولی هوای گرم کلاس باعث شد که گنجشک جان بگیرد و بدون توجه من پرواز کند. من هم حرف او را پذیرفتم و دیگر موضوع را فراموش کردم.

یک معلم خوب، بسیاری اوقات لازم است که از بعضی شیطنت‌های بچه‌ها که از طبیعت سنّی آنها ریشه می‌گیرد، اغماض نماید و فکر کند که بچهٔ خود او هم در خانه از این شیطنتها دارد.

□ **یک کتاب درسی، چند درصد باید خودآموز باشد؟**

■ مؤلف یا مؤلفان اگر معلم بوده و با کلاس و درس و دانش‌آموز سروکار داشته باشند و در کار خود نیز موفق باشند و در کار تألیف کتاب نیز تجربه داشته باشند. و اگر برنامهٔ تنظیم شده، مطابق اصول برنامه‌ریزی صورت گرفته باشد، شرایط و تبصره‌ها نیز به مؤلف اجازه بدهند [مثلاً در محدودیت زمانی قرار نگیرد که ظرف ۳ ماه کتاب را تحویل بدهد] همچنین ایده‌آلی فکر نکند، باید **همهٔ کتاب خودآموز** باشد. چنین معلمی، کتابی که می‌نویسد، ساده، روان و خودآموز است، چون جریان درس کلاس خود را به تقریر درمی‌آورد، برخلاف سینما که اوّل سناریو می‌نویسند، بعد اجرا می‌کنند، این مؤلف ابتدا کار را در کلاس نمایش می‌دهد و بعد سناریو می‌نویسد. درگذشته نیز شیوهٔ تألیف کتابها به همین صورت بوده است. یک یا دو دبیر موفق که به زبان خارجی هم تسلط داشته‌اند، بعد از سالها تدریس و کلاس رفتن و جزوه گفتن مؤلف می‌شدند. یعنی جزوهٔ ساده و روان کلاس خود را به کتاب تبدیل می‌کردند.

□ نظر شما راجع به کتابهای ریاضی پیش‌دانشگاهی چیست؟

■ چون این کتابها کلمه «دانشگاهی» را یدک می‌کشند، اولاً مؤلفان، همه از دانشگاهیان انتخاب شده‌اند، ثانیاً خود مؤلفان نیز دچار سوء برداشت در تألیف شده‌اند. یعنی محتوا و شیوهٔ کتابها عیناً به‌صورت کتابهای دانشگاهی ارائه شده است، که در مقایسه با **محتوای کتابهای چهارم نظام فعلی، هم محتوا و هم شیوه به‌صورت کاملاً جهشی تغییر کرده است.** این کتابها، افزون بر محتوای سطح بالا و فشردگی، مطالب آنها نیز هم آهنگی با کتابهای ریاضی ۳ ساله دبیرستان را ندارد. ریاضیات گُسسته، اخیراً بین دانشمندان ریاضی و در دانشگاهها اسم و رسم تازه‌ای پیدا کرده است نه در دبیرستان! اگر قرار باشد در دبیرستان از ریاضیات گُسسته مطالبی آورده شود، باید مثل کتابهای نظام فعلی بخش مختصری در یک کتاب آورده شود. نگاشتهای خطی با آن فشردگی نه هم آهنگی با بخشهای قبلی خود کتاب دارد و نه برای دبیرستان مناسب است. ترکیبیات در دبیرستان باید در همین حدود کتابهای فعلی آورده شود، چه، وقتی مطلب در این زمینه اوج می‌گیرد، درک آن برای همهٔ دانش‌آموزان مشکل می‌شود و بیشتر به درد دانش‌آموزان المپیادی می‌خورد.

□ **نظرتان نسبت به ریاضی سنتی ایران چیست؟**

■ درگذشته، ریاضیات دبیرستانی در ایران، متأثر از ریاضیات فرانسه بوده است که هم نظم و ترتیب خاص خود را داشته و هم یک ریاضیات استدلالی و قوی بوده است که در عین حال مطابق استاندارد بین‌المللی زمان بوده است و این سنّت نسل به نسل حفظ شده و هندسه از مرحوم غلامحسین رهنما (در ابتدا از آلمانی برگردانده شده) و بعدها *حسین هورفر*، *حسین مجذوب*، *حسین غیور*، *احمد بیرشک* و حساب و جبر از پروفسور *تقی فاطمی*، *محسن هنربخش* و بعدها آقایان *صفاری* و *قربانی* و بالاخره تا به آقایان *پرویز شهریاری*، *غلامرضا عسجدی* و *عبدالحسین مصحفی* رسیده است و امروز نیز در دست ماست. ما با این ریاضیات در صحنه‌های بین‌المللی درخشیده‌ایم، مدال طلا آورده‌ایم و مهندس ما با خواندن همین ریاضیات امروز، همهٔ پروژه‌های علمی و صنعتی را در کشور و حتی درخارج از کشور پیاده می‌کند.



□ **نظرتان نسبت به ریاضی امروز چیست؟**

■ راجع به ریاضی امروز، چیز جالبی نمی‌توان گفت. در سه سال اوّل دبیرستان ــ تا اندازه‌ای ــ ریاضی سبک و کم‌عمق به بچه‌ها می‌دهیم که احیاناً نظم و ترتیب هم ندارد و در سال آخر هم یک ریاضی می‌دهیم که ناهماهنگ با ۳ سال اوّل بوده و تدریس آن نیز مشکل دارد و یادگیری آن هم آسان نیست.

□ **کدام‌یک از اساتید شما بیشترین اثر را روی شما داشته است؟**

■ از بین اساتید شادروان دکتر *محمدعلی مجتهدی*، از نقطه‌نظر عشق و ایمانی که به کار خود داشت و همهٔ زندگی او در هدف مقدس خود، که تربیت و پیشرفت دانش‌آموزان بود خلاصه می‌شد.

به ایشان می‌گفتند، «فلان دبیر پشت‌سر شما بدگویی می‌کند» سؤال می‌کرد، «آیا آن دبیر خوب درس می‌دهد؟ آیا بچه‌ها از او راضی هستند؟» وقتی می‌گفتند : «بله» جواب می‌داد : «عیب ندارد **هدف و همه‌چیز آموزش بچه‌هاست،** من چه‌کاره‌ام، او باشد و کارش را ادامه دهد».

□ **کدام‌یک از دانش‌آموزان گذشته شما صاحب‌نام شده‌اند؟**

■ آقای دکتر *ملکزاده* وزیرسابق بهداشت و علوم پزشکی در کازرون دانش‌آموز بنده بوده است و آقای دکتر *نظام‌وفا* که اکنون در M.I.T از متخصصان تحقیقات فضایی و هوشهای مصنوعی است، ایشان هم در البرز شاگرد بنده بوده است. به‌عنوان خاطره، از یک دانش‌آموز قوی عرض کنم که اغلب دبیران با هم بحث می‌کردند که هر وقت *وفا* در کلاس دست بالا می‌کند، پشت ما می‌لرزد، چون یا اشتباه کرده‌ایم یا حق‌مطلب را خوب ادا نکرده‌ایم. این خاطره، این

نکته را یاد می‌دهد که دبیر هرچه قوی باشد باید با مطالعه قبلی و طرح درس به کلاس برود تا سؤال دانش‌آموزان، او را به لرزه نیندازد.

□ روش تدریس کدام یک از معلّمان خود را می‌پسندید؟

■ روش تدریس شادروان پروفسور تقی *فاطمی* در نوع خود بی‌نظیر بود. هم از لحاظ نظم کار و هم از نظر صغری و کبری چیدن در درس، بر یک صندلی تکیه می‌کرد و با آهنگ جاذب خود درس می‌داد. او همیشه به دانشجویان دبیر توصیه می‌کرد که من پس از ۴۰ سال تلاش در این درس، هنوز وقتی به کلاس می‌آیم، شب قبل از آن، درس را مطالعه می‌کنم. جان کلام او این بود که همکاران دبیر همیشه باید با مطالعه به کلاس بروند.

□ کتابهای جنبی یا کمک درسی، چه شرایطی باید داشته باشد؟

■ بنده در این زمینه مقاله مفصّلی در رشد آموزش ریاضی شماره ۲۸ سال هشتم زمستان ۱۳۶۹ نوشته‌ام که مطالعه آن به خوانندگان توصیه می‌شود.

□ شما با نظام سالی موافقید یا نظام ترمی؟

■ به علت شرایط اقلیمی و سنتهای آموزشی نظام سالی در کشور ما، کارایی بیشتر دارد. در شهرستانها و حتّی خود تهران، اغلب اتفاق می‌افتد که دو یا سه هفته از سال تحصیلی می‌گذرد و برای یک یا دو درس، هنوز دبیر مناسب پیدا نکرده‌اند یا معرفی نشده است یا اتفاق می‌افتد که دبیری در نیمه‌های ترم ــ به دلایلی ــ کلاس و مدرسه را ترک می‌کند و مسئولان معمولاً دو سه هفته جستجو می‌کنند تا دبیر تواناتری که جوابگوی دانش‌آموزان باشد، پیدا کنند یا دبیری خدای نخواسته، ۲ یا ۳ هفته مریض می‌شود و یا مشکل خانوادگی پیدا می‌کند و کلاسش تعطیل می‌شود. این دو یا سه هفته‌ها در مقایسه با ۲۹ هفته مفید نظام سالی تأثیر چندانی روی پیشرفت کار دانش‌آموزان نمی‌گذارد، ولی در مقایسه با ۱۲ هفته مفید نظام ترمی مسلماً اثر می‌گذارد و دانش‌آموز ضرر می‌کند. در نظام سالی، از دانش‌آموز در یک مطلب (مثلاً اتحادها و تجزیه) چندین مرتبه امتحان به‌عمل می‌آید و دانش‌آموز درس را تکرار و تکرار می‌کند تا یاد بگیرد. البته مضمون «الدرس حرفٌ و التکرار الفٌ» زیاد مورد قبول طرفداران ترمی و آموزش ریاضی نیست. یعنی در نظام ترمی، دانش‌آموز به مرحلهٔ «مهارت و سرعت» نمی‌رسد و لذا در نظام سالی عملکرد دانش‌آموز به مراتب از نظام ترمی بهتر است. اگر در نظام ترمی دانش‌آموز در هر ترم ۴ یا ۵ درس بخواند و هر درس ۶ ساعت در هفته باشد شاید مفید واقع شود. ولی در نظام ترمی فعلی فقط یکی دو تا کتاب از نظام سالی کمتر دارند و حجم کتابها هم بعضاً از کتاب نظام سالی کمتر نیست، بنابراین دبیر باید تندتند درس بدهد و دانش‌آموز تندتند بنویسد و پخته کرده یا نکرده یاد بگیرد. در نظام جدید، تا دانش‌آموز می‌آید موقعیت خود را در مدرسه درک کند، امتحان شروع شده و «مات» می‌شود.

□ می‌گویند در نظام جدید، افت تحصیلی دروس ریاضی، فیزیک، شیمی و زبان زیاد است، نظر شما چیست؟

■ از قدیم در این دروس افت تحصیلی وجود داشته. صادق مدعا نیز دفاتر کارنامه سالهای ۷۰ و قبل از آن است. با همان کتابهایی که سالها جا افتاده بود و دبیر هم مسلّط در کار خود بود، با این همه، افت تحصیلی در ریاضی وجود داشته است. همین الان در دورهٔ راهنمایی نیز این افت وجود دارد. این افت، عوامل متعددی دارد و کتاب شاید جزء بسیار کوچکی از آن باشد.



□ شما با امتحان کنکور سراسری پیش‌دانشگاهی موافقید؟

■ صد در صد مخالفم. این آزمون غیرمنطقی است. یک وزارتخانه، برای وزارتخانه‌ای دیگر امتحان می‌گیرد. که شاید هنوز با زیر و بم کار و کلاسهای دبیرستانی نیز آشنا نباشد. ظاهراً مقامات دو دلیل برای برگزاری این آزمون ذکر کرده‌اند. الف ـ صرفه‌جویی مالی ب ـ برای آن‌که داوطلب هنرستانها زیاد شود. اگر آزمون نباشد همهٔ بچه‌ها دنبال رشته نظری می‌روند و داوطلب هنرستانها کم می‌شود.

دلیل اوّل مردود است، زیرا دانش‌آموزان مردودی که هر سال روانه خیابانها می‌شوند، چه بسا فردا مشکلاتی برای جامعه ایجاد کنند که هزینه آن به مراتب بیشتر از آن صرفه‌جویی باشد. در مورد دلیل دوم راننده‌های تاکسی مثالی دارند می‌گویند مسافر تاکسی هیچگاه سوار اتوبوس نمی‌شود. دانش‌آموز علاقه‌مند به رشتهٔ نظری اگر چند سال هم مردود شود هیچ‌گاه به هنرستان نمی‌رود! اما هیچ‌گاه به دلهره‌ها، تشویشها، نگرانیها، جنگ اعصاب خانواده‌ها، مریضی این نوجوانان به‌علت شور زدنهای زیاد و هزینه سنگینی که بابت گرفتن دبیر خصوصی برای آماده شدن به این امتحان بر خانواده‌ها تحمیل می‌شود، فکر کرده‌اید؟ چینی‌ها می‌گویند «یک گربه سالم و چاق بهتر از یک پروفسور لاغر و مریض است.»



□ نظر شما راجع به کنفرانس آموزش ریاضی کشور چیست؟

■ با توجه به بحثهایی که در دو کنفرانس گذشته شده و ضعف شدید آموزگاران و دبیران راهنمایی کشور، این کنفرانس برای آموزگاران و دبیران راهنمایی می‌تواند بیشتر مفید باشد. به‌ویژه که اولاً آموزگاران حرف‌شنوتر و به علت ضعف خود مطالب و توصیه‌ها را بیشتر می‌پذیرند و اعتقاد پیدا می‌کنند. ثانیاً اینها واقعاً نیاز به راهنمایی و ارشاد بیشتری دارند. آموزگاران، در ایران بسیار قالبی تدریس می‌کنند و در زمینه تدریس نیاز به کمک دارند.

دبیران دبیرستان نیز، مثل گذشته می‌توانند از کنفرانس ریاضی ایران استفاده کنند بدین معنا که قسمتی از کار انجمن ریاضی، همکاری با وزارت آموزش و پرورش برای ارائهٔ سخنرانیهای علمی، آموزش مفید جهت دبیران اختصاص داده شود.

□ به‌عنوان آخرین سؤال، شما با تجربه سالها تدریس در کلاس و کار برنامه‌ریزی، چه توصیه یا چاره‌اندیشی می‌کنید؟

■ یک برنامه‌ریز معروف می‌گوید: «برنامه و کتاب مثل دان مرغ نیست که تا کیفیت نامرغوب یا کم شود، ماه بعد در بازار اثر بگذارد و سروصدای مردم بلند شود. نتیجه و اثر یک برنامه یا یک کتاب نامناسب ۱۰ یا ۱۲ سال بعد در جامعه آشکار می‌گردد (حذف امتحانهای ۴ ساله ابتدایی دکتر مهران).

نظر من به‌عنوان یک دبیر با ۴۷ سال تدریس و بیش از ۲۰ سال کار برنامه‌ریزی و به عنوان ولی یک دانش‌آموز که هم‌اکنون در سال سوم نظام جدید تحصیل می‌کند از این قرار است:

الف ـ تجدیدنظر در محتوای کتابهای پیش‌دانشگاهی به‌وسیلهٔ خود مؤلفان با همکاری یکی دو دبیر مسلط و کارکرده، امری ضروری، اجتناب‌ناپذیر و فوری است و در اولویت قرار دارد، فرصت را نباید از دست داد. مطالب این کتابها باید باز و گسترده شود و احیاناً قسمتهایی که مشکل تدریس دارد حذف شود و یا اگر لازم است حجم بعضی کتابها مورد تجدیدنظر قرار گیرد و یک هماهنگی تنگاتنگ با کتابهای سه سال اوّل دبیرستان پیدا نمایند. دلیل این حرفها نیز نتیجه آزمون سراسری بچه‌های نظام جدید است.

ب ـ اضافه کردن هر نوع کتاب یا درس جدید به کتابهای موجود نظام جدید، بدون ارائه یک طرح اساسی ۴ ساله ریاضی دبیرستان، نه تنها مشکلی از آموزش ریاضی کشور را حل نمی‌کند، بلکه سردرگمی‌های بیشتر و معضلات تازه‌ای نیز ایجاد خواهد کرد. و آیندگان شاهد ماجرا خواهند بود.

ج ـ در مورد شورای فعلی برنامه‌ریزی ریاضی، به نظر من لازم است خون تازه‌ای در شورا دمید و عده دیگری ـ اعم از دبیر و یا استاد از دانشگاههای مختلف با رشته‌های تحصیلی مختلف از همهٔ کشورها ـ به شورا اضافه شوند و با صرف وقت و فرصت کافی و مطالعه در برنامه و کتابهای ریاضی ۴ سالهٔ دبیرستان‌های چند کشور و توجه به سنت، نیاز کشور و شرایط اجرا، با بودجه‌بندی زمانی، یک برنامه ۴ ساله ریاضی را یکجا طرح و ارائه و به تصویب صاحب‌نظران رسانند. کتابها نیز **تحت شرایط قابل کنترل و خاصی آزاد اعلام شود، تا همه علاقه‌مندان در تألیف به رقابت بپردازند.**

د ـ توجه شود که اجزای یک نظام آموزشی پیوسته و بهم مربوط است. مشکلات دیگری در متن نظام جدید وجود دارد که دقیقاً باید به آنها توجه شود.

مثلاً در جایگزینی نظام سالی به جای ترمی، یک مطالعه داخلی و بین‌المللی شروع گردد ؛ آیا ترم خاص دانشگاه است یا در جای دیگر دنیا و دبیرستان هم ترمی است؟

هـ ـ مشترک بودن سال ۱ و ۲ دبیرستان، مشکلاتی ایجاد کرده است که بهتر است دانش‌آموزان یک سال مشترک داشته باشند و این سال مشترک نیز به دورهٔ راهنمایی منتقل شود تا دانش‌آموزان در دورهٔ ۴ ساله راهنمایی دروس مشترک بخوانند. برای ۳ سال دبیرستان نیز یک برنامه جدّی و قوی برای رشته‌های ریاضی و تجربی در نظر گرفت.

و ـ تقسیم دبیرستانها به نمونه مردمی، رشد، غیرانتفاعی، شاهد، تیزهوشان، مدارس مؤسسات مختلف مثل بانک ملی، انرژی اتمی یا ... و دولتی باعث شد که دانش‌آموزان خوب غربال شده و به طرف این مدارس کشیده شوند و آنچه برای دبیرستانهای دولتی باقی می‌ماند، دانش‌آموزان ضعیف است که دبیر رغبت تدریس در آن کلاسها را ندارد و افت تحصیلی در این مدارس بویژه در سال اوّل دبیرستان سال به سال بیشتر می‌شود و عده‌ای نیز آن را به حساب کتابها می‌گذارند.

ز ـ تفاوت حق‌التدریس دبیر در مدارس مختلف نیز دبیران خوب را به مدارس خاصی سوق داده که این مدارس اغلب کار خود را از نیمه مردادماه یا زودتر، با پرداخت حق‌التدریس بالا شروع می‌کنند. جای شهید رجایی، دبیر ریاضی دلسوز خالی است که در اوایل انقلاب، هر چه به او اصرار کردند که مدرسهٔ البرز با وضع موجود باقی بماند، راضی نشد و می‌گفت : «این برخلاف قسط اسلامی است که ما همهٔ امکانات و دبیران خوب را در اختیار بچه‌های پولدار قرار بدهیم!.»

ح ـ در خاتمه، اضافه کنم که به‌نظر بنده، اعضای شورای ریاضی فعلی دفتر، همه کارشناس هستند و گروه ریاضی دفتر نیز از افراد جوان و موّجه تشکیل شده است. آنچه اجازه نداده که **برنامه و کتابها مناسب درآید، شتاب در کارها** بوده که موجب عدم رعایت اصول برنامه‌ریزی و تألیف و عدم هدایت صحیح کار شورای برنامه‌ریزی، در جهت اهداف نظام جدید شده است. حالا که کار برنامه‌ریزی و تألیف در نظام جدید پایان یافته است، لازم است اعضای شورا و مؤلفان نظام جدید، دورهم بنشینند و نظری به گذشته بکنند و کارهای انجام شده را دقیقاً مورد ارزیابی قرار دهند و ضعف و قوتها را جستجو و پیدا نمایند و نسبت به یک برنامه‌ریزی اصولی و منطقی، هرچه زودتر دست به کار شوند.

انگیزهٔ انجام این مصاحبه فقط رعایت مضمون «کُلهم راعٍ و کُلهم مسئول» بوده است.





طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش مقدماتی (۲۲)

• ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

●مسألهٔ نامه‌های با نشانیهای نادرست برنولی ـ اویلر

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

تعیین تعداد جایگشتهای n عنصر که در آن هیچ عنصری در محل طبیعی خود نباشد.

این مسأله ابتدا توسط «**نیکولاس برنولی**» Niclaus Bernoulli (۱۶۸۷ـ۱۷۵۹)، برادرزادهٔ ریاضیدانهای بزرگ «**یاکوب**» (Jacob) و «**یوهان**» (Johann)، «**برنولی**» مطرح شد. بعدها «**اویلر**» به مسأله توجه کرد و آن را *quaestio curiosa ex doctrina combinationis* (مسأله‌ای شگفت از نظریهٔ ترکیبیّات) نامید و مستقل از برنولی حل کرد.

این مسأله را می‌توان به صورتی واقعی‌تر، به عنوان **مسألهٔ نامه‌های با نشانیهای نادرست** بیان کرد :

شخص n نامه می‌نویسد و نشانیهای مربوط به هر نامه را بر n پاکت یادداشت می‌کند. چند طریق مختلف برای قرار دادن جمیع نامه در پاکتهای با نشانی نادرست وجود دارد؟

این مسأله، بخصوص، به خاطر راه حل هوشمندانه‌اش، جالب توجه است.

فرض می‌کنیم نامه‌ها به صورت a، b، c، ... و پاکتهای مربوطه به صورت A، B، C و ... مشخص شده باشند و فرض می‌کنیم تعداد قرار دادن نامه‌ها در پاکتهای نادرست را که در جستجوی آنیم، با $\overline{n}$ مشخص کرده باشیم.

ابتدا جمیع حالتهایی را که در آنها a در B و b در A قرار می‌گیرد، به عنوان گروه اوّل و جمیع حالتهایی را که در آنها a در B و b قرار می‌گیرد، اما b در A قرار نمی‌گیرد، به عنوان گروهی دیگر در نظر می‌گیریم.

گروه اوّل به طور واضح شامل $\overline{n-2}$ حالت است.

تعداد حالتهای واقع در گروه دوم را می‌توان تعیین کرد. اگر به جای b، c، d، e، ... و A، C، D، E، ... ، مثلاً بنویسیم b′، c′، d′، e′، ... و B′، C′، D′، E′ و ... . بنابراین، تعداد مطلوب $\overline{n-1}$ است.

بنابراین، تعداد جمیع حالتهایی که در آنها a به B ختم می‌شود، $\overline{n-1}+\overline{n-2}$ است. از آن جا که هر عمل قرار دادن «a در C»، «a در D»، ... تعدادی حالت برابر به‌دست می‌دهد. $\overline{n}$، تعداد کل جمیع حالتهای ممکن عبارت است از :

$$\overline{n}=(n-1)\left[\overline{n-1}+\overline{n-2}\right]$$

این فرمول دوری را چنین می‌نویسیم :

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i\left[\overline{n-۱}-(n-۱).\overline{n-۲}\right]$$

که در آن i ریشهٔ دوم ۱− را نمایش می‌دهد و آن را در مورد شماره‌های نامه‌ای ۳، ۴، ۵ و ... تا n به کار می‌برد. به این ترتیب، به‌دست می‌آوریم :

$$\overline{۳}-۳.\overline{۲}=i\left[\overline{۲}-۲.\overline{۱}\right]$$

$$\overline{۴}-۴.\overline{۳}=i\left[\overline{۳}-۳.\overline{۲}\right]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i\left[\overline{n-۱}-(n-۱).\overline{n-۲}\right]$$

با ضرب این (n − ۲) معادله درهم، به‌دست می‌آوریم :

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i^{n-۲}\left[\overline{۲}-۲.\overline{۱}\right]$$

یا، از آن‌جا که $۰=\overline{۱}$ ، $۱=\overline{۲}$ و $i^{n-۲}=i^{n}$ ،

$$\overline{n}-n.\overline{n-۱}=i^{n}$$

سپس این معادله را بر !n تقسیم می‌کنیم، که می‌دهد :

$$\frac{\overline{n}}{n!}-\frac{\overline{n-۱}}{(n-۱)!}=\frac{i^{n}}{n!}$$

اگر در این فرمول، به جای n از سری ۲، ۳، ۴، ... و n قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{\overline{۲}}{۲!}-\frac{\overline{۱}}{۱!}=\frac{i^{۲}}{۲!}$$

$$\frac{\overline{۳}}{۳!}-\frac{\overline{۲}}{۲!}=\frac{i^{۳}}{۳!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\overline{n}}{n!}-\frac{\overline{n-۱}}{(n-۱)!}=\frac{i^{n}}{n!}$$

جمع این (n − ۱) معادله (از آن‌جا که $۰=\overline{۱}$) به برابری زیر می‌انجامد :

$$\frac{\overline{n}}{n!}=\frac{i^{۲}}{۲!}+\frac{i^{۳}}{۳!}+\ldots+\frac{i^{n}}{n!}$$

سرانجام از این رابطه می‌توانیم $\overline{n}$ ، تعداد مطلوب، را به‌دست آوریم :

$$\overline{n}=n!\left(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-\cdots+\frac{i^{n}}{n!}\right)$$

اگر A نمادی را چنان نمایش دهد که کاربرد قضیهٔ دوجمله‌ای در مورد $(A-۱)^{n}$ نوشتن !۷ را برای $A^{۷}$ ، هر توان بسط دوجمله‌ای، مجاز کند، تعداد مطلوب را می‌توان به صورت ساده‌تر زیر نوشت :

$$\overline{n}=(A-۱)^{n}$$

به عنوان مثال، به ازای مقداری چون n = ۴ ، به‌دست می‌آوریم :

$$\overline{۴}=(A-۱)^{۴}=A^{۴}-۴A^{۳}+۶A^{۲}-۴A+۱$$
$$=۴!-۴.۳!+۶.۲!-۴.۱!+۱=۹$$

که به سادگی می‌تواند با امتحان کردن آزمایش شود.

به همین ترتیب، تعداد جایگشتهایی که می‌توان از n عنصر، چنان تشکیل داد که در آنها هیچ عنصری در محل طبیعی خود نباشد، $(A-۱)^{n}$ است.

به عنوان مثال، به ازای چهار عنصر ۱، ۲، ۳، ۴، نه جایگشت زیر موجودند :

۲۱۴۳, ۲۳۴۱, ۲۴۱۳, ۳۱۴۲, ۳۴۱۲, ۳۴۲۱, ۴۱۲۳, ۴۳۱۲, ۴۳۲۱

یادداشت: نتیجهٔ به‌دست آمده، شامل راه حل مسألهٔ «دترمینان» نیز هست :

در مؤلفهٔ یک دترمینان درجهٔ n، عنصرهای قطر اصلی رخ نمی‌دهند؟

این موضوع، در صورتی که عنصر r ام از ستون s ام را C_{r}^{s} بنامیم، بلافاصله به‌دست می‌آید. به این ترتیب، عنصرهای قطر اصلی عبارتند از :

$$C_{۱}^{۱},C_{۲}^{۲},C_{۳}^{۳},\ldots,C_{n}^{n}$$

در این صورت، دترمینان مورد بحث، شامل $(A-۱)^{n}$ مؤلفهٔ بیرون از عنصرهای قطر اصلی است.



دربارهٔ سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

● بهزاد منوچهریان

عضو هیأت علمی دانشگاه شاهد و
عضو گروه عمومی کردن ریاضیات

به نام خدای دانا و توانا

روز ششم ماه مه سال ۱۹۹۲ میلادی در ریودوژانیرو، همزمان با جشن چهلمین سالگرد تأسیس مؤسسهٔ ریاضیات محض و کاربردی برزیل (IMPA) که از شهرت جهانی برخوردار است، پروفسور ژاک‌لویی‌لیون، رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) به نام این اتحادیه اعلام کرد که سال ۲۰۰۰ (از ۱۱ دی ۱۳۷۸ تا ۱۰ دی ۱۳۷۹) سال جهانی ریاضیات خواهد بود. سپس یونسکو نیز از این موضوع حمایت کرد.

در بیانهٔ ریودوژانیرو سه هدف برای برپایی «سال جهانی ریاضیات» تعیین شده است :

۱ ـ چالشهای بزرگ قرن بیست‌ویکم

همان‌طور که در سال ۱۹۰۰، دیوید هیلبرت ریاضیدان بزرگ آلمانی در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، ۲۳ مسألهٔ مبارزطلب را به جامعهٔ جهانی ریاضی ارائه کرد، که در پیشرفت ریاضیات در قرن حاضر سهم بسزایی داشتند، قرار است چند تن از ریاضیدانان برجستهٔ جهان، مسائل مهم و مبارزطلب ریاضی را در سال ۲۰۰۰ به جهانیان عرضه کنند. بی شک این مسائل در جهت‌گیری تحقیقات ریاضی در قرن بیست‌ویکم نقش خواهند داشت.

۲ ـ ریاضیات، کلید پیشرفت

ریاضیات محض و کاربردی از کلیدهای اصلی فهم جهان هستند و از این‌روست که لازم است تمامی کشورهایی که هنوز به عضویت اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی درنیامده‌اند، تلاش کنند سطح ریاضیات خود را به حدی برسانند که بتوانند به عضویت این اتحادیه درآیند. این امر مستلزم تلاشهای چشمگیر در زمینهٔ

آموزش و پرورش و دستیابی به اطلاعات علمی است. هم‌اکنون ۵۰ کشور در این اتحادیه عضویت دارند و کشور ما نیز عضو این اتحادیه می‌باشد.

۳ ـ عمومی کردن ریاضیات

سوّمین و مهمترین هدفی که در بیانیهٔ ریودوژانیرو آمده، عبارت است از حضور گستردهٔ ریاضیات در جامعهٔ اطلاعاتی، طبق یک برنامهٔ منظم و اصولی از طریق ارائهٔ مثالها و کاربردهایی از ریاضیات که از یک طرف از لحاظ علمی دقیق بوده و از طرف دیگر برای عموم مردم قابل فهم باشد. به بیان دیگر این همان عمومی کردن ریاضیات است.

ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات

کشور ما نیز به منظور تدارک امکانات و بسیج نیروها برای ارتقای کیفیت آموزش و پرورش ریاضی به این نهضت جهانی پیوسته است.

برای این منظور ــ البته با تأخیر چند ساله ــ از آبان ماه سال ۱۳۷۵، «ستاد ملّی سال جهانی ریاضیات» تشکیل شده است. ریاست عالیهٔ این ستاد به عهده رئیس جمهور محترم است که خود نشان‌دهندهٔ اهمیت پرداختن به این مهم می‌باشد. دیگر اعضای ستاد عبارتند از: وزیر فرهنگ و آموزش عالی (رئیس ستاد)، وزیر آموزش و پرورش، وزیر فرهنگ و ارشاد اسلامی، وزیر پست و تلگراف و تلفن، رئیس سازمان صدا و سیما، معاون پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی (دبیر ستاد)، رئیس مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، یکی از معاونین وزارت آموزش و پرورش، مدیرکل دفتر همکاریهای علمی و بین‌المللی وزارت فرهنگ و آموزش عالی، دبیرکل کمیسیون ملی یونسکو در ایران، دبیر انجمن ریاضی ایران، دبیر انجمن‌آمار ایران و آقایان استاد احمد بیرشک به عنوان رئیس دانشنامهٔ بزرگ فارسی، دکتر مهدی رجبعلی‌پور، دکتر سیاوش شهشهانی، دکتر علی‌رجالی و یحیی تابش.

در اینجا یادآور می‌شویم که اولّین کسی که از موضوع اعلام سال جهانی ریاضیات مطلع شد، استاد احمد بیرشک بود و ایشان وزارت فرهنگ و آموزش عالی و انجمن ریاضی ایران را مطلع نمودند و این غفلت بزرگ جامعهٔ علمی و فرهنگی در این عصر ارتباطات سریع، تفکر برانگیز است.

برنامه‌های اصلی ستاد، دربارهٔ دو محور زیر تعیین شده است:

۱ ــ احیا و پیشبرد دانش ریاضی

۲ ــ عمومی کردن ریاضیات

این ستاد به منظور تحقق دو هدف خطیر فوق ۷ گروه تشکیل داده است. گروه‌های عمومی کردن ریاضیات، آموزش ریاضی در دانشگاه‌ها، آموزش ریاضی در آموزش و پرورش، پژوهش، انتشارات، تاریخ ریاضیات و نقش ریاضی در توسعه، گروه‌هایی هستند که با فعالیتهای خود درصدد تحقق بخشیدن به این دو هدف مهم در کشور هستند.

این ستاد تاکنون ۵ جلسه داشته است.

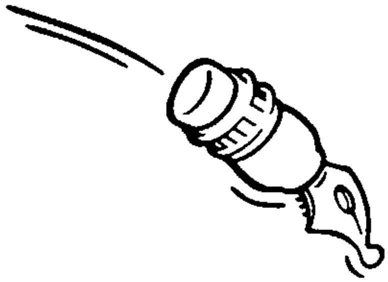
البته گفتنی است که این گروه‌ها زیر نظر «کمیتهٔ برنامه‌ریزی» کار می‌کنند و پیشنهادات و تصمیمات خود را به این کمیته ارائه می‌دهند تا پس از تصویب، مقدمات اجرایی آن فراهم شود. کمیتهٔ برنامه‌ریزی برای اخذ تصمیمات مهم در راستای برنامه‌ریزی هرچه اصولی‌تر برای سال جهانی ریاضیات تاکنون ۲۴ جلسه داشته است.

در همایش یک روزه‌ای که در دانشگاه صنعتی شریف با حضور وزیر فرهنگ و آموزش عالی و معاون پژوهشی آن وزارت، رئیس دانشگاه صنعتی شریف، استاد احمد بیرشک و برخی از اعضای ستاد ملی سال جهانی ریاضیات و گروه‌های کاری مربوط به آن و نیز عدهٔ زیادی از استادان و دانشجویان ریاضی دانشگاه‌های سراسر کشورمان در روز پنجشنبه ۲۱ خرداد ماه جاری تشکیل شد، علاقه‌مندان به بحث و بررسی پیشنهادات رسیده و کارهای انجام شده توسط گروه‌های کاری پرداختند. لازم به ذکر است که مجموعهٔ عظیمی از فعالیتهای نوشتاری و گفتاری و برنامه‌ریزی در رابطه با سال جهانی ریاضیات در دست انجام است و می‌توان گفت اولّین کارها (نظیر دومین کنفرانس آموزش ریاضی) از اواسط سال ۷۶ آغاز شده است.

باید منتظر باشید تا ببینید که امسال و سال آینده چه فعالیتهای فرهنگی ریاضی در جای‌جای میهن اسلامی‌مان انجام می‌شود. شاید شما هم بتوانید با علاقه و پشتکار در راستای عمومی کردن ریاضیات با برپایی مراسمی پرمحتوا در مدرسهٔ خود نقشی داشته باشید.

برای کسب خبر و یا ارائهٔ پیشنهادات خود می‌توانید با دبیرخانهٔ ستاد ملی سال جهانی ریاضیات به نشانی تهران ــ خیابان انقلاب اسلامی ــ نبش خیابان فلسطین ــ ساختمان بنیاد فجر ــ شمارهٔ ۱۱۸۸ ــ طبقهٔ ششم ــ حوزهٔ معاونت پژوهشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی ــ دبیرخانه ستاد ملی سال جهانی ریاضیات،تماس بگیرید.

تلفن: ۶۴۶۲۱۷۵



آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان.

دوستان گرامی، هر روز نامه‌های پرمحتوا و مقاله‌ها و مسائل شما در دفتر مجله به دستمان می‌رسد. از این که نسبت به مقالات و مسائل مجله اظهارنظر می‌کنید، بسیار سپاسگزاریم. خدای بزرگ را سپاسگزاریم که توفیق خدمتی هر چند کوچک را به ما ارزانی داشته است. امیدواریم که سال تحصیلی جدید را با جدیّت کامل شروع کرده باشید، تا در آینده بتوانید به عنوان فردی متخصص و متعهد به ایران اسلامی خدمت نمایید؛ ان‌شاءا....

اسامی تعدادی از خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: هادی شریفیان (گنبدکاووس)، سجاد پوررحیمی‌آذر (آذربایجان شرقی)، محمد تولی (قم)، مهدی درودیان (تهران)، نیما توسّلی رودسری (تنکابن)، رضا رضازادگان (اهواز)، حسین عربعامری (شاهرود)، رستم نوری (گنبدکاووس)، محمد اصل‌فلاح (دانشجوی ریاضی، قزوین)، مهدی حسنی (زنجان)، سیدضیاء حسینی (کرمان)، محمدسعید مقدسی (اراک)، محمدمهدی شیخ کاظمی (رامسر)، حامد (رامین) غلامی (دانشجوی مکانیک مازندران)، عادل جلالی (اهواز)، مهدی گودرزی (درود) و خانم لاله جانبازی (قائمشهر).

از همگی شما برای ارسال مقاله‌های درسی و کمک درسی، مسأله، تست و معمّا با راه حل تشریحی سپاسگزاریم. در صورت امکان از مقاله‌ها و مسائل ارسالی شما عزیزان، پس از تصویب در هیأت تحریریه استفاده خواهیم کرد.

آقایان مهدی درودیان و علی صادقی روشن از شهر تهران، از شما به‌خاطر ارائهٔ پیشنهادات سازنده متشکریم و از آنها برای هرچه بهتر و کاملتر شدن مجله استفاده خواهیم کرد.

پاسخ برخی از اشکالات شما عزیزان در زیر آمده است:

آقای بهرام چگینی (خرم‌آباد) از شما به خاطر ارسال چند مسأله با راه حل متشکریم. از آنها برای شماره‌های آینده در صورت لزوم استفاده خواهیم کرد. در ضمن در حلّ دستگاه $\begin{cases}\sqrt{x}+y=7\\ x+\sqrt{y}=11\end{cases}$ یک اشکال وجود داشت که آن را خدمت شما عرض می‌کنیم:

در لابه‌لای راه‌حلّتان عبارت $y^2-14y+\sqrt{y+38}$ را به صورت $(\sqrt{y}-2)(y\sqrt{y}+2y-10y-19)$ تجزیه کرده‌اید، که نادرستی آن واضح است.

آقایان محمد خانوردی و عباس پولادی (بندر ترکمن) و آقای شیروی (کرمانشاه) عدم اثبات تثلیث زاویه به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج به‌طور دقیق اثبات شده است و شما می‌توانید برای اطلاعات بیشتر به برهانهای ۲۳ و ۲۵ مراجعه کنید.

آقای بهرام جانبازی (قائمشهر)، در کتاب ریاضیات گسسته گریمالدی (مرکز نشر دانشگاهی) رابطهٔ کلی برای تعداد افرازهای k عضویِ یک مجموعهٔ n عضوی بیان و اثبات شده است، البته به نظر می‌رسد که رابطهٔ شما نیز درست است، در صورت امکان اثبات رابطهٔ خود را برای ما ارسال کنید.

آقای مرتضی والی (تهران)، رابطه‌های   بین مربع اعداد صحیح متوالی و همچنین مکعب اعداد صحیح متوالی درست می‌باشند. به همین ترتیب شما می‌توانید رابطه‌های دیگری را بین توانهای طبیعی عددهای متوالی به دست آورید. رابطه‌هایی را که شما پیدا کرده‌اید، برای استفادهٔ خوانندگان برهان به صورت زیر آمده است:

۱) عددهای صحیح متوالی a، b و c را به طوری که $c > b > a$، در نظر می‌گیریم، بنابراین همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$c^2 = 2b^2 - a^2 + 2$$

۲) عددهای صحیح و متوالی a و b و c و d را به صورت $d > c > b > a$ درنظر می‌گیریم، بنابراین همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$d^3 = 3c^3 - 3b^3 + a^3 + 6$$

حل مسألهٔ مسابقه‌ای
برهان ۲۳

مسألهٔ۱. چون چهار نفر می‌خواهند، چهار کارت را به تصادف از کیسه بیرون آورند، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه به صورت زیر است:

$$n(S) = ۴! = ۲۴$$

در صورتی که نفرات اوّل تا چهارم اسامی خود را با شماره‌های ۱ تا ۴ روی کارتها مشخص کنند، فقط به ۹ حالت زیر می‌توانند کارتها را از کیسه بیرون آورند، به‌طوری که هیچ یک از آنها شمارهٔ خود را بیرون نیاورد.

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۲	۳
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

بنابراین داریم:

$$n(A) = ۹$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۲۴}$$

(از بین جوابهایی که برای حل این مسأله ارسال شده، آقای وحید طاهری از تبریز جواب صحیح فرستاده است.)

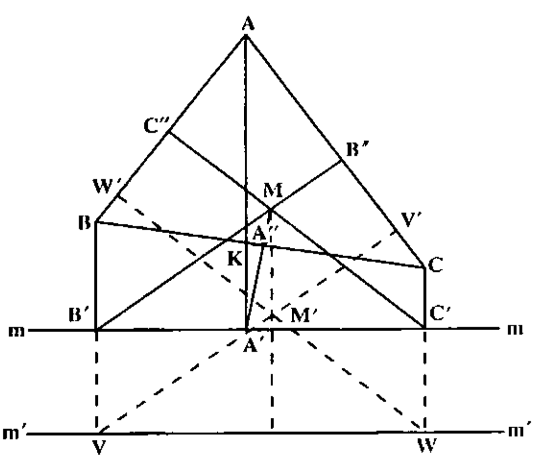
مسألهٔ ۲. فرض کنید A' ، B' و C' (شکل زیر) تصاویر رأسهای A، B و C از مثلث مفروض ABC بر خط مفروض m، و $A'A''$ ، $B'B''$ و $C'C''$ عمودهایی رسم شده بر اضلاع BC، CA و AB باشند. اگر خطوط $B'B''$ و $C'C''$ خط $A'A''$ را در M و N قطع کنند و AA' ضلع BC را در K قطع کند، اضلاع دو مثلث KAC و $A'B'M$ و همچنین، اضلاع دو مثلث KAB و $A'C'N$ برهم عمودند؛ پس:

$$A'M : A'B' = CK : AK \,,\; A'C' : A'N = AK : BK$$

خطوط AA' ، BB' و CC' موازی‌اند؛ پس:

$$A'B' : A'C' = BK : CK$$

با ضرب کردن سه تناسب فوق در یکدیگر به دست می‌آوریم $A'M = A'N$ ؛ پس N و M بر هم منطبق‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.





مسائل برای حل

- حمید رضا امیری
- محمّد هاشم رستمی
- احمد قندهاری
- میر شهرام صدر
- سیّد محمّد رضا هاشمی موسوی

مسائل ریاضی ۱

۱. اگر $A=\{x\in \mathbb{R} | x\geq ۴\}$ و $B=\{x\in \mathbb{R} | x< -۳\}$ ثابت کنید :

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

۲. اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۲)$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۵)$ عضوی به اندازهٔ ۱۱۲ واحد کمتر باشد، مقدار k را بیابید.

۳. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=\frac{۲^{x+۵}+۲^{x+۳}-۲^{x+۴}+۵\times ۲^{x+۱}}{۲۷\times ۲^{x+۱}+۹\times ۲^{x+۲}+۹\times ۲^{x+۴}-۴۵\times ۲^{x+۲}}$$

۴. اگر $x-y=\sqrt{۵}$ و $y=\frac{۲}{x}$، حاصل $(x^۳-y^۳)^۲$ را بیابید.

۵. دامنهٔ متغیر x در عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{۴x-۴}+\sqrt{\frac{۱}{x+۱}}+\sqrt{\frac{۲}{۲-x}}$$

۶. عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

۱) $۲x^۳+۲x^۲-۸x-۸$

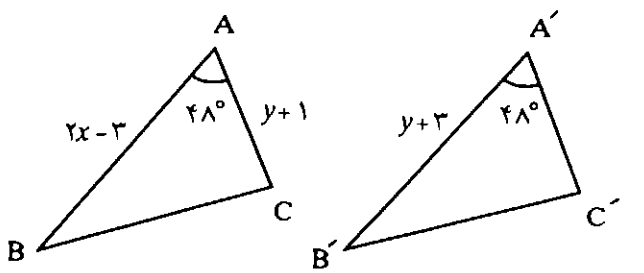
۲) $(۲x^۳+x+۵)^۲-(x+۳)^۲$

۷. عبارت زیر را ساده کنید $(x\neq \pm k, x\neq ۲)$.

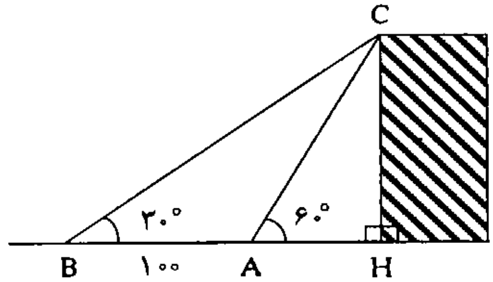
$$P=\frac{x-k}{x+k}\times\frac{x^۳+k^۳}{x^۳-k^۳}\times\frac{k^۲+kx+x^۲}{k^۲-kx+x^۲}\times\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۲}$$

هندسهٔ ۱

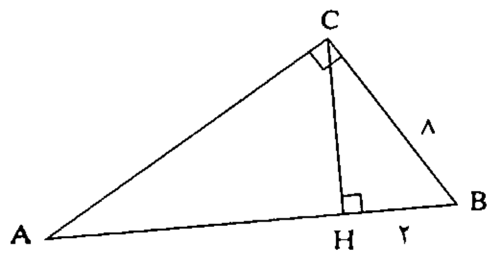
۱. دو مثلث ABC و A′B′C′ در شکل داده شده، همنهشتند. اندازهٔ x و y را بیابید.



۲. برجی بر لبهٔ خندقی بنا شده است. نقطهٔ A بر لبهٔ دیگر خندق، نقطهٔ B به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از نقطهٔ A و هردو نقطه بر خطی افقی در امتداد پایهٔ برج واقعند. برج از نقطهٔ A به زاویهٔ °۶۰ و از نقطهٔ B به زاویهٔ °۳۰ دیده می‌شود. ارتفاع برج را تعیین کنید.

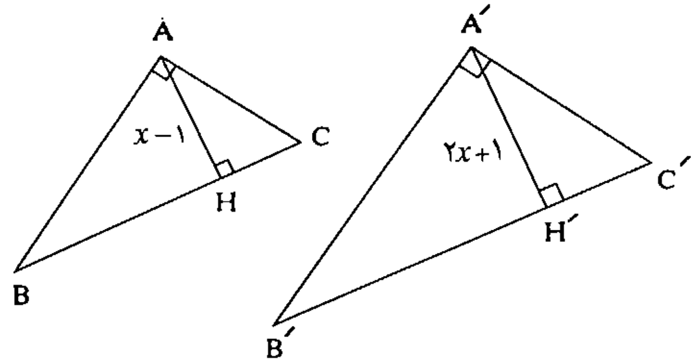


۳. در مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\hat{C}=۹۰°)$، $BC=۸cm$ و $BH=۲cm$ (H پای ارتفاع رأس C) است. اندازهٔ AC و AB، و مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



۴. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ایجاد می‌شود، ۲ برابر مساحت این مثلث است. نسبت بین ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ این مثلث قائم‌الزاویه را بیابید.

۵. پاره‌خطهای AH و A′H′ دو ارتفاع متناظر از دو مثلث متشابه ABC و A′B′C′ می‌باشند که نسبت مساحتهای آنها برابر $\frac{۴}{۲۵}$ است. مقدار x را بیابید.



۶. مربعی بر دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر محیط است:

الف) اندازهٔ ضلع این مربع را بیابید.

ب) اندازهٔ ضلع مربع محاط در این دایره را تعیین کنید.

ج) اندازهٔ ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاط در این دایره را تعیین کنید.

۷. در کره‌ای به قطر ۱۰ سانتیمتر، استوانه‌ای محاط کرده‌ایم که شعاع قاعدهٔ آن برابر ۳ سانتیمتر است. اندازهٔ سطح جانبی و حجم این استوانه و نسبت حجم استوانه به کره را بیابید.

مسائل ریاضی ۳

۱. مجموعه جوابهای نامعادلهٔ زیررا به کمک جدول به دست آورید.

$$\frac{x}{x+۱}+۲>\frac{۱}{x+۱}$$

۲. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{۳x^۲+۴}-\sqrt{۲x+۹}=۰$$

۳. نمودار $f(x)=|x+۱|-۲$ را رسم کنید و با توجه به نمودار، یک‌به یکی تابع f را بررسی کنید. سپس با استفاده از تعریف، یک‌به‌یکی f را تحقیق کنید.

۴. اگر $S_n=(n+۱)^۲-۱$، حاصل $۱۳+۷a+۷d$ را بیابید. در صورتی که S_n، مجموع nجمله و a و d به ترتیب جملهٔ اوّل و قدر نسبت تصاعد حسابی باشند.

۵. در یک تصاعد هندسی، حاصل ضرب جمله‌های سوّم و نهم برابر ۹۶ است. اگر جملهٔ دوم این دنباله ۶ باشد، جمله دهم این دنباله را تعیین کنید.

۶. نمودار $y=[x+۱]-۲$ را با شرط $-۲\leq x<۱$، رسم کنید.

۷. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\log_۵(x-۱)-\log_۵(x^۲-۱)=-۲\log_۵^۲$$

ریاضی ۵

۱. مجموعه جواب نامعادله $\frac{-x^۲(x^۲-x+۱)}{x^۴-x^۳}\geq ۰$ را به‌دست آورید.

۲. در صورتی که $af(x)+bf(-x)=cx$ و $(a\neq b)$، مطلوب است محاسبه $f(x)$.

۳. دامنهٔ‌توابع‌با ضابطه‌های زیر را به دست آورید:

الف) $y=\sqrt{\log(\frac{۵x-x^۲}{۴})}$ ب) $g(x)=\frac{x+۱}{x-[x]}$

۴. دامنهٔ تابع fog را در صورتی که $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ ، بیابید.

۵. حدّ توابع زیر را بیابید :

الف) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x)\tan\frac{\pi}{4}x$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{4x^2-8x-1}+2x)$

۶. تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} & x<2\\ (b+1)x & x=2\\ [-x] & x>2\end{cases}$$

مفروض است، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطهٔ $x_0=2$ پیوسته باشد.

۷. مشتق توابع زیر را بیابید :

الف) $y=3\sin^5(\sqrt[7]{\frac{x+2}{x}})$

ب) $y=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

۸. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع با ضابطه $y=\dfrac{x+2}{2x-3}$ را بیابید.

۹. زاویهٔ بین دو منحنی $y=x^2-5x+1$ و $y=x^2-3x-3$ را به دست آورید.

جبر و احتمال

۱. روش استدلال به وسیلهٔ مثال نقض را بیان کنید. سپس در صورتی که A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، درستی یا نادرستی برابری زیر را ثابت کنید.

$n(A-B)=n(A)-n(B)$

۲. درون دایره‌ای به قطر ۴، پنج نقطه درنظر می‌گیریم، ثابت کنید حدّاقل دو نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آنها کمتر از $2\sqrt{2}$ است.

۳. ثابت کنید از هر مجموعه که شامل n عدد طبیعی باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای غیرتهی چنان انتخاب کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

۴. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید :

$(2n)!<2^{2n}(n!)^2$

۵. با استفاده از اثبات بازگشتی، ثابت کنید :

الف) $(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

ب) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

۶. به کمک جبر مجموعه‌ها، درستی برابریهای زیر را درباره مجموعه‌های A و B و C زیر مجموعه‌های U بررسی کنید :

الف) هر گاه $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=M$ ، ثابت کنید $B'=A$.

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

۷. هر گاه $An=\{m\in Z|m\ge -n, 2^m\le n\}$ و $n\in \mathbb{N}$ ؛ در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های $A_2^2-A_1^2$ را پیدا کنید.

۸. رابطه R روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است :

$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow(b-d)=5(a-c)$

الف) ثابت کنید رابطهٔ R ، یک رابطهٔ هم ارزی است.

ب) کلاس هم ارزی $[(2,3)]$ را بیابید.

۹. با فرض این که n عدد طبیعی است، ثابت کنید :

$3^{(6n+2)}+3^{(3n+1)}+1\overset{13}{\equiv}0$

۱۰. کیسه‌ای شامل ۵ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سبز است. به طور تصادفی ۳ مهره یکجا از کیسه خارج می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که :

الف) سه مهره از سه رنگ مختلف باشد.

ب) حداکثر ۲ مهره از ۳ مهره برداشته شده، آبی باشد.

۱۱. دو قطعهٔ چوب ۱ متری و ۲ متری داریم، چوب بلندتر را به طور تصادفی به دو قسمت ارّه می‌کنیم، احتمال آن‌که این سه قطعه چوب، تشکیل یک مثلث بدهند، چقدر است؟

۱۲. تاسی را به گونه‌ای ساخته‌ایم که احتمال آمدن هر پهلو متناسب با آن پهلو است. همچنین سکهٔ ناسالم را طوری داریم که احتمال آمدن رو در آن، سه برابر پشت در یک بار پرتاب است. در صورتی که تاس و سکه را پرتاب کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که تاس کمتر از چهار و سکه رو بیاید.

حسابان ۱

۱. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|4x-3| \geq 2$ را به‌دست آورید.

۲. آیا دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=(\sqrt{x})^2$ با هم برابرند؟ چرا؟

۳. اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2 & x=0 \\ x-2 & x<0 \end{cases}$ در این صورت ضابطهٔ (fog) و (gof) را بنویسید و ثابت کنید تابع $h(x)=tg(\sin x)$ تابعی فرد است.

۴. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(4-x^2)$ برابر $2x-1$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x-4)$ را بر $(2-x)$ بیابید.

۵. ثابت کنید اگر تابع f زوج باشد، معکوس‌پذیر نیست.

۶. ثابت کنید $\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x}=1-4\sin^2 x$.

۷. اگر برای هر x در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ داشته باشیم $3-\sin x \leq f(x) \leq 4-2tg\frac{x}{2}$، مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x)}$.

۸. مطلوب است محاسبهٔ هر یک از حدّهای زیر:

۱) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ ۲) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x}-x^2$

۳) $\lim_{x\to 1}(x-1)tg\frac{\pi x}{2}$

۹. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطهٔ زیر در $x_0=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1} & x>1 \\ 2a-1 & x=1 \\ [-x+a]-b & x<1 \end{cases}$$

۱۰. معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع را با ضابطهٔ $y=x^3-2x^2$ در نقطه‌ای که منحنی این تابع با منحنی تابع با ضابطهٔ $y=x^3-2$ تلاقی می‌کند، بنویسید.

۱۱. برای هر یک از f(x) های داده شده، $f'(x)$ را بیابید.

۱) $f(x)=\sqrt[5]{(2x-1)^3}$ ۲) $f(x)=\sin^4(\cos^3(x^2))$

۳) $f(x)=\frac{2x^2-4x}{\sqrt{x^2-1}}$ ۴) $f(x)=\frac{\sin^3 2x}{\cos^2 x}$

۱۲. اگر $f'(x)=3x-1$ در این صورت، مشتق هر یک از تابعهای با ضابطهٔ زیر را به‌دست آورید.

۱) $y=f(4x)$ ۲) $y=f(\sin x)$

جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱. ثابت کنید در فضای برداری $\mathbb{R}^n$، اگر دو بردار مضرب ناصفری از یکدیگر باشند، وابستهٔ خطی‌اند.

۲. اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ یک نگاشت خطی باشد و $f(1,0)=(1,-1,0)$ و $f(0,1)=(0,1,2)$، در این صورت $f(2,-1)$ را بیابید.

۳. هستهٔ هر یک از نگاشتهای خطی زیر را به‌دست آورید و بُعد آنها را مشخص کنید.

۱) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، $f(x,y)=(x-2y,2x+y)$ ۲) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$، $f(x,y,z)=(x,y+z)$

۳) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$، $f(x,y)=(x,0,0)$ ۴) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$، $f(x,y,z)=(x,2y,0)$

۴. اگر $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی باشد و $K=\{(0,a+b,2a-b+3)\}$ هستهٔ این نگاشت باشد، حاصل a^3+2b^2-6 را بیابید.

۵. معادلهٔ تصویر خط به معادلهٔ $2y=x-1$ تحت تأثیر نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، $f(x,y)=(x-y,2x+y)$ را بیابید.

۶. خاصیت پوشایی را برای هر یک از نگاشتهای خطی زیر بررسی کنید.

۱) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، $f(x,y)=(x-2y,-2x+4y)$ ۲) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$، $f(x,y,z)=(y,z)$

۳) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$، $f(x,y,z)=(z,0)$ ۴) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$، $f(x,y,z)=(x-y,y+z,2x)$

۷. اگر $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی باشد و داشته باشیم $f(x,y)=(x-2y,x+y)$، در این صورت ضابطهٔ f^{-1} را بیابید.

۸. اگر $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی و داشته باشیم $f(1,0)=(1,-1)$ و $f(0,1)=(2,1)$، در این صورت حاصل $f^{-1}(3,-3)$ را بیابید.

۹. اگر $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x,y)=(2x,-y) \end{matrix}$ یک نگاشت خطی باشد، حاصل $f^{-1}of(2,-3)$ و $fof^{-1}(2,-3)$ را بیابید.

۱۰. دستگاه معادله‌های زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=-3 \end{cases}$$

هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱. اگر $a=2i+3k-j$ باشد، a' قرینهٔ بردار a نسبت به محورxها را مشخص کنید.

۲. دو بردار $a=i+3j$ و $b=2j+3k$ مفروضند:

الف) زاویهٔ بین دو بردار را تعیین کنید.

ب) a' تصویر بردار a روی بردار b را بیابید.

پ) $a.b$ و $|a\times b|$ را به‌دست آورید.

۳. دو نقطهٔ $A(0,2,3)$ و $B(1,-1,1)$ مفروضند:

الف) مختصات نقطه‌های A' و B' قرینه‌های این دو نقطه نسبت به صفحهٔ xoy را بیابید.

ب) معادلهٔ خطهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورید.

پ) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط AB و $A'B'$ را تعیین کنید. این نقطه چه ویژگی دارد؟

۴. فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,2,3)$ را از خط $D:\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=3t \end{cases}$ به‌دست آورید.

۵. معادلهٔ صفحهٔ شامل نقطهٔ $A(2,0,1)$ و خط $D:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$ را بنویسید.

۶. روی خط $D:\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ نقطه‌هایی بیابید که از صفحهٔ $P:2x+2y-z+1=0$ به فاصلهٔ ۴ قرار داشته باشند.

ریاضی عمومی ۱

۱. دو گروه داده‌ها را به صورت زیر در نظر بگیرید:

گروه اوّل:	۲ ۳ ۳ ۶ ۷ ۹
گروه دوم:	۱ ۲ ۳ ۴ ۶ ۸

الف) پراکندگی داده‌ها را نسبت به میانگین در هر دو گروه داده‌ها بررسی کنید.

ب) ضریب تغییرات را در دو گروه محاسبه نموده، سپس با هم مقایسه کنید.

۲. هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند و داشته باشیم:

$$P(A)=0/25 \quad P(B')=0/35 \quad P(A'\cap B')=0/6$$

بررسی کنید آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟

۳. مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۶۰٪ ژنهای تعیین‌کننده RH خون مثبتند. احتمال آن را بیابید که در یک کلاس ۵۰ نفری، به طور دقیق ۴۰ نفر دارای خونی با RH مثبت باشند. در این مسأله، انتظار دارید که چند نفر دارای خونی با RH منفی باشند؟

۴. اگر x یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\left[\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x}\right]$ را بیابید.

۵. با استفاده از تعریف «حد» ثابت کنید:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+7}{n^2-1}=2$$

۶. نمودار تابع با ضابطه $y=|-1+\cos x|$ را در فاصله $[-4\pi,4\pi]$ بیابید.

۷. دسته خط به معادلهٔ

$$(\lambda+2)x+(4\lambda-3)y-5+3\lambda=0$$

به ازای جمیع مقادیر x از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد، مختصات آن نقطهٔ ثابت را پیدا کنید.

۸. در بسط دو جمله‌ای $(2x^2+\frac{3}{x^2})^{15}$ ، $(x\neq 0)$ ، ابتدا جملهٔ مستقل از x را بیابید، سپس مجموع ضرایب بسط فوق را پیدا کنید.

۹. معادله‌های زیر را در IR حل کنید:

الف) $(27^x)^{x+2}-\frac{1}{9}=0$

ب) $Ln(2x-1)+Ln13=Ln91-Ln(x-1)$

۱۰. بررسی کنید که آیا دنباله $\{u_n\}$ با جملهٔ عمومی $u_n=\frac{2n^2+4n}{(n+1)^2}$ صعودی است یا نزولی؟ سپس بررسی کنید که دنباله $\{u_n\}$ از بالا کراندار است یا از پایین کراندار؟

۱۱. درتابع باضابطه $y=\frac{(a-1)x^3+(a-b+2)x^2+4}{2x^2+5}$ ، a و b را طوری بیابید تا خط $y=2$ مجانب افقی منحنی تابع باشد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

۱. با استفاده از تعریف حدّ دنباله‌ها، ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2-4}=4$$

۲. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ ، $n\in N$.

۳. ثابت کنید دنبالهٔ $a_1=\sqrt{3}$ و $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ کراندار و صعودی است.

۴. مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\cos\frac{1}{k+1}.\cos\frac{1}{k+2}}$ را بیابید.

۵. ثابت کنید تابع به معادله $f(x)=x[x]$ در نقطهٔ $x_0=1$ حد ندارد.

۶. اگر تابع به معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases}ax+\left\lfloor x^2-\frac{5}{2}\right\rfloor , & x>2\\ bx+\frac{|x-2|}{x-2}+4 , & x<2\\ \left\lfloor -x^3+\sqrt{2}\right\rfloor , & x=2\end{cases}$$

در $x_0=2$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

۷. اگر تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}8ax^3+b , & x\geq 1\\ 4bx^2+4 , & x<1\end{cases}$ در $x_0=1$ مشتق‌پذیر باشد، a و b را بیابید.

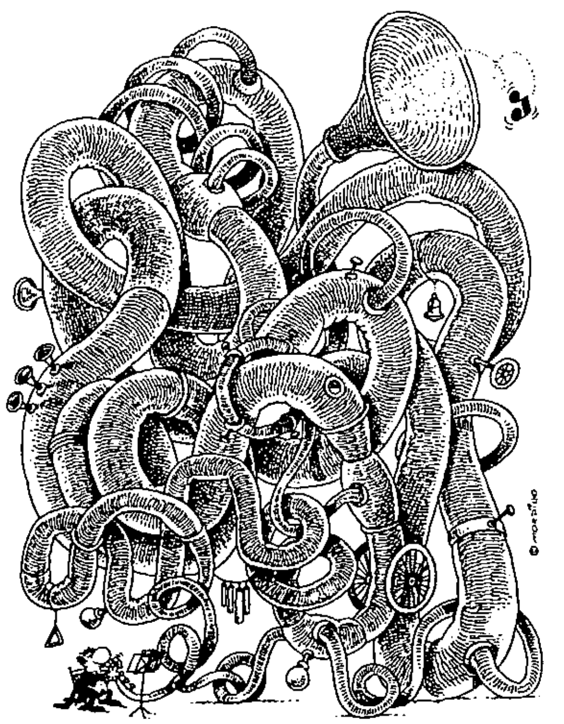
۸. ثابت کنید منحنی به معادلهٔ $f(x)=x^4+2x-1$ در بازه $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ حدّاقل در یک نقطه محور x ها را قطع می‌کند.

۹. معادله‌های مجانبهای منحنی تابع به معادله $y=x-1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$ را بیابید.

۱۰. متحرکی روی مسیر $5x^2-2y^2=18$ ، $(x>0)$ حرکت می‌کند، در نقطهٔ $y=1$ آهنگ افزایش مؤلّفهٔ y چند برابر آهنگ افزایش مؤلفهٔ x است؟

۱۱. تابع به معادله $f(x)=x^3+x$ مفروض است. اگر نقطه A' به طول ۲ روی منحنی تابع f^{-1} باشد، معادلهٔ قائم بر منحنی f^{-1} را در نقطه A' بنویسید.

۱۲. معادلهٔ $2\sin\frac{7x}{2}.\sin\frac{x}{2}=\cos 3x$ را حل کنید و جوابهای کلّی آن را بنویسید.



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ (۱)

۵ = (۲ : ۲) + (۲ + ۲)

۶ = ۲ − (۲ × ۲ × ۲)

۱۰ = ۲ + (۲ × ۲ × ۲)

۱۲ = ۲ × (۲ + ۲ + ۲)

۰ = (۲ + ۲) − (۲ + ۲)

۱ = (۲ : ۲) × (۲ : ۲)

۲ = (۲ : ۲) + (۲ : ۲)

۳ = ۲ : (۲ + ۲ + ۲)

۴ = ۲ − (۲ + ۲ + ۲)

پاسخ (۲)

کیسه‌ها را A، B، C، D و E می‌نامیم و ۳۱ سکه از این پنج کیسه به ترتیب زیر انتخاب می‌کنیم و روی ترازو قرار می‌دهیم:

۱ سکه از کیسه A

۲ سکه از کیسه B

۴ سکه از کیسه C

۸ سکه از کیسه D

۱۶ سکه از کیسه E

در این صورت اختلاف تعداد سکه‌های هر دو کیسه از پنج کیسه، عددهای متفاوت می‌باشد، که این اختلافهای ممکن عبارتند از:

۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۱۲، ۱۴، ۱۵

با در نظر گرفتن علامتهای + و − ، در مجموع ۲۰ اختلاف (تفاضل) مختلف خواهیم داشت،که علت به وجود آمدن این ۲۰ اختلاف، تفاوت ۱ گرم وزن بین بعضی از سکه‌ها است.

برحسب اینکه کدام کیسه از پنج کیسهٔ A، B، C، D و E سبکترین و سنگینترین کیسه‌ها باشد، ترازو ۲۰ نتیجهٔ مختلف را نشان خواهد داد.

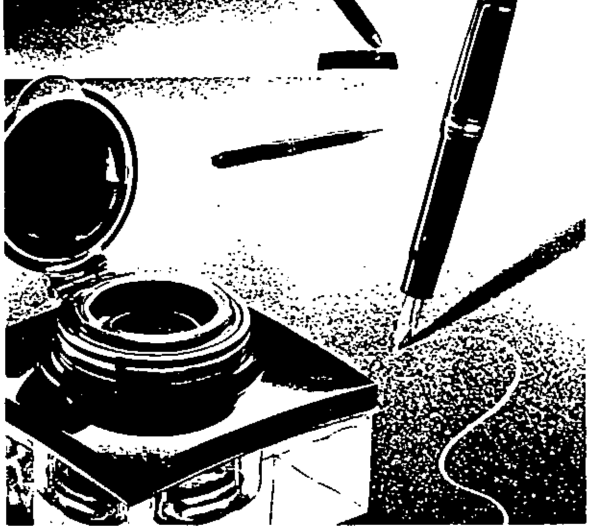
حالا وزن سکه‌های گذاشته شده روی ترازو را با ۳۱۰ گرم، که وزن متعلق به ۳۱ سکهٔ معمولی است مقایسه می‌کنیم.

● اگر A سبکترین و B سنگینترین کیسه باشد، وزن برابر است با:

۳۱۰+۲−۱=۳۱۰+۱

● اگر A سنگینترین و B سبکترین کیسه باشد:

۳۱۰+۱−۲=۳۱۰−۱



● اگر A سبکترین و C سنگینترین باشد:

۳۱۰−۱+۴=۳۱۰+۳

و به همین ترتیب ......

پس یک بار وزن کردن کافی است.

پاسخ (۳)

مهرداد به بیش از ۷ تویی نیاز ندارد زیرا:

ابتدا توییها را از ۱ تا ۷ شماره گذاری می‌کنیم.

در شروع حرکت اتومبیل مجهز به توییهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است. سپس بعد از هر ۶ هزار کیلومتر راه، توقف می‌کند تا توییها را به ترتیب زیر عوض کند.

بعد از شش هزار کیلومتر اول	۲	۳	۴	۵
بعد از شش هزار کیلومتر دوم	۳	۴	۵	۶
بعد از شش هزار کیلومتر سوم	۴	۵	۶	۷
بعد از شش هزار کیلومتر چهارم	۵	۶	۷	۱
بعد از شش هزار کیلومتر پنجم	۶	۷	۱	۲
بعد از شش هزار کیلومتر ششم	۷	۱	۲	۳

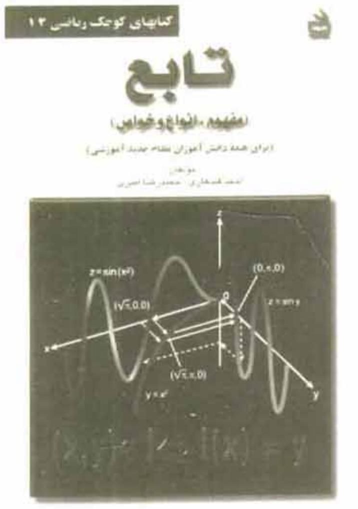
همچنین مشاهده می‌شود که هیچ لاستیک تویی بیش‌از ۲۴۰۰۰ کیلومتر نپیموده است. پس مهرداد خواهد توانست ۴۲۰۰۰ کیلومتر را با تعویض ۷ تویی بپیماید.

پاسخ (۴)

پله‌ای راکه مهرداد ایستاده و از آنجا شروع به حرکت می‌کند صفر می‌نامیم.

نخست او روی پلهٔ پنجم می‌رود. سپس با ۷ پله‌ای که پایین می‌آید روی پله دوم، پایین‌تر از محل اولش قرار می‌گیرد. دفعهٔ سوم که ۴ پله بالا می‌رود روی پلهٔ دوم بالاتر از محل ایستادن اولش واقع می‌شود و در این حالت ۹ پله تا آخر نردبان فاصله دارد، پس ۱۱=۲+۹ پله، از محل ایستادن اول مهرداد تا آخر نردبان وجود دارد، که چون ۱۱ پله هم پایین‌تر از این نقطه موجود است، بنابراین تعداد پله‌های نردبان ۲۳=۱+۱۱×۲ می‌باشد.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



جدید

تابع

مؤلفان : احمد قندهاری و حمیدرضا امیری

۱۷۴ صفحه / تک رنگ / چاپ اول / ۴۳۰۰ ریال

این کتاب که دوازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه است، به طور مبسوط به مفهوم **تابع** پرداخته و این مفهوم که از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات است را با همهٔ خواص و انواع آن و با طرح و حل مسائل و مثالهای متنوع، مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است، در این کتاب از دو دیدگاه **مجموعه‌ای** و **جبری**، مفهوم تابع مورد بررسی قرار گرفته است. کتاب شامل دو مجموعه تست با حل تشریحی می‌باشد، مطالعه این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان نظام جدید و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.



جدید

توان و رادیکال

مؤلف : سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

۱۸۸ صفحه / تک رنگ / چاپ اول / ۴۷۰۰ ریال

این کتاب یازدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی بوده که به دو موضوع مهم و اساسی **توان** و **رادیکال** پرداخته و این دو موضوع را پس از تشریح با مثالها و مسأله‌هایی حل شده و بیشتر با تکیه بر حل مسأله مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است، مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان نظام جدید آموزشی و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

توجه : از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند :

۱ ـ مثلثات / احمد فیروزنیا ۲ ـ دنباله‌ها و سریها / احمد قندهاری ۳ ـ ورودی به نظریهٔ احتمال / عین ا... پاشا

۴ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی ۵ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن / محمّد عابدی

۶ ـ بردارها / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی ۷ ـ عبارتهای جبری و معادلات / علی حسن‌زاده ماکویی

۸ ـ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر

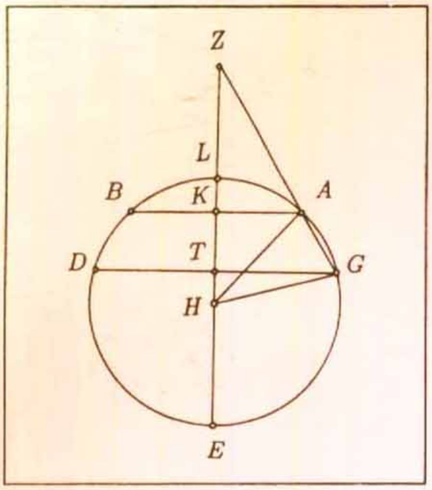
احمدبن محمّد بن عبدالجلیل سجزی (ریاضیدان مسلمان ایرانی)

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری بود. از زندگی او اطلاعات اندکی در دست است. اولین تاریخ ذکر شده از زندگی سجزی، ربیع‌الآخر ۳۵۲ هجری است که او نسخه‌ای از ترجمهٔ عربی *مقدمه بر مکانیک پاپوس* اسکندرانی را رونویسی کرده است. سجزی در آغاز محرم سال ۳۸۹ هجری هنوز فعال بود و در این سال اثری به نام *رساله فی الشکل القطاع* را نوشته است.

نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی در جنوب شرقی ایران است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذراند. بیرونی در *آثارالباقیه* نام ماههای تقویم سیستان را که سجزی به او گفته بود نقل کرده است. سجزی در *رسالةالمدخل فی علم الهندسه* می‌گوید: "در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساخته‌ام؛ مدلی از کل عالم، متشکل از افلاک، جرمهای آسمانی، مدارهای حرکت آنها و اندازه‌هایشان، مقدار فاصله‌ها و حجمهای آنها، و شکل زمین، جایها، شهرها، کوهها، دریاها و بیابانها، درون کره‌ای توخالی و مشبک؛ آن را «هیئت کل» نامیده‌ام."

از سجزی حدود ۴۰ رسالهٔ هندسی موجود و شناخته شده است. سجزی در آثاری که از وی برجا مانده، دست کم به ۲۰ رسالهٔ دیگر اشاره می‌کند که تألیف کرده ولی به دست ما نرسیده است. حدود ۲۰ رساله از سجزی در نجوم و احکام نجوم موجود است. تنها بخش اندکی از آثار سجزی تاکنون انتشار یافته است.

در زیر، حل یکی از مسائل هندسه که توسط سجزی و در پاسخ به سؤالهایی که از او توسط افرادی از خراسان پرسیده شده بود، انجام شده است را می‌آوریم:



مسأله: می‌خواهیم به روشی غیر از روش بطلمیوس در کتاب مجسطی ثابت کنیم که نسبت هر کمان بزرگتر به هر کمان کوچکتر در (یک) دایره، بزرگتر است از نسبت وتر کمان بزرگتر به وتر کمان کوچکتر.

من این مسأله را به روشهای مختلف و با برهانهای آسان در مثالهایی که در *رساله در آسان کردن راههای به دست آوردن شکلهای هندسی* آورده‌ام، حل کرده‌ام.[1] اما (برایم حل این مسأله) به روشی متفاوت با روشهایی که درآن کتاب دنبال کرده‌ام ممکن شده است. آن روش چنین است. (شکل مقابل) کمانهای AB و GD را متفاوت با هم در نظر می‌گیریم. می‌گویم نسبت کمان بزرگتر GD به کمان کوچکتر AB بزرگتر است از نسبت وتر GD به وتر AB.

اثبات: وترها را موازی می‌گیریم. از مرکز دایره عمود HTK را بر دو وتر فرود می‌آوریم و آن را از هر دو سو تا E و L امتداد می‌دهیم. HG و HA را رسم می‌کنیم. GA و EL را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در Z قطع کنند. پس نسبت زاویهٔ GHA به زاویهٔ AHL مثل نسبت کمان GA به کمان AL است (که برابر است) با نسبت قطاع GAH به قطاع AHL (که) بزرگتر است از نسبت مثلث GAH به مثلث AHZ. (پس) براساس ترکیب نسبت، نسبت قطاع GHL به قطاع AHL بزرگتر است از نسبت مثلث GHZ به مثلث AHZ. اما نسبت مثلث GHZ به مثلث AHZ مثل نسبت GZ به AZ است و مثل نسبت GT به AK. پس نسبت کمان GL به کمان AL، یعنی GLD به ALB بزرگتر است از نسبت خط GT به خط AK، یعنی وتر GD به وتر AB. این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

۱- برگرفته از کتاب «رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسائل هندسی» ترجمهٔ محمد باقری - انتشارات فاطمی

مجله ریاضی

برهان

۲۶

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شماره دوم ، پاییز ۱۳۷۷ ، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ▫ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
سردبیر: حمیدرضا امیری ▫ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
اعضای هیأت تحریریه: آقایان: حمیدرضا امیری ▫ محمدهاشم رستمی ▫ احمد قندهاری ▫ میرشهرام صدر
▫ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ▫ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی ▫ طراح گرافیک: امیر بابایی ▫ رسامی: مهدی ملکوتیان ▫ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ **سال هشتم، پاییز ۱۳۷۷، شمارهٔ دوم.**

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵ ، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸ ، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ ، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

در آستانهٔ ورود به ماه شعبان‌المعظم، ماه پیامبر (ص)، ماه دعا و نیایش و پس از آن ماه مبارک رمضان هستیم، إن‌شاءا... از برکاتِ ماه رجب بهره‌مند شده باشیم و با توشه‌ای ارزشمند، ماه شعبان را آغاز کنیم و با استمداد از وجود پرفیض و مقدس رسول اکرم (ص)، به میهمانی پروردگار (جل جلاله) بشتابیم.

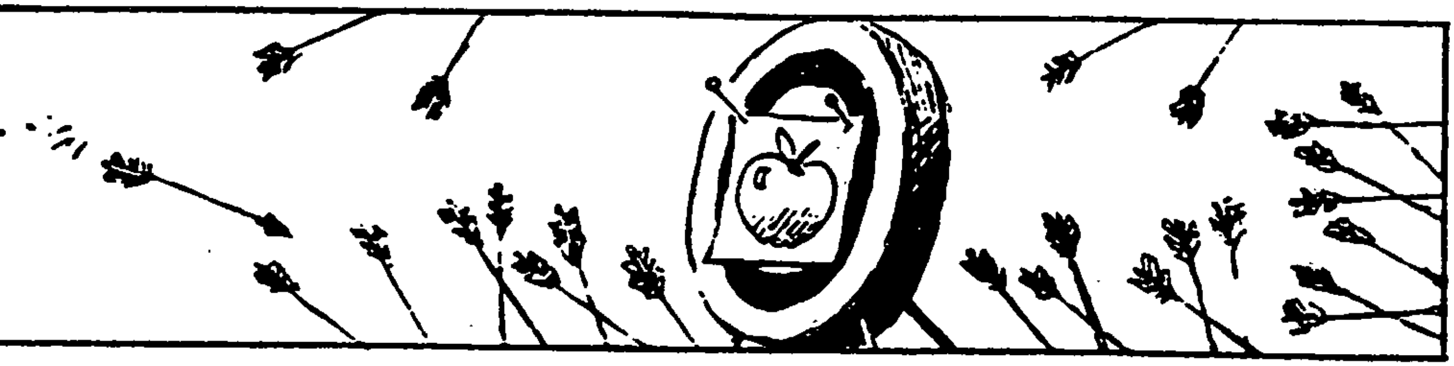
بیایید با هم به یکی از سخنان پُربار و قابل تأملِ رسول گرامی اسلام حضرت محمّد مصطفی (ص)، نظری عمیق و متفکّرانه بیندازیم و یافته‌های خود را برای هم بازگو کنیم، هر بخشی از این حدیث شریف می‌تواند، کلیدی باشد تا دری از درهای عالم معرفت به رویمان باز شود. در این حدیث شریف، خداوند، خزانهٔ خود را معرفی می‌کند و در این معرفی، تشبیهاتی به کار رفته است که هر مسلمان مؤمنی را به فکر فرو می‌برد و در لابه‌لای این تشبیهات و اجزای آن ارتباطها و نکته‌های لطیف و ظریف، بسیار است که اِن‌شاءا... به آنها دست پیدا می‌کنید، مضمونِ حدیث به شرح زیر است:

خداوند می‌فرمایند: مرا خزانه‌ای است، بزرگتر از **عرش**، وسیعتر از **کرسی**، پاکیزه‌تر از **بهشت** و آراسته‌تر از **ملکوت آسمان**. زمینِ آن، **معرفت** است. آسمانِ آن، **ایمان** است. آفتاب آن (آسمان) **شوق** و ماه آن (آسمان)، **محبّت** است. ستارگانش، **فکر و اندیشه** و اَبرش، **عقل** و بارانش، **رحمت** است. درخت آن (زمین) **طاعت** است و میوهٔ آن (درخت) **حکمت** است. درهای خزانه‌ام، **علم**، **حِلم**، **صبر** و **رضا** می‌باشند و همهٔ اینها، **قلب مؤمن**[1] است. عجبا که قلب مؤمن چه‌قدر بزرگ، وسیع، پاکیزه و آراسته است، آیا در زمینِ **معرفت**، درختی بجز درخت **طاعت** می‌روید؟ آیا میوهٔ این درخت، غیر از **حکمت** می‌تواند باشد؟ آیا برای این درخت جز بارانِ **رحمت** از ابرِ **عقل** انتظار می‌رود؟ آیا از آسمانِ **ایمان** انتظار آفتابِ **شوق** نمی‌رود؟ زینت‌بخشِ این آسمان (ایمان) ستارگانِ **فکر و اندیشه**اند و **محبّت**، (به خداوند و اهل‌بیت علیهم‌السلام) چون ماه، در این **آسمان** می‌درخشد و نور می‌دهد.

عزیزان دانش‌آموز! اگر با تأمل و تفکر بیشتر در این حدیث شریف، به رابطه‌هایی بین بخشها و اجزای آن پی بُردید، آنها را مدوّن کنید و به آدرس مجلّه برای ما ارسال کنید تا به حکم قرعه از بین بهترین برداشتها به رسم یادبود، سه نفر را انتخاب و جایزه‌هایی تقدیمشان کنیم.

والسلام - سردبیر

۱- اَلاٰ وَ هِیَ قَلْبُ الْمُؤمِنِ



شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۶)

● پرویز شهریاری

§۳. روش ضریبهای نامعین

روش استفاده از ضریبهای نامعیّن، روشی ساده و در ضمن نیرومند، برای حلّ برخی از مسأله‌های مربوط به جبر محاسبه‌ای است. این روش را، به تقریب می‌توان این طور تعریف کرد :

وقتی منظور از حلّ مسأله، یافتن یک چند جمله‌ای باشد، مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و چند جمله‌ای مورد نظر را (که با توجه به شرطهای مسأله از درجهٔ آن آگاهیم)، با ضریبهای مجهول (نامعین) می‌نویسیم. سپس با انجام عملهای ناشی از شرطهای مسأله، خود را به دستگاهی از معادله‌ها می‌رسانیم، که مجهولهای آنها، همان ضریبهای نامعیّن باشند و سرانجام، با حلّ دستگاه (اگر شدنی باشد)، مقدار ضریبها و در نتیجه، چند جمله‌ای مورد نظر را می‌یابیم.

با چند نمونه، با این روش آشنا می‌شویم و نقطه‌های قوّت و ضعف آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. m را طوری پیدا کنید که معادلهٔ $x^3+mx+\sqrt{2}=0$ دارای یک ریشهٔ مضاعف (یعنی دو ریشهٔ برابر) باشد، و سپس، معادله را حل کنید.

فرض می‌کنیم معادله را حل کرده‌ایم، ریشهٔ مضاعف آن را α و ریشهٔ سادهٔ آن را β می‌گیریم. در این صورت، باید داشته باشیم :

$$x^3+mx+\sqrt{2}=(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

این برابری یک اتحاد است (چرا؟)، و بنابراین، باید ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری با هم برابر باشند. سمت راست برابری را باز می‌کنیم :

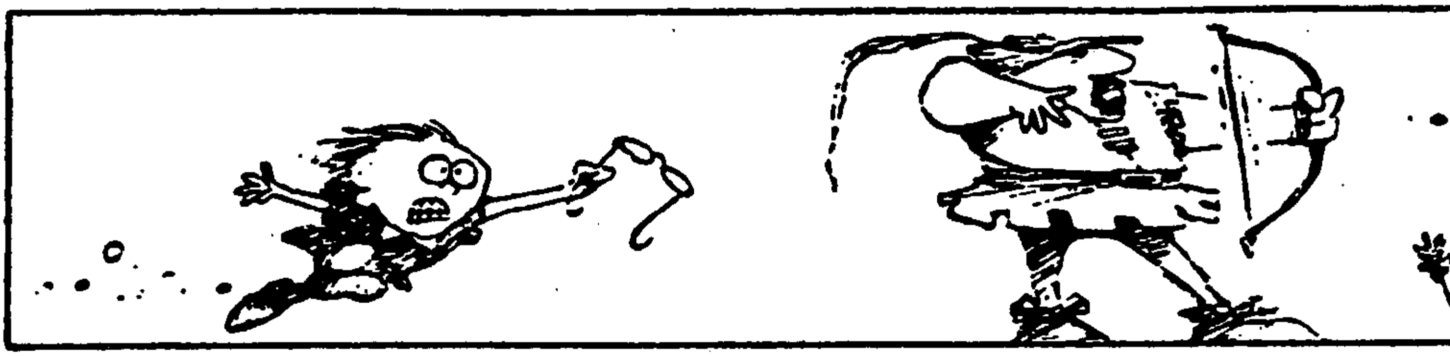
$$x^3+mx+\sqrt{2}=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta$$

به این ترتیب، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=0\\ \alpha^2+2\alpha\beta=m\\ \alpha^2\beta=-\sqrt{2}\end{cases}$$

که دستگاهی است شامل سه معادله و سه مجهول α، β و m. اگر بتوانیم این دستگاه را حل کنیم، نه تنها مقدار m، که مقدار ریشه‌ها هم به دست می‌آید. مقدار $\beta=-2\alpha$ را به جای β در معادلهٔ سوّم قرار می‌دهیم.

$$2\alpha^3=\sqrt{2}\Rightarrow\alpha^3=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$



با در دست داشتن مقدار α، برابری $\beta=-2\alpha$، مقدار β را به ما می‌دهد: $\beta=-\frac{2}{\sqrt[6]{2}}$. اکنون، مقدار m، از معادلهٔ دوم دستگاه محاسبه می‌شود:

$$m=\alpha^2+2\alpha\beta=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

به این ترتیب، هم مقدار m و هم مقدار ریشه‌ها به دست آمد و داریم:

$$x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}x+\sqrt{2}=\left(x-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^2\left(x+\frac{2}{\sqrt[6]{2}}\right)$$

یادداشت: روش ضریبهای نامعین، روشی ساده است؛ ولی همیشه زیباترین راه حل را به ما نمی‌دهد. بجز این، همان طور که در مثالهای بعد خواهید دید، کار را به محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور می‌کشاند. بنابراین، از روش ضریبهای نامعین، هنگامی استفاده کنید که از یافتن راه حلّ بهتر و زیباتر درمانده باشید.

در همین مثال ۱، می‌توان روشهای دیگری برای حل انتخاب کرد. می‌دانیم، معادلهٔ درجهٔ سوّم به صورت $x^3+px+q=0$، وقتی و تنها وقتی، دو ریشهٔ برابر دارد، که برای آن داشته باشیم:

$$4p^3+27q^2=0$$

در مسألهٔ ما $p=m$ و $q=\sqrt{2}$؛ بنابراین باید داشته باشیم:

$$4m^3+27(\sqrt{2})^2=4m^3+54=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

می‌بینید، اگر منظور از حلّ مسأله، تنها پیدا کردن مقدار m باشد، از این راه، خیلی سریعتر به دست می‌آید. ولی پس از به دست آمدن مقدار m، اگر نخواهیم از مفهوم مشتق استفاده کنیم، برای یافتن مقدار ریشه‌ها، دوباره باید به روش ضریبهای نامعیّن متوسّل شویم.

ولی استفاده از مفهوم مشتق، کار را در همهٔ موردها ساده‌تر می‌کند. فرض کنید $f(x)$، یک چند جمله‌ای با ریشهٔ مضاعف باشد، در این صورت می‌توان آن را چنین نوشت:

$$f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$$

(a را ریشهٔ مضاعف $f(x)$ گرفته‌ایم). اگر مشتق $f(x)$ را پیدا کنیم، به دست می‌آید:

$$f'(x)=(x-a)\left[2\varphi(x)+(x-a)^2\varphi'(x)\right]$$

یعنی، عدد a، ریشهٔ $f'(x)$ است. به طور کلی:

اگر عدد a، هم $f(x)$ و هم $f'(x)$ را برابر صفر کند، آن وقت a ریشهٔ مضاعف $f(x)$ است.

برای این که معادلهٔ $x^3+mx+\sqrt{2}=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید با مشتق خود، یعنی $3x^2+m=0$، ریشهٔ مشترک داشته باشد. این معادله دو ریشه دارد: $x_1=\sqrt{-\frac{m}{3}}$ و $x_2=-\sqrt{-\frac{m}{3}}$. در این جا، در ضمن نتیجه می‌شود که m عددی منفی است. یکی از دو مقدار x_1 یا x_2 (و مثلاً x_1) را، در معادلهٔ درجهٔ سوّم مفروض قرار می‌دهیم (در این جا، چه x_1 را در معادله قرار دهیم و چه x_2 را، در نتیجهٔ کار تغییری حاصل نمی‌شود، آزمایش کنید.) توجه کنیم:

$$\left(\sqrt{\frac{-m}{3}}\right)^3=\left|\frac{m}{3}\right|\sqrt{-\frac{m}{3}}=-\frac{m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$$

(زیرا $m<0$) به‌دست می‌آید:

$$-\frac{m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}+m\sqrt{-\frac{m}{3}}+\sqrt{2}=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

مقدار m محاسبه شد. ولی کدام یک از دو عدد x_1 یا x_2 ریشهٔ مضاعفند؟ اکنون معادلهٔ درجه سوّم چنین است:

$$x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}x+\sqrt{2}=0 \qquad (1)$$

با آزمایش معلوم می‌شود که تنها x_1 در این معادله صدق می‌کند و

$$x_۱ = \sqrt{-\frac{m}{۳}} = \sqrt{\frac{\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۴}}{۳}} = +\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}$$

معادلهٔ (۱) سه ریشه دارد، که دو ریشهٔ آن برابر $\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}$ است. ولی حاصل ضرب سه ریشه، با توجه به معادلهٔ (۱) در این مسأله برابر است با $-\sqrt{۲}$. پس

$$x_۱.x_۲.x_۳ = -\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}.\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}.x_۳ = -\sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}.x_۳ = -\sqrt{۲} \Rightarrow x_۳ = -\sqrt{۲}.\sqrt[۳]{۲} = -\sqrt[۶]{۳۲} = \frac{-۲}{\sqrt[۶]{۲}}$$

برای حلّ این مسأله، نه تنها توانستیم از روش ضریبهای نامعیّن استفاده کنیم ؛ بلکه این روش، تا حدّی برتری خود را نسبت به روشهای دیگر نشان داد ؛ زیرا با روش ضریبهای نامعیّن، نه تنها مقدار m، که مقدار هر یک از ریشه‌ها هم بسادگی به دست آمد.

مثال ۲. این معادلهٔ درجه سوّم را حل کنید:

$$x^۳ - ۷x + ۲\sqrt{۲} = ۰ \qquad (۱)$$

تلاش برای حلّ معادله: می‌دانیم، هر معادلهٔ درجهٔ سوّم، به شرط این که دارای ضریبهای حقیقی باشد، دست کم یک ریشهٔ حقیقی دارد. بنابراین، به احتمال زیاد، نخستین اندیشه‌ای که به ذهن راه می‌یابد، این است که عبارت درجهٔ سوم سمت چپ معادلهٔ (۱) را، به صورت ضرب یک عامل خطی در یک عامل درجهٔ دوم درآوریم. اگر ریشهٔ حقیقی معادله را α بگیریم، باید داشته باشیم :

$$x^۳ - ۷x + ۲\sqrt{۲} = (x-\alpha)(x^۲ + ax + b) \qquad (۲)$$

که برای حلّ معادلهٔ (۱)، باید ضریبهای نامعیّن α ، a و b را پیدا کنیم. اگر در دو طرف اتّحاد (۲)، ضریب توانهای مساوی را برابر قرار دهیم، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases} \alpha - a = ۰ \\ a\alpha - b = ۷ \\ \alpha b = -۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

از معادلهٔ اوّل، $\alpha = a$ را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم، $b = a^۲ - ۷$ به دست می‌آید. مقدارهای α و b را (که برحسب a در اختیار داریم)، در معادلهٔ سوّم می‌گذاریم ؛ به این معادله می‌رسیم :

$$a(a^۲ - ۷) + ۲\sqrt{۲} = ۰ \Rightarrow a^۳ - ۷a + ۲\sqrt{۲} = ۰$$

یعنی برای پیدا کردن مقدار a، باید همان معادلهٔ (۱) را حل کرد. تیرمان به سنگ خورد و گرفتار دور باطل شدیم.

راه دیگری را، برای جست‌وجوی ریشه‌ها، با روش ضریبهای نامعیّن آزمایش می‌کنیم. این اتحاد را در نظر می‌گیریم :

$$x^۳ - ۷x + ۲\sqrt{۲} = \alpha(x+a)^۳ + \beta(x+b)^۳ \qquad (۳)$$

اگر بتوانیم در این اتحاد، مقدارهای α ، β ، a و b را پیدا کنیم، آن وقت، یکی از ریشه‌های معادله به دست می‌آید :

$$\alpha(x+a)^۳ + \beta(x+b)^۳ = ۰ \Rightarrow$$

$$x = -\frac{a\sqrt[۳]{\alpha} + b\sqrt[۳]{\beta}}{\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta}} \qquad (۴)$$

به یاری اتحاد (۳)، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ۱ \\ a\alpha + b\beta = ۰ \\ a^۲\alpha + b^۲\beta = -\frac{۷}{۳} \\ a^۳\alpha + b^۳\beta = ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

از دو معادلهٔ اوّل و دوم، دستگاه زیر به دست می‌آید :

$$\alpha = -\frac{b}{a-b} \;,\; \beta = \frac{a}{a-b} \qquad (۵)$$

که اگر در دو معادلهٔ سوّم و چهارم دستگاه قرار دهیم، بسادگی نتیجه می‌شود :

$$ab = \frac{۷}{۳} \;,\; a+b = -\frac{۶\sqrt{۲}}{۷}$$

بنابراین، a و b، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم هستند :

$$t^۲ + \frac{۶\sqrt{۲}}{۷}t + \frac{۷}{۳} = ۰$$

این معادله، ریشه‌های حقیقی ندارد و ریشه‌های مختلط آن، به فرض $i = \sqrt{-۱}$ ، چنین‌اند :

$$a = -\frac{۳\sqrt{۲}}{۷} + \frac{۱۷}{۷\sqrt{۳}}i \;,\; b = -\frac{۳\sqrt{۲}}{۷} - \frac{۱۷}{۷\sqrt{۳}}i$$

با در دست داشتن a و b و استفاده از برابریهای (۵)، مقدارهای α و β هم به دست می‌آیند :

$$\alpha = -\frac{۱}{۲} - \frac{۳\sqrt{۶}}{۳۴}i \;,\; \beta = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳\sqrt{۶}}{۳۴}i$$

(ضمن محاسبه، $i^۲$ را برابر ۱- گرفته‌ایم). α ، β ، a و b به دست

آمدند ؛ بنابراین، مقدار x، از رابطهٔ (۴) محاسبه می‌شود ؛ ولی اجازه بدهید ادامه ندهیم. برای محاسبهٔ x، باید $\sqrt[3]{\alpha}$ و $\sqrt[3]{\beta}$ را پیدا کرد، و برای این منظور، به محاسبه‌های خسته کننده روی عددهای مختلط نیاز داریم.

در این راه، گرچه مقدار ضریبهای نامعیّن به دست آمد ؛ ولی دشواری و طولانی بودن محاسبه‌های بعدی، ما را از ادامهٔ کار بازداشت. البته، حالتهایی از معادلهٔ درجه سوّم وجود دارد، که همین روش می‌تواند ما را به جواب برساند ؛ بدون این که گرفتار محاسبه‌های ملال‌آور بشویم. ولی به طور معمول، این روش استفاده از ضریبهای نامعیّن، کار را به دشواری می کشاند.

به جست‌وجوی خود ادامه می‌دهیم. اتحاد زیر را می‌شناسیم :

$$x^3+a^3+b^3-3abx=$$
$$(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$

اکنون، این اتحاد را در نظر می‌گیریم :

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=x^3-3abx+a^3+b^3 \qquad (6)$$

اگر بتوانیم در این اتحاد، مقدارهای a و b را بیابیم، آن وقت روشن است، که یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱)، برابر $x=-(a+b)$ خواهد بود.

با توجه به اتحاد (۶)، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases}3ab=7\\ a^3+b^3=2\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^3b^3=\dfrac{343}{27}\\ a^3+b^3=2\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین، a^3 و b^3، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم هستند :

$$t^2-2\sqrt{2}t+\frac{343}{27}=0$$

که ریشه‌های آن، عددهایی مختلطند. با فرض $i=\sqrt{-1}$، به دست می‌آید :

$$a^3=\sqrt{2}+\frac{17}{3\sqrt{3}}i\ ,\ \ b^3=\sqrt{2}-\frac{17}{3\sqrt{3}}i$$

در این جا، با اندکی کاوش به دست می‌آید :

$$\sqrt{2}\pm\frac{17}{3\sqrt{3}}i=(\sqrt{2}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}i)^3$$

بنابراین :

$$a=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}i\ ,\ \ b=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

و در نتیجه :

$$x_1=-(a+b)=-2\sqrt{2}$$

می‌بینید چه نتیجهٔ جالبی به دست آمد : عمل با عددهای مختلط یاریمان کرد، تا ریشهٔ حقیقی معادله را به دست آوریم.

اکنون دیگر می‌توانیم معادلهٔ (۱) را، به طور کامل حل کنیم. سه جمله‌ای درجهٔ سوّم سمت چپ برابری در معادلهٔ (۱)، بر $x+2\sqrt{2}$ بخش‌پذیر است (زیرا به ازای این عدد برابر صفر می‌شود) و معادلهٔ (۱)، به این صورت درمی‌آید :

$$(x+2\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{2}x+1)=0\ ;$$
$$x_1=-2\sqrt{2}\ ,\ \ x_2=\sqrt{2}+1\ ,\ \ x_3=\sqrt{2}-1$$

سرانجام موفق شدیم. البته می‌توان حدس زد که این روش هم، همیشه کارساز نیست، و از آن جا که اغلب منجر به محاسبه روی عددهای مختلط می‌شود، ممکن است کار را دشوار کند ؛ ولی به هر حال، در بیشتر حالتها، از روش قبلی ساده‌تر است.

در مثال ۲، روی یک نمونهٔ عددی، دو روش (که هر دو، براساس استفادهٔ از ضریبهای نامعین بود) آوردیم که برای حلّ هر معادلهٔ درجهٔ سوّم، وقتی به صورت $x^3+px+q=0$ باشد، به کار می‌روند. و این، البته به شرطی است که در عملهای مربوط به عددهای مختلط تسلّط یافته باشیم. ولی به هر حال، حلّ معادلهٔ درجهٔ سوّم در حالتهای کلی، طولانی است و به صرف وقت زیادی نیاز دارد. در حالتهای عددی، باید پیش از آزمایش روش استفاده از ضریبهای نامعیّن، راه‌های دیگری را جست‌وجو کرد و تنها در حالت ناچاری، به سراغ این روش رفت. همین معادلهٔ (۱) را می‌توان با روش ساده‌تری حل کرد.

اگر معادلهٔ (۱) را، به صورت :

$$x^3-(4\times 2-1)x+2\sqrt{2}=0$$

بنویسیم و فرض کنیم $a=\sqrt{2}$، به این معادلهٔ پارامتری می‌رسیم :

$$x^3-(4a^2-1)x+2a=0$$

معادله را نسبت به a، منظّم می کنیم، که معادله‌ای درجهٔ دوم به‌دست می‌آید :

$$4xa^2-2a-(x^3+x)=0$$

و بسادگی قابل حل است و مقدارهای a، برحسب x، چنین می‌شوند :

$$a_1=-\frac{x}{2}\ ,\ \ a_2=\frac{1+x^2}{2x}$$

اکنون، اگر دوباره به جای a، مقدارش $\sqrt{2}$ را قرار دهیم، برای ریشه‌های معادلهٔ (۱)، به این دو معادله می‌رسیم :

$$x+2\sqrt{2}=0 \ , \ x^2-2\sqrt{2}x+1=0$$

که از آنها، همان جوابهای قبلی به دست می‌آید.

معادلهٔ (۱) را، با راه ساده‌تری می‌توان حل کرد و برای حلّ آن، نیازی به این همه تلاش نبود. اگر در این جا، حلّ آن را با شیوه‌های مختلف مورد آزمایش قرار دادیم، تنها به این دلیل بود که راه‌های کاربرد روش ضریبهای نامعین را نشان دهیم.

عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱)، بسادگی قابل تجزیه است :

$$x^3-7x+2\sqrt{2}=x(x^2-8)+(x+2\sqrt{2})=$$
$$=x(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})+(x+2\sqrt{2})$$
$$=(x+2\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{2}x+1)$$

که بسادگی، ریشه‌های آن به دست می‌آیند.

اکنون به نمونهٔ مثالی می‌پردازیم که، به احتمال زیاد، بدون استفاده از روش ضریبهای نامعین، قابل حل نیست.

مثال ۳. عدد طبیعی n را طوری بیابید که چند جمله‌ای

$$f(x,y)=2x^4+4x^3y+nx^2y^2-3xy^3+2y^4$$

به ضرب دو چند جمله‌ای با ضریبهای درست، قابل تجزیه باشد.

در آغاز یادآوری می‌کنیم که : $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن است ؛ یعنی، اگر در آن، x را به y و y را به x تبدیل کنیم، تغییر نمی‌کند. بنابراین، اگر داشته باشیم :

$$f(x,y)=f_1(x,y).f_2(x,y)$$

ممکن است یکی از دو حالت پیش آید :

۱) هر یک از چندجمله‌ایهای $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ نسبت به x و y متقارن هستند ؛

۲) در تبدیل x به y و y به x، چند جمله‌ای f_1 به f_2 و چند جمله‌ای f_2 به f_1 تبدیل می‌شوند ؛ یعنی

$$f_1(y,x)=f_2(x,y) \ , \ f_2(y,x)=f_1(x,y)$$

که در این صورت، f_1f_2 نسبت به x و y متقارن خواهد شد.

مسأله را، در هر یک از این دو حالت، به طور جداگانه حل می‌کنیم.

۱) در این حالت، دو صورت مختلف ممکن است : الف) f_1 یک دوجمله‌ای درجهٔ اوّل است ؛ ب) f_1، یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم است.

الف) در این حالت، باید داشته باشیم :

$$2x^4+3x^3y+nx^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(x+y)(2x^3+mx^2y+mxy^2+2y^3)$$

(چون عبارت درون پرانتز دوم، باید نسبت به x و y متقارن باشد، ضریبهای x^2y و xy^2 را یکسان درنظر گرفته‌ایم ؛ با وجود این، اگر هم ضریبها را یکی m و دیگری p در نظر می‌گرفتیم، نتیجهٔ درست به دست می‌آمد). بسادگی و با برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، مقدارهای m و n به دست می‌آیند :

$$m=1 \ , \ n=2$$

که در نتیجه، $f(x,y)$، به این صورت قابل تجزیه است :

$$f(x,y)=(x+y)(2x^3+x^2y+xy^2+2y^3)$$

ب) در این حالت، باید داشته باشیم :

$$2x^4+3x^3y+nx^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(x^2+\alpha xy+y^2)(2x^2+\beta xy+2y^2)$$

با برابر قرار دادن ضریبهای جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta+4=n\end{cases}$$

اگر β را بین این دو معادله حذف کنیم، می‌توانیم α را برحسب n محاسبه کنیم :

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{41-8n}}{4}$$

α عددی حقیقی و درست است، پس $0<n\leq\frac{41}{8}$. پس n، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ است (بنابر شرط مسأله، n عددی طبیعی است). به ازای $n=1$ و $n=3$، برای α، عددی گویا به دست نمی‌آید و برای بقیهٔ مقدارهای n داریم :

$$n=2\Rightarrow\alpha=2 \ , \ \beta=-1;$$
$$n=4\Rightarrow\alpha=0 \ , \ \beta=3;$$
$$n=5\Rightarrow\alpha=1 \ , \ \beta=1$$

(جوابهای غیر درست α و β را کنار گذاشته‌ایم). در نتیجه، یکی از سه تجزیهٔ زیر، برای $f(x,y)$، به دست می‌آید :

$$f(x,y)=(x^2+2x+y^2)(2x^2-xy+2y^2),$$
$$f(x,y)=(x^2+y^2)(2x^2+3xy+2y^2),$$

$$f(x,y)=(x^۲+xy+y^۲)(۲x^۲+xy+۲y^۲)$$

۲) در این حالت، باید داشته باشیم :

$$۲x^۴+۳x^۳y+nx^۲y^۲+۳xy^۳+۲y^۴=$$
$$=(۲x^۲+axy+y^۲)(x^۲+axy+۲y^۲)$$

که از آن، مقدارهای a و n، بسادگی به دست می‌آیند :

$$a=۱\ ,\ \ n=۶$$

که تجزیهٔ $f(x,y)$ به این صورت درمی‌آید :

$$f(x,y)=(۲x^۲+xy+y^۲)(x^۲+xy+۲y^۲)$$

به این ترتیب، چندجمله‌ای $f(x,y)$، به ازای $n=۲$، $n=۴$، $n=۵$ و $n=۶$ قابل تجزیه به ضرب دو چند جمله‌ای با ضریبهای درست است.

□

ضمن استفاده از روش ضریبهای نامعیّن، باید هوشیار بود و تا جایی که شدنی است، از ضریبهای مجهول کمتری استفاده کرد. به این مثال توجه کنید :

مثال ۴. چند جمله‌ای f(x) از درجهٔ چهارم را طوری پیدا کنید، که بر x − ۲ بخش‌پذیر باشد و ضمن تقسیم بر هر یک از دوجمله‌ایهای x − ۱، x + ۱، x + ۲ و x − ۳، باقیمانده‌ای برابر ۱۲− پیدا کند.

چند جمله‌ای درجهٔ چهارم را به این صورت در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e$$

با توجه به شرطهای مسأله، باید داشته باشیم :

$$f(۲)=۰,\ \ f(۱)=f(-۱)=f(-۲)=f(۳)=-۱۲$$

که در نتیجه، به دستگاهی شامل پنج معادلهٔ پنج مجهولی می‌رسیم :

$$\begin{cases}۱۶a+۸b+۴c+۲d+e=۰\\ a+b+c+d+e=-۱۲\\ a-b+c-d+e=-۱۲\\ ۱۶a-۸b+۴c-۲d+e=-۱۲\\ ۸۱a+۲۷b+۹c+۳d+e=-۱۲\end{cases}$$

حلّ این دستگاه دشوار نیست، ولی محاسبه‌های طولانی و خسته کننده‌ای را می‌طلبد. در دستگاه‌های خطی، هر چه تعداد معادله‌ها بیشتر شود، میزان وقت لازم برای حلّ آنها، بسرعت بالا می‌رود. مثلاً اگر برای حلّ یک دستگاه شامل دو معادلهٔ خطی، تنها دو دقیقه وقت لازم باشد، برای حلّ یک دستگاه سه معادلهٔ خطی سه مجهولی (از همان نوع)، دست کم شش دقیقه وقت لازم است.

استفادهٔ کورکورانه از روش ضریبهای نامعیّن، در بسیاری حالتها، ما را به دستگاه‌های بزرگی می‌رساند، که گرچه راه حلّ آن روشن است، در عمل نمی‌تواند به نتیجه برسد. اگر محاسبه‌ها با دست (و نه ماشین محاسبه) انجام شود، همیشه احتمال اشتباه وجود دارد و بازیابی اشتباه‌ها، به همان اندازهٔ حلّ دستگاه، وقت می‌گیرد.

روش ضریبهای نامعیّن، تا حدّ زیادی ما را قانع می‌کند که مسأله قابل حل است. ولی اگر با دستگاه‌های بزرگ سروکار پیدا کردیم، یا با دستگاهی روبه‌رو شدیم که شامل معادله‌های غیرخطی است و امکان حلّ آن در اختیار ما نیست و یا سرانجام، اگر با محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور روبه‌رو شویم (راه حلّ اوّل مثال (۲) را ببینید)، باید در جست‌وجوی راه حلّ دیگری برای مسأله باشیم.

دربارهٔ مسألهٔ مثال ۴، می‌توان با انتخاب تنها یک ضریب نامعیّن، مسأله را حل کرد. اگر عبارت درجهٔ چهارم

$$a(x-۱)(x+۱)(x+۲)(x-۳)$$

را در نظر بگیریم، بر هر یک از دوجمله‌ایهای x − ۱، x + ۱، x + ۲ و x − ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین، عبارت درجهٔ چهارم

$$f(x)=a(x-۱)(x+۱)(x+۲)(x-۳)-۱۲$$

در تقسیم بر هر یک از این دوجمله‌ایها، به باقی مانده‌ای برابر ۱۲− می‌رسد ؛ یعنی f(x)، همان چندجمله‌ای درجهٔ چهارم مورد نظر مسأله است که تنها یک ضریب نامعیّن (a) دارد. برای یافتن مقدار a، از شرط $f(۲)=۰$ استفاده می‌کنیم که، از آن جا، بسادگی به دست می‌آید :

$$-۱۲a-۱۲=۰\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین، چندجمله‌ای درجهٔ چهارم مطلوب، به این صورت است :

$$f(x)=-(x-۱)(x+۱)(x+۲)(x-۳)=$$
$$=-x^۴+x^۳+۷x-x-۱۸$$

مثال ۵. چندجمله‌ای f(x) از درجهٔ پنجم را بیابید، به شرطی که $f(x)+۲$ بر $(x+۲)^۳$ و $f(x)-۲$ بر $(x-۲)^۳$ بخش‌پذیر باشد.

اگر چشم بسته، چندجمله‌ای درجهٔ پنجم f(x) را به صورت :

$$f(x)=ax^۵+bx^۴+cx^۳+dx^۲+ex+f$$

در نظر بگیریم، پس از ماجراهایی (که خود به اندازهٔ کافی

ملال‌آورند)، به دستگاهی از شش معادلهٔ خطی شش مجهولی می‌رسیم که، حلّ آن، به محاسبه‌ای سنگین و خسته کننده نیاز دارد.

ولی اگر از مفهوم مشتق و سپس، تابع اولّیه استفاده کنیم، یک چند جمله‌ای درجهٔ پنجم با دو ضریب نامعین به دست می‌آید.

وقتی $f(x)+۲$ بر $(x+۲)^۳$ بخش‌پذیر باشد، مشتق آن، یعنی $f'(x)$، بر $(x+۲)^۲$ بخش‌پذیر است. همچنین، از آن جا که $f(x)-۲$ بر $(x-۲)^۳$ بخش‌پذیر است، $f'(x)$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر می‌شود. به این ترتیب، $f'(x)$ بر $(x+۲)^۲$ و بر $(x-۲)^۲$، یعنی بر حاصل ضرب آنها $(x^۲-۴)^۲$ بخش‌پذیر است ($x+۲$ و $x-۲$ نسبت به هم اولّند). در نتیجه $f'(x)$ به این صورت است:

$$f'(x)=a(x^۴-۸x^۲+۱۶)$$

(چون f(x) از درجهٔ پنجم است، مشتق آن از درجهٔ چهارم درمی‌آید). اکنون، برای پیدا کردن f(x)، باید تابع اولّیهٔ f'(x) را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\int a(x^۴-۸x^۲+۱۶)dx=$$
$$=a(\frac{۱}{۵}x^۵-\frac{۸}{۳}x^۳+۱۶x)+b$$

(b مقداری است ثابت). می‌بینیم برای f(x)، تنها دو ضریب نامعیّن وجود دارد: a و b.

برای پیدا کردن a و b، از این دو شرط استفاده می‌کنیم:

$$f(-۲)+۲=۰\ ,\ \ f(۲)-۲=۰$$

در نتیجه، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} a(-\frac{۳۲}{۵}+\frac{۶۴}{۳}-۳۲)+b+۲=۰ \\ a(\frac{۳۲}{۵}-\frac{۶۴}{۳}+۳۲)+b-۲=۰ \end{cases}$$

از مجموع این دو معادله، به دست می‌آید: $b=۰$ و، سپس، از معادلهٔ دوم، مقدار a محاسبه می‌شود: $a=\frac{۱۵}{۱۲۸}$. از آن‌جا:

$$f(x)=\frac{۱}{۱۲۸}(۳x^۵-۴۰x^۳+۲۴۰x)$$

مثال ۶. f(x) از درجهٔ پنجم را بیابید؛ به شرطی که بدانیم $f(x+۲)-۲$ بر $(x-۲)^۲$ و $f(x-۲)+۲$ بر $(x+۲)^۲$ بخش‌پذیر است.

این مسأله، با اندکی دقت، به مسأله‌ای شبیه مسألهٔ قبل تبدیل می‌شود. $f(x+۲)-۲$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر است. اگر $x-۲=y$ بگیریم، آن وقت به معنای آن است که $f(y)-۲$ بر $(y-۴)^۲$، یعنی $f(x)-۲$ بر $(x-۴)^۲$ بخش‌پذیر است. همچنین، از شرط دوم مسأله نتیجه می‌شود که $f(x)+۲$ بر $(x+۴)^۲$ بخش‌پذیر است. دنبالهٔ حل شبیه حلّ مثال ۵ است.



تفریح اندیشه ۱

۵ = ۶ ۶ ۶ ۶
۶ = ۶ ۶ ۶ ۶
۸ = ۶ ۶ ۶ ۶
۳۰ = ۶ ۶ ۶
۲۴ = ۶ ۶ ۶
۱۴۸ = ۶ ۶ ۶
۶۶ = ۶ ۶ ۶
۱۸۰ = ۶ ۶ ۶

در هر سطر، چگونه می‌توان تساوی را با قرار دادن علامتهای +، -، ×، : و ( ) بین رقمهای ۶، برقرار ساخت؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

لگاریتم



● احمد قندهاری

جان نپر[1] ریاضیدان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی، کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتمها» منتشر کرد که فوق‌العاده مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفت.

جدول این کتاب، بعدها به «جدول لگاریتم» معروف شد.

«نپر» برای محاسبات این کتاب حدود بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم «نپر» عدد «e» است که مقدار آن از سری $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ به دست می‌آید (مقدار تقریبی این عدد (۲/۷۱۸۲) است). به همین علت، لگاریتم ابداعی یا اختراعی «نپر» را لگاریتم «نپری» یا «نپرین» گویند و آن را به صورت loge یا Ln نشان می‌دهند.

یک سال پس از انتشار کتاب «نپر»، یک معلم ریاضی در انگلستان به نام «بریگز»[2] دست از کار خود کشید و به اسکاتلند نزد «نپر» رفت. ضمن تشویق و قدردانی، از او خواست که جدول لگاریتمی بر مبنای (۱۰) را بنویسد. نپر از این پیشنهاد استقبال کرد، ولی عمرش کفاف نداد که آن را به پایان برساند.

«بریگز» کار نیمه‌تمام «نپر» را ادامه داد تا در سال ۱۶۲۴ میلادی، جدول لگاریتم دهگانی را به پایان رساند و منتشر کرد. این جدول بعدها به وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

بخش اوّل: تعریف لگاریتم و فرمولهای آن

کلیه اعدادی که در این مقاله مطرح می‌شود اعداد حقیقی است.

I. تعریف لگاریتم:

فرض می‌کنیم عدد (a) مثبت و مخالف یک باشد.

اگر اعدادی مانند (N) و (x) داشته باشیم ؛ به طوری که $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف، می‌گوییم لگاریتم (N) در مبنای (a)مساوی (x) است :

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a^N = x$$

عدد (x) را حاصل لگاریتم و عدد (a) را مبنا و عدد (N) را آنتی‌لگاریتم یا عدد ما به ازاء گویند.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد، مثبت است، پس a^x و در نتیجه N همواره مثبت است. به همین علت است که می‌گوییم اعداد منفی و صفر، لگاریتم ندارند.

مثال : از تساوی $\log_{\sqrt[4]{5}}^{5\sqrt{5}} = x$ مقدار x را بیابید.

حل: بنا به تعریف می‌توان نوشت :

$$5\sqrt{5} = (\sqrt[4]{5})^x$$

دوطرف برابری را به توان (۴) می‌رسانیم :

$$5^4 \times 5^2 = 5^x$$

$$5^6 = 5^x \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

مثال : از تساوی $\log_{a^2\sqrt[3]{a}} N = \frac{9}{14}$ مقدار N را بیابید.

حل:

$$N = (a^2\sqrt[3]{a})^{\frac{9}{14}} = (a^{18}a^3)^{\frac{1}{14}} = (a^{21})^{\frac{1}{14}} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = a\sqrt{a}}$$

مثال : از تساوی $\log_a(2+\sqrt{3}) = -1$ ، مقدار a را بیابید.

حل:

$$(2+\sqrt{3}) = a^{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2-\sqrt{3}}$$

II. فرمولهای لگاریتم:

هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد، شرط مثبت و مخالف یک بودن را داراست.

$$1 = a^0 \Rightarrow \boxed{\log_a^1 = 0} \qquad (1)$$

$$a = a^1 \Rightarrow \boxed{\log_a^a = 1} \qquad (2)$$

اگر $M = a^x$ و $N = a^y$ ، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\log_a N = y \ , \ \log_a M = x$$

$$M.N = a^x.a^y \Rightarrow MN = a^{x+y}$$

$$\Rightarrow \log_a MN = x+y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N} \qquad (3)$$

تعمیم :

$$\log_a M.N.K... = \log_a M + \log_a N + \log_a K + ...$$

مثال:

$$\log_4 5\times 11\times 17 = \log_4 5 + \log_4 11 + \log_4 17$$

می‌توان نوشت : اگر $M = a^x \Rightarrow \log_a M = x$

اگر $N = a^y \Rightarrow \log_a N = y$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x-y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \qquad (4)$$

مثال: $\log_3 \frac{625}{11} = \log_3 625 - \log_3 11$

نتیجه‌ای از فرمول (۴)

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N \Rightarrow \boxed{\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N} \qquad (5)$$

$$N = a^x \Rightarrow \log_a N = x$$

$x \neq 0$ یا $N \neq 1$

فرض می‌کنیم $\log_{a^p}^{N^m} = kx$ ، می‌خواهیم k را بیابیم.

$$\log_{a^p}^{N^m} = kx \Rightarrow N^m = (a^p)^{kx} \Rightarrow N^m = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow (a^x)^m = a^{pkx} \Rightarrow a^{mx} = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow mx = pkx \Rightarrow m = pk \Rightarrow \boxed{k = \frac{m}{p}}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p}^{N^m} = kx \Rightarrow \log_{a^p}^{N^m} = \frac{m}{p}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{a^p}^{N^m} = \frac{m}{p}\log_a N} \qquad (6)$$

مثال:

$$\log_{128} 64 = \log_{2^7} 2^6 = \frac{6}{7}\log_2 2 = \frac{6}{7}$$

نتایج فرمول (۶)

I) $\log_a N^m = m\log_a N$

II) $\log_{a^p}^{N} = \frac{1}{p}\log_a N$

III) $\log_{a^m}^{N^m} = \log_a N$

مثال:

$$\log_a N = \log_{a^2} N^2 = \log_{a^3} N^3 = ... = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{N}$$

$$= \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{N} = ...$$

IV) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{N} = \log_{a^{-1}} N^{-1} = \log_a N$

V) $\log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[m]{N} = \log_{a^{\frac{1}{p}}} N^{\frac{1}{m}} = \frac{p}{m}\log_a N$

اگر $\log_b a = x \ , \ \log_a b = y$

آن‌گاه: $a = b^x \ , \ b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x$

$$\Rightarrow a = a^{xy}$$

$$\Rightarrow xy = ۱ \Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_a b = ۱} \qquad (۷)$$

نتایج فرمول (۷)

$$\text{I)}\ \log_b a \times \log_a b = ۱ \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}} \qquad (۸)$$

$$\text{II)}\ \log_{MN} a = \frac{۱}{\log_a MN} = \frac{۱}{\log_a M + \log_a N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{MN} a = \frac{۱}{\log_a M + \log_a N}} \qquad (۹)$$

مثال: ثابت کنید :

$$\log_{\sqrt{۲۴}} \sqrt{۲} = \frac{۱}{۳ + \log_۲ ۳}$$

حل:

$$\log_{\sqrt{۲۴}} \sqrt{۲} = \log_{۲۴} ۲ = \frac{۱}{\log_۲ ۲۴} = \frac{۱}{\log_۲ ۲^۳ \times ۳}$$

$$= \frac{۱}{۳\log_۲ ۲ + \log_۲ ۳} = \frac{۱}{۳ + \log_۲ ۳}$$

فرض می‌کنیم :

$$\log_b a = x \ ,\ \log_c b = y \ ,\ \log_c a = z$$

$$\Rightarrow a = b^x \ ,\ b = c^y \ ,\ a = c^z \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} a = b^x \\ b = c^y \end{cases} \Rightarrow a = (c^y)^x \Rightarrow a = c^{xy} \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$c^{xy} = c^z \Rightarrow xy = z$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_c b = \log_c a} \qquad (۱۰)$$

تعمیم :

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \ldots \times \log_n k = \log_n a$$

مثال:

$$\log_{۱۰} ۲۵ \times \log_۵ ۱۰ = \log_۵ ۲۵ = \log_۵ ۵^۲ = ۲\log_۵ ۵ = ۲$$

نتیجه‌ای از دستور (۱۰) :

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

اگر به جای c عدد (۱۰) را قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log a}{\log b}} \qquad (۱۱)$$

توجه : اگر مبنا عدد (۱۰) باشد، آن را نمی‌نویسند.

مثال:

$$\log_{۱۰۰۰} ۱۰۰۰۰ = \frac{\log ۱۰۰۰۰}{\log ۱۰۰۰} = \frac{\log ۱۰^۴}{\log ۱۰^۳}$$

$$= \frac{۴\log ۱۰}{۳\log ۱۰} = \frac{۴}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m \end{array}\right\} \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$$

$$\Rightarrow \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log b(\log_c x))$$

داشتیم $\log_a p = m$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}}} \qquad (۱۲)$$

مثال: $\log_{\sqrt{۳}}(\log_{\sqrt[۳]{۴}} \log_{\sqrt[۴]{۸}} x) = ۲$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۴]{۸}^{\sqrt[۳]{۴}^{\sqrt{۳}^۲}} \quad \Rightarrow \boxed{x = ۸}$$

اگر $\log_a N = p \ ,\ p = \log_a N$

$$\Rightarrow N = a^p \Rightarrow \boxed{N = (a)^{\log_a^N}} \qquad (۱۳)$$

به‌طور کلی داریم :

$$\boxed{(x)^{\log_a^y} = (y)^{\log_a^x}} \qquad (۱۴)$$

زیرا اگر از طرفین در مبنای a لگاریتم بگیریم، خواهیم داشت :

$$\log_a^y . \log_a^x = \log_a^x . \log_a^y$$

مثال: $(۵)^{\log x} = (x)^{\log ۵}$

مثال: $(۱۰)^{\log x} = x$

فرض می‌کنیم $a > ۱$ ، با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت :

$$\text{I)}\ \log_a^N > ۰ \Rightarrow N > a^۰ \Rightarrow N > ۱$$

$$\text{II)}\ \log_a^N < ۰ \Rightarrow ۰ < N < a^۰ \Rightarrow ۰ < N < ۱$$

III) $\log_a^N > ۱ \Rightarrow N > a$

IV) $\log_a^N < ۱ \Rightarrow ۰ < N < a$

V) $\log_a^N > -۱ \Rightarrow N > a^{-۱} \Rightarrow N > \frac{۱}{a}$

VI) $\log_a^N < -۱ \Rightarrow ۰ < N < a^{-۱} \Rightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$

حال فرض می‌کنیم $۰ < a < ۱$ و می‌دانیم $\log a$ عددی است منفی، در این صورت خواهیم داشت :

$$(I)' \quad \log_a^N > ۰ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۰ \Rightarrow \log N < ۰$$

$$\Rightarrow ۰ < N < ۱$$

$$(II)' \quad \log_a^N < ۰ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۰ \Rightarrow \log N > ۰$$

$$\Rightarrow N > ۱$$

$$(III)' \quad \log_a^N > ۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۱ \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow ۰ < N < a$$

$$(IV)' \quad \log_a^N < ۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۱ \Rightarrow \log N > \log a$$

$$\Rightarrow N > a$$

$$(V)' \quad \log_a^N > -۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -۱$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a \Rightarrow \log N < \log a^{-۱}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Rightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$$

$$(VI)' \quad \log_a^N < -۱ \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -۱$$

$$\Rightarrow \log N > -\log a \Rightarrow \log N > \log a^{-۱}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Rightarrow N > \frac{۱}{a}$$

مثال : حدود x را بیابید. $\log(۲x - ۳) < ۰$

بنابه رابطه (II) داریم :

$$۰ < ۲x - ۳ < ۱ \Rightarrow ۳ < ۲x < ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۲$$

مثال : $\log_{\frac{۱}{۴}}^{(۲x-۳)} > ۰$

بنابه رابطه $(I)'$ داریم :

$$۰ < ۲x - ۳ < ۱ \Rightarrow ۳ < ۲x < ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۲$$

مثال : $\log_{\frac{۱}{۶}}(۴x - ۶) < -۱$

بنابه رابطه $(VI)'$ داریم :

$$\Rightarrow ۴x - ۶ > (\frac{۱}{۶})^{-۱}$$

$$۴x - ۶ > ۶ \Rightarrow ۴x > ۱۲ \Rightarrow x > ۳$$

مثال : $\log_{\frac{۱}{۸}}(۲x - ۸) > -۱$

بنا به رابطه $(V)'$ داریم :

$$۰ < ۲x - ۸ < (\frac{۱}{۸})^{-۱} \Rightarrow ۰ < ۲x - ۸ < ۸$$

$$۸ < ۲x < ۱۶ \Rightarrow ۴ < x < ۸$$

بخش دوم: می‌دانیم :

$$۱۰۰ = ۱۰^۲ \Rightarrow \log ۱۰۰ = ۲$$

$$۱۰۰۰ = ۱۰^۳ \Rightarrow \log ۱۰۰۰ = ۳$$

اگر عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ باشد، به‌طور مسلم لگاریتم آن بین ۲ و ۳ است.

مثلاً : $\log ۲۰۰ = ۲/۳۰۱۰۳$

عدد (۲) «مفسّر» و عدد اعشاری ۰/۳۰۱۰۳ را «مانتیس» یا «قسمت اعشاری» گویند که از جدول لگاریتم به‌دست می‌آید.

مفسّر از لحاظ علامت، مثبت یا منفی است و ممکن است صفر هم باشد ؛ ولی مانتیس همواره مثبت است.

اگر مبنای لگاریتم(۱۰) باشد ؛ به طوری که قبلاً گفته شد، مبنا را نمی‌نویسند و این لگاریتم را لگاریتم اعشاری یا لگاریتم «دهگانی» گویند.

در بحث زیر، مبنای لگاریتم ۱۰ و $N > ۱$ است.

مفسّر:

اگرمفسّر مثبت یا صفر باشد، چنانچه یک واحد به آن اضافه

کنیم، تعداد ارقام عدد آنتی لگاریتم به دست می‌آید.

اگر مفسّر منفی باشد، قدر مطلق آن نشان‌دهندهٔ تعداد صفرهای سمت چپ عدد است، با احتساب صفر ممیّز.

مثال:

N عددیست پنج رقمی ⇐ $\log N = ۴/۲۵۱$ اگر

$\log N = \overline{۳}/۲۵۱ \Rightarrow$ اگر

در سمت چپ عدد N با احتساب صفر ممیز سه صفر وجود دارد.

مثال: $\log ۰/۱ = -۱$

$\log ۰/۰۱ = -۲$

$\log ۰/۰۰۱ = -۳$

کلگاریتم: لگاریتم $\frac{۱}{N}$ را کلگاریتم N گویند، پس

$-\log N = \operatorname{co}\log N \ , \ -\operatorname{co}\log N = \log N$

طرز تعیین cologN از روی logN

(+۱) را به مفسّر logN اضافه می‌کنیم، پس از جمع جبری، علامت آن را عوض می‌کنیم. در مورد قسمت اعشاری: اوّلین رقم با معنای سمت راست قسمت اعشاری را از (۱۰) و بقیه را از (۹) کم می‌کنیم.

مثال: $\operatorname{co}\log N = ? \ , \ \log N = \overline{۲}/۲۱۴۵۰$

$\operatorname{co}\log N = ۱/۷۸۵۵$

سؤال: اگر cologN را داشته باشیم، logN چگونه به دست می‌آید.

پاسخ: به همان طریقی که از روی logN ، cologN را به دست آوردیم:

مثال: $\operatorname{co}\log N = ۴/۲۱۶۰ \Rightarrow \log N = \overline{۵}/۷۸۴$

۱. جمع لگاریتمها:

برای جمع چند لگاریتم، مانتیس آنها را باهم جمع می‌کنیم، سپس واحدهای صحیحی که به دست می‌آید، با مفسّرها جمع جبری می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{matrix}\log x = ۲/۸۵۱۲ \\ \log y = \overline{۵}/۹۳۲۰\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\log x + \log y = ۲/۸۵۱۲ + \overline{۵}/۹۳۲۰ = \overline{۲}/۷۸۳۲$$

۲. تفریق لگاریتمها:

برای تفریق لگاریتمها، مفروق را به کلگاریتم تبدیل می‌کنیم، سپس به جای عمل تفریق، عمل جمع را انجام می‌دهیم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = \overline{۴}/۶۳۹۲ \\ \log y = ۲/۱۸۶۰\end{cases} \Rightarrow \log x - \log y =$$

$$\log x + \operatorname{co}\log y = \overline{۴}/۶۳۹۲ + \overline{۳}/۸۱۴۰ = \overline{۶}/۴۵۳۲$$

۳. ضرب عدد m در logx

الف: اگر m مثبت باشد، عمل ضرب معمولی انجام می‌گیرد؛ با توجه به این که مانتیس همواره مثبت است.

مثال:

$$\log x = \overline{۲}/۸۱۴۰ \Rightarrow ۵\log x = ?$$

$$۵\log x = ۵(\overline{۲}/۸۱۴۰) = ۵(-۲ + ۰/۸۱۴۰)$$

$$= -۱۰ + ۴/۰۷ = \overline{۶}/۰۷$$

ب: اگر عدد m منفی باشد، در این صورت cologx را در |m| ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$\log x = ۱/۱۲۴۳ \Rightarrow -۵\log x = ?$$

$$-۵\log x = ۵(\operatorname{co}\log x) = ۵(\overline{۲}/۸۷۵۷)$$

$$= ۵(-۲ + ۰/۸۷۵۷) = -۱۰ + ۴/۳۷۸۵ = \overline{۶}/۳۷۸۵$$

۴. تقسیم logx بر عدد k

الف: اگر k مثبت و مفسّر، logx، مثبت باشد، در این صورت، با تقسیم معمولی اعشاری، جواب به دست می‌آید.

مثال:

$$\log x = ۲/۱۲۴۵ \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{۲/۱۲۴۵}{۳} = ۰/۷۰۸۱۶$$

ب: اگر k مثبت و مفسّر، logx منفی باشد؛ ولی عدد مفسّر به عدد k بخش پذیر باشد بازهم تقسیم به صورت معمولی انجام می‌شود.

مثال:

$$\log x = \bar{۶}/۸۱۴۱ \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{\bar{۶}/۸۱۴۱}{۳} = \bar{۲}/۲۷۱۳$$

ج : اگر k مثبت و مفسّر logx منفی باشد ؛ ول عدد مفسّر بر kبخش‌پذیر نباشد، در این صورت، بزرگترین عدد منفی را به مفسّر اضافه می‌کنیم تا بر عدد k بخش‌پذیر شود و در عین حال، همان عدد با علامت مثبت را به مانتیس اضافه می‌کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم :

مثال:

$$\log x = \bar{۲}/۱۲۲۵ \Rightarrow \frac{\log x}{۵} = \frac{\bar{۲}/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۲+۰/۱۲۲۵}{۵} = \frac{-۲-۳+۳+۰/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۵+۳/۱۲۲۵}{۵} = -۱+۰/۶۲۴۵$$

$$= \bar{۱}/۶۲۴۵$$

د : اگر k منفی باشد، در این صورت، به جای تقسیم logx بر عدد منفی k، cologx را بر |k| تقسیم می‌کنیم، که در این وضعیت، عملیات به حالتهای گفته شده تبدیل می‌شود.

مثال:

$$\log x = ۲/۲۳۸۶ \Rightarrow \frac{\log x}{-۳} = \frac{-\log x}{۳}$$

$$= \frac{\mathrm{co}\log x}{۳} = \frac{\bar{۳}/۷۶۱۴}{۳} = \bar{۱}/۲۵۳۸$$

۵. ضرب یا تقسیم دو لگاریتم

الف : اگر مفسّرهای هر دو لگاریتم مثبت باشد، اعمال ضرب یا تقسیم، همان اعمال ضرب یا تقسیم دو عدد اعشاری در یکدیگر یا بر یکدیگر است.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = ۲/۲۳۴۵\\ \log y = ۳/۰۱۲۴\end{cases} \Rightarrow$$

$$\log x . \log y = ۲/۲۳۴۵ \times ۳/۰۱۲۴ = ۶/۷۳۱۲$$

ب : اگر مفسّرهای هر دو لگاریتم منفی باشد، کلگاریتمهای آنها را در هم ضرب یا تقسیم می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = \bar{۱}/۴۱۲۳\\ \log y = \bar{۴}/۲۱۴۵\end{cases} \Rightarrow \log x . \log y$$

$$= \mathrm{co}\log x . \mathrm{co}\log y = (۰/۵۸۷۷)(۳/۷۸۵۵)$$

$$= ۲/۲۲۴۷$$

ج : اگر یکی از مفسّرها مثبت و دیگری منفی باشد، به جای آن که مفسّرش منفی است، کلگاریتم آن را قرار می‌دهیم. سپس از حاصل‌ضرب یا تقسیم، کلگاریتم می‌گیریم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = ۲/۲۱۴۵\\ \log y = \bar{۳}/۴۱۲۲\end{cases} \Rightarrow \log x . \log y$$

$$= -(\log x)(\mathrm{co}\log x) = -(۲/۲۱۴۵)(۲/۵۸۷۸)$$

$$= -(۵/۷۳۰۷) = \bar{۶}/۲۶۹۳$$

توجه : $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲$

$\Rightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲$ یا $\log ۲ = ۱ - \log ۵$

مسائل:

مسألهٔ ۱ ـ اگر $x \neq y$ و داشته باشیم $\log_y^x = \log_x^y$ ، ثابت کنید $xy = ۱$.

حل:

$$\log_y^x = \log_x^y \Rightarrow \log_y^x = \frac{۱}{\log_y^x} \Rightarrow (\log_y^x)^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \log_y^x = \pm ۱ \Rightarrow x = y^{\pm ۱} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y & \text{غ ق ق} \\ x = y^{-۱} \Rightarrow x = \frac{۱}{y} \Rightarrow \boxed{xy = ۱} \end{cases}$$

مسألهٔ ۲ ـ اگر $۳\log x = ۲$ ، x بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$$۳\log x = ۲ \Rightarrow \log x^۳ = \log ۱۰۰$$

$\Rightarrow x^۳ = ۱۰۰ \Rightarrow ۴ < x < ۵$

مسألهٔ ۳ ـ از رابطهٔ $x \times ۵^{\log a} = a$ ، مقدار (x) را بیابید.

$x = \frac{a}{۵^{\log a}} = \frac{a}{۵^{\log a}} = a^{۱-\log ۵} = a^{\log ۲} \Rightarrow$

$x = a^{\log ۲}$

مسألهٔ ۴ ـ مقدار عددی $(۱۰)^{(۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲)}$ را حساب کنید.

$(۱۰)^{(۲\log\sqrt[۴]{۶}-\log ۲)} = (۱۰)^{\log\sqrt{۶}-\log\sqrt{۲}} =$

$(۱۰)^{\log\frac{\sqrt{۶}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$

مسألهٔ ۵ ـ حدود |x| را بیابید. اگر

$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲-۴) \ge -۱$

$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲-۴)\ge -۱ \Rightarrow ۰ < x^۲-۴ \le (\frac{۱}{۵})^{-۱}$

$\Rightarrow ۰<x^۲-۴\le ۵ \Rightarrow ۴<x^۲\le ۹$

$\Rightarrow ۲<|x|\le ۳$

مسألهٔ ۶ ـ به ازای چه مقادیر a، معادلهٔ :

$x^۲ - ۲(۱+\log a)x + ۱ - \log^۲ a = ۰$

دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد؟

$\frac{c}{a}<۰ \Rightarrow \frac{۱-\log^۲ a}{۱} < ۰ \Rightarrow$

$۱-\log^۲ a<۰ \Rightarrow \log^۲ a > ۱ \Rightarrow \begin{cases}\log a > ۱ \\ \log a < -۱\end{cases}$ یا

$\Rightarrow \begin{cases} a>۱۰ \\ ۰<a<\frac{۱}{۱۰}\end{cases}$ یا

مسألهٔ ۷ ـ اگر $\log_۹^۸ = a$ ، عبارت

$\log_{۲۷}۱۶ \times \log_۳ ۲ = ?$

$\log_۹^۸ = a \Rightarrow \log_{۳^۲} ۲^۳ = a \Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_۳ ۲ = a$

$\Rightarrow \log_۳ ۲ = \frac{۲}{۳}a$

$\log_{۲۷}۱۶\times\log_۳ ۲ = \log_{۳^۳}۲^۴ \times \log_۳ ۲ =$

$\frac{۴}{۳}\log_۳ ۲ \times \log_۳ ۲ = \frac{۴}{۳}(\log_۳ ۲)^۲ =$

$\frac{۴}{۳}(\frac{۲}{۳}a)^۲ = \frac{۴}{۳}\times\frac{۴}{۹}a^۲ = \frac{۱۶}{۲۷}a^۲$

مسألهٔ ۸ ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$ ، در سمت چپ عدد $(\frac{۱}{۴})^{۱۰}$ چند صفر با احتساب صفر ممیّز وجود دارد.

$\Rightarrow \text{co}\log ۲ = \bar{۱}/۶۹۸۹۷$

$(\frac{۱}{۴})^{۱۰} = (۲^{-۲})^{۱۰} = ۲^{-۲۰}$

$\log ۲^{-۲۰} = -۲۰\log ۲ = ۲۰(-\log ۲)$

$= ۲۰(\bar{۱}/۶۹۸۹۷) = ۲۰(-۱+۰/۶۹۸۹۷)$

$= -۲۰+۱۳/۹۷۹۴ = \bar{۷}/۹۷۹۴$

پس در سمت چپ $(۴)^{-۱۰}$، با احتساب صفر ممیّز، هفت صفر وجود دارد.

مسألهٔ ۹ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$۲۵^{\log x} = ۵ + ۴(x^{\log ۵})$

$۵^{۲\log x} = ۵+۴(۵^{\log x})$ فرض می‌کنیم $۵^{\log x} = y$

$y^۲ = ۵+۴y \Rightarrow y^۲-۴y-۵=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} y=-۱ & \text{غ ق ق} \\ y=+۵\end{cases}$

$۵^{\log x}=۵ \Rightarrow \log x = ۱ \Rightarrow \boxed{x=۱۰}$

مسألهٔ ۱۰ ـ اگر

$(۳)^{\frac{۱+۲+۳+۴+...+n}{n}} = (۴)^{\log_۲ ۹}$

مقدار n را بیابید.

$۱+۲+۳+۴+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

$\Rightarrow (۳)^{\frac{n(n+۱)}{۲n}} = (۴)^{\log_۴ ۸۱} \Rightarrow ۳^{\frac{n+۱}{۲}} = ۸۱$

$\Rightarrow ۳^{\frac{n+۱}{۲}} = ۳^۴ \Rightarrow \frac{n+۱}{۲} = ۴ \Rightarrow \boxed{n=۷}$

مسألهٔ ۱۱ ـ اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰۳$ ، عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ چند رقمی است؟

$$(۶۲۵)^{۱۰} = (۵^{۴})^{۱۰} = ۵^{۴۰} = (\frac{۱۰}{۲})^{۴۰}$$

$$\log(\frac{۱۰}{۲})^{۴۰} = ۴۰(\log\frac{۱۰}{۲}) = ۴۰(۱ - \log ۲)$$

$$= ۴۰(۱ + \mathrm{co}\log ۲) = ۴۰(۱ + \bar{۱}/۶۹۸۹۷)$$

$$= ۴۰(۰/۶۹۸۹۷) = ۲۷/۹۵۸۸$$

چون مفسّر (۲۷) است، پس عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ عددی است بیست و هشت رقمی.

مسألهٔ ۱۲ ـ حدود تغییرات x را در تابع :

$$y = \log_a(\log_a(\log_a x))$$

را با شرط $۰ < a < ۱$ بیابید.

$$\log_a(\log_a x) > ۰ \Rightarrow ۰ < \log_a x < ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_a x < ۱ \Rightarrow x > a \\ \log_a x > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < a$$

مسألهٔ ۱۳ ـ معادلهٔ $x + (۲۴)^{\log x} = (۲۶)^{\log x}$ را حل کنید.

$$x = ۱۰^{\log x}$$

دوطرف معادله را بر $(۲۶)^{\log x}$ تقسیم می‌کنیم.

$$(۱۰)^{\log x} + (۲۴)^{\log x} = (۲۶)^{\log x}$$

$$(\frac{۱۰}{۲۶})^{\log x} + (\frac{۲۴}{۲۶})^{\log x} = ۱ \Rightarrow$$

$$(\frac{۵}{۱۳})^{\log x} + (\frac{۱۲}{۱۳})^{\log x} = ۱$$

اعداد $\frac{۵}{۱۳}$ و $\frac{۱۲}{۱۳}$ را درنظر می‌گیریم. چون

$$(\frac{۵}{۱۳})^{۲} + (\frac{۱۲}{۱۳})^{۲} = ۱$$

پس $\log x = ۲$ در نتیجه $\boxed{x = ۱۰۰}$

مسألهٔ ۱۴ ـ بیشترین مقدار $(\log_۳ ۲)^{\sin\alpha}$ چیست؟

$$۰ < \log_۳ ۲ < ۱ \;,\; -۱ \le \sin\alpha \le ۱ \Rightarrow$$

$$\mathrm{Max}(\log_۳ ۲)^{\sin\alpha} = (\log_۳ ۲)^{-۱} = \frac{۱}{\log_۳ ۲} = \log_۲ ۳$$

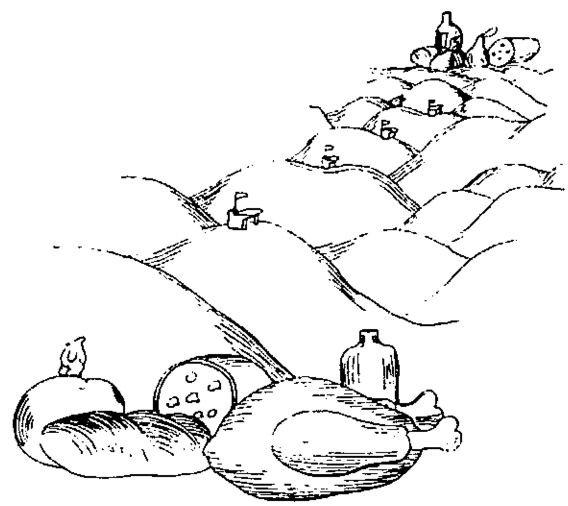
یادداشتها

۱. Nepier یا Neper

۲. Briggs



تفریح اندیشه ۲



مسافری تصمیم می‌گیرد تنها و بدون هیچ کمکی از مسیری بگذرد که هیچ‌گونه مواد غذایی در آن یافت نمی‌شود. در طول این مسیر که ۱۰۰ کیلومتر است فقط پناهگاههایی وجود دارد که به فاصلهٔ ۲۰ کیلومتر از هم قرار دارند. او فاصله هر ۲۰ کیلومتر را در یک شبانه‌روز می پیماید.

مسافر هر بار آذوقهٔ بیشتر از ۳ روز را نمی‌تواند با خودش ببرد و فقط می‌تواند آذوقه‌ها را در پناهگاهها ذخیره کند.

چند روز لازم است تا مسافر این مسیر لم‌یزرع را بپیماید؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

مکان هندسی

(قسمت پانزدهم)

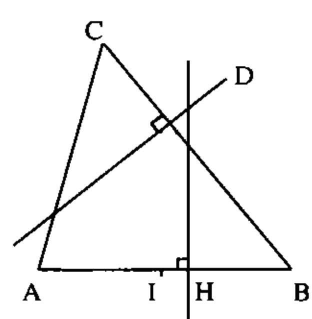
● محمدهاشم رستمی

درشماره قبل درباره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطه ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k ($k>0$) باشد، مطالبی را ملاحظه کردید، اینک دنباله مقاله را به صورت زیر می‌آوریم:

مثال ۱. سه نقطهٔ همصفحهٔ A، B و C داده شده است. نقطه‌ای از این صفحه را مشخص کنید که از دو نقطهٔ B و C به یک فاصله باشد و تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت K ($K>0$) باشد.

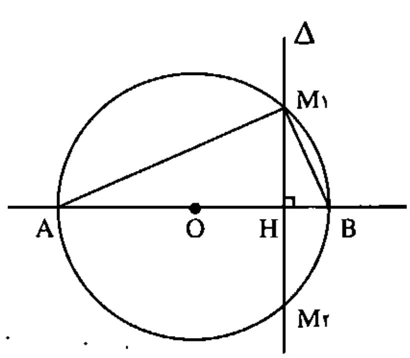
حل. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ ثابت B و C واقع در آن صفحه، به یک فاصله است، خط D عمودمنصّف پاره‌خط BC است؛ این خط را رسم می‌کنیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت K است، خط راستی مانند Δ است که بر خط AB در نقطهٔ H عمود است؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $IH=\frac{K}{2A}$ است.

این خط را نیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد دو خط D و Δ جواب مسأله است.



اگر سه نقطهٔ A، B و C همخط باشند، مسأله جواب ندارد و در صورتی که این سه نقطه روی یک خط راست نباشند، مسأله تنها یک جواب دارد.

مثال ۲. دایرهٔ C(O,R) و قطر AB از این دایره داده شده است. نقطهٔ M_1 را روی این دایره، چنان بیابید که $MA^2-MB^2=K$ باشد. درتعداد جوابهای مسأله بحث کنید.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ M که برای آن $MA^2-MB^2=K$ است، خط راستی مانند Δ عمود بر خط AB درنقطهٔ H است، به قسمی که $OH=\frac{K}{2AB}$ و در این مسأله $OH=\frac{K}{2R}$ است. این خط را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد

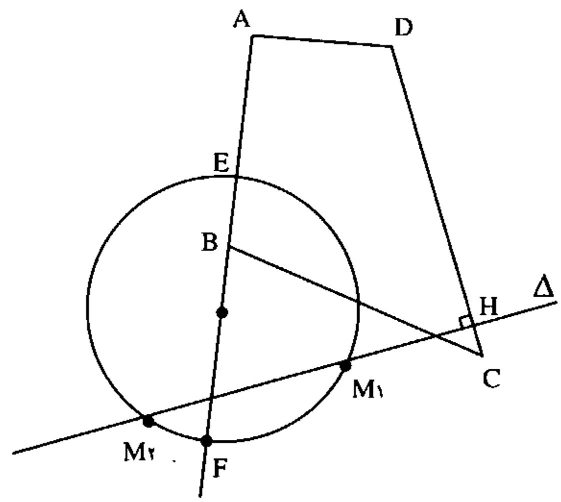
این خط با دایرهٔ داده شده، جواب مسأله است (وسط پاره‌خط AB نقطهٔ O مرکز دایره است).

بحث. ۱. اگر $OH < R$ یعنی $\frac{K}{2R} < R$ یا $K < 2R^2$ باشد، مسأله دو جواب دارد.

۲. اگر $OH = R$ یعنی $\frac{K}{2R} = R$ یا $K = 2R^2$ باشد، مسأله تنها یک جواب دارد.

۳. اگر $OH > R$ یعنی $\frac{K}{2R} > R$ یا $K > 2R^2$ باشد، مسأله جواب ندارد.

مثال ۳. چهارضلعی ABCD مفروض است. نقطه‌ای در صفحهٔ این چهارضلعی بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K_1 و تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ C و D برابر K_2 باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت K_1 می‌باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K_1 تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M که برای آن $MC^2 - MD^2 = K_2$ است، خط راستی مانند Δ عمود بر خط CD، در نقطه‌ای مانند H است؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط CD باشد، $IH = \frac{K_2}{2CD}$ است.

این خط را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد دایرهٔ آپولونیوس و خط Δ جواب مسأله است. بر حسب نوع چهارضلعی و مقدارهای K_1 و K_2 در تعداد جوابها می‌توان بحث کرد.

مثال ۴. دو نقطه $A(3,-1)$ و $B(-2,4)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۵، یعنی $MA^2 - MB^2 = 5$ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، خواهیم داشت:

$$A(3,-1), B(-2,4), M(x,y), MA^2 - MB^2 = 5 \Rightarrow$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 - (x+2)^2 - (y-4)^2 = 5 \Rightarrow$$
$$-10x + 10y - 15 = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

همان‌طوری که دیده می‌شود، مکان هندسی خواسته شده، یک خط راست است، که بر خط AB عمود است؛ زیرا اگر این خط را Δ بنامیم، داریم:

$$m/\Delta = 1 \;,\; m/AB = \frac{4+1}{-2-3} = 1 \Rightarrow m/\Delta \cdot m/AB = -1$$
$$\Rightarrow \Delta \perp AB$$

اگر نقطهٔ برخورد Δ با خط AB یعنی نقطهٔ H را به دست آوریم، با فرض این که I وسط پاره‌خط AB باشد، درستی رابطهٔ $IH = \frac{5}{2AB}$ نیز قابل اثبات است.

مثال ۵. روی منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x-4}{x+2}$ نقطه‌ای بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(2,5)$ برابر ۸ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت ۸ باشد، خطی است راست عمود بر خط AB. نقطه یا نقطه‌های برخورد این خط با منحنی داده شده، جواب مسأله است. برای به‌دست آوردن معادله مکان هندسی موردنظر، فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. با توجه به این که $A(-2,1)$ و $B(2,5)$ است، داریم:

$$MA^2 - MB^2 = 8 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 - (x-2)^2 -$$
$$(y-5)^2 = 8 \Rightarrow 8x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$
$$\Rightarrow y = -x + 4$$

$$\begin{cases} y=-x+۴ \\ y=\dfrac{x-۴}{x+۲} \end{cases} \Rightarrow -x+۴=\dfrac{x-۴}{x+۲} \Rightarrow$$

$$(x-۴)(x+۲+۱)=۰ \Rightarrow x=۴\,,\, x=-۳ \Rightarrow$$

نقطه‌های جواب مسأله $M_۱\left|\begin{matrix} x=۴ \\ y=۰ \end{matrix}\right.$ $\quad M_۲\left|\begin{matrix} x=-۳ \\ y=۷ \end{matrix}\right.$

مثال ۶. سه نقطهٔ $A(۳,۰)$ ، $B(۰,۲)$ و $C(-۱,-۳)$ داده شده است. نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B، برابر ۳۹ و تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C، برابر ۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳۹ باشد، دایره‌ای است به مرکز وسط AB. برای پیدا کردن معادلهٔ این دایره، فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. داریم:

$$M(x,y)\ ,\ A(۳,۰)\ ,\ B(۰,۲)$$

$$MA^۲+MB^۲=۳۹ \Rightarrow (x-۳)^۲+y^۲+x^۲+(y-۲)^۲=۳۹$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۶x-۴y-۲۶=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۳x-۲y-۱۳=۰ \qquad (۱)$$

از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ C و B، برابر ۶ است، خط راستی بر عمود BC است. برای تعیین معادلهٔ این خط، فرض می‌کنیم $M'(x,y)$ یک نقطه از آن باشد. داریم:

$$M'(x,y)\text{ و } B(۰,۲) \text{ و } C(-۱,-۳)$$

$$M'C^۲-M'B^۲=۶$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۳)^۲-(x-۰)^۲-(y-۲)^۲=۶$$

$$\Rightarrow ۲x+۱۰y=۰ \Rightarrow x+۵y=۰ \qquad (۲)$$

حال نقطه یا نقطه‌های برخورد دو مکان هندسی (۱) و (۲) را که جوابهای مسأله است، به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۳x-۲y-۱۳=۰ \\ x+۵y=۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-۵y)^۲+y^۲-۳(-۵y)-۲y-۱۳=۰ \Rightarrow$$

$$۲۶y^۲+۱۳y-۱۳=۰ \Rightarrow ۲y^۲+y-۱=۰ \Rightarrow$$

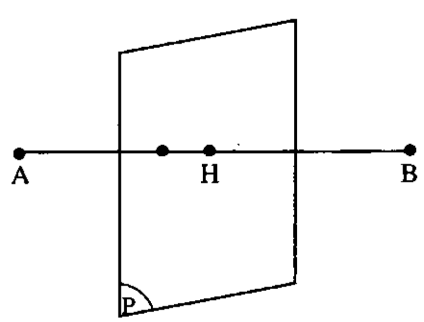
$$y=-۱\ ,\ y=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۵\ ,\ x=\frac{-۵}{۲}$$

نقطه‌های جواب مسأله $\Rightarrow M_۱\left|\begin{matrix} ۵ \\ -۱ \end{matrix}\right.$ و $M_۲\left|\begin{matrix} \frac{-۵}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{matrix}\right.$

نکته. می‌توان معادله مکانهای هندسی خواسته شده را با استفاده از تعریف این مکانها به‌دست آورد.

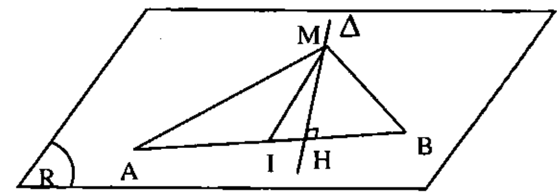
به عنوان مثال، برای تعیین معادلهٔ دایرهٔ مکان هندسی در این مسأله، مختصات نقطهٔ I وسط پاره خط AB را که مرکز دایره است، به‌دست می‌آوریم و شعاع آن را از دستور $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲K^۲-a^۲}$ که درآن $K^۲=۳۹$ و $a=AB$ است، محاسبه می‌کنیم و در رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ قرار می‌دهیم.

۱۰ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K باشد، صفحه‌ای است عمود بر خط AB.

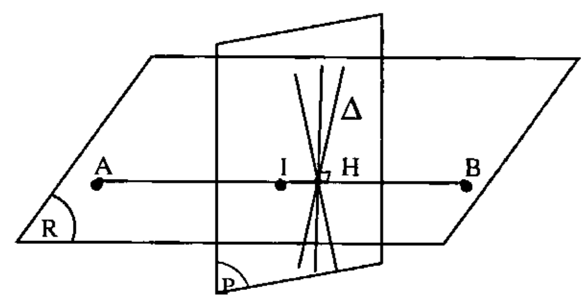


برهان به روش هندسی. یکی از صفحه‌های گذرنده بر خطAB را R و وسط پاره‌خط AB را I می‌نامیم. آن‌گاه مکان هندسی نقطهٔ M از این صفحه را که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است، مشخص می‌کنیم. می‌دانیم که این مکان هندسی، خطی راست است که در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود است، به قسمی که $IH=\frac{K}{۲AB}$ است. این خط را رسم می‌کنیم و Δ می‌نامیم.

حال صفحهٔ R را حول خط AB دوران می‌دهیم. در هر



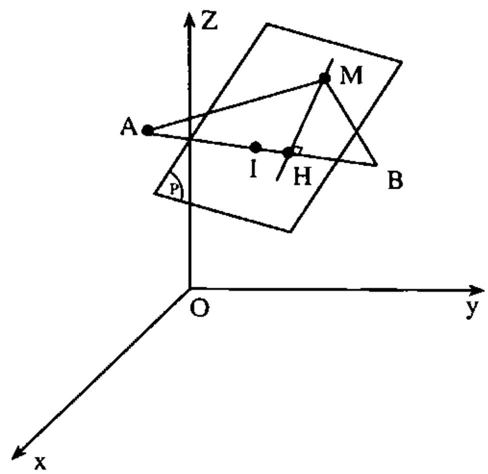
موقعیت جدیدی از صفحهٔ R ، خط Δ در نقطهٔ H برخط AB عمود است. بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M در فضا، مجموعهٔ خطهایی از فضا را تشکیل می‌دهند که در نقطهٔ H بر خط AB است و می‌دانیم که این مجموعه، صفحه‌ای مانند P را تشکیل می‌دهند که در نقطهٔ H بر خط AB عمود است.



بعکس، هر نقطه مانند M از صفحهٔ P جزء مکان هندسی موردنظر می‌باشد ؛ زیرا اگر از M به H وصل کنیم، خط MH در نقطهٔ H بر خط AB عمود است و $IH=\frac{K}{2AB}$ است.

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت K است، صفحه‌ای است که در نقطه ثابتی مانند H بر خط AB عمود است ؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $IH=\frac{K}{2AB}$ است.

برهان به روش تحلیلی. دو نقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ را در دستگاه مختصات دکارتی $O\cdot xyz$ درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است. در این صورت خواهیم داشت :



$$MA^2-MB^2=K\Rightarrow$$
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-$$
$$(x-x_2)^2-(y-y_2)^2-(z-z_2)^2=K$$

و یا :

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z-z_1)z+$$
$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)=K$$
$$\Rightarrow(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z+$$
$$\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2-K)=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ بالا، صفحه‌ای را نشان می‌دهد که بر خط AB عمود است، زیرا اگر این صفحه را P بنامیم، بردار نرمال صفحهٔ P موازی بردار $\overrightarrow{AB}$ است ؛ زیرا داریم :

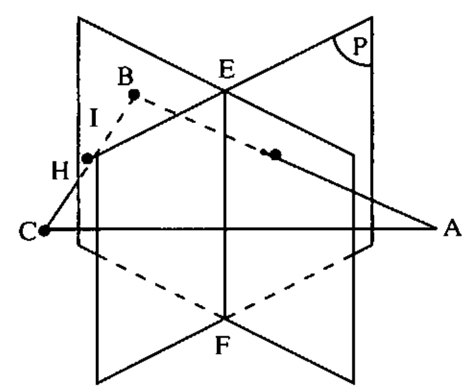
$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)\text{ و}$$
$$V_P=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$$

بنابراین، صفحهٔ P بر خط AB عمود است. بسادگی می‌توان نشان داد که صفحهٔ P در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود می‌باشد ؛ به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $IH=\frac{K}{2AB}$ است.

برای این کار، کافی است نقطهٔ برخورد خط AB به معادلهٔ $AB:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ را با صفحهٔ P به‌دست آوریم و با توجه به این که $I(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$ وسط

پاره‌خط AB و $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ است، با محاسبهٔ IH، درستی رابطهٔ $IH=\frac{K}{2AB}$ را ثابت کنیم.

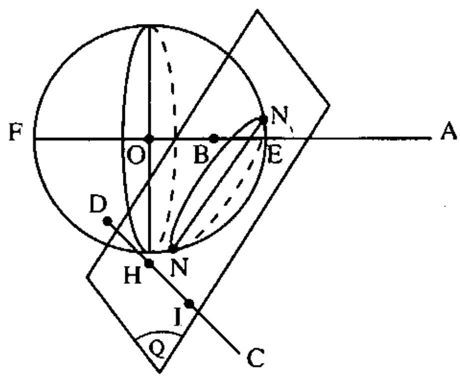
مثال ۱. سه نقطهٔ A، B و C داده شده است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا را بیابید که به یک فاصله از دو نقطهٔ A و B می‌باشند و تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ B و C برابر عدد ثابت K است.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، صفحهٔ عمود منصّف پاره‌خط AB است. این صفحه را رسم می‌کنیم و P می‌نامیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت K است، صفحه‌ای است عمود بر خط BC در نقطه‌ای مانند H ؛ به قسمتی که اگر I وسط پاره‌خط BC باشد، $IH=\frac{K}{2BC}$ است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم و آن را Q می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q جواب مسأله است. این دو صفحه، چون ناموازی‌اند ؛ بنابراین، متقاطع می‌باشند و مسأله همواره دارای جواب است.

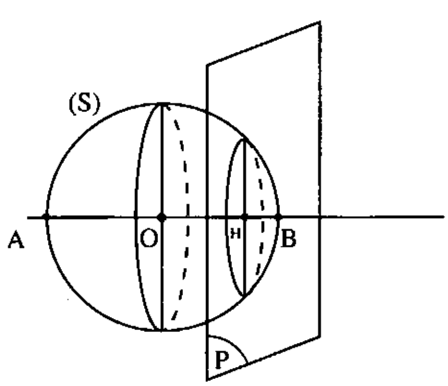
مثال ۲. چهار نقطهٔ A، B، C و D غیرواقع در یک صفحه داده شده است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر K_1 و تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ C و D برابر K_2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت K_1 است، یک کره است



که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K_1 تقسیم می‌کند (کرهٔ آپولونیوس). این کره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت C و D برابر عدد ثابت K_2 است، صفحه‌ای است عمود بر خط CD، در نقطه‌ای مانند H ؛ به قسمتی که اگر I وسط پاره‌خط CD باشد، $IH=\frac{K_2}{2CD}$ است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این صفحه با کرهٔ آپولونیوس (درصورت وجود) جواب مسأله است (در شکل دایرهٔ به قطر NN′ جواب مسأله است).

مثال ۳. کرهٔ S(O,R) و قطر AB از این کره داده شده است. مجموعهٔ نقطه‌هایی از این کره را تعیین کنید که تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت K باشد.



حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که تفاضل فاصله‌شان از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K می‌باشد، صفحه‌ای مانند P است که در نقطهٔ H بر خط AB عمود است ؛ به قسمتی که $OH=\frac{K}{2AB}$ یا $OH=\frac{K}{2R}$ است که O مرکز کره

است. فصل مشترک صفحهٔ P با کره (درصورت وجود) که یک دایره یا یک نقطه است، جواب مسأله است.

با توجه به این که در این مسأله $OH = \frac{K}{۲R}$ است، می‌توان در وجود جواب مسأله بحث کرد ؛ بدین ترتیب که OH را با R شعاع کره مقایسه کنیم.

مثال ۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(۲,-۱,۳)$ و $B(۰,۲,۱)$ برابر ۱۱ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، داریم :

$$A(۲,-۱,۳) \text{ و } B(۰,۲,۱) \text{ و } M(x,y,z)$$

$$MA^۲ - MB^۲ = ۱۱ \Rightarrow$$

$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ + (z-۳)^۲ - (x-۰)^۲ - (y-۲)^۲ - (z-۱)^۲ = ۱۱$$

$$-۴x + ۶y - ۴z + ۹ = ۱۱ \Rightarrow ۲x - ۳y + ۲z + ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

(۱) معادلهٔ صفحهٔ مکان هندسی موردنظر است که آن را P می‌نامیم.

می‌توانیم تحقیق کنیم که این صفحه در نقطه‌ای مانند H بر خط AB عمود است، به قسمی که $IH = \frac{۱۱}{۲AB}$ است. برای این منظور چنین عمل می‌کنیم :

$$AB / \frac{x-x_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{y-y_۱}{y_۲-y_۱} = \frac{z-z_۱}{z_۲-z_۱} \Rightarrow AB / \frac{x-۲}{۰-۲} = \frac{y+۱}{۲+۱} = \frac{z-۳}{۱-۳}$$

$$\Rightarrow AB / \frac{x-۲}{-۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۳}{-۲}$$

$$\begin{cases} \frac{x-۲}{-۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۳}{-۲} = t \Rightarrow x = -۲t+۲, y = ۳t-۱, z = -۲t+۳ \\ ۲x - ۳y + ۲z + ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲(-۲t+۲) - ۳(۳t-۱) + ۲(-۲t+۳) + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow -۱۷t + ۱۴ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۴}{۱۹} \Rightarrow H(\frac{۶}{۱۷}, \frac{۲۵}{۱۷}, \frac{۲۳}{۱۷})$$

$$AB \text{ وسط } I(۱, \frac{۱}{۲}, ۲) \Rightarrow$$

$$IH = \sqrt{(\frac{۶}{۱۷}-۱)^۲ + (\frac{۲۵}{۱۷}-\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۲۳}{۱۷}-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{\frac{۲۰۵۷}{۳۴}}$$

$$AB = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۲+۱)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۴+۹+۴} = \sqrt{۱۷}$$

$$IH = \frac{K}{۲AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲۰۵۷}}{۳۴} = \frac{۱۱}{۲\sqrt{۱۷}} \Rightarrow ۱۸۷ = ۱۸۷$$

مثال ۵. روی خط $D: \frac{x-۲}{۳} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۱}{۲}$ نقطه‌ای بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(۳,۰,۲)$ و $B(۱,-۲,۰)$ برابر ۴ باشد.

حل. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۴ است، می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن با خط D را به‌دست می‌آوریم.

اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، داریم :

$$MA^۲ - MB^۲ = ۴ \Rightarrow$$

$$(x-۳)^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲ - (x-۱)^۲ - (y+۲)^۲ - z^۲ = ۴$$

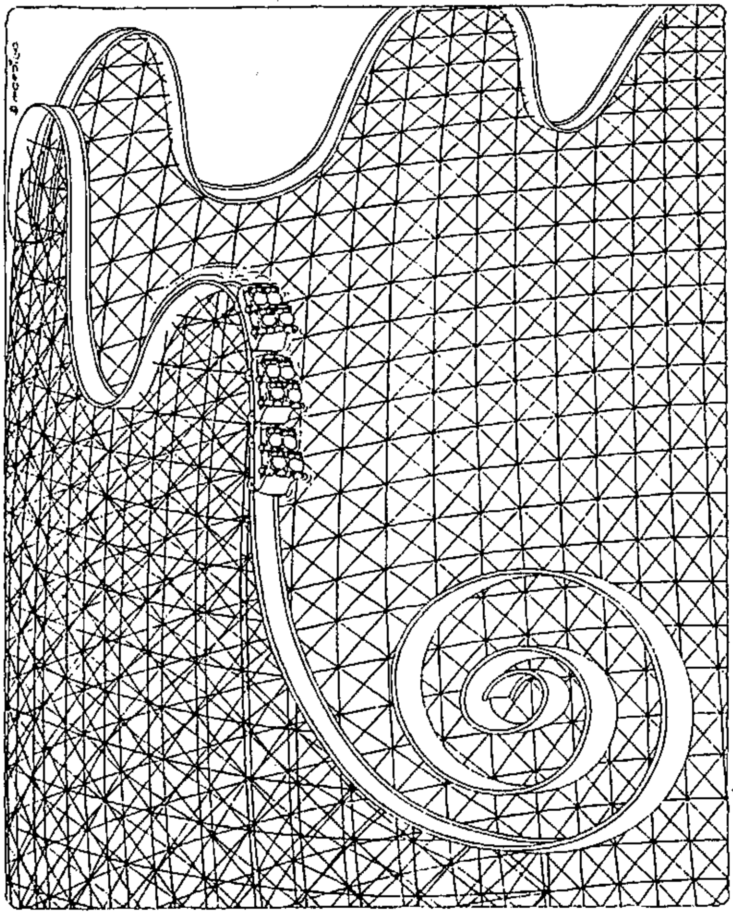
$$-۴x - ۴y - ۴z + ۴ = ۰ \Rightarrow x + y + z - ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

(۱) معادلهٔ صفحهٔ مکان هندسی موردنظر است که آن را صفحهٔ P می‌نامیم.

$$\begin{cases} D: \frac{x-۲}{۳} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۱}{۲} = t \Rightarrow x = ۳t+۲, y = -t, z = ۲t-۱ \\ P: x + y + z - ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳t + ۲ - t + ۲t - ۱ - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴t = ۰ \Rightarrow t = ۰$$

نقطهٔ جواب مسأله $\Rightarrow M_۱(۲,۰,-۱)$



نگاشتهای خطی

(تبدیلهای خطی)

(قسمت اوّل)

● حمیدرضا امیری

اشاره:

در یکی از شماره‌های قبل مجله (برهان ۱۷) نگاشت را به عنوان یک تابع معرفی ومفهوم نگاشتهای خطی را هم از دیدگاه تابعی و هم از دیدگاه تبدیل در صفحه و فضا مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. در این سلسله مقاله‌ها بیشتر به مفهوم نگاشت خطی و کاربردهای آن می‌پردازیم و مقاله را با یادآوری تعریف نگاشت آغاز می‌کنیم.

تعریف: نگاشت $\underset{f(x)=y}{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}$ یک نگاشت خطی است ؛ هرگاه مؤلفه‌های $f(x)$ هرکدام، عبارتی درجهٔ اوّل برحسب $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ ، … ، x_m بوده و فاقد عدد ثابتِ ناصفر باشند. در تعریف فوق، نگاشت f با تأثیر روی اعضای $\mathbb{R}^m$ ، که m تایی‌هایی مرتّب به صورت $(x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_m)$ هستند، اعضایی از $\mathbb{R}^n$ را نتیجه می‌دهد. در واقع، هر مؤلّفهٔ n تایی‌های حاصل از تأثیر f روی اعضای $\mathbb{R}^m$ ، عبارتی درجهٔ اوّل و بدون جملهٔ ثابت است که توسط $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ ، … ، x_m تولید می‌شود و می‌توان هر مؤلّفهٔ این n تایی‌ها را در حکم تابعی چون $\underset{f(x)=a_{۱}x_{۱}+\dots+a_m x_m}{fi:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}}$ فرض کرد، که در آن $x = (x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_m)$ یک m تایی از $\mathbb{R}^m$ است.

مثال: نگاشتهای زیر را درنظر بگیرید :

$$f:\mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}^{۳}$$

$$f(x_{۱}, x_{۲}) = (x_{۱} + x_{۲}, x_{۱}x_{۲}, ۲x_{۱} - x_{۲})$$

$$g:\mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}^{۲}$$

$$y_{۱} = x_{۱} + x_{۲}$$

$y_2 = x_2 + x_3$

$y_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

که $h(x_1, x_2) = (f_1, f_2)$

$f_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

و $f_2:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_2(x_1, x_2) = 3x_2 - x_1$

نگاشت f خطی نیست ؛ ولی نگاشتهای g و h خطی می‌باشند.

نکته: تابع $\underset{f(x)=ax+b}{f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $(a, b \neq 0)$ به تابع خطی معروف است ؛ ولی نگاشتِ خطی نیست!

تست: کدام یک از نگاشتهای زیر از $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$، خطی است؟

۱) $f(x,y,z) = (xy, x+y, z+y)$

۲) $f(x,y,z) = (x+1, x-y, 2z+x)$

۳) $f(x,y,z) = (x-y, x^2+y, z)$

۴) $f(x,y,z) = (0, y+z, x+y)$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

در گزینه‌های (۱) ، (۲) و (۳) به ترتیب به خاطر عبارتهای xy و $x+1$ و x^2+y خاصیت خطی بودن برقرار نمی‌باشد.

ماتریس یک نگاشت خطی

در فضاهای برداری $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می‌توان هر عضو آنها را با ماتریسهای ستونی نمایش داد. در این صورت، اگر به‌طور مثال $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد، داریم :

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \end{bmatrix}$$

نگاشت خطی f را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

که اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$ و $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ در این صورت

می‌توان نوشت : $f(x) = Ax$.

A را ماتریس نگاشت خطی f می‌نامند.

نکتهٔ مهم: توجه دارید که $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ؛ ولی ماتریس A، ماتریسی 2×3 می‌باشد. در حالت کلّی، اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ باشد و A ماتریس این نگاشت باشد، مرتبهٔ A، $n \times m$ است. همچنین هر ماتریس $n \times m$ می‌تواند یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را تعریف کند.

مثال۱: اگر $\underset{f(x,y)=(x+y,x-2y,y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ یک نگاشت خطی باشد، ماتریس این نگاشت کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

نگاشت از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تعریف شده، پس ماتریس این نگاشت می‌بایست ماتریسی 3×2 باشد. از طرفی می‌توانیم بنویسیم :

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس نگاشت خطی f باشد، در این صورت fکدام است؟

۱) $\underset{f(x,y)=(x+y,-x+y,2y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ ۳) $\underset{f(x,y,z)=(x-y,x+2z)}{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$

۲) $\underset{f(x,y)=(x-y,x+y,2y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ ۴) $\underset{f(x,y,z)=(x-y,x+y+2z)}{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

ماتریس A از مرتبهٔ ۳×۲ است، پس f باید از $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ باشد و داریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y \\ x+y+2z \end{bmatrix}$$

معیاری برای تشخیص خطی بودنِ نگاشتها

قضیه: نگاشت $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی است ؛ اگر و فقط اگر هردو شرط زیر برقرار باشد :

I) به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}^m$ ، $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

II) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^m$ و $r \in \mathbb{R}$ ، $f(rx)=rf(x)$.

نتایج زیر، بلافاصله از قضیهٔ پیش حاصل می‌شود :

I) نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ، بردارِ صفر در $\mathbb{R}^m$ را به بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر $f(0)=0$.

II) اگر $x \in \mathbb{R}^m$ ، در این صورت $f(-x)=-f(x)$.

اثبات I) $f(0)=f(0+0) \Rightarrow f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

اثبات II) $f(-x)=f[(-1)x]=(-1)f(x)=-f(x)$

نکته: قضیهٔ پیش را می‌توان به صورت زیر، خلاصه کرد و معادل آن را نوشت :

اگر f نگاشتی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ باشد، شرط لازم و کافی برای آن که f خطی باشد، آن است که برای هر $x,y \in \mathbb{R}^m$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ،

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

مثال ۳: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ و $f(1,0)=(1,2)$ و $f(0,1)=(2,2)$ در این صورت $f(2,1)$ کدام است؟

۱) (۴،۶) ۲) (۴،۴) ۳) (۶،۴) ۴) (۶،۶)

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

طبق مطالب فصل فضای برداری، (۱،۰) و (۰،۱) بردارهای مبنا بوده و هر بردار، بالاخص (۲،۱) را می‌توان برحسب ترکیب خطی آنها نوشت

$$f(2,1)=f[2(1,0)+1(0,1)] \overset{\text{خطی است } f}{=\!=\!=} 2f(1,0)+f(0,1)$$

$$=2(1,2)+(2,2) \Rightarrow f(2,1)=(4,6)$$

مثال ۴: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ و داشته باشیم $f(1,0,0)=(1,2)$ و $f(0,1,0)=(1,-1)$ و $f(0,0,1)=(-2,1)$ در این صورت، حاصل $f(2,1,-1)$ کدام است؟

۱) (۵،۳) ۲) (۵،−۲) ۳) (۵،۲) ۴) (−۵،۲)

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$f(2,1,-1)=f[2(1,0,0)+1(0,1,0)-1(0,0,1)]$$

$$=2f(1,0,0)+f(0,1,0)+(-1)\,f(0,0,1)$$

چون f خطی است

$$=2(1,2)+(1,-1)-(-2,1)=(5,2)$$

مثال۵ : اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ و داشته باشیم $f(2,1)=(2,4)$ و $f(2,-1)=(4,2)$ در این صورت حاصل $f(2,2)$ کدام است؟

۱) (۱،−۵) ۲) (۵،۱) ۳) (−۵،−۱) ۴) (۱،۵)

حل: گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :

بردارهای (۲،−۱) و (۲،۱) مستقل خطی بوده ؛ بنابراین می‌توانند یک مبنا تشکیل دهند و هر بردار در $\mathbb{R}^2$ بالاخص (۲،۲) را می‌توان برحسب ترکیب خطی این دو بردار نوشت :

$$x(2,-1)+y(2,1)=(2,2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=2 \\ -x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{3}{2}$$

$$f(2,2)=f\left[-\frac{1}{2}(2,-1)+\frac{3}{2}(2,1)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}f(2,-1)+\frac{3}{2}f(2,1)$$

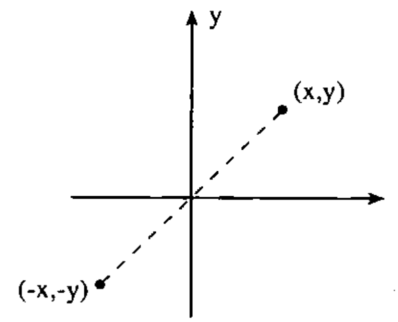
$$=-\frac{1}{2}(4,2)+\frac{3}{2}(2,4)=(1,5)$$

ماتریس نگاشتهای خطّی مهم در صفحه

ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات

می‌دانیم اگر نقطه‌ای را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، طول و عرض آن قرینه می‌شوند، لذا نگاشتی خطی چون f باید تعریف کنیم به قسمی که :

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$



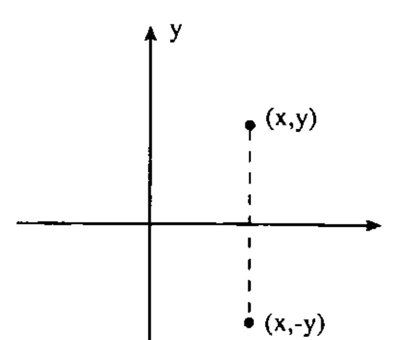
که ماتریس این نگاشت خطی، بنابر مطالب قبل، عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تقارن نسبت به محور xها

برای تقارن نسبت به محور xها نگاشتی چون f باید تعریف کنیم که با تأثیر روی هر نقطه از صفحه، عرض آن نقطه را قرینه کند ؛ پس :

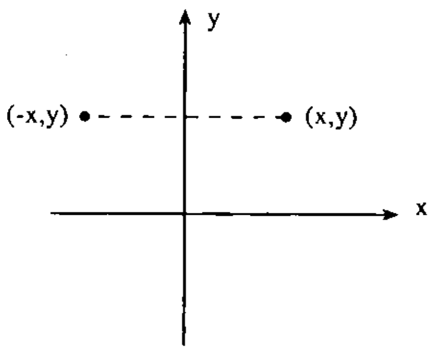
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به محور yها

نگاشت f در این تبدیل، می‌بایست عرض نقاط را ثابت نگه‌داشته و طول هر نقطه را قرینه کند :

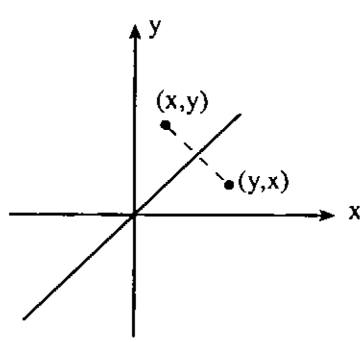
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل (خط به معادلهٔ y=x)

نگاشت خطی که بتواند هر نقطه در صفحه را نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم قرینه کند، به صورت زیر تعریف می‌شود :

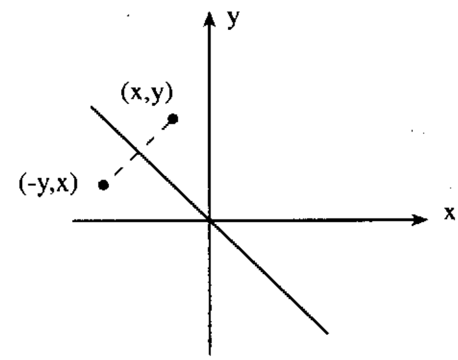
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم (خط به معادلهٔ $y=-x$)

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$، $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ می‌تواند هر نقطه در صفحه را نسبت به خط با معادلهٔ $y=-x$ قرینه کند ؛ بنابراین :

f ماتریس نگاشت $=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$



ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\cos\alpha - y\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\sin\alpha\end{bmatrix}$ می‌تواند با تأثیر روی هر نقطه از صفحه، آن را به اندازهٔ α ، حول مبدأ مختصات دوران دهد، که ماتریس این نگاشت برابر است با : $\begin{bmatrix}\cos\alpha - \sin\alpha\\ \sin\alpha \cos\alpha\end{bmatrix}$.

مثال۶: توسط ماتریس دوران، معادلهٔ تبدیل یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ را بیابید ؛ هرگاه بخواهیم این منحنی را به اندازهٔ 90° حول مبدأ دوران دهیم.

حل: منحنی فوق، دایره‌ای است به مرکز $w\Big|_{-2}^{1}$ و به شعاع۳، و می‌دانیم دایره بر اثر دوران، به دایره‌ای با شعاع قبل، تبدیل شده و فقط مرکز آن تغییر می‌کند. پس کافی است مرکز دایره را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ حول مبدأ دوران داده و مرکز جدید را بیابیم :

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$: معادلهٔ دایره دوران یافته

نکتهٔ مهم: ماتریسهای دوران حول مبدأ، یعنی $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha - \sin\alpha\\ \sin\alpha \cos\alpha\end{bmatrix}$ دارای سه‌ویژگی زیر می‌باشند :

I) دترمینان ماتریس دوران برابر با ۱ است.

II) طول هر بردار ستونی در ماتریسهای دوران حول مبدأ واحد است.

$$X=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow |X|=1\ ,\ \ Y=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow |Y|=1$$

III) بردارهای ستونی در هر ماتریس دوران حول مبدأ بر هم عمودند.

$$X=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}\ ,\ \ Y=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow X.Y=$$

$$-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=0\Rightarrow X\perp Y$$

ماتریس تجانس

نقطهٔ $M'=\begin{bmatrix}kx\\ ky\end{bmatrix}$ را مجانس نقطه $M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ با نسبت تجانس k می‌نامیم و اگر بخواهیم نگاشتی چون f تعریف کنیم ؛ به طوری که $f(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}kx\\ ky\end{bmatrix}$ ، ماتریس این نگاشت برابر است با :

f ماتریس نگاشت $=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$

در تجانس، توجه دارید که طول و عرض نقاط، به یک نسبت، بزرگ یا کوچک می‌شوند (در حالت خاص $k=1$ ، تغییر نمی‌کنند).

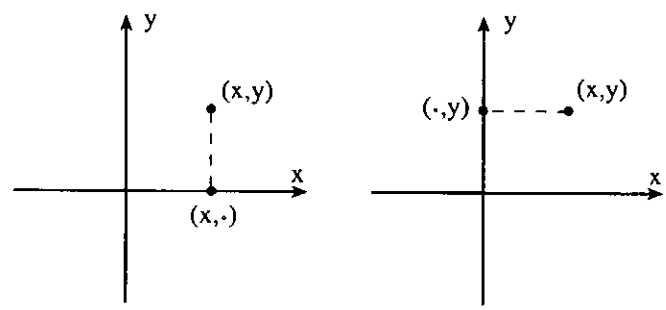
ماتریسهای تصویر قائم روی محور xها و yها

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$ هر نقطه در صفحهٔ مختصات را روی محور xها به صورت قائم تصویر می‌کند و ماتریس این نگاشت، برابر است با : $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

و به همین ترتیب، نگاشت $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ هر نقطه در صفحه را روی محور y ها به صورت قائم تصویر می‌کند که ماتریس این نگاشت نیز برابر است با $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$،

به شکلها توجه کنید :



مثال ۷: منحنی $x^2+y^2=4$ تحت تبدیل $T=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$ به کدام منحنی تبدیل می‌شود؟

۱) $x^2+y^2=8$ ‏ ۲) $x^2+y^2=16$

۳) $x^2+y^2=64$ ‏ ۴) $x^2+y^2=4$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

تبدیل فوق، یک تجانس است با نسبت ۴، بنابراین دایرهٔ مفروض، ۴ برابر بزرگ می‌شود و به عبارت دیگر، شعاعِ آن ۴ برابر می‌شود و چون شعاع آن، قبل از تبدیل، ۲ است، ۴ برابر شده و باید شعاع آن ۸ باشد.

ماتریسهای کشش در امتداد محور xها و yها

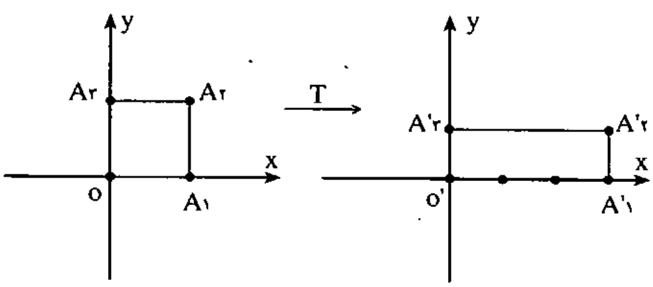
ماتریسهای $A=\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$ به ترتیب، ماتریسهای کشش در امتداد محور x ها و در امتداد محور yها می‌باشند.

مثال ۸: اگر نقطه‌های $O\Big|^{0}_{0}$ و $A_1\Big|^{1}_{0}$ و $A_2\Big|^{1}_{1}$ و $A_3\Big|^{0}_{1}$ مختصات رئوس یک چهارضلعی باشند (مربع واحد) شکل حاصل از تأثیر تبدیل T با ماتریس $T=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ و مساحت آن را بیابید.

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

توجه دارید که تبدیل یافته‌های هر نقطه را تحت تأثیر ماتریس تبدیل محاسبه کرده‌ایم و سپس با وصل کردنِ نقاط حاصل به‌هم، شکل تبدیل یافته مشخص می‌شود.

البته با توجه به این که Tماتریس کشش در امتداد محور x ها است، حدس می‌زدیم که شکل حاصل، یک مستطیل افقی باشد.



$O'A'_1A'_2A'_3$ مساحت $=1\times3=3$

مثال ۹: تبدیل یافتهٔ منحنی $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ تحت ماتریس تبدیل $T=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) سهمی عمودی ‏ ۲) هذلولی عمودی

۳) بیضی افقی ‏ ۴) بیضی عمودی

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

تبدیل مذکور یک کشش در امتداد محور y ها و می‌دانیم کشش، دایره را به بیضی تبدیل می‌کند!





تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران(۲۵)

بررسی مجلّهٔ مجموعه را پی می‌گیریم. در شمارهٔ قبل قسمتی از نظریهٔ بازیها را مطرح کردیم، اکنون مابقی این مقاله را به اتفاق می‌خوانیم.

۲.۱. تشریک مساعی

در بازی «موقعیت دشوار زندانیان» که هم اکنون بررسی شد، ملاحظه کردیم که درصورتی که زندانیان مجاز به مشورت با یکدیگر بودند و قرارمی‌گذاشتند که هیچ یک اقرار نکنند، به نتیجهٔ بهتر نائل می‌شدند. این موضوع جنبهٔ عمومی این نوع وضعیت رقابت‌آمیز است، یعنی، اگر شرکت کنندگان باهم تشریک مساعی کنند، غالباً به نتیجه‌ای بهتر از زمانی که صرفاً خودخواهانه عمل کنند نائل می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، به بازی با جدول پی‌ـآمد باز می‌گردیم.

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۰	۹	۷	۳
B	۳	۶	۹	۰	۲	۷
C	۱	۷	۶	۴	۸	۱
D	۴	۲	۴	۶	۵	۱

ملاحظه کردیم که اگر هر دو شرکت کننده به احتیاط بازی کنند، D و X را انتخاب کرده، به‌ترتیب پی‌ـآمدهای ۴ و ۲ را به‌دست می‌آورند. اما با تشریک مساعی می‌توانند به نتایج بهتری نائل شوند، چه اگر موافقت کنند که C و Y را انتخاب کنند، به‌ترتیب ۴ و ۶ را به دست می‌آورند؛ و اگر قرار بگذارند A و Z را انتخاب کنند، ۷ و ۳ نصیبشان می‌شود. ریاضیات نمی‌گوید که در مورد کدام یک از این دو امکان به توافق می‌رسند، حتی این را نیز که در مورد تشریک مساعی به توافق می‌رسند یا خیر، بیان نمی‌کند؛ تمام چیزی که می‌گوید این است که این بازی، بازیی است که در آن می‌توانند با تشریک مساعی بهتر از با احتیاط بازی‌کردن به نتیجه برسند.

اما چنین نیست که هر بازیی دارای این خاصیت باشد؛ به عنوان مثال، اگر سطر اول و ستون دوم جدول فوق را حذف کنیم، بازی جدیدی با جدول پی‌ـآمد زیر به دست می‌آوریم:

	X		Z	
B	۳	۶	۲	۷
C	۱	۷	۸	۱
D	۴	۲	۵	۱

در این حالت نتیجه‌ای که دو بازیکن، آن را به (۴،۲)ی حاصل از انتخابهای مطمئن D و X ترجیح دهند، موجود نیست. بازیکنها می‌توانند برای انتخاب (مثلاً B و X (به‌جای D و X) باهم معامله‌ای بکنند و R مقداری پول به B برای جبران کاهش دستاوردش از ۴ به ۳ بپردازد؛ R باید بتواند از این معامله سود به‌دست آورد، زیرا دستاوردش را در خود بازی، از ۲ به ۶ افزایش

می‌دهد. پرداختهای جانبی چنین، بخصوص هنگامی که بیش از دو بازیکن موجودند، نقش مهمی در نظریهٔ بازیها ایفا می‌کنند. اما، برای بحث این قسمت از نظریه، از ریاضیات خطی پر دور می‌شویم، و بنابراین در مابقی مقاله معمولاً از امکان پرداختهای جنبی چشم خواهیم پوشید.

تمرین

در مورد کدام یک از بازیهای زیر تشریک مساعی (در غیاب پرداختهای جنبی) به سود هر دو بازیکن است؟ در هر حالت، جواب بله یا نه داده، آن را توجیه کنید.

(i)

	X		Y	
A	۴	۶	۱	۱۰
B	۳	۵	۲	۲

(ii)

	X		Y	
A	۴	۶	۱	۱۰
B	۰	۷	۲	۲

(iii)

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۱	۹	۷	۳
B	۴	۶	۹	۱	۳	۷
C	۲	۸	۶	۴	۸	۲
D	۶	۴	۴	۶	۶	۴

حل: (i) بله. انتخاب مطمئن B ، B است، زیرا دراین صورت حداقل ۳ را به‌دست می‌آورد. انتخاب مطمئن R ، X است، زیرا حداقل ۵ نصیبش می‌شود. به این ترتیب، نتیجهٔ بازی به احتیاط ۳، ۵ واقع درخانهٔ B، X جدول است. اما، بازیکنها می‌توانند با تشریک مساعی نتیجهٔ ۴، ۶ واقع در خانهٔ A، X را به‌دست آورند.

(ii) نه. انتخاب مطمئن B ، A است، که ۴ را برای او مسلّم می‌کند. انتخاب مطمئن R ، X است، که ۶ را برای او مسلّم می‌کند. بنابراین نتیجهٔ مطمئن ۴، ۶ (درخانهٔ A ، X) است و (در غیاب پرداختهای جنبی) نتیجه‌ای که هر دو بازیکن آن را ترجیح دهند، موجود نیست.

(iii) نه. انتخاب مطمئن B ، D است، که ۴ را برای او مسلّم می‌کند. انتخاب مطمئن R ، X یا Z است. بنابراین نتیجهٔ مطمئن ۶ ، ۴ است، زیرا این نتیجه از اتفاق در هر دو خانهٔ D ، X و D ، Z رخ می‌دهد. نتیجه‌ای که هر دو بازیکن آن را به این نتیجه ترجیح دهند، موجود نیست.

۳.۱. خلاصهٔ بخش ۱

دراین بخش، عبارات زیر را تعریف کردیم:

پی‌ـ آمد

بازی مستطیلی (یا دونفری)

روش: در یک بازی دونفری مفروض، جدول پی ـ آمد را رسم کرده، نتایج را در هریک از موارد زیر معین می‌کنیم:

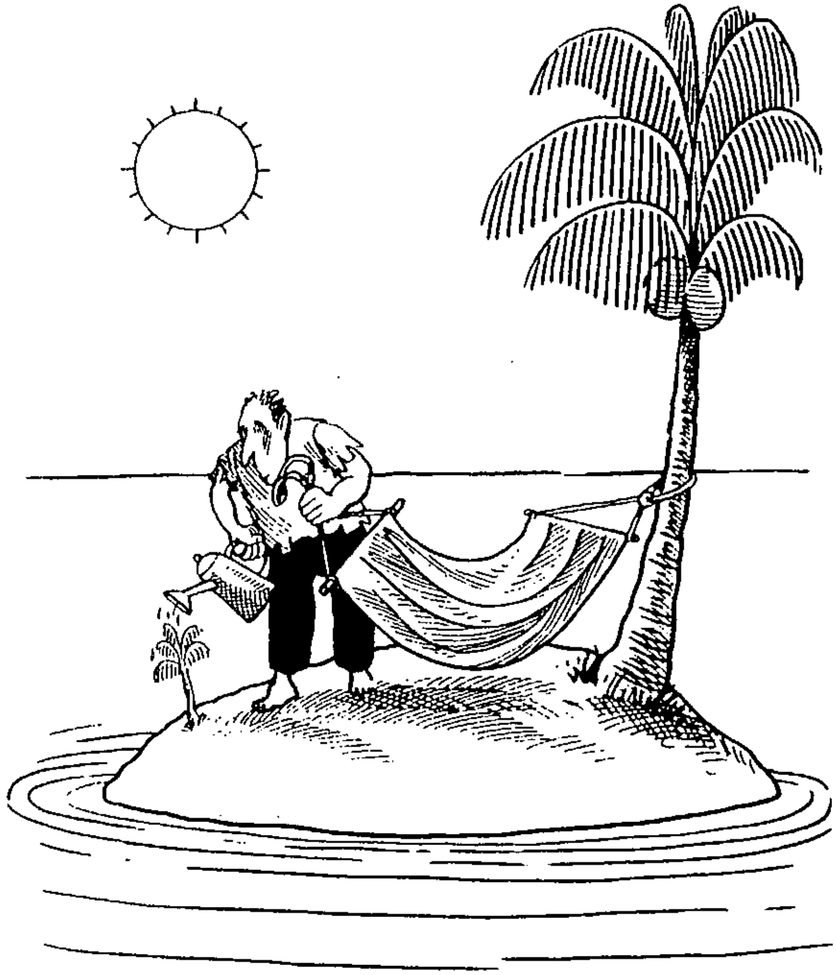
(i) دو بازیکن به احتیاط بازی می‌کنند.

(ii) دو بازیکن تشریک مساعی می‌کنند.



ابوالوفا (۹۹۸ ـ ۹۳۹) که یکی از خلفای حامی علم، او را به ریاست رصدخانهٔ بغداد معیّن کرد، جداول مثلثاتی ذی‌قیمتی به‌دست داد، و علاوه بر حرکتی که بطلمیوس کشف کرده بود توانست یک حرکت کوچک دیگر ماه را نیز معلوم نماید و بعدها تیکوبراهه در آن تدقیق بیشتری کرد.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو



نابرابریها (قسمت دوم)

● میرشهرام صدر

خاصیتها و قضیه‌ها

در شماره قبل، تعریف نابرابریها بیان شد، در این شماره به بررسی خاصیتها و قضایاهای نابرابریها می‌پردازیم.

خاصیتهای نابرابری

برای عددهای حقیقی a، b و c داریم :

۱ـ اگر $a<b$ و $b<c$ ، آن‌گاه $a<c$ (خاصیت تعدّی).

۲ـ اگر $a<b$ ؛ در این صورت $a+c<b+c$.

مثال. $-۲<۴ \Rightarrow -۲+۳<۴+۳$

۳ـ اگر $a<b$ ؛ در این صورت $a-c<b-c$.

مثال. $-۲<۴ \Rightarrow -۲-۳<۴-۳$

۴ـ اگر $a<b$ و $c>۰$ ؛ در این صورت $ca<cb$.

مثال. $-۲<۴\ ,\ ۳>۰ \Rightarrow ۳(-۲)<۳(۴)$

۵ـ اگر $a<b$ و $c<۰$ ؛ در این صورت $ca>cb$.

مثال. $-۲<۴\ ,\ -۳<۰ \Rightarrow -۳(-۲)>-۳(۴)$

۶ـ اگر $a<b$ و $c>۰$ ؛ در این صورت $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

مثال. $-۲<۴\ ,\ ۲>۰ \Rightarrow \frac{-۲}{۲}<\frac{۴}{۲}$

۷ـ اگر $a<b$ و $c<0$، در این صورت $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

مثال. $-2<4\ ,\ -2<0 \Rightarrow \frac{-2}{-2}>\frac{4}{-2}$

تذکر. خاصیتهای بالا که دربارهٔ نماد «>» مطرح شد، در مورد نمادهای «<»، «≤» و «≥» برقرار است.

با توجه به تعریف نابرابری، خاصیتهای نابرابری قابل اثبات هستند، در زیر خاصیت‌های (۱) و (۲) را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

اثبات خاصیت (۱):

$$\begin{cases}a<b\\ b<c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=a+p & (p>0)\\ c=b+p' & (p'>0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow c=a+(p'+p)$$

چون $p+p'>0$ بنابراین با توجه به تعریف نابرابری نتیجه می‌شود که $a<c$.

اثبات خاصیت (۲):

$$a<b\Rightarrow b=a+p\ ,\ (p>0)$$

به دو طرف برابری اخیر عدد c را اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$(b+c)=(a+c)+p\ ,\ (p>0)$$

با توجه به تعریف نابرابری نتیجه می‌شود که:

$$a+c<b+c$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $a>0$ و $b>0$ دو عدد حقیقی باشند، در این صورت $a+b>0$.

برهان. به دو طرف نابرابری $a>0$ عدد حقیقی b را می‌افزاییم:

$$a+b>0+b\Rightarrow a+b>b$$

با توجه به $\begin{cases}a+b>b\\ b>0\end{cases}$ و بنابر خاصیت تعدّی رابطه «>» داریم:

$$a+b>0$$

قضیهٔ ۲. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند؛ $a>b$ اگر و فقط اگر $a-b>0$.

برهان.

$$a>b\Leftrightarrow a+(-b)>b+(-b)$$
$$\Leftrightarrow a-b>0$$

قضیهٔ ۳. برای عدد حقیقی a اگر $a<0$ ، آن گاه $-a>0$.

برهان.

$$a<0\Rightarrow -a+a<-a+0\Rightarrow 0<-a \text{ یا } -a>0$$

قضیهٔ ۴. برای عدد حقیقی a اگر $a\neq 0$ ؛ در این صورت $a^2>0$.

برهان. قضیه را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

حالت اوّل: اگر $a>0$ ؛ بنا بر خاصیت ۴ نابرابریها:

$$a>0\Rightarrow a\times a>a\times 0\Rightarrow a^2>0$$

حالت دوم: اگر $a<0$ ، با توجه به قضیه ۳ نتیجه می‌گیریم که $-a>0$ ، پس:

$$-a>0\Rightarrow(-a)\times(-a)>(-\alpha)\times 0\Rightarrow a^2>0$$

قضیهٔ ۵. عدد ۱ مثبت است؛ یعنی: $1>0$.

برهان. چون $1\neq 0$ پس بنا بر قضیهٔ ۴ ؛ $1^2>0$، اما $1=1^2$ پس:

$$1^2=1>0\Rightarrow 1>0$$

قضیهٔ ۶. اگر $a>b$ و $c>d$ ؛ در این صورت $a+c>b+d$.

برهان.

$$\begin{cases}a>b\Rightarrow a-b>0\\ c>d\Rightarrow c-d>0\end{cases}\Rightarrow a-b+c-d>0$$
$$\Rightarrow a-b+c-d+b+d>0+b+d$$
$$\Rightarrow a+c>b+d$$

قضیهٔ ۷. اگر $a>b>0$ و $c>d>0$ ؛ در این صورت $ac>bd$.

برهان. چون $c>0$ و $b>0$:

$$\begin{cases}a>b>0\Rightarrow ac>bc\\ c>d>0\Rightarrow bc>bd\end{cases}\Rightarrow ac>bd$$

نتیجهٔ ۱. به کمک قضیهٔ (۷) و با استفاده از استقرای ریاضی، می‌توان ثابت کرد که اگر $a>b>0$ و m یک عدد طبیعی باشد، آن گاه $a^m>b^m$.

مثال. ثابت کنید:

۱ ـ معکوس یک عدد مثبت، عددی مثبت است.
۲ ـ معکوس یک عدد منفی، عددی منفی است.
۳ ـ اگر $0<a<b$ آن‌گاه $0<b^{-1}<a^{-1}$ $(0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a})$.

حل.

۱. فرض کنید عدد حقیقی $a>0$، اگر $\frac{1}{a}<0$، آن‌گاه $a\times\frac{1}{a}<0\times\frac{1}{a}$ ، یعنی $1<0$ که این یک تناقض است؛ پس $\frac{1}{a}$ مثبت است.

۲. فرض کنید عدد حقیقی $a<0$، اگر $\frac{1}{a}>0$ ، آن‌گاه

$\frac{1}{a} \times a < \circ \times \frac{1}{a}$ ، یعنی $1 < \circ$ که این یک تناقض است ؛ پس $\frac{1}{a}$ منفی است.

۳. چون a، b دو عدد حقیقی مثبت هستند، پس $a \times b$ نیز مثبت است،در نتیجه $\frac{1}{ab}$ مثبت می‌باشد :

$$\circ < a < b \Rightarrow \circ < \frac{1}{ab} \times a < \frac{1}{ab} \times b \Rightarrow \circ < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

یا $\circ < b^{-1} < a^{-1}$

قضیهٔ ۸. اگر $a > 1$ و $b > 1$ آن گاه $ab > 1$.

برهان. روش اول : چون $a > 1 > \circ$ و $b > 1 > \circ$ ، طبق قضیهٔ (۷) داریم $ab > 1 \times 1$ یعنی $ab > 1$.

روش دوم :

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow a - 1 > \circ \\ b > 1 \Rightarrow b - 1 > \circ \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) > \circ$$

$$\Rightarrow ab - a - b + 1 > \circ$$

$$\Rightarrow ab > a + b - 1$$

چون $a > 1$ و $b > 1$ ، در نتیجه $a + b > 2$ ؛ بنابراین :

$$ab > a + b - 1 > 2 - 1 \Rightarrow ab > 1$$

نتیجهٔ ۲. اگر a_1، a_2، ... و a_n عددهای حقیقی باشند و $a_1 > 1$، $a_2 > 1$، ...و $a_n > 1$ ، آن‌گاه $a_1 a_2 \dots a_n > 1$.

نتیجهٔ ۳. اگر $a > 1$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $a^n > 1$.

زیرا می‌توان نوشت $\underbrace{a > 1, a > 1, \dots, a > 1}_{n \text{ مرتبه}}$ در این صورت طبق نتیجهٔ قبل $\underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ مرتبه}} > 1$ یعنی $a^n > 1$.

نتیجهٔ ۴. اگر $\circ < a < 1$ آن گاه $a^n < 1$.

حل. چون $\circ < a < 1$، بنابراین $\frac{1}{a} > 1$ و با توجه به نتیجهٔ ۲ :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^n} > 1 \Rightarrow a^n < 1$$

مثال. اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد و $a^n > 1$ ، آن‌گاه $a > 1$.

حل. از برهان «خلف» استفاده می کنیم. فرض کنیم که a عددی حقیقی و مثبت باشد ؛ به طوری که $a \not> 1$ ؛ پس $\circ < a \le 1$ ، بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۴ ؛ $a^n \le 1$ و این با فرض $a^n > 1$ تناقض دارد، لذا فرض خلف ($a \not> 1$) باطل و حکم درست است ؛ یعنی $a > 1$.

مثال. ثابت کنید :

۱ ـ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند و $a > b$ ، آن‌گاه $a^2 > b^2$.

۲ ـ اگر a و b دو عدد حقیقی منفی باشند و $a > b$ ، آن‌گاه $a^2 < b^2$.

حل.

۱ـ بنابر قضیهٔ (۷) داریم :

$$\begin{cases} a > b > \circ \\ a > b > \circ \end{cases} \Rightarrow a \times a > b \times b \Rightarrow a^2 > b^2$$

۲ ـ اگر $a > b$ در نتیجه $-b > -a$ که در آن $-a$ و $-b$ هر دو عدد حقیقی مثبت می‌باشند ؛ بنا بر قسمت قبل $(-b)^2 > (-a)^2$ یعنی $b^2 > a^2$ یا $a^2 < b^2$.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $a > \circ$ ؛ $x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$.

برهان. فرض کنیم $x^2 < a^2$ ، اگر $-a < x < a$ درست نباشد، در نتیجه $x \ge a$ یا $x \le -a$. اگر $x \ge a$ ، در نتیجه، بنابر مثال قبل $x^2 \ge a^2$ که این خلاف فرض است و اگر $x \le -a$ که در آن $-a < \circ$ ، بنابر مثال قبل $x^2 \ge a^2$ که این نیز خلاف فرض است ؛ بنابراین در هر دو حالت به تناقض می رسیم، پس $-a < x < a$.

بعکس، اگر $-a < x < a$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

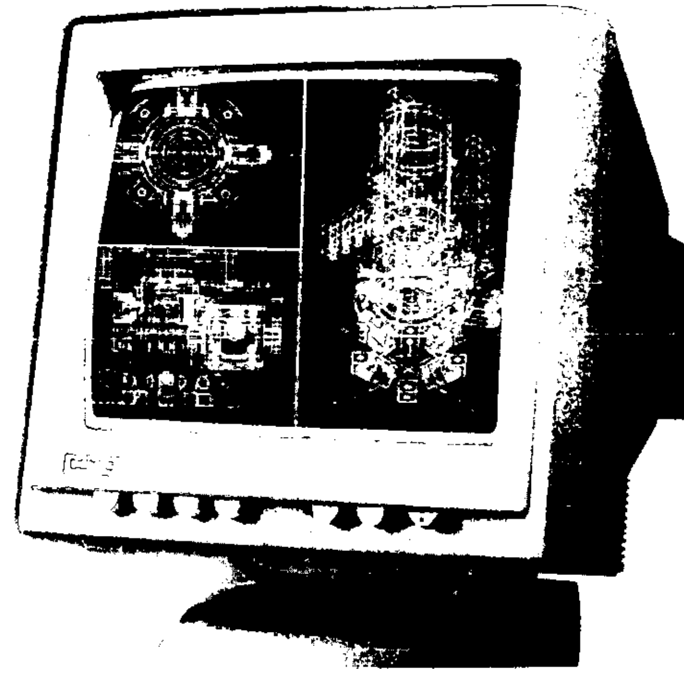
حالت اول : $x > \circ$ ؛ در این صورت از $x < a$ نتیجه می گیریم $x^2 < a^2$.

حالت دوم : $x < \circ$ ؛ در این صورت از $-a < x$ نتیجه می گیریم $a^2 > x^2$.

حالت سوم : $x = \circ$ ؛ چون مربع هر عدد حقیقی مثبت است، در نتیجه $x^2 < a^2$.

آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (٤)

● محمّد رحیم



ورودی[1] و خروجی[2]

در طول برنامه‌نویسی لازم است که اطلاعاتی را از ورودی (نظیر صفحهٔ کلید[3]، فایل[4] و ...) دریافت کنیم و یا اطلاعات حاصل از اجرای برنامه را به خروجی (نظیر صفحهٔ نمایش[5]، فایل، چاپگر[6] و ...) ارسال کنیم. به این منظور از دستورات ورودی و خروجی Read، Readln، Write و Writeln استفاده می‌کنیم.

دستور WRITE و WRITELN

از این دستورات برای ارسال اطلاعات به خروجی استفاده می‌کنیم. نحوهٔ استفاده از این دستورات به صورت زیر است:

Write ([متغیّر خروجی][متغیّر اوّل و متغیّر دوم و ...]);
Writeln ([متغیّر خروجی][متغیّر اوّل و متغیّر دوم و ...]);
Writeln;

توضیحات:

۱ـ استفاده از علامت [ ] به معنای اختیاری بودن است. برای مثال می‌توانیم متغیر خروجی که معمولاً فایل و یا چاپگر است نداشته باشیم، که در این‌صورت اطلاعات به صفحهٔ نمایش منتقل می‌شوند.

۲ـ به‌طور کلی فرق دستور Write و Writeln در این است که در دستور Write پس از فرستادن اطلاعات بر روی صفحهٔ نمایش، مکان‌نما[7] را به خط بعدی منتقل نمی‌کند، ولی Writeln منتقل می‌کند.

۳ـ دستور ;Writeln هیچ‌گونه اطلاعاتی را بر روی صفحهٔ نمایش نمی‌فرستد و فقط مکان‌نما را به سطر بعدی منتقل می‌کند.

مثال ۱:

```
Program test 1;
var
  x:Integer;
begin
  x:=26 ;
  Writeln ('This is Borhan #', x);
end.
```

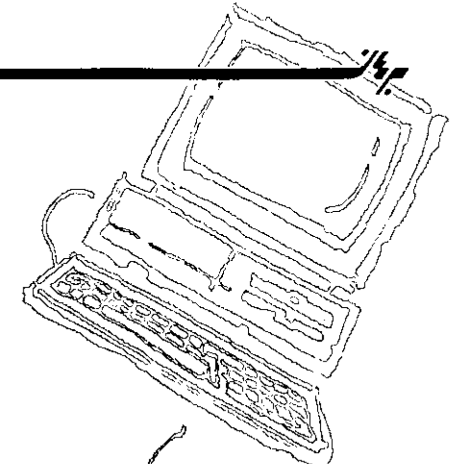
خروجی برنامهٔ فوق چنین است:

This is Borhan # 26
- ← موقعیت مکان نما

همان‌طور که مشاهده می‌شود، هر عبارتی که در داخل ' ' بیاید عیناً درخروجی چاپ می‌شود. در دستورهای Write و Writeln می‌توان ترکیبی از متغیّرها با انواع مختلف را به کار برد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲:

```
Program test 2;
```



```
var
   x: Integer;
   ch: char;
   str: String;
begin
   x: =10;
   ch:= 'a';
   str:='Borhan';
   Writeln ('x =',x ,'ch =',ch,'str =',str);
end.
```

خروجی برنامهٔ فوق به صورت زیر است :

x=1ϕ ch=a   str=Borhan

موقعیت مکان‌نما ← _

اگر در برنامهٔ فوق به جای دستور Writeln از دستور Write استفاده کنیم، خروجی برنامه و موقعیت مکان نما چنین خواهد بود :

موقعیت مکان‌نما ← _   x =10 ch =a   str =Borhan

مثال ۳:

```
Program test 3;
var
   A, B, C :byte;
begin
   A: =1;
   B: = 2;
   C: = 3;
   Writeln (A, B, C);
end.
```

خروجی برنامهٔ فوق و موقعیّت مکان‌نماچنین است :

123

موقعیت مکان‌نما ← _

همان‌طور که مشاهده می‌شود، اعداد 3،2،1 در هنگام نمایش به‌هم چسبیده‌اند و کاربر[۸] ممکن است تصور کند که عدد 123 نمایش داده شده است. در یک فرمت[۹] مناسب می‌توان از بروز چنین مشکلی جلوگیری کرد که در ادامه به آن اشاره خواهیم کرد.

دستور READ و READLN

از این دستورات برای دریافت اطلاعات از ورودی استفاده می‌کنیم. نحوهٔ استفاده از این دستورات به صورت زیر است :

Read ([متغیّر ورودی][متغیّر اول][متغیّر دوم , ...]) ;

Readln ([متغیّر ورودی][متغیّر اول][متغیّر دوم , ...]) ;

Read;

Readln;

توضیحات:

۱ـ استفاده از علامت [ ] به معنای اختیاری بودن است. برای مثال می‌توانیم متغیر ورودی که معمولاً فایل است، نداشته باشیم که دراین‌صورت اطلاعات از طریق صفحهٔ کلید دریافت می‌شود.

۲ـ به‌طور کلی فرق دستور Read و Readln در این است که دستور Read پس از دریافت اطلاعات از ورودی، مکان‌نما را به سطر بعد منتقل نمی‌کند، ولی دستور Readln منتقل می‌کند.

۳ـ دستورات ;Read و ;Readln هیچ‌گونه اطلاعاتی را از ورودی دریافت نمی‌کنند و معمولاً برای توقف در اجرای برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۴: این برنامهٔ ضرایب a و b و c را از ورودی گرفته و چند جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ را در خروجی نمایش می‌دهد.

```
Program test 4;
var
   a, b, c : Integer;
begin
   Write ('Enter a, b, c: ');
   Readln (a, b, c);
   Writeln (a,'x^2+',b ,'x +',c);
end .
```

خروجی برنامهٔ فوق چنین است :

Enter a,b,c: 234 ↵

2x^2+3x+4

موقعیت مکان‌نما ← _

در دستور Read و Readln هنگامی که چند متغیر را از ورودی می‌خوانیم، باید بین مقادیر ورودی فاصله وجود داشته باشد و ایجاد این فاصله با کلید Space bar انجام می‌شود.

ذکر این نکته بسیار ضروری است که با دستور Read و Readln نمی‌توان هم پیغام داد و هم اطلاعات را از ورودی خواند. دستورات Read و Readln فقط برای خواندن و دستورات Write و Writeln فقط برای نوشتن در خروجی مورد استفاده قرار

می‌گیرند. دو مثال زیر تفاوت دو دستور Read و Readln را نشان می‌دهد :

مثال ۵:

```
Program test 5;
var
   a,b,c,d: byte;
begin
   Write ('Enter a,b,c,d:');
   Read (a,b);
   Read (c,d);
   Writeln ('a =',a,'b =',b);
   Writeln ('c =',c,'d =',d);
end.
```

در برنامهٔ فوق پس از پیغام مناسب، اوّلین دستور Read اجرا شده و دو عدد a و b را از ورودی می‌گیرد، مثلاً 2 و 4 از آن‌جایی که در دستور Read مکان‌نما به سطر بعدی نمی‌رود و این برنامه مجدداً از دستور Read استفاده شده، لذا می‌توان مقادیر c و d را در همان خط وارد کرد ؛ مثلاً 6 و 8. بنابراین خروجی برنامه چنین است :

```
Enter a, b, c, d:2 4 6 8 ↵
a = 2        b = 4
c = 6        d = 8
```

موقعیت مکان‌نما → _

مثال ۶: این مثال، همان مثال ۵ است، بااین تفاوت که به‌جای اوّلین دستورRead از دستورReadln استفاده شده است.

```
Program test 6;
var
   a,b,c,d: byte;
begin
   Write (' Enter a, b, c, d:');
   Readln (a, b);
   Read (c, d);
   Write ('a =',a,'b =',b);
   Write ('c =',c,'d =',d);
end.
```

در برنامهٔ فوق پس از پیغام مناسب، دستور Readln اجرا شده و پس از گرفتن مقادیر a و b مکان‌نما را به خط بعدی منتقل می‌کند و دستور Read بعدی، مقادیر c و d را از ورودی می‌گیرد و در نهایت مقادیرشان در خروجی چاپ می‌شود.

در این‌جا باید توجه کرد که اگر در پاسخ به دستور Readln(a,b); به جای دو مقدار، چهار مقدار به عنوان ورودی داده شود، کامپایلر پاسکال فقط دوتای اوّل را قبول می‌کند و این تصور که دو مقدار آخر به متغیّرهای c و d تعلق می‌گیرد، کاملاً غلط است. خروجی برنامهٔ فوق چنین است :

```
Enter a, b, c, d : 2 4  6 8 ↵
10    12 ↵
a = 2       b = 4
c = 10      b = 12
```

موقعیت مکان‌نما → _

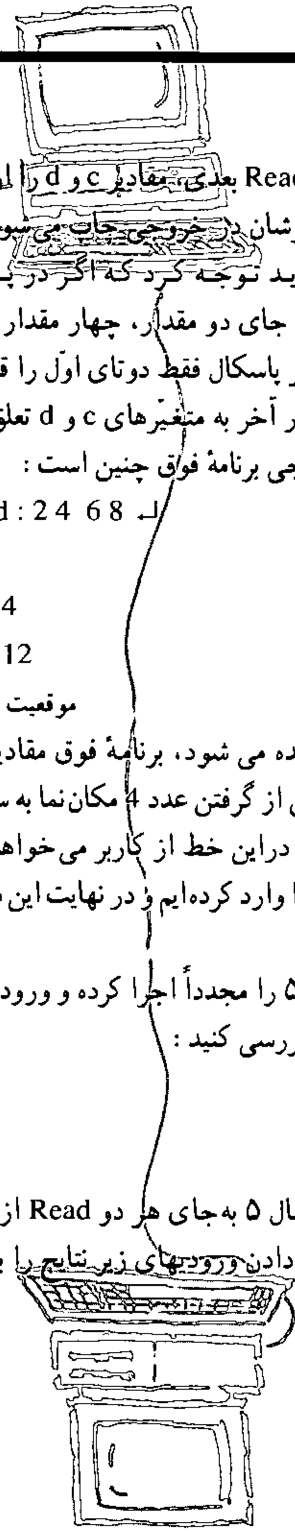
همان‌طور که دیده می شود، برنامهٔ فوق مقادیر 6 و 8 را قبول نمی‌کند، چون پس از گرفتن عدد 4 مکان‌نما به سطر بعدی می‌رود و مقادیر c و d را دراین خط از کاربر می‌خواهد که ما در این‌جا اعداد 1ϕ و 12 را وارد کرده‌ایم و در نهایت این مقادیر در خروجی چاپ شده‌اند.

تمرین: مثال ۵ را مجدداً اجرا کرده و ورودیهای زیر را به آن بدهید و نتایج را بررسی کنید :

```
2 4 6 ↵
8 10 12 ↵
```

تمرین: درمثال ۵ به‌جای هر دو Read از دستور Readln استفاده کرده و با دادن ورودیهای زیر نتایج را بررسی کنید :

```
2 4 6 ↵
8 10 12 ↵
```



واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱. Input
۲. Output
۳. Keyboard
۴. File
۵. Monitor
۶. Printer
۷. Cursor
۸. User
۹. Format

معرّفی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی

● غلامرضا یاسی‌پور

(غیاث‌الدین کاشانی، ریاضیدان برجستهٔ ایرانی)

قرن نهم هجری

«غیاث‌الدین جمشید مسعود محمود طبیب کاشانی»، ریاضیدان و منجّم مسلمان و ایرانی قرن نهم، که نزد دانشمندان غرب به *الکاشی* معروف است، یکی از بزرگترین و به قولی بزرگترین ریاضیدان دورهٔ اسلامی است.

وی صاحب دو اثر بسیار مهم **مفتاح الحساب** و **رسالهٔ محیطیه** است که هر دو به زبان عربی‌اند. دو اثر مهم دیگر وی، **رسالهٔ وتر وجیب** به عربی و **زیج خاقانی** در تکمیل زیج ایلخانی[1] به فارسی‌اند.

بعدها این آثار را با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار خواهیم داد.

نامهٔ فارسی کاشانی به پدرش: در این نامه که کاشانی آن را حدود ۸۲۴ هجری قمری از سمرقند به پدر خود نوشته، مراتب فضل کاشانی مشخص است. در نامه چنین آمده :

> هرچند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقهٔ درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد، درس ریاضیات مقدم می‌دارند و این بنده هم حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقهٔ درسی درآید، غافل است از آن که چه مسأله در میان خواهد بود. ... چون آغاز بحث می‌شد، هر بار به عنایة الله تعالی و یمن همّت آن خداوندی، این بنده دخل کاملی کرده، چنان که چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده، که همه حیران مانده‌اند.

از مطالعهٔ نامهٔ مزبور، این نیز برمی‌آید که کاشانی از لحاظ اخلاقی و تربیت روحی نیز مردی مردانه بوده است. در نامه چنین می‌خوانیم :

> از تحسینهای حضرت سلطنت پناهی، آن است که هیچ هفته نگذرد که بعضی دوستان به این بنده نرسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا امروز چنین و چنان نکته‌ها فرمودند. امثال آنها : مستحضر است، بغایت خوب می‌داند و از همه این بهتر می‌داند و از قاضی[2] مستحضرتر و پرمایه‌تر است و در این فن پرذهن‌تر. چیزی که او به ده روز مشکل می‌یابد، مولانا غیاث‌الدین برفور یا در روز درمی‌یابد. ... نیز مردی نیک و سلیم القلب است، هر کس از جنس موالی و غیره که پیش ما آید، همین که ما او را اندک تربیتی کردیم، خود را نگاه نداشتند و با مردم جنگ می‌کردند و فضولی پا پیش می‌گرفتند. مولانا غیاث‌الدین با وجودی که انواع تربیت و عنایت در حق او فرمودیم و دائماً به شرف مجاورت و مکالمه مستعد است، در این مدت، هرگز با کسی نزاع نکرد و نه او از کس و نه کس از او گله کرد.

رفتن کاشانی به سمرقند در سال ۸۲۴ هجری بوده است و وفاتش در صبح چهارشنبه ۱۹ رمضان ۸۳۲ هجری (مطابق با ۲۲ ژوئن ۱۴۲۹ میلادی) در خارج شهر سمرقند.

اکنون به بحثی مختصر دربارهٔ چهار اثر مهم سابق‌الذکر کاشانی می‌پردازیم و در پایان، نظر بعضی از محققان را دربارهٔ کاشانی می‌خوانیم.

مفتاح الحساب

در مقدمهٔ این کتاب چنین آمده است:

ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن اعداد گوناگون، بی‌همتا. و درود بر بهترین آفریدهٔ او، محمد (ص) که والاترین شفاعت کنندهٔ روز رستاخیز است، و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمونند.

اما بعد، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود پسر محمود پزشک کاشی، ملقّب به غیاث، که خدا روزگارش را نیکو گرداناد، چنین گوید:

چون در اعمال حساب و قوانین هندسه چندان ممارست کردم که به حقایق آن رسیدم، و به دقایق آن پی بردم، و از مسائل پیچیده و دشوار آن پرده برداشتم، و مشکلات آن را گشودم و قوانین و دستورهای بسیار در آن یافتم و آنچه را که استخراجش بر بسیاری از کسان که به آن پرداخته بودند، دشوار بود، به دست آوردم.

کاشانی آن گاه به ذکر بعضی از آثار خود چون **زیج خاقانی** و **زیج تسهیلات** و رسالهٔ **سُلّم السماء** و رسالهٔ **محیطیّه** و رسالهٔ **وتروجیب** و آلت موسوم به **طبق المناطق** و کتاب **نزهة الحدائق** پرداخته می‌گوید:

هم‌چنین جوابهای مسائل بسیاری را که محاسبان زبردست بر سبیل امتحان یا برای آموختن با من در میان نهادند و حلّ آنها به وسیلهٔ معادلات ششگانهٔ جبری[۳] حاصل نشده بود، استخراج کردم. ... و این کتاب را نوشتم ... با احتراز از اطناب مملّ و ایجاز مخلّ ... و همهٔ جدولهایی که در این کتاب وضع شده، ساخته و پرداختهٔ من است و مسؤول آسانی و دشواری آنها من هستم، مگر هفت جدول.

عناوین مقدمه و مقالات *مفتاح الحساب* عبارت است از:

مقدمه: در تعریف حساب و عدد و اقسام آن.

مقالهٔ اوّل: در حساب عددهای صحیح با ارقام هندی، مشتمل بر شش باب.

مقالهٔ دوم: در حساب کسر، مشتمل بر دوازده باب.

مقالهٔ سوّم: در طریق حساب منجّمان، مشتمل بر شش باب.

مقالهٔ چهارم: در مساحت، مشتمل بر مقدمه و نه باب.

مقالهٔ پنجم: در استخراج مجهولات به وسیلهٔ جبر و مقابله و خطأین[۴] و غیره، با قواعد حسابی، مشتمل بر چهار باب.

بعضی از تعریفهای مقدمهٔ *مفتاح الحساب* چنین است:

موضوع علم حساب، عدد است و عدد در شمردن به کار می‌آید و مشتمل است بر واحد و آنچه از آن تألیف می‌شود.

عدد مفرد، عددی است که فقط در یک مرتبه واقع شود.

زوج الزوج، عددی است که بتوان آن قدر آن را نصف کرد، تا به یک رسید.

زوج الفرد، عددی است که فقط یک بار بتوان آن را نصف کرد.

از کتاب مفتاح الحساب چنین برمی‌آید که مثلث حسابی *پاسکال*[۵] در زمان کاشانی، در زمرهٔ مطالب معمولی ریاضیات بوده است. این مثلث که امروزه به نام **پاسکال** ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی موسوم است، نخستین بار در یک متن ریاضی، از تألیفات ابوبکر محمد بن حسین **کرجی**[۶] آمده است.

رسالهٔ محیطیّه

تصنیف این کتاب، که شاهکاری در فن محاسبهٔ شستگانی و یکی از مهمترین آثار ریاضی کاشانی است و در اواسط ماه شعبان سال ۸۲۷ به پایان رسیده است.

در مقدمهٔ این کتاب چنین آمده است:

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمانها و قراردهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمد مصطفی(ص) که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد.

اما بعد، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسر مسعود پسر محمود، طبیب کاشانی ملقّب به غیاث که خداوند احوال او را نیکو گرداند، گوید:

ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از $\frac{۱}{۷}$ و بیشتر از $\frac{۱۰}{۷۱}$ قطر، بزرگتر است، پس تفاوت بین این دو مقدار $\frac{۱}{۴۹۷}$ (قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷

ذراع یا قصب یا فرسنگ باشد، مقدار محیطش در حدود یک ذراع یا قصب یا فرسنگ مجهول و مشکوک است و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد، محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است؛ زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد.

رسالهٔ محیطیّه پس از مقدمه ده فصل و یک خاتمه دارد که به ترتیب عبارت است از:

فصل اوّل، در تعیین وتر مجموع دو قوس که اوّلی وترش معلوم و دومی مساوی با نصف تمام (= مکمل) اولی تا نیمدایره باشد.
فصل دوم، در تعیین محیط کثیرالاضلاع محاطی دلخواه و محیط کثیرالاضلاع محیطی مشابه با آن.
فصل سوّم، در این که محیط (دایره) را به چند ضلع (= جزو متساوی) تقسیم می‌کنیم و عمل را تا چند مرتبه (ی شستگانی) ادامه می‌دهیم، تا آنکه (طول) محیط قسمی برایمان حاصل شود که در دایرهٔ مذکور (تفاوت) به مویی نرسد.
فصل چهارم، در اعمال.
فصل پنجم، در استخراج (طول) یک ضلع از کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره که عدهٔ اضلاع آن ۴۸، ۱۲، ۱۶، ۸، ۲ و ۱ باشد.
فصل ششم، در استخزاج محیط کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره و (محیط) کثیرالاضلاع مشابه با آن و محیط بر دایره که عدهٔ اضلاع هر یک ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ باشد.
فصل هفتم، در آنچه از فروگذاشتن کسرهای زاید یا باقی (ناقص) در آخرین رقمهای اعمال پیش حاصل می‌شود.
فصل هشتم، در تبدیل اندازهٔ محیط (دایره) به ارقام هندی، به فرض آن که شعاع دایره معلوم باشد.
فصل نهم، در چگونگی اعمال با دو جدول.
فصل دهم، در شناختن تفاوت بین آنچه نزد ریاضیدانان مشهور و مستعمل است و آنچه ما به دست آورده‌ایم.
خاتمه، در اثبات غلط ابوالوفا و ابوریحان.

یک قضیهٔ رسالهٔ محیطیّه

اگر بر نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲r$ و به مرکز O قوس دلخواه AG را در نظر بگیریم و وسط قوس GB را که مکمّل قوس AG است، نقطهٔ D بنامیم و AD را رسم کنیم، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$r(۲r + AG) = \overline{AD}^۲$$

کاشانی در این رساله، مقدار عدد ۲π یعنی محیط دایره (با فرض واحد بودن شعاع آن) را تا شانزده رقم اعشاری به دست آورده است که تماماً صحیح است:

$$۲\pi = ۶/۲۸۳\ ۱۸۵\ ۳۰۷\ ۱۷۹\ ۵۸۶\ ۵$$

رسالهٔ وتر و جیب

در مورد این رساله، خود کاشانی در مقدمهٔ مفتاح الحساب چنین می‌گوید:

رسالهٔ وتر و جیب در استخراج آن دو برای یک سوّم قوسی که وتر و جیب آن معلوم باشد.

از متن اصلی این رساله، اثری در دست نیست؛ اما شروحی چند که بر آن نوشته‌اند، در دسترس است و از همانها می‌توان به مطالب اصلی این رساله پی برد.

میرزا ابوتراب، یکی از ریاضیدانان زمان «محمد شاه قاجار»، در مقدمهٔ رساله‌ای موسوم به **رساله در معرفت وتر ثلث قوس معلومة الوتر**، دربارهٔ **رسالهٔ وتر و جیب** چنین می‌نویسد:

... و سایر مهندسان نیز عدم امکان استنباط آن را مسلّم داشته‌اند؛ مگر فاضل مهندس بارع غیاث‌الدین جمشید الکاشانی، که بعد از اعمال قواعد هندسیه و استعمال جبر و مقابله، طریقه‌ای به جهت آن استنباط و در رسالهٔ وتر و جیب ایراد نموده و امیر شهید میرزا الغ بیک به همان طریقه از وتر شش درجه وتر دو درجه را استنباط و از آن جیب یک درجه را به تحقیق بیرون آورده، و وضع جدول جیب را در زیج به همان قانون کرده است.

زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی

تألیف آن در ۸۱۶ هجری به پایان رسیده و در مقدمهٔ آن پس از حمد خدای تعالی و درود به پیغمبر اکرم (ص) و پیروان او چنین

آمده است که :

اما بعد چنین گوید مؤلف این کتاب، اقلّ عبادالله تعالی جمشیدبن مسعودبن محمود ... که مدتی بود که در اقسام علمی و عملی ریاضیات اجتهاد می‌نمود ...

کاشانی در این مقدمه، از «خواجه نصیرالدین طوسی» با تجلیل یاد می‌کند؛ اما از اشتباه‌های زیج *ایلخانی* او نیز انتقاد می‌کند و چنانکه در مقدمهٔ مفتاح الحساب خاطرنشان کرده است، زیج *خاقانی* را برای تصحیح اشتباه‌ها و تکمیل زیج *ایلخانی* تألیف کرده است.

مقاله‌های زیج *خاقانی* به ترتیب زیر است :

مقالهٔ اوّل، در معرفت تواریخ مشهور.

مقالهٔ دوم، در معرفت جیب و سهم و ظلّ و میل و مطالع (و ذکر طول و عرض بلدان) و آنچه بدان تعلق دارد.

مقالهٔ سوّم، در معرفت موضع کواکب (طول و عرض) و توابع آن.

مقالهٔ چهارم، در استخراج سایر قُسی و خطوط مشهوره.

مقالهٔ پنجم، در استخراج طالع از معلومات مختلفه.

مقالهٔ ششم، در باقی اعمال نجومی که آن تسییرات است.

اکنون به ذکر بعضی از اصطلاحاتی که در آثار کاشانی آمده است، می‌پردازیم :

تضعیف، تنصیف، تداخل، اشتراک، تباین، تجنیس، رفع، ارقام جمَل، دوانیق، شعیرها، ارقام ستّینی، ذوالیمینین، ذوالرجلیَن، قطاع دایره، قطعهٔ دایره، جدول جیب، سطوح مستوی، شبه دایره، مبطل، مدرج، ذوات الشرفات، کثیرالاضلاع مستدیر، ضلع الکره، کثیرالوجوه، طاق وازج، قبهٔ مجوفه، سطوح مقرنس، جبر و مقابله، خطأین، اجناس، شیء، مال، کعب، مفرد، مجرد، مرکب، زوج الزوج، زوج الزوج و الفرد، زوج الفرد، عقود، مراتب، کعب، ضلع، کعب کعب، مال، مال مال، مال کعب، جزء الجذر، جزء المال، جزء الکعب، جزء مال المال، منزل، عدد منزل، مضلع، مضلع مُنطق، مضلع اصمّ، کسر مرکب، معطوف، مستثنی، مضاف، منکسر، درجه، دقیقه، ثانیه، ثالثه، رابعه، مرفوع، معیَن، شبیه المعیَن، جیب، سهم، اهلیلجی، شلجمی، حلقهٔ مسطحه، هلالی، نعلی، مسألة الجبریة، متعادلان، استثناء، زاید، ناقص، رد و تکمیل، اعداد متحاب، ضلع، زاید، باقی، کسرهای معطوفه.

یکی از کارهای مهم کاشانی، بازیافت (اگر نگوییم اختراع) و ترویج کسرهای اعشاری یا دهدهی به قیاس کسرهای ستّینی یا شستگانی است. گرچه مفاهیم اوّلیهٔ این کسرها در کتاب **الفصول فی الحساب الهندی** در ۳۴۱ هجری به قلم **ابوالحسن احمدبن ابراهیم اقلیدس** آمده است و در کتاب **القوامی فی الحساب الهندی** در سال ۵۶۸ هجری به قلم ابونصر سموأل بن یحیی مغربی به وضوح به کار رفته است؛ اما این کاشانی است که در آثار خود از آنها استفاده کرده، به کار بردنشان را نیز توصیه می‌کند.

اکنون به آوردن اظهارنظر بعضی از محققّان دربارهٔ کاشانی و آثار او می‌پردازیم :

۱ــ اظهارنظر *پاول لوکی* ریاضیدان و خاورشناس آلمانی :

هانکل در کتاب تاریخ ریاضیات خود شرح می‌دهد که چگونه یک منجّم و ریاضیدان مسلمان (= کاشانی) در قرن پانزدهم میلادی، جیب یک درجه را از روی جیب سه درجه با دقت فراوان حساب کرده، و چگونه معادلهٔ درجهٔ سوّم مربوط به آن مسأله را تشکیل داده و با روش استادانه‌ای آن را حل کرده است. هانکل می‌گوید : این روش زیبای حلّ معادلات عددی از حیث دقّت و ظرافت، دست کمی از روشهای تقریبی که از زمان ویت به بعد در مغرب زمین متداول شده است، ندارد. ... بحق می‌توان این روش را از بدیعترین و جالبترین روشهایی دانست که در همهٔ نوشته‌های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. مخترع چنین روش تحسین‌آمیزی، یک ایرانی است که در نیمهٔ اوّل قرن پانزدهم میلادی، در انجمن دانشورانی که نزد الغ بیک گرد آمده بودند، می‌زیسته و در آثارش خود را غیاث‌الدین جمشید فرزند مسعود فرزند محمود طبیب کاشانی نامیده است.

(من) او را ریاضیدانی شناخته‌ام هوشمند و مخترع و نقاد و صاحب افکار عمیق و واقف بر آثار ریاضیدانان سلف که بخصوص در فنّ محاسبه و به کار بستن روشهای تقریبی متبحّر و چیره‌دست بوده است. اگر رسالهٔ محیطیّهٔ او به دست ریاضیدانان معاصر وی در مغرب زمین رسیده بود، مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل دربارهٔ اندازه‌گیری دایره (محاسبهٔ عدد π) بی‌نیاز می‌شدند.

پوشکویچ، در کتاب ریاضیات عرب که البته به خطا نامگذاری شد و حق آن است که ریاضیات دورهٔ اسلامی خوانده شود، دربارهٔ مفتاح الحساب کاشانی چنین آورده است :

مفتاح الحساب، کتابی است درسی، دربارهٔ ریاضیات مقدماتی، که استادانه تألیف شده است. این کتاب از حیث فراوانی و تنوع

مواد و مطالب و روانی بیان و سلامت کلام تقریباً در همهٔ آثار (ریاضی) قرون وسطی یگانه است.

هم او دربارهٔ **رسالهٔ محیطیّه** چنین می‌نویسد :

> این رساله که دربارهٔ محاسبهٔ عدد پی نوشته شده، اثری است نفیس و درخشنده در فنّ محاسبهٔ خطاها که نه تنها از حیث نتیجهٔ آن، که مشتمل بر هفده رقم اعشاری دقیق عدد π می‌باشد ؛ بلکه از حیث ظرافت بیان و سادگی روش تخمین و انتخاب ماهرانه از بین مقادیر تقریبی موجود نیز جالب توجه است.

کندی دربارهٔ کاشانی چنین نوشته است :

> پیش از هر چیز باید گفت، **کاشانی** محاسبی زبردست بود و در این فن، مهارت خاصی داشت. کسرهای اعشاری را اختراع کرد. **آلت طبق المناطق** که وی اختراع کرد، نمایندهٔ کاملترین پیشرفتی است که برای این دسته از افزارهای نجومی حاصل شده است.

سرانجام در برگ دوم نسخه‌ای به خط خود کاشانی، که در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است، و نادرشاه افشارآن را به کتابخانهٔ مزبور وقف کرده است، به خط شیخ *بهایی* چنین نوشته شده است :

> الرسالة المحیطیه و هی نسخة الاصل بخطّ مؤلفها المولی الاجل الافضل بطلمیوس زمانه مولانا غیاث‌الدین جمشید الکاشی طاب ثراه، حرّره الفقیر بهاء الدین محمد العاملی.

همان گونه که قبلاً ثبت افتاد، وفات کاشانی روز چهارشنبه نوزدهم ماه رمضان سال ۸۳۲ هجری بوده است و برخی، علت مرگ وی را به اشارهٔ میرزا الغ بیگ دانسته‌اند.

***

یادداشتها:

۱. زیج ایلخانی، اثر خواجه نصیرالدین طوسی است.

۲. صلاح‌الدین پاشا موسی بن محمدبن محمود قاضی زادهٔ رومی، منجم و ریاضیدان ترک (ح ۷۶۶ ــ ح ۸۴۰) همکار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در کار رصدخانهٔ سمرقند و صاحب **رسالة الجیب، شرح اشکال التأسیس، رسالة فی الحساب، حاشیه بر تحریر اقلیدس** خواجه نصیر، و **رسالة فی الهیئة و الهندسة**.

۳. معادله‌های زیر که در آنها a و b و c مثبت‌اند :

$$bx = c,\ ax^2 = c,\ ax^2 = bx,\ ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c$$

۴. در باب چهارم *خلاصة الحساب* شیخ *بهائی* دربارهٔ حساب خطأین چنین آمده است :

> مجهول را هر چه که بخواهیم، فرض می‌کنیم و آن را مفروض اوّل می‌نامیم، و بر حسب سؤال در آن تصرف می‌کنیم. اگر حاصل (با عدد داده شده) مطابقت داشت که همان مطلوب است؛ اما اگر خطایی به اضافه یا نقصان بر آن حاصل کرد، آن خطای اوّل است. در این صورت (مجهول را) عددی دیگر فرض می‌کنیم و آن مفروض ثانی است، که اگر خطایی حاصل شد، خطای دوم را حاصل کرده‌ایم؛ آن گاه مفروض اوّل را در خطای ثانی ضرب کرده، نامش را محفوظ اوّل می‌گذاریم، و مفروض دوم را در خطای اوّل ضرب کرده، آن را محفوظ ثانی نام می‌نهیم. آن گاه برای استخراج مجهول، اگر هر دو خطا زیادتر یا کمتر (از عدد داده شده) باشند، تفاضل بین دو محفوظ را بر تفاضل بین دو خطا تقسیم می‌کنیم. اما اگر مختلف باشند (یعنی یکی زیادتر و دیگری کمتر باشد)، آن گاه مجموع دو محفوظ را بر مجموع دو خطا تقسیم می‌کنیم.

۵. مثلث حسابی پاسکال، مثلثی است به صورت زیر که در آن، هر عدد (بجز عدد اوّل) مجموع دو عدد بالای سمت چپ و راست آن است و هر سطر ضرایب بسط دوجمله‌ای را به دست می‌دهد :

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

....

۶. ریاضیدان ایرانی، متوفی در حدود ۴۲۰ هجری، نویسندهٔ کتب **الفخری فی (صناعة) الجبر و المقابلة، الکافی فی الحساب، البدیع فی الحساب**، و ...

مراجع:

کاشانی نامه : ابوالقاسم قربانی

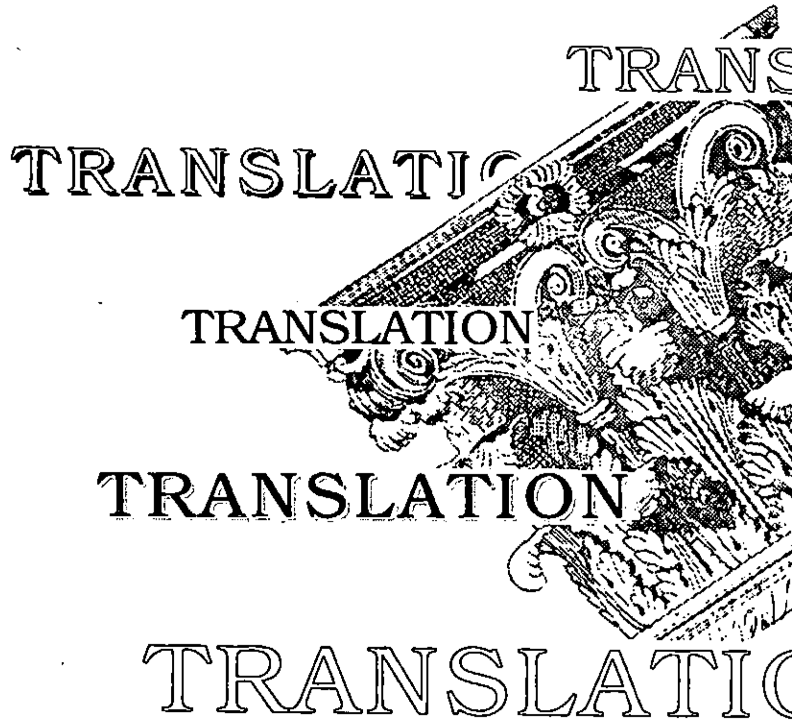
زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی : ابوالقاسم قربانی

خلاصة الحساب : شیخ بهائی

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۲)

از کتاب: Multiple choice Tests in advanced mathematics

● حمیدرضا امیری



Test 6

Time allowed: 1¼ hours

SECTION I

Questions 1–20 **(Twenty questions)**

1. An equation of a circle, with radius r and centre (a, b), is

   A $x^2 + y^2 = r^2 - a^2 - b^2$

   B $x^2 + y^2 + ax + by = r^2 - a^2 - b^2$

   C $x^2 + y^2 - ax - by = r^2 - a^2 - b^2$

   D $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$

   E $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = r^2 - a^2 - b^2$

2. The complete solution set of the inequality

   $$|x - 1| > |x|,$$

   where $x \in \mathbb{R}$, is

   A $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ B $\{x : x < 1\}$ C $\{x : x < \frac{1}{2}\}$

   D $\{x : x < 0\}$ E none of the above

تست ۷

وقت $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

بخش ۱

سؤالهای ۱ الی ۲۰ **(بیست سؤال)**

۱ــ معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و مرکز (a,b) عبارت است از :

۱) $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۲) $x^{۲}+y^{۲}+ax+by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۳) $x^{۲}+y^{۲}-ax-by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۴) $x^{۲}+y^{۲}-۲ax-۲by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۵) $x^{۲}+y^{۲}+۲ax+۲by=r^{۲}-a^{۲}-b^{۲}$

۲ــ مجموعهٔ همهٔ جوابهای نامعادلهٔ $|x-۱|>|x|$ کدام است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) $\left\{x:x>\frac{۱}{۲}\right\}$ ۲) $\{x:x<۱\}$

۳) $\left\{x:x<\frac{۱}{۲}\right\}$ ۴) $\{x:x<۰\}$

۵) هیچ کدام از موارد بالا (قبل)

3. $\frac{1 - 2\cos^2\theta}{1 - 2\sin^2\theta} =$

A -1 B $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

C $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ D $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

E $\frac{\tan^2\theta - 1}{\tan^2\theta + 1}$

۳ـ حاصل $\frac{۱-۲\cos^{۲}\theta}{۱-۲\sin^{۲}\theta}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

۳) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ ۴) $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

۵) $\frac{tg^{۲}\theta-۱}{tg^{۲}\theta+۱}$

4. Given that $\tan\alpha = 3/4$ and $\tan\beta = 4/3$, where α and β are both acute, then $\sin(\alpha + \beta) =$

A $\frac{7}{5}$ B $\frac{24}{25}$

C $\frac{7}{25}$ D 0

E 1

۴ـ فرض کنیم α و β زاویه‌هایی حاده و $tg\alpha = \frac{۳}{۴}$ و $tg\beta = \frac{۴}{۳}$، در این صورت حاصلِ $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۳) $\frac{۷}{۲۵}$ ۴) ۰

۵) ۱

5. $\int \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{9} - x^2)}}\,dx =$

A $\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ + constant

B $\sin^{-1}(3x)$ + constant

C $\sin^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$ + constant

D $\frac{3}{2}\ln(\frac{1}{9} - x^2)$ + constant

E $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1 + 3x}{1 - 3x}\right)$ + constant

۵ـ حاصلِ $\int \frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۹}-x^{۲})}}dx$ کدام است؟

۱) $\sin^{-۱}(\frac{x}{۳})+c$ ۲) $\sin^{-۱}(۳x)+c$

۳) $\sin^{-۱}(\frac{۳}{x})+c$ ۴) $\frac{۳}{۲}Ln(\frac{۱}{۹}-x^{۲})+c$

۵) $\frac{۳}{۲}Ln(\frac{۱+۳x}{۱-۳x})+c$

6. $\frac{d}{dx}(\ln\tan x) =$

A $\ln(\sec^2 x)$ B $\cot x$

C $\frac{2}{\sin 2x}$ D $\frac{1}{\sin 2x}$

E $\sec x$

۶ـ حاصل $\frac{d}{dx}(Lntgx)$ کدام است؟

۱) $Ln(\sec^{۲}x)$

۲) $\cot gx$

۳) $\frac{۲}{\sin ۲x}$

۴) $\frac{۱}{\sin ۲x}$

۵) $\sec x$

7. Given that the roots of the quadratic equation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

where $abc \neq 0$, are α and β, then the roots of the equation

$$16cx^2 + 4bx + a = 0$$

are

A $\frac{1}{4\alpha}$ and $\frac{1}{4\beta}$ B $-\frac{1}{4\alpha}$ and $-\frac{1}{4\beta}$

C $\frac{\alpha}{4}$ and $\frac{\beta}{4}$ D $\frac{4}{\alpha}$ and $\frac{4}{\beta}$

E 4α and 4β

8. $\frac{5-i}{4-3i} =$

A $\frac{1}{5}(23+11i)$ B $\frac{1}{7}(23+11i)$

C $\frac{1}{7}(23-11i)$ D $\frac{1}{25}(23-11i)$

E $\frac{1}{25}(23+11i)$

9. Given that

$$(\lg x)^2 - 4(\lg x) + 3 = 0,$$

where $x \in \mathbb{R}^+$, then
$x =$

A 1 or 3 B 10 or 1000

C 1 or 1000 D $\frac{1}{10}$ or $\frac{1}{1000}$

E 10 or $\frac{1}{1000}$

10. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y = 1$$

is, P being an arbitrary constant,

A $2x + (1-y)^2 = P$ B $2x - (1-y)^2 = P$

C $y = 1 + Pe^x$ D $y = 1 + Pe^{-x}$

E $y = Pe^{-x} - 1$

۷ـ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، که $abc\neq ۰$ در این صورت ریشه‌های معادلهٔ $۱۶cx^۲+۴bx+a=۰$ عبارتند از:

۱) $\frac{۱}{۴\alpha}$ و $\frac{۱}{۴\beta}$ ۲) $-\frac{۱}{۴\alpha}$ و $-\frac{۱}{۴\beta}$

۳) $\frac{\alpha}{۴}$ و $\frac{\beta}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{\alpha}$ و $\frac{۴}{\beta}$

۵) $۴\alpha, ۴\beta$

۸ ـ حاصل $\frac{۵-i}{۴-۳i}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}(۲۳+۱۱i)$ ۲) $\frac{۱}{۷}(۲۳+۱۱i)$

۳) $\frac{۱}{۷}(۲۳-۱۱i)$ ۴) $\frac{۱}{۲۵}(۲۳-۱۱i)$

۵) $\frac{۱}{۲۵}(۲۳+۱۱i)$

۹ـ فرض کنیم $(\log x)^۲-۴(\log x)+۳=۰$ که $x\in\mathbb{R}$، در این صورت x برابر است با:

۱) ۱ یا ۳ ۲) ۱۰ یا ۱۰۰۰

۳) ۱ یا ۱۰۰۰ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$ یا $\frac{۱}{۱۰۰۰}$

۵) ۱۰ یا $\frac{۱}{۱۰۰۰}$

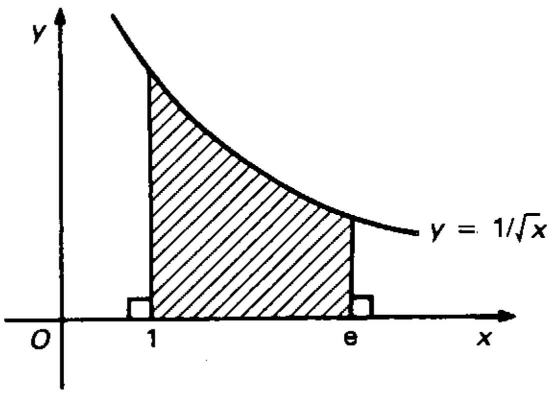
۱۰ـ جوابهای عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}+y=۱$ کدام است؟ (p ثابت دلخواهی است)

۱) $۲x+(۱-y)^۲=p$ ۲) $۲x-(۱-y)^۲=p$

۳) $y=۱+pe^{x}$ ۴) $y=۱+pe^{-x}$

۵) $y=pe^{-x}-۱$

11.

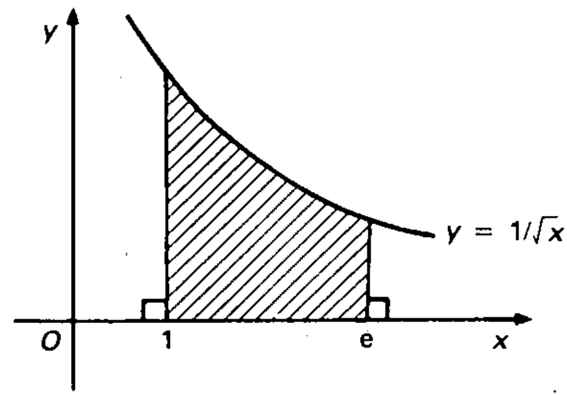


The volume, in cubic units, generated when the shaded region is rotated completely about *Ox* is

A π **B** $\pi(1 - e^{-2})$ **C** $2(e^{1/2} - 1)$

D πe **E** $\pi(e - 1)$

۱۱ـ



حجم تولید شده توسط دورانِ کامل ناحیهٔ هاشور خورده حول محور ox، در واحد حجم کدام است؟

۱) π ۲) $\pi(۱-e^{-۲})$ ۳) $۲(e^{\frac{۱}{۲}}-۱)$

۴) πe ۵) $\pi(e-۱)$

12. The number of different permutations of the letters of the word ROTTEN is

A 6! **B** (6!)/2 **C** (5!) × 2

D 5! **E** (5!)/2

۱۲ـ تعداد جایگشتهای متمایز که می‌توان با حروف کلمهٔ ROTTEN ساخت، کدام است؟

۱) ۶! ۲) $\frac{۶!}{۲}$ ۳) ۵!×۲

۴) ۵! ۵) $\frac{۵!}{۲}$

13. The sum to infinity of a geometric progression of positive terms is 3. When the second term of the progression is subtracted from the first term the result is 4/3. The common ratio of the progression is

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{4}{9}$

D $\frac{1}{2}$ **E** $\frac{1}{3}$ or $\frac{5}{3}$

۱۳ـ حدّ مجموع یک تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت برابر ۳ است. درصورتی که تفاضل دومین جملهٔ این تصاعد و جملهٔ اول برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۵}{۳}$

14. Given that **a** = (3**i** + 4**j**), **b** = (2**i** − **j**), **x** = (**i** + 5**j**) and **x** = *s***a** + *t***b**, then the scalars *s* and *t* are given by

A $s = -1,\ t = -1$ **B** $s = -1,\ t = 1$

C $s = 1,\ t = -1$ **D** $s = 1,\ t = 1$

E $s = \sqrt{5},\ t = 5$

۱۴ـ فرض کنیم a = (۳i + ۴j) و b = (۲i − j) و x = (i + ۵j) و x = sa + tb در این صورت اسکالرهای (اعداد) s و t عبارتند

۱) t = −۱ , s = −t ۲) s = −۱ , t = ۱

۳) s = ۱ , t = −۱ ۴) s = ۱ , t = ۱

۵) s = √۵ , t = ۵

15. All solutions of the simultaneous equations
$2 \cos \theta - \sqrt{3} = 0, \quad 2 \sin \theta + 1 = 0$
are obtained by taking all integer values of n in

A $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$ B $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

C $2n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ D $2n\pi - \frac{\pi}{3}$

E $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۵ـ همهٔ جوابهای دستگاه معادلات $۲\sin\theta+۱=۰$ و $۲\cos\theta-\sqrt{۳}=۰$ با قراردادن مقدار صحیح n در کدامیک (از گزینه‌های زیر) حاصل خواهد شد؟

۱) $n\pi-(-۱)^n\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲n\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۳) $۲n\pi+(-۱)^n\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲n\pi-\frac{\pi}{۳}$

۵) $۲n\pi-\frac{\pi}{۶}$

16. Given that
$\frac{3^x}{9^y} = 27$ and $5^x = \frac{1}{5^{y+1}}$,
where $x, y \in \mathbb{R}$, then y

A $= -4$ B $= 4$

C $= 3$ D $= -4/3$

E cannot be found

۱۶ـ اگر فرض کنیم $\frac{۳^x}{۹^y}=۲۷$ و $۵^x=\frac{۱}{۵^{y+۱}}$ که $x,y\in\mathbb{R}$، در این صورت y کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۵) y ای یافت نمی‌شود

17. The number of asymptotes of the curve $y = \tan x$, where $x \in \mathbb{R}$, is

A 0 B 2 C 4

D 6 E more than 6

۱۷ـ تعداد مجانبهای منحنی $y=\text{tg}x$ وقتی که $x\in\mathbb{R}$ عبارت است از :

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴

۴) ۶ ۵) بیشتر از ۶

18. $\frac{x-1}{x(x+1)} < 0$ for all finite values of x in the interval

A $x > 1$ B $x < 1$ C $x < -1$

D $x > -1$ E $x > 0$

۱۸ـ نامساوی $\frac{x-۱}{x(x+۱)}<۰$ برای مقادیر متناهی x در کدام فاصله برقرار است؟

۱) $x>۱$ ۲) $x<۱$ ۳) $x<-۱$

۴) $x>-۱$ ۵) $x>۰$

19. Which one of the following expressions is not identically equal to any one of the others?

A $\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2\theta}$ B $\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

C $\tan 2\theta$ D $\frac{2 \cot \theta}{\cot^2\theta - 1}$

E $\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2\theta - 1}$

۱۹ـ کدام‌یک از عبارتهای زیر عیناً مساوی با بقیهٔ عبارتها نیست؟

۱) $\frac{۲\text{tg}\theta}{۱+\text{tg}^۲\theta}$ ۲) $\frac{۲\sin\theta\cos\theta}{\cos^۲\theta-\sin^۲\theta}$

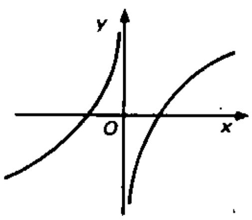
۳) $\text{tg}۲\theta$ ۴) $\frac{۲\cot g\theta}{\cot g^۲\theta-۱}$

۵) $\frac{۲\sin\theta\cos\theta}{۲\cos^۲\theta-۱}$

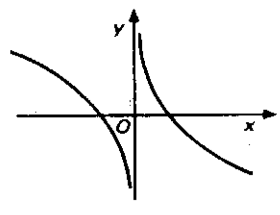
20. The graph of $y = x - \frac{1}{x}$ could be

۲۰– نمودار $y = x - \frac{1}{x}$ کدام می‌تواند باشد؟

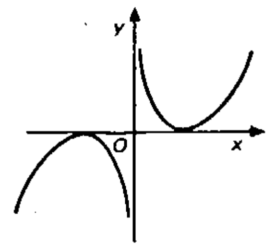
A



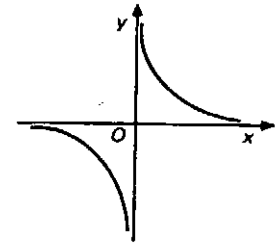
B



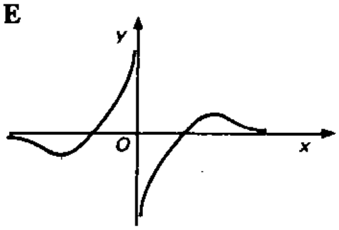
C



D



E



معرفی کتاب معرفی کتاب معرفی کتاب معرفی کتاب

مبانی ریاضیات گسسته
ناشر: نشر اشاره
تألیف: آلبرت د ـ پلیمنی
هـ ـ جوزف استرایت
مترجمان: یداله ایلخانی‌پور

اعظم مجیدی

این کتاب، یکی از مراجع و منابع کتابهای درسی جبر و احتمال سال سوم نظام جدید و ریاضیات گسستهٔ پیش دانشگاهی می‌باشد.

الف. بیان درس و نگارش آن ساده و دانش‌آموزی است و دارای ۵ مبحث، منطق و روشهای اثبات (روش حل مسأله) ـ مجموعه‌ها ـ نظریهٔ اعداد و همنهشتی ـ رابطه و تابع می‌باشد.

ب. کتاب دارای مثالهای متنوع و مسائل حل شدهٔ بسیار است، که جمعاً دارای ۱۲۹ مثال حل شده و ۴۲۸ مسألهٔ حل نشده است، که ۱۶۰ مسألهٔ آن هم مربوط به پایان فصلها است.

ج. در هر مبحث به زبان پاسکال، برنامه و الگوریتم حلّ مسائل به منظور استفاده در کامپیوتر نیز آمده است، و مثالها و تمرینهایی نیز در این زمینه، ضمیمه شده است.

د. مباحث کتاب، علاوه بر پوشش دادن کتابهای درسی جبر و احتمال و ریاضیات گسسته، دارای مطالب اضافی برای دانش‌آموزانی که برای شرکت در المپیادهای ریاضی مشتاق هستند و نیز برای دانشجویان و دبیران رشتهٔ ریاضی می‌باشد. لذا استفاده از این کتاب به تمامی دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان و دبیران ریاضی توصیه می‌شود.

هندسهٔ دلپذیر
ناشر: انتشارات مدرسه
مؤلف: احمد شرف الدین

کتاب «هندسهٔ دلپذیر» اثری است که می‌تواند مورد استفادهٔ استادان، دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان قرار گیرد. بسیاری از مطالب این کتاب، برای دانش‌آموزان آموزنده و سودمند است و علاقه و عشق آنان را به هندسه افزایش می‌بخشد. دبیران می‌توانند از مطالب این کتاب برای دلپذیر ساختن درس خود یاری بجویند. در بخش اوّل کتاب به نام «هندسهٔ دلها»، دربارهٔ قدرت تخیّل آفرینندهٔ استادان نقشگر ایرانی در کاشیکاریها و قالیها، ... سخن رفته است. در بخش دوم کتاب، اساس هندسیِ تعداد زیادی از دستگاه‌های صنعتی شرح داده شده است. در بخش سوم کتاب، مثالهایی برای حلّ و طرح مسائل جبر و آنالیز با هندسه ارائه شده است. در بخش چهارم، چند مثال هندسی که از آن نتایج فلسفی مهم و جالب حاصل می‌شود، مطرح شده است.

نویسندهٔ کتاب در زمینهٔ جبر بول و هندسه تحقیقات متعددی عرضه کرده است و به علاوه تاکنون به طرح چند دستگاه نائل آمده است. از آن میان طرح یک ماشین‌حساب آنالوژیک برای حلّ معادلات جبری است، که ضرایب آنها به پارامترهایی بستگی دارند. توفیق نویسنده در طرح چند دستگاه و علاقهٔ ایشان به هندسه موجب نوشتن کتاب حاضر شده است که قسمت عمدهٔ آن «اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی» می‌باشد. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دبیران، دانش‌آموزان، دانشجویان و علاقه‌مندان ریاضیات توصیه می‌کنیم.

انتگرال کسرهای گویا

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

(قسمت دوم)



فرض کنیم، می‌خواهیم $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ را که در آن $\frac{p(x)}{q(x)}$ یک کسر گویاست، محاسبه کنیم؛ برای این کار ابتدا $\frac{p(x)}{q(x)}$ را به‌صورت حاصل جمع چند کسر ساده نوشته و سپس از این کسرهای ساده انتگرال می‌گیریم. برای نوشتن $\frac{p(x)}{q(x)}$ به کسرهای ساده از قضایای قبل استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{dx}{x^2-1}$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر $\frac{1}{x^2-1}$ را به صورت مجموع دو کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$A=\frac{1}{x+1}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{2} \qquad , \qquad B=\frac{1}{x-1}\bigg|_{x=-1}=\frac{-1}{2}$$

بنابراین:

$$\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

با فرض $C=\frac{\ln|k|}{2}$، خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{k(x-1)}{x+1}\right|$$

مثال: $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$ را حساب کنید.

حل: ابتدا کسر $\frac{1}{x^3+2x^2+x}$ را به صورت مجموع چند کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x(x^2+2x+1)}=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+۱)^۲}+\frac{C}{x+۱}$$

$$A=\frac{۱}{(x+۱)^۲}\bigg|_{x=۰}=۱ \quad , \quad B=\frac{۱}{x}\bigg|_{x=-۱}=-۱$$

برای محاسبهٔ C کافی است، برابری را به ازای $x=۱$ به یک معادلهٔ یک مجهولی تبدیل کنیم:

$$\frac{۱}{۴}=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{C}{۲}\Rightarrow \frac{C}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow C=-۱$$

بنابراین:

$$\int\frac{dx}{x^۳+۲x^۲+x}=\int(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{۱}{x+۱})dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x+۱)^۲}-\int\frac{dx}{x+۱}$$

$$=\ln|x|+\frac{۱}{x+۱}-\ln|x+۱|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+۱}\right|+\frac{۱}{x+۱}+C$$

با فرض $C=\ln|k|$، خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{x^۳+۲x^۲+x}=\ln\left|\frac{kx}{x+۱}\right|+\frac{۱}{x+۱}$$

مثال: $\int\frac{x+۱}{x^۳+۴x}dx$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر گویای $\frac{x+۱}{x^۳+۴x}$ را به صورت مجموع چند کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{x+۱}{x^۳+۴x}=\frac{x+۱}{x(x^۲+۴)}=\frac{A}{x}+\frac{kx+s}{x^۲+۴}$$

$$=\frac{x+۱}{x(x^۲+۴)}=\frac{(A+k)x^۲+sx+۴A}{x(x^۲+۴)}$$

$$x+۱\equiv(A+k)x^۲+sx+۴A$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+k=۰\\ s=۱\\ ۴A=۱\end{cases}\Rightarrow\ s=۱\ ,\ A=\frac{۱}{۴}\ ,\ k=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین:

$$\int\frac{x+۱}{x^۳+۴x}dx=\int(\frac{۱}{۴x}-\frac{x-۴}{۴(x^۲+۴)})dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int\frac{dx}{x}-\frac{۱}{۴}\int\frac{xdx}{x^۲+۴}+\int\frac{dx}{x^۲+۴}$$

$$=\frac{۱}{۴}\ln|x|-\frac{۱}{۸}\ln(x^۲+۴)+\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc\,tan}\frac{x}{۲}+C$$

مثال: $\int\frac{dx}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)}$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا کسر گویای $\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)}$ را به‌صورت مجموع چند کسر ساده می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+۱}+\frac{C}{x+۲}+\frac{D}{x+۳}$$

$$A=\frac{۱}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)}\bigg|_{x=۰}=\frac{۱}{۶},$$

$$B=\frac{۱}{x(x+۲)(x+۳)}\bigg|_{x=-۱}=\frac{-۱}{۲},$$

$$C=\frac{۱}{x(x+۱)(x+۳)}\bigg|_{x=-۲}=\frac{۱}{۲}\ ,$$

$$D=\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)}\bigg|_{x=-۳}=\frac{-۱}{۶}$$

بنابراین:

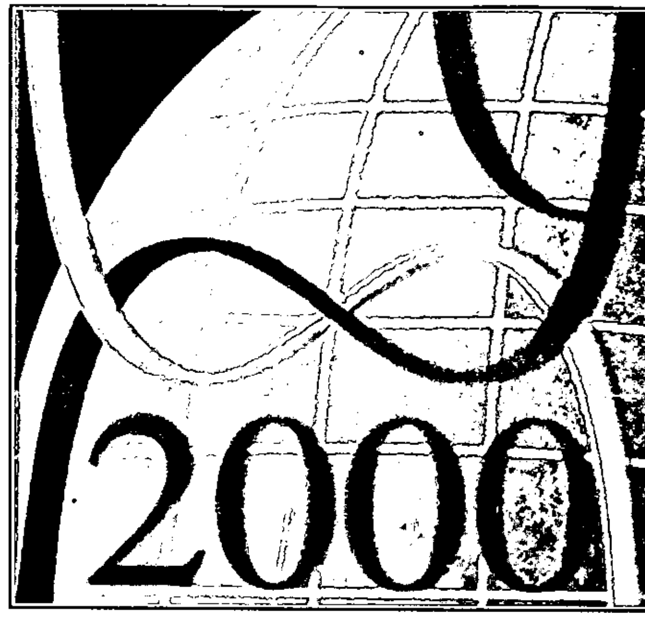
$$\int\frac{dx}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)}=\frac{۱}{۶}\int\frac{dx}{x}-\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{x+۱}+$$

$$\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{x+۲}-\frac{۱}{۶}\int\frac{dx}{x+۳}$$

$$=\frac{۱}{۶}\ln|x|-\frac{۱}{۲}\ln|x+۱|+\frac{۱}{۲}\ln|x+۲|-\frac{۱}{۶}\ln|x+۳|+C$$

$$=\frac{۱}{۶}\ln\left|\frac{x}{x+۳}\right|+\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x+۲}{x+۱}\right|+C$$

گزارشی از سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران



● میرشهرام صدر

سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران با تلاش ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان کرمان و با همکاری انجمن ریاضی ایران و دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان، در روزهای چهارم تا ششم شهریور ماه ۱۳۷۷ در دانشکدهٔ فنی شهید چمران، شهر تاریخی و زادگاه ماهانی ریاضیدان مسلمان و مشهور ایرانی برگزار شد.

در این کنفرانس بیش از ۱۰۰۰ نفر شرکت کننده، اعم از دبیران و معلمان ریاضی، اساتید دانشگاه‌ها و دانشجویان و دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی و میهمانان خارجی شرکت داشتند. این کنفرانس از دو کمیتهٔ اصلی به نامهای کمیتهٔ اجرایی و کمیتهٔ علمی تشکیل شده بود که دبیر کمیتهٔ اجرایی آن آقای مهندس عبدالله نجاتی (رییس دانشکدهٔ فنی چمران کرمان) و دبیر کمیتهٔ علمی آن، آقای دکتر محمود محسنی مقدم (استاد دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان) بودند.

در این کنفرانس از تعداد ۱۲۰ مقاله‌ای که به کمیتهٔ علمی رسیده بود، براساس هدفهای پنج‌گانهٔ زیر، تعداد ۵۳ مقاله جهت سخنرانیهای عمومی، ۴۰ دقیقه‌ای و ۲۰ دقیقه‌ای و همچنین تعداد ۹ مقاله جهت ارائهٔ پوستر پذیرفته شده بود که طی روزهای برگزاری کنفرانس، طبق برنامه و جدول زمانی مشخص، همه مقاله‌ها ارائه گردید و مورد استفادهٔ شرکت کنندگان قرار گرفت. همچنین در این کنفرانس دو میزگرد، تحت عنوانهای «دورنمای ریاضیات در ایران» و «مجلات ریاضی در ایران» تشکیل شد.

هدفهای اصلی این کنفرانس عبارت بودند از :

- ارتقای کیفیت آموزش ریاضی
- اعتلای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی
- پرورش استعدادهای ریاضی
- آشکار ساختن نقش ریاضی
- نوآوری در برنامه‌های درسی و روشهای تدریس ریاضی

مراسم افتتاحیه صبح روز چهارشنبه، چهارم شهریور ساعت ۸/۴۵ با تلاوت آیاتی از قرآن کریم و اجرای سرود جمهوری اسلامی ایران توسط گروه دانش‌آموزی کرمان آغاز شد. سخنران اوّل جلسهٔ افتتاحیه، آقای مهندس محمدتقی زاده، مدیرکل آموزش و پرورش استان کرمان و رییس کنفرانس بودند که پس از خیرمقدم به شرکت کنندگان داخلی و میهمانان خارجی، گزارشی از وضعیت اجمالی آموزش‌و پرورش استان کرمان را به اطلاع حاضران رساندند. دومین سخنران این جلسه، آقای دکتر محمود محسنی مقدم بودند که ضمن خیرمقدم به شرکت کنندگان، دربارهٔ چگونگی برنامه‌های کنفرانس و نحوهٔ داوری مقالات، مطالبی را

بازگو کردند و به نکات مهم زیر اشاره نمودند :

- در آستانهٔ سال ۷۷، در حادثه‌ای جانخراش، تعدادی از نخبگان و ریاضیدانان جوان ایرانی، جان به جان‌آفرین تسلیم کردند.

- پیروزی تیم المپیاد ریاضی ایران و به دست آوردن مقام اول در دنیا را تبریک عرض می‌نمایم.

- اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان «IMU» سال ۲۰۰۰ میلادی را سال جهانی ریاضیات نام نهاده است.

سوّمین سخنران جلسهٔ افتتاحیه، آقای دکتر رضوی سرپرست تیم المپیاد کشور و نمایندهٔ مجلس مردم کرمان در ارتباط با نحوهٔ برگزاری المپیاد امسال مطالبی را بازگو کردند. همچنین ایشان فرمودند :

دوازده سال قبل، دانش‌آموزان ایرانی برای اوّلین بار در المپیاد کوبا شرکت کردند و در طی این چند سال با تلاش معلمان دلسوز و دانش‌آموزان به لطف خدا توانستیم مقام اوّل را در المپیاد ریاضی به دست آوریم.

چهارمین سخنران این جلسه، آقای دکتر فانی معاونت برنامه‌ریزی و نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش بودند که مطالبی را به صورت زیر مطرح کردند :

در برنامه‌های جدید آموزش و پرورش باید گروه‌های آموزشی مناطق و استانها فعال باشند و در تألیف کتابهای درسی و طرح و بررسی سؤالات، فعالیت و مشارکت داشته باشند. در این نوع کنفرانسها باید بیشتر در آموزش ریاضی به معلمان راهنمایی و ابتدایی توجه کرد. در کنفرانسهای بعدی بهتر است به موضوعاتی که اشاره می‌کنم، توجه شود :

۱ـ درس ریاضی به عنوان درسی شیرین مورد قبول دانش‌آموزان قرار گیرد، زیرا متأسفانه فرزندان ما از این درس به عنوان درسی تلخ یاد می‌کنند.

۲ـ نقد کتابهای درسی و ارائهٔ الگوهای جدید برای تألیف کتابهای درسی.

۳ـ روشهای ایجاد انگیزه نزد معلم و دانش‌آموز.

۴ـ تحوّل در نظام ارزشیابی و انتقال به سطحهای بالاتر.

۵ـ برگزاری این کنفرانسها با تأکید بر آموزش ریاضیات ابتدایی.

همچنین در این مراسم استاد الهی قمشه‌ای در رابطه با ریاضیات و خداوند سخنرانی کردند که بسیار قابل استفاده و مورد تأیید همهٔ شرکت کنندگان قرار گرفت.

یکی از سخنرانان عمومی این کنفرانس که باعث هرچه پربارتر-شدن این کنفرانس گردید، استاد پرویز شهریاری بودند. ایشان سخنرانی خود را دربارهٔ آموزش ریاضی و موانعی که سد راه آموزش هستند، ایراد کردند، که خلاصه سخنرانی ایشان از این قرار است :

ریاضیات را نباید به صورت فرمولی یاد گرفت، بلکه باید آن را به همراه تاریخ و فلسفه و حتی معماهای ریاضی تدریس کرد. امّا متأسفانه در روزگار ما همهٔ این موارد به صورت تئوری و بدون عمل است.

به نظر من، موانع و محدودیتهایی بر سر راه معلم در جهت آموزش ریاضی موجود است که عبارتند از :

۱ـ کنکور دانشگاه‌ها که به صورت تستی برگزار می‌شود. این امر باعث شده که دانش‌آموز از مقطع راهنمایی مایل به حلّ تست است، بدون این که ریاضی را با استدلال و به طور عمیق یاد بگیرد.

۲ـ تا زمانی که مسألهٔ برنامه‌ریزی به صورت فعلی «یعنی پُشت درهای بسته انجام گیرد» کار آموزش ما به سامان نمی‌رسد. به نظر من باید ابتدا طرحهایی در انجمن معلمان شهرستانهای مختلف مطرح شود و برآیند این طرحها برای کل کشور به اجرا درآید.

۳ـ مسألهٔ تأمین نیازهای زندگی و معیشتی معلّمان، همان مسألهٔ تأمین آیندهٔ جامعه است.

میهمانان خارجی این کنفرانس، آقای دکتر علی حاج جعفر از دانشگاه اوهایو امریکا و خانم دکتر هارت از انگلستان بودند که سخنرانیهای خود را دربارهٔ آموزش ریاضی ارائه کردند.

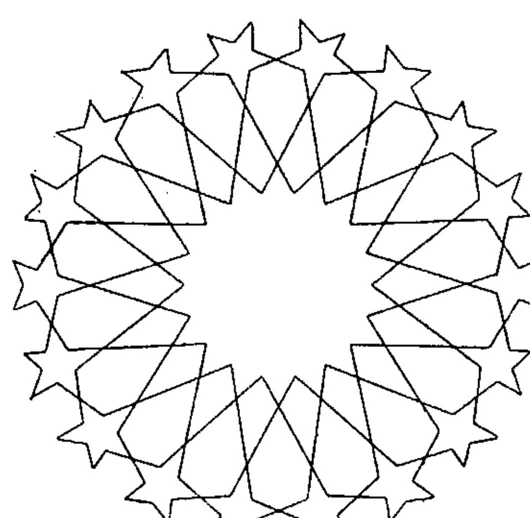
در این کنفرانس، دو میزگرد برپا شد که اوّلین میزگرد در بعداز ظهر روز اوّل برگزاری کنفرانس با هدف دورنمای آموزش ریاضی در ایران با حضور آقایان دکتر رجالی، دکتر رجبعلی‌پور، دکتر بهبودیان و دکتر تومانیان و سرکار خانم دکتر گویا تشکیل شد، که پس از بحث و تبادل نظر بین شرکت کنندگان و اعضای میزگرد به این نتیجه رسیدند که وضعیت آموزش ریاضی در ایران رو به بهبودی است. دومین میزگرد در بعدازظهر روز آخر برگزاری کنفرانس قبل از برنامهٔ اختتامیه، با هدف بررسی مشکلات و وضعیت مجلات ریاضی در ایران با حضور آقایان دکتر رجالی، شهریاری، امیری، تابش و سرکار خانم دکتر گویا تشکیل شد.

پس از بحث و تبادل نظر این نتیجه حاصل شد که تعداد مجلات ریاضی در ایران انگشت‌شمار است و باید برای دانش‌آموزان

پایه‌های مختلف تحصیلی، معلمان ریاضی و دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضی، مجله‌های مختلف و متنوعی با هدفهای مشخص شده چاپ و توزیع شود. همچنین در این جلسه آقای حمیدرضا امیری به عنوان یکی از اعضای میزگرد پس از برشمردن اهداف و مشخص کردن مخاطبان مجله‌های ریاضی برهانِ دبیرستان و راهنمایی از همهٔ دبیران و ریاضیدانان، تقاضای همکاری نموده و به نقشی که مقاله‌های ریاضی و نشر آنها می‌تواند در جامعهٔ ریاضی و آموزش ریاضی داشته باشد، اشاره کردند.

جلسهٔ اختتامیهٔ این کنفرانس، روز جمعه ششم شهریور از ساعت ۱۶ تا ۱۷ با حضور کلیهٔ شرکت‌کنندگان در کنفرانس و مقامات استان کرمان و افتخارآفرینان المپیاد جهانی ریاضی برگزار شد. در این جلسه نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران، جناب آقای دکتر بابلیان از زحمات همهٔ دست‌اندرکاران برگزاری این کنفرانس و کمیته‌های علمی و اجرایی تشکر و قدردانی نمودند. همچنین در این جلسه از مدعوین خارج از کشور و افتخارآفرینان المپیاد جهانی ریاضی قدردانی شد و به آنها نیز هدایایی به عنوان یادبود اهدا گردید.

در خاتمه باید از همهٔ دست‌اندرکاران، کمیته‌های علمی و اجرایی سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی تشکر و قدردانی کرد که با عشق و علاقه وافر توانستند این کنفرانس را برپا کنند. امید است که هر ساله با برپایی این گونه کنفرانسها بتوانیم در راستای عمومی‌تر کردن ریاضی و ارتقای سطح علمی معلمان ریاضی، گامهای بلندتری برداریم.





تفریح اندیشه ۳



مهرداد و علی با دو مهرهٔ مکعب شکل بازی می‌کنند. اما آنها سطح مهره‌ها را نقطه‌گذاری نکرده‌اند بلکه بعضی سطحها را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده‌اند.

آنها این دو مهره را همزمان پرتاب می‌کنند. مهرداد وقتی برنده است که سطح فوقانی هر دو مهره پس از افتادن روی زمین از یک رنگ باشند، و علی وقتی برنده است که دو سطح مزبور رنگهای متفاوت داشته باشند. به این ترتیب شانس برنده شدن برای هر دو یکسان است.

مهرهٔ اولی ۵ وجهش قرمز، و یک وجهش آبی است. مهره دیگر چند وجهش قرمز است؟

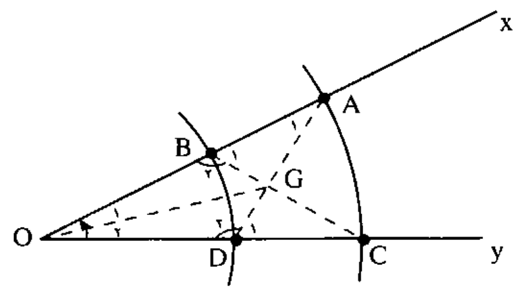
● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

• سیامک جعفری

دو روش در ترسیم نیمساز یک زاویه

روش اوّل:



زاویهٔ $\angle xoy$ مفروض است. هرگاه به مرکز O و به شعاع متفاوت، دو کمان بزنیم، چهار نقطه در تلاقی با اضلاع زاویه ایجاد می‌شود، که اگر آنها را به هم وصل کنیم، OG نیمساز زاویه خواهد شد.

برهان:

$$(AO=CO, BO=OD, \hat{O}=\hat{O}) \Rightarrow A\overset{\Delta}{D}O = C\overset{\Delta}{B}O$$

بنابراین: $\hat{B}_۲=\hat{D}_۲\ ,\ \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۱$

و $AB = AO - BO = CO - DO = CD$

ازطرفی:

$$(AB=CD, \hat{B}_۱=\hat{D}_۱, \hat{A}_۱=\hat{C}_۱) \Rightarrow A\overset{\Delta}{G}B = C\overset{\Delta}{G}O$$

پس: $\Rightarrow BG = DG$

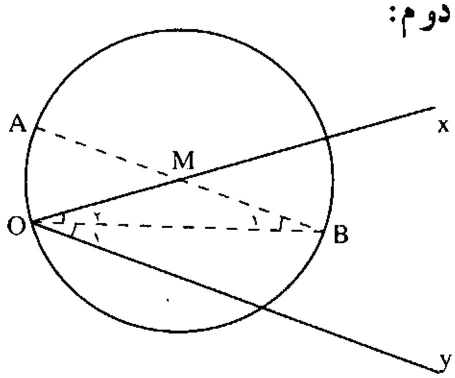
و بالاخره

$$(BG=DG, \hat{B}_۲=\hat{D}_۲, BO=DO) \Rightarrow B\overset{\Delta}{G}O = D\overset{\Delta}{G}O$$

بنابراین $\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$

لطف این روش نسبت به روش کلاسیک ترسیم، آن است که در این جا نوک سوزنی پرگار ثابت است و تنها دهانهٔ پرگار، دو بار باز می‌شود. می‌توانید به عنوان تمرین، روش مثلثاتی برای برهان پیدا کنید.

روش دوم:



باز هم زاویهٔ $\angle xoy$ مفروض است. نقطهٔ دلخواهی را روی ضلع OX انتخاب و به مرکز آن و شعاع OM دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطهٔ M خطی به موازات ضلع دیگر زاویه رسم می‌کنیم. دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، که پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه است.

برهان:

$AB \parallel OY \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{O}_۱$ (۱)

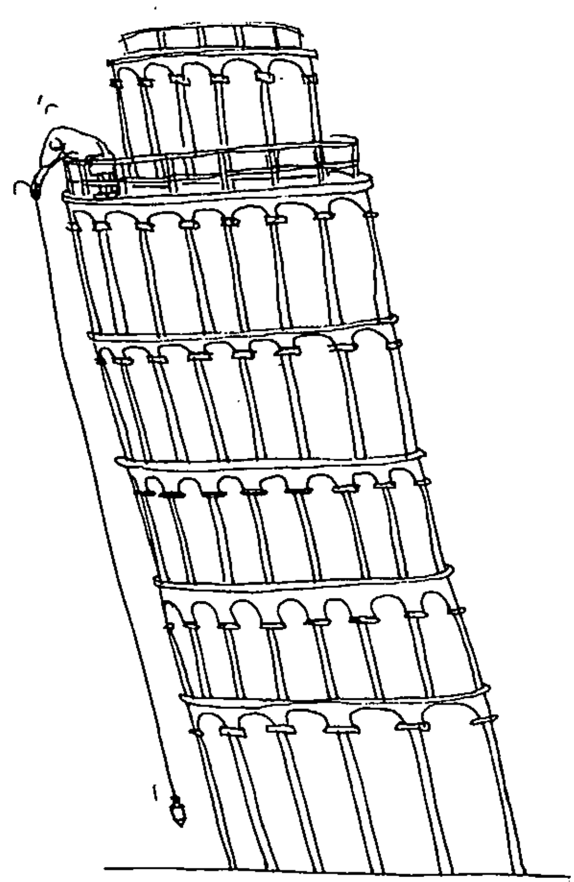
آشکار است که مثلث ΔAOB قائم‌الزاویه است؛ زیرا AB قطر دایره است. OMخط نیمساز خواهد بود.

$OM=MB \Rightarrow \hat{O}_۲=\hat{B}_۱$ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$

$AO \perp OB \Rightarrow OA$ نیمساز خارجی

به عنوان تمرین، روش اخیر را به کمک خط کش انجام دهید. ملاحظه می‌کنید دراین روش، نیمساز خارجی نیز به دست می‌آید.



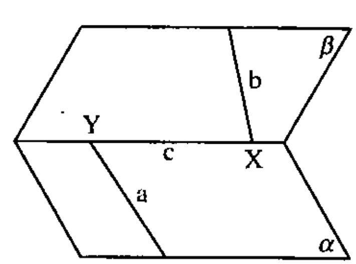
یک مسألهٔ ساختمانی هندسهٔ فضایی

● پرویز شهریاری

مسأله‌های ساختمانی ساده‌ای در هندسهٔ فضایی وجود دارند که در بسیاری از مسأله‌های پیچیده‌تر به آنها برخورد می کنیم. در این گونه مسأله‌ها، هم تجسّم فضایی شکل و هم رسم آنها در روی صفحه، اهمیّت جدّی دارد، و هردو جنبه، علاوه بر اطلاع از قانونهای رسم، به تمرین نیازمندند.

مسأله‌هایی را که در این جا آورده‌ایم، در اغلب کتابهای درسی پیدا می‌شوند و شاید از ساده‌ترین مسأله‌های هندسهٔ فضایی باشند؛ ولی گمان می‌رود که توجه به آنها، بتواند برای تسلّط بر مسأله‌های فضایی مفید باشد.

مسألهٔ ۱. از نقطهٔ مفروض M، خط راستی بگذرانید که دو خط راست متنافر a و b را قطع کند. در ضمن، نقطهٔ M متعلق به خطهای راست a و b نیست.



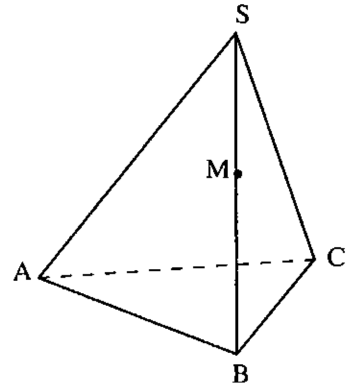
شکل ۱

حل. c را خط راست مجهول می گیریم. صفحه‌ای را که از خطهای راست a و c می گذرد α، وصفحه‌ای را که از خطهای راست b و c می گذرد، β می‌نامیم.

چون M روی خط راست c $(M \in c)$ و c فصل مشترک دو صفحهٔ α و β $(c = \alpha \cap \beta)$ است، پس نقطهٔ M، به هر دو صفحهٔ α و β تعلّق دارد ($M \in \alpha$ و $M \in \beta$). بنابراین، اگر مسأله جواب داشته باشد، داریم $c = \alpha \cap \beta$، که در آن $\alpha = (M, a)$ و $\beta = (M, b)$. روی شکل (۱)، خط راست مجهول c، خطهای راست a و b را، بترتیب، در نقطه‌های y و x قطع کرده است.

به بررسی جواب بپردازیم. دیدیم خط راست مجهول، روی فصل مشترک دو صفحهٔ α و β است (ولی از این‌جا نمی‌توان نتیجه گرفت که، خط راست مجهول، تنها به کمک صفحه‌های α و β به‌دست می‌آید؛ خواهید دید، مسأله راه حل دیگری هم دارد). این، به معنای آن است که، هر خط راستی که بجز فصل مشترک دو صفحهٔ α و β انتخاب شود، نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد. α و β نمی‌توانند بر هم منطبق باشند؛ زیرا خطهای راست a و b متنافرند و نمی‌توانند روی یک صفحه قرار گیرند. بجز این $M \in \alpha \cap \beta$، یعنی $\alpha \cap \beta$، خط راست مورد نظر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مسأله بیش از یک جواب ندارد. البته ممکن است a موازی c یا b موازی c درآید که، در این صورت، مسأله

جواب ندارد.



شکل ۲

ممکن است تصور فضایی این راه حل، برایتان دشوار باشد و نتوانید در ابتدا، موقعیت متقابل خطهای راست a، b و c و صفحه‌های α و β را مجسّم کنید. در این صورت، می‌توانید برای خودتان یک مُدل مقوایی بسازید یا، مثلاً نقطهٔ M و خطهای راست a و b را روی یک چهاروجهی مشخص کنید (مثل چهاروجهی SABC در شکل ۲). باید خط راستی را بیابیم که از نقطهٔ M بگذرد و دو خط راست SA و BC را (که متنافرند) قطع کند.

بسادگی می‌توان متوجه شد که SB، همان خط راست مجهول است. ویژگیهای این خط راست را روشن کنیم : SB فصل مشترک دو صفحهٔ SAB و SBC است ؛ یعنی SB فصل مشترک دو صفحهٔ α و β است ؛ به نحوی که α، از نقطهٔ M و خط راست SA، و β از نقطهٔ M و خط راست BC می‌گذرند.

وقتی راه حل مسأله را بررسی می‌کنید، پاسخ دادن به این پرسشها اهمیت جدّی دارد :

۱. از کجا نتیجه می‌شود، که مسأله بیش از یک جواب ندارد؟

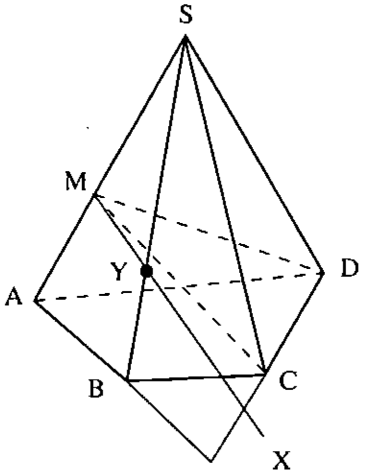
۲. با چه شرطی، مسأله جواب دارد؟

۳. با این که خط راست c، به‌عنوان فصل مشترک دو صفحه α و β همیشه وجود دارد، ممکن است مسأله جواب نداشته باشد. چرا؟

۴. آیا ممکن است با مفروض بودن نقطهٔ M و خطهای راست a و b، مسأله جوابی نداشته باشد؟

برای این که حلّ مسألهٔ ۱ را بهتر بفهمیم، خوب است چند بار به راه حلّ کلی مراجعه کنیم، و سپس خودمان مسأله‌های مشخصی برای آن طرح کنیم. مانند :

مسألهٔ ۲. هرم SABCD و نقطهٔ M روی یال SA داده شده است. از نقطهٔ M خط راستی بگذرانید که خطهای راست SB و CD را قطع کند.



شکل۳

حل. همان‌طور که در حلّ مسألهٔ ۱ دیدیم، خط راست مجهول، تنها می‌تواند، فصل مشترک دو صفحهٔ $\alpha=(MSB)$ و $\beta=(MCD)$ باشد. برای به‌دست آوردن این خط راست، کافی است نقطهٔ برخورد خط راست CD را با صفحهٔ α به‌دست آوریم (شکل ۳). ساختمان به این ترتیب انجام می‌شود :

۱) $X=(CD)\cap(MSB)$ ؛ $(AB)\cap(CD)=X$

۲) (MX) خط راست مورد نظر است.

این مسأله، راه حلّ دیگری از مسألهٔ ۱ را به‌ما تلقین می‌کند. فرض کنید صفحهٔ α ازنقطهٔ M و خط راست a بگذرد و خط راست b صفحهٔ α را در X قطع کند. خط راست مجهول (MX) است، اگر $(MX)\cap a\neq\varnothing$. روی شکل ۱، $(MX)\cap a=Y$.

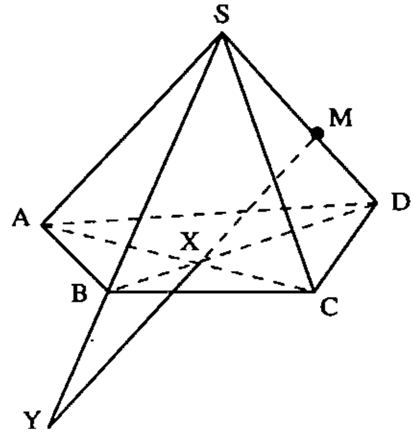
برای این که نقطهٔ X را پیدا کنیم، کافی است صفحهٔ دلخواه γ را از خط راست b بگذرانیم. اگر d فصل مشترک دو صفحهٔ γ و α باشد، آن وقت $X=b\cap d$.

در مسألهٔ ۲، $a=(SB)$، $b=(CD)$، $\alpha=(MSB)$، $\gamma=(ABCD)$، $d=(AB)$ باید به دو نتیجه‌ای که ناشی از دو روش راه حل برای مسألهٔ ۱ است، توجه کنیم :

۱. اگر مسألهٔ ۱ جواب داشته باشد، آن‌وقت $c=\alpha\cap\beta$ خط راست مجهول است.

۲. اگر مسألهٔ ۱ جواب داشته باشد، آن‌وقت $c=(MX)$ خط راست مجهول است که، در آن $X=b\cap d$ این دو نتیجه یکدیگر را نقض نمی‌کنند ؛ زیرا $\alpha\cap\beta=(MX)$.

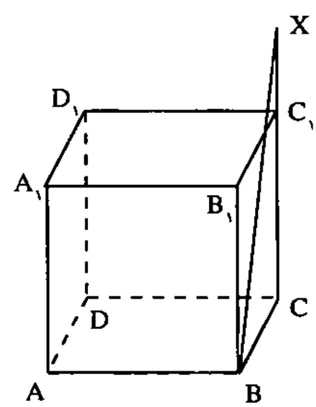
مسألهٔ ۳. هرم SABCD مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر یال SD خط راستی بگذرانید که خطهای راست SB و AC را قطع کند.



شکل۴

حل. برای یافتن خط راست مجهول، کافی است نقطهٔ برخورد خط راست AC با صفحه $\alpha = (SBD)$ را پیدا کنیم.
نقطهٔ $X = (AC) \cap (BD)$ را به‌دست می‌آوریم (شکل ۴).
در این صورت $X = (AC) \cap \alpha$ و MX خط راست مجهول است. البته با شرط $(MX) \cap (SB) \neq \varnothing$.

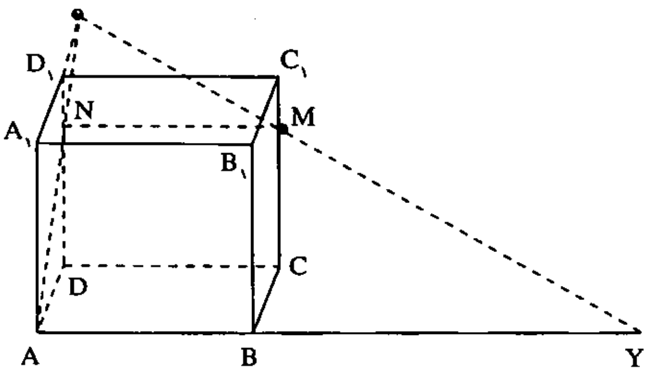
مسألهٔ ۴. مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ $M \in [B_1C_1]$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطه M بگذرد و خطهای راست AB و CC_1 را قطع کند.



شکل۵

حل. MB خط راست مورد نظر است (شکل ۵). در واقع
$(MB) \cap (AB) = B \;,\; (MB) \cap (CC_1) = x$

مسألهٔ ۵. مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ $M \in [CC_1]$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و خطهای راست AB و A_1D_1 را قطع کند.



شکل۶

حل. اگر از راه حلّ دوم مسألهٔ ۱ استفاده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که خط راست مجهول MX است شکل (۶) که در آن

$X = (A_1D_1) \cap (MBA)$

برای رسم، به این ترتیب، عمل می‌کنیم:

۱) $(AN) = (MBA) \cap (AA_1D_1D)$ ؛ $N \in (DD_1)$ ؛

۲) $X = (AN) \cap (A_1D_1)$ ؛ $X = (A_1D_1) \cap (MBA)$ ؛

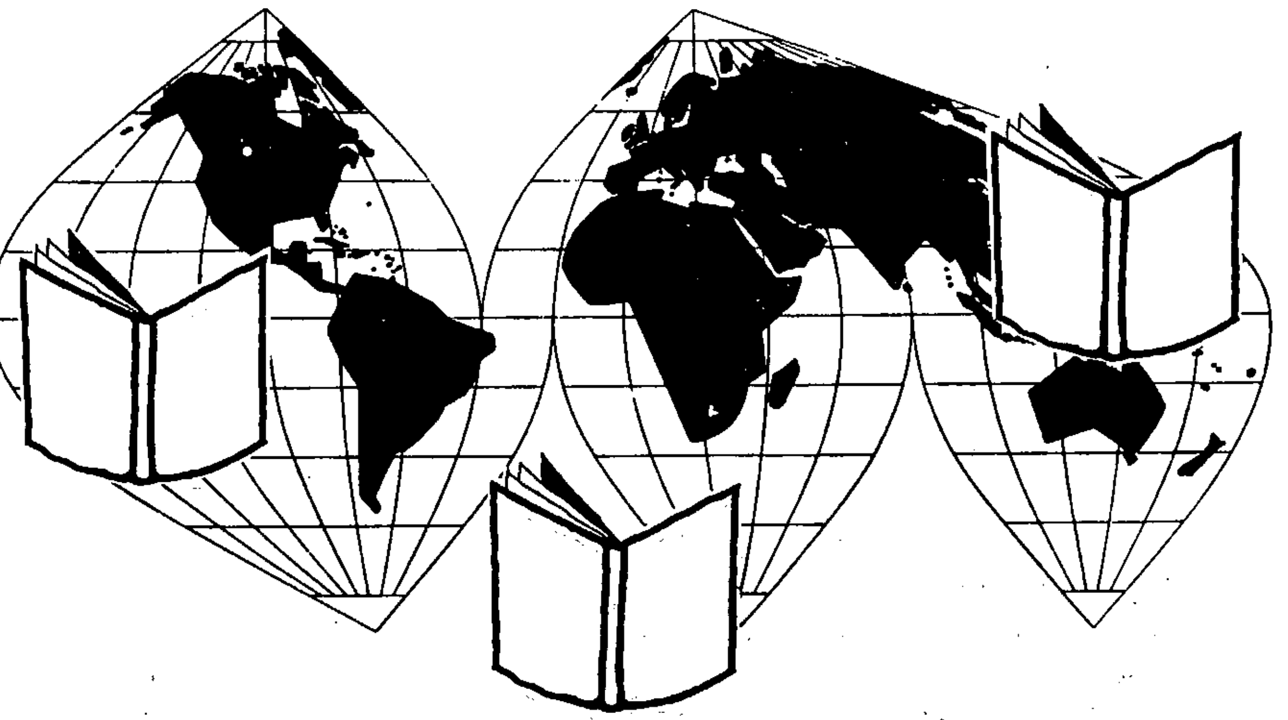
۳) MX خط راست مجهول است.

روی شکل ۶ $(MX) \cap (A_1D_1) = X$ ، $(MX) \cap (AB) = Y$

با هر انتخاب نقطهٔ M بین C و C_1، مسأله جواب دارد.

مسائل مسابقه‌ای

۱ـ ۶ مهرهٔ آبی و ۱۱ مهرهٔ سفید وجود دارد، به چند طریق می‌توانیم این مهره‌ها را در یک ردیف از راست به چپ کنار هم قرار دهیم، هرگاه بخواهیم بلافاصله بعد از هر مهرهٔ آبی لااقل یک مهرهٔ سفید قرار داشته باشد.



مقاله‌های کوتاه از مجلّه‌های ریاضی معتبر جهان (۲۳)

تحقیق در هندسهٔ مثلّث به کمک کامپیوتر

Adrian Oldknow
The Mathematical Gazete
Volume 79 Number 485 July 1995

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

این مقاله، کاربرد تعدادی از ابزارهای کامپیوتری را در تحقیقات هندسی، همراه با نمایش جبری مناسب اجزای وابسته به مثلث، بررسی می کند. این روشها، برای به‌دست آوردن نتایج جدید، در هندسهٔ مثلث به کار رفته است. مقاله با صورتی تعمیم یافته از مقالهٔ داده شده در کنفرانس ۱۹۹۴ «ایستر»، با نام و نشان زیر است:

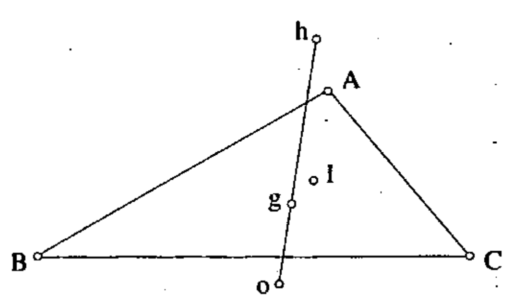
How do computeres change the way we do mathematics?
Association's 1994 Easter Confenence

آدمی، در پاسخ این پرسش می ماند که چه چیزی بیش از هندسهٔ محتشم مثلث، که زمانی در مرکز توسعهٔ ریاضیات و برنامهٔ آموزشی قرار داشته، بیگانه‌تر از کامپیوتر فراگیر در همه‌جای دیگر بوده است؟

امروزه، نرم‌افزارهایی کامپیوتری موجودند که ترسیمات کلاسیک خط کش نامدرّج و پرگار را انجام می‌دهند. در این مورد، می‌توان ترسیمهای بغرنجی را انجام داد و اشکال حاصل را برای کمک به تجسّم هرگونه تغییرناپذیری موجود، تغییر شکل داد.

در این باره Cabri Géométre [1]، از فرانسه، و Geometer's Sketchpad [2]، از ایالات متحده، هر دو قابل استفاده در PC و Mac، و به قیمت دانشجویی در دسترسند.

هزیک از این دو کشور، مقدار قابل توجهی هندسهٔ کلاسیک در برنامهٔ آموزشی خود دارند. فیلیپ دیویز "Philip J.Davies" در [3]، احتمالاً آینده‌ای درخشان را برای هندسهٔ مثلث، مورد بحث قرار داده است.



شکل ۱

در شکل ۱، I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، g، مرکز ثقل، o، مرکز دایرهٔ محیطی و h، محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC را در یک نمودار، برای به‌دست آوردن روابطشان با یکدیگر، درنظر

می‌گیریم. I به عنوان تقاطع نیمسازهای داخلی زوایای مثلث مشخص شده، g برخورد میانه‌هاست (میانه، یعنی، از A به نقطهٔ وسط BC)، o برخورد عمود منصّفهای اضلاع مثلث و h تلاقی ارتفاعات آن است (ارتفاع، یعنی، عمود از A بر BC). نرم‌افزار هندسی انجام ترسیمها، برچسب‌زدن نقاط، مخفی‌کردن ترسیمها و ردگیری مواضع نسبی نقاط را به این صورت که، مثلاً، رأس A با استفاده از ماوس "mouse"، به این طرف و آن طرف صفحهٔ مانیتور کشیده شود، آسان می‌کند. به این طریق، بسادگی ملاحظه می‌شود که در حالت عمومی، سه نقطه از این چهارنقطه ـ اما نه هر چهار ـ بر یک خط قرار می‌گیرند. انجام چنین «کشفیاتی»، بخصوص در مواقعی که انتظار ایجاد آنها می‌رود، آسان است!

نرم‌افزار هندسی، می‌تواند در مورد زدن و آزمایش کردن حدسها بسیار سودمند باشد. اما می‌شود آنچه که صفحهٔ مانیتور نمایش می‌دهد، در اثر اشتباه اپراتور در تعریف شیوهٔ ترسیم، یا به علت اشکال در نرم‌افزار، خطا باشد، و نیز چنین نرم‌افزاری، نمی‌تواند هیچ‌گونه نتایجی را در کاربرد ریاضی به طور متعارف پذیرفته نشدهٔ عبارت مورد بحث اثبات کند. همچنین نرم‌افزارهای دیگری وجود دارد که می‌توانند به جستجوگر هندسی کمک کنند؛ اما این نرم‌افزارها به تجرید اندازه‌گیریها و دستگاه تعمیم‌یافته‌ای برای نمایش نقاط در صفحه نیازمندند. البته، نرم‌افزار هندسی مورد بحث، چنین نمایشی را به‌طور درونی به‌کار می‌برد؛ ولی ما نمی‌توانیم به آن دسترسی داشته باشیم. در این صورت، با صریح کردن نمایش مزبور می‌توان آن را با دقتی بیشتر مورد بررسی قرار داد. می‌توان درمورد نمایشها، به کمک دستگاهی جبری، از قبیل *درایو* "derive"[4]، به کار پرداخت.

اگر نمایشهای مورد بحث را به‌طور عددی ارزیابی کنیم، آن‌گاه می‌توانیم برای به‌کاربردن آنها، از صفحهٔ گسترده "spread sheet"ای، چون *MathCAD [5]*، یا زبان برنامه‌نویسی‌ای، چون *True BASIC [6]* استفاده کنیم. درهریک از این حالتها، کاربر می‌تواند زمینهٔ تحقیق مناسبی برای مسألهٔ تحت بررسی تعریف کند که از زمینه‌های قابل دسترس واقع در منوهای نرم‌افزار هندسی به‌کاررفته، وسیعتر باشد. در مورد بسته‌های نرم‌افزاری "software packages"[4]، [5] و [6] نیز قیمتهای دانشجویی موجودند.

دراین صورت، یک دستگاه مناسب نمایش، برای استفاده در مثلث، کدام است؟ یکی از موارد نامزد برای این کار، استفاده از بردارهاست. به بردارهای A، B و C با مبدئی دلخواه، می‌توان بردارهای مکانی "position vector"، a، b و c را نسبت داد و در این صورت، عبارت ظریف زیر را برای مرکز ثقل خواهیم داشت:

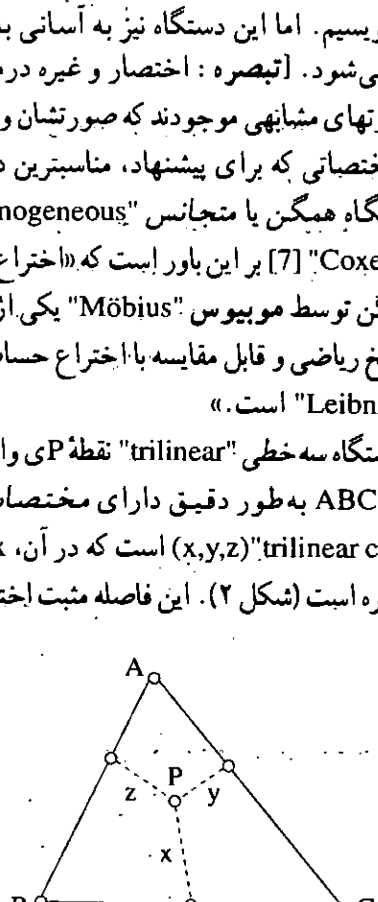
$$g = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/۳$$

اما متأسفانه، این کار خیلی سریع، با گرفتاریهای بسیار مواجه می‌شود!

دستگاه متعارف مختصات دوبعدی دکارتی نیز با تقارن ذاتی و «سه‌تایی بودن» "threeness" مثلث در تعارض است. در این مورد، گرچه می‌توان نتایجی را با زحمت به دست آورد؛ اما نتایج به‌دست آمده، بندرت بصیرتی به‌دست می‌دهند. گاهی اوقات درنظرگرفتن صفحه به عنوان نمودار «**آرگاند**» "Argand diagram" و نمایش نقاط به صورت اعداد مختلط در صورت قطبی، با ارجاع به مبدئی معیّن سودمند است. به‌عنوان مثال، با مرکز دایرهٔ محیطی به عنوان مبدأ و شعاع دایرهٔ محیطی به‌صورت یکه، می‌توانیم سه زاویهٔ دلخواه را اختیار کرده، A را به صورت e^{ia} و غیره بنویسیم. اما این دستگاه نیز به آسانی به عبارتهای مفصّل منجر می‌شود. [**تبصره**: اختصار و غیره درمواقعی به کار می‌رود که عبارتهای مشابهی موجودند که صورتشان واضح است.]

دستگاه مختصاتی که برای پیشنهاد، مناسبترین دستگاه به‌نظر می‌رسد، دستگاه همگن یا *متجانس* "homogeneous" است. **کاکسیتر** "Coxeter" [7] بر این باور است که «**اختراع دستگاه‌های مختصات همگن توسط موبیوس** "Möbius" یکی از دیریاب‌ترین مفاهیم در تاریخ ریاضی و قابل مقایسه با اختراع حساب دیفرانسیل **لایب‌نیتز** "Leibniz" است.»

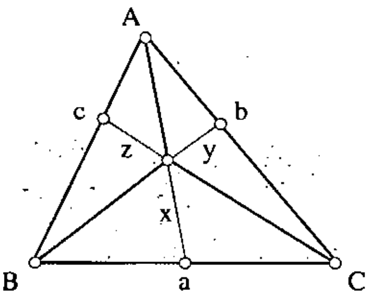
در یک دستگاه *سه‌خطی* "trilinear" نقطهٔ Pی واقع در صفحهٔ مثلث مرجع ABC به‌طور دقیق دارای **مختصات سه‌خطی** "trilinear coordinates"(x,y,z) است که در آن، x فاصلهٔ P از ضلع BC و غیره است (شکل ۲). این فاصله مثبت اختیار می‌شود؛



شکل ۲

اگر P نسبت به BC هم‌طرف با A باشد و صفر اگر بر BC قرار داشته باشد، و منفی، اگر غیر از این دو صورت باشد

واضح است که سه مقدار x، y و z مستقل نیستند و رابطه‌شان را با طولهای a، b و c ی اضلاع و Δ مساحت مثلث می‌توان با استفاده از تقسیم ABC به سه مثلث BPC، CPA و APB ملاحظه کرد (شکل ۳). ملاحظه می کنیم که :



شکل ۳

$$ax + by + cz = 2\Delta \qquad (۱)$$

این معادله، استفاده از دستگاه ساده شدهٔ مختصات سه خطی‌ای موسوم به *انتخاب* "choice" را مجاز می‌کند. فرض می‌کنیم k، عامل مشترکی از مختصات سه‌خطی x، y و z از P باشد ؛ بنابراین :

$$(x, y, z) = k(x', y', z')$$

در این‌صورت، می‌توانیم با استفاده از k انشعاب کرده (x', y', z') را به عنوان انتخابی برای P به‌دست دهیم. از آن‌جا که نیاز به رفتن از این انتخاب به مختصات دقیق داریم، می‌توانیم k را بار دیگر از :

$$k = 2\Delta/(ax' + by' + cz') \qquad (۲)$$

به‌دست آوریم. به این ترتیب، به عنوان مثال، سه‌خطی‌های دقیق I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، عبارت‌اند از (r,r,r)، که در آنها r مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است، و

$$(r, r, r) \equiv (1,1,1)$$

را، برای به‌دست دادن انتخابی آسانتر برای I، می‌نویسیم. درنتیجه، انتخاب سادهٔ $(1,0,0)$ را برای A و غیره داریم.

خواننده می‌تواند با استفاده از مثلثات، موارد زیر را اثبات کند :

نقطهٔ وسط BC $\quad A''(0, 1/b, 1/c)$ و غیره

مرکز ثقل $\quad g(1/a, 1/b, 1/c)$

مرکز دایرهٔ محیطی $\quad o(\cos A, \cos B, \cos C)$

نقطهٔ تلاقی ارتفاعات

$$h(\cos B \cos C, \cos C \cos A, \cos A \cos B)$$

یا $\quad (\sec A, \sec B, \sec C)$

مگر این که مثلث قائم‌الزاویه باشد.

مرکز ۹ـ نقطه

$$n(\cos(B-C), \cos(C-A), \cos(A-B))$$

در این جا توان الگوهای واقع در حروف به‌کار رفته، آغاز می‌شوند. یک «مرکز» دارای مختصاتی است که به‌طور مساوی در حروف a، b، c، A، B و C ارزیابی می‌شود. در چنین حالتهایی، کافی است که تنها مختص اوّل را به دست آوریم ومثال اخیر را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$(\cos(B-C), \cdots)$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقاط P_1 و P_2 با مختصات (x_1, y_1, z_1)، (x_2, y_2, z_2) توسط دترمینان

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۳)$$

داده می‌شود ؛ زیرا ضرب هر سطر در عامل k مقدار دترمینان را در k ضرب می‌کند.

به این ترتیب، معادلهٔ عمومی خط دارای صورت :

$$lx + my + nz = 0$$

است و مثالهای آن عبارت‌اند از ضلع BC: $x = 0$ و غیره و نیمساز AI: $y - z = 0$ و غیره. معادلهٔ $ax + by + cz = 0$ شامل هیچ نقطهٔ حقیقی‌ای از صفحه نیست ؛ چه این خط، خطی در *بی‌نهایت* است. در صورتی که نقاط P_1، P_2 و P_3 همخط باشند، می‌توان از دترمینان (۳)، با قراردادن مختصات P_3 در سطر اوّل آن، برای آزمون این مطلب استفاده کرد. خواننده می‌تواند همخط بودن o، g و h را آزمایش کرده و معادلهٔ خط مربوطه را به دست آورد.

به این ترتیب، مختصات سه‌خطی، ابزاری سودمند برای کاربرد است ؛ اما متأسفانه اغلب کتابهای مربوط به روشهای استفاده از آنها قدیمی‌اند! کتاب Sommerville [8] بخصوص منبعی پرمایه دراین زمینه است.

بین اندازه‌های مثلث، روابط مفیدی موجودند که قاعدهٔ

کسینوسها یکی از آنهاست.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

و غیره. پیرامون مثلث عبارت است از : $a+b+c=2s$ ، فرمول هِرون "Heron" برای Δ ، مساحت مثلث، عبارت است از :

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad (۴)$$

و به شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، توسط

$$r = \Delta / s \qquad (۵)$$

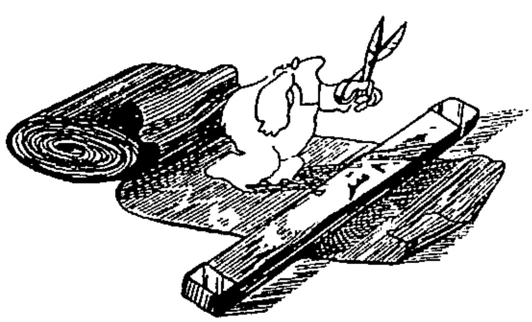
داده می‌شود.

علاوه بر نقاط I، o، g، h و n ی که هم‌اکنون آنها را ذکر کردیم، در رابطه با مثلث عمومی، نقاط و دایره‌های بسیاری موجودند که نام کاشفان خود را دارند. (هم‌ارز هندسی زیست‌شناسی!) که بعضی از آنها در زمان ما به‌طور کامل ناشناخته و گمنامند. علاوه بر نقطهٔ **فرما** "Fermat"، نقاط **لموایِن** "Lemoine"، **بروکار** "Brocard" و **ژرگون** "Gergonne" و دایره‌های **آپولونیوس** "Apollonius"، **تاکر** "Tucker" و **فویرباخ** "Feuer bach" موجودند. خمهای دیگری نیز وجود دارند و از آن قبیل‌اند مکان **هذلولوی** "hyperbolic locus" و **پوش سهموی** "parabolic envelope" **کی‌پرت** "Kiepert" و **مکعبیهای نُوی‌برگ** "cubic of Neuberg". بجز **خط اویلر** "Euler"، **خطوط سیمسون** "Simson" موجودند که پوش دلتاوار **اشتاینر** "Steiner doltoid" هستند، که با **مثلث مورلی** "Morley triangle" مرتبط است. بسیاری از این دستاوردهای جذّاب را می‌توان در Wells[9] یافت که چنین از **سریل** "Crelle" نقل قول می‌کند : «این موضوع بس شگفت‌انگیز است که شکلی بسادگی مثلث، این گونه ویژگیهای پایان‌ناپذیر دارد».

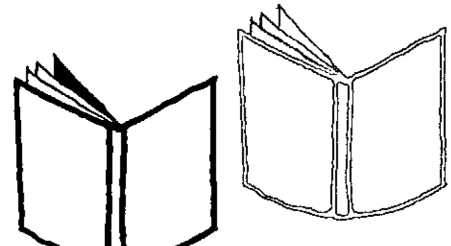
ادامه دارد



تفریح اندیشه ٤



پارچه‌فروشی می‌خواهد پارچه‌هایش را با ۴۰٪ سود بفروشد. اما وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری به کار می‌برد طول مناسبی ندارد. به همین دلیل متوجه می‌شود که به جای ۴۰٪ سود فقط ۳۹٪ سود عایدش شده است. طول وسیله‌ای راکه او برای اندازه‌گیری به کار برده است تعیین کنید.



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

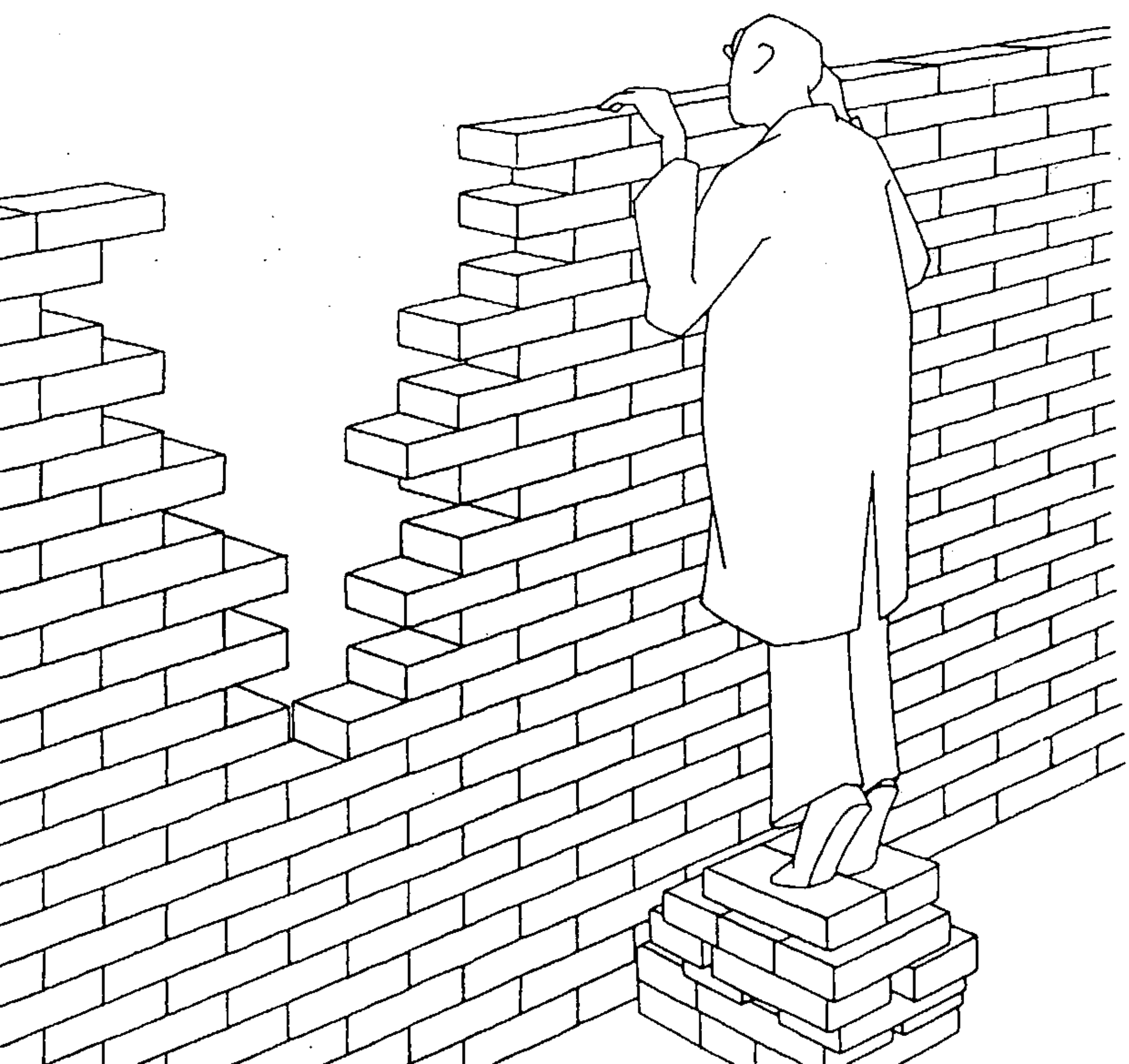
جواب در صفحهٔ ۸۸

مسألهٔ حلّ مسأله‌های ریاضی (قسمت دوم)

● عبدالحسین مصحفی

سرمایه‌گذاری

دستیازی به هرکاری، یک سرمایه می‌خواهد و کامیابی و پیشرفت در آن کار، به کارایی در درست به‌کار بردن آن سرمایه بستگی دارد. کارایی که باشد، همراه با پیشرفت کار، سرمایه هم افزایش می‌یابد و بهره‌دهی بیشتر را به دنبال می‌آورد. حل مسأله‌های ریاضی هم یک کار است. سرمایهٔ این کار چیست، از چه راه می‌توان آن را افزایش داد و کارایی در آن چگونه به‌دست می‌آید؟ شاید بگویید که سرمایهٔ مورد نیاز برای حلّ مسأله‌ها، مجموعهٔ درسهایی است که آموخته‌اید و آنچه این سرمایه را افزایش می‌دهد، درسهایی است که خواهید آموخت. اگر در آموختن درسها ذهن خود را به گونهٔ فعال به‌کار نینداخته و تنها به حفظ کردن آنها (آن هم تا زمان امتحان) بسنده کرده باشید، باید گفت که از این راه هیچ سرمایه‌ای را که به کارآید، فراهم نیاورده‌اید. اگرهم آموخته‌های



شما با ژرف‌نگری و همراه با فعالیت ذهنی فراهم آمده باشند، بازهم باید گفت که تنها بخشی از سرمایهٔ لازم را تشکیل می‌دهند. بخش اصلی سرمایهٔ لازم برای حل مسأله‌های ریاضی را مسأله‌هایی تشکیل می‌دهند که آنها را با به‌کاربردن اندیشهٔ خودتان حل کرده‌باشید. هر مسأله‌ای را هم که به همین گونه حل کنید، افزوده‌ای بر سرمایه به‌شمار می‌آید و این افزوده، آن‌گاه چندین برابر خواهد بود، که پس از دستیابی به راه حلّ یک مسأله و به‌دست آوردن جواب آن، کار را پایان یافته ندانید. بررسی راه حلّ انجام یافته دستیابی به راه حلهای گوناگون آن مسأله و سنجش آنها با هم، پی‌بردن به مسأله‌های خویشاوند با آن مسأله، تعمیم مسأله، و سرانجام کاربردهای آن در حلّ مسأله‌های دیگر، کارهایی هستند که اگر پس از حلّ هر مسأله، آنها را انجام دهید، کارایی و ورزیدگی شما را در حلّ مسأله‌ها دربی خواهد داشت.

بهره‌وری از سرمایه

برای آن‌که مسأله‌هایی هرچه بیشتر را حل کنید، باید دربی آن باشید تا به مسأله‌های بیشتری دست یابید. دسترسی به کتابهای درسی از دور خارج شده و از مؤلفان مختلف، به کتابها و جزوه‌های گوناگون حلّ مسأله، به مجلّه‌های ریاضی، و بویژه به کتابهایی که مسأله‌های تاریخی را شرح می‌دهند، از جمله راه های دستیابی شما به مسأله‌های گوناگون است. نکته‌ای مهم که باید به آن توجه داشته باشید، این است که به هر مسأله‌ای دست می‌یابید، اگر با حلّ آن همراه است، آن راه حل را نادیده بگیرید و بکوشید تا آن مسأله را با فکر خودتان حل کنید. اگر چنین نکنید و برآن باشید تا راه‌حلّ مسأله ها را با خواندن از روی کتاب یاد بگیرید، ذهن خود را تنبل بار می‌آورید و ورزیدگی و توانایی برای حلّ مسأله‌ها را به‌دست نخواهید آورد. پس از آن‌که به راه حلّ مسأله و جواب آن دست یافتید، آن‌گاه راه حلّی را که خودتان به کار برده‌اید و راه‌حلّی را که در کتاب به‌کار رفته است، با هم بسنجید. اگر راه حلها متفاوتند، مشخص کنید که کدام یک ساده‌تر است و وقت کمتری را می‌برد، و اگر جوابهای به‌دست آمده یکی نیستند، راه حلها را بررسی و مشخص کنید که درکدام یک و کجا اشتباه شده است. درکتابها و جزوه‌ها اشتباه‌های چاپی و غیر آن پیش می‌آید. اگر آن مسأله را در جاهایی دیگرهم بیابید و راه حلهای گوناگون آن را با هم بسنجید، برای ورزیدگی ذهنی شما تأثیر بهتری خواهد داشت.

مثال۱. درمجموعه‌ای از پرسشهای چند گزینه‌ای، به این پرسش برخورده‌اید : معادلهٔ

$$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=1$$

چند جواب دارد؟

الف) دو جواب　　ب) بیش از دو جواب

ج) تنها یک جواب　　د) هیچ جواب

به این نکته توجه دارید که $\sqrt{a^2}$ برابر با $|a|$ و در حالت نامنفی بودن a برابر با a و درحالت منفی بودن a برابر با $-a$ است، پس می‌نویسید :

$$|x+1|+|x-1|=1 \qquad (1)$$

و چنین استدلال می کنید : هریک از دو جمله‌ایهای $x+1$ و $x-1$ می‌تواند نامنفی یا منفی باشد. اگر هر دو نامنفی باشند، خواهیم داشت :

$$(x+1)+(x-1)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

اگر هر دو منفی باشند، داریم :

$$(-x-1)+(-x+1)=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

و اگر یکی از آنها نامنفی و دیگری منفی باشد، x حذف می‌شود و معادله به یک برابری ناممکن تبدیل می‌شود و جواب ندارد.

از استدلالی که به‌کار برده‌اید، نتیجه می‌گیرید که معادلهٔ داده شده دو جواب می‌تواند داشته باشد. اما به پاسخنامه که مراجعه می‌کنید، می‌بینید که گزینهٔ (د) را درست دانسته است. راه حلّ خود را باز می‌نگرید و می‌بینید که استدلالتان درست است. به این فکر می‌افتید که نکند در پاسخنامه،اشتباه چاپی روی داده است. برای آن‌که بفهمید این فکرتان بجاست یا نه، برآن می‌شوید که جوابهای به‌دست آمده را در معادله امتحان کنید. با این کار درمی‌یابید که هیچ کدام در معادله صدق نمی‌کنند. پی می‌برید که خودتان درجایی اشتباه کرده‌اید. در جُست و جوی این اشتباه متوجه می‌شوید که اگر دو جمله‌ایها هردو نامنفی باشند :

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$$

و از این رو، جواب $x=\frac{1}{2}$ پذیرفته نیست و اگر دو جمله‌ایها هردو منفی باشند :

$$\begin{cases} x+1<0 \\ x-1<0 \end{cases} \Rightarrow x<-1$$

و جواب $x=-\frac{1}{2}$ هم پذیرفته نیست. می‌پذیرید که معادله بدون جواب است. این بار به راهنمای حل مسأله مراجعه می‌کنید. با شگفتی می‌بینید که راه‌حلّ مسأله خیلی ساده‌تر از راهی است که شما به‌کاربرده‌اید: در معادلهٔ (۱)، اگر x نامنفی باشد، مقدار $|x+1|$ ناکوچکتر از ۱ است و چون با مقدار مثبت $|x-1|$ جمع شود، حاصل از ۱ بزرگتر می‌شود. پس اگر x نامنفی باشد، معادله جواب ندارد. اگرهم x منفی باشد، مقدار $|1-x|$ بزرگتر از ۱ است و با مقدار مثبت $|x+1|$ هم که جمع شود، باز بزرگتر از ۱ است و باز هم معادله جواب ندارد.

مثال ۲. در یک مجلهٔ ریاضی، با این مسأله روبه‌رو می‌شوید:
اگر a عددی گویا باشد، مقدار آن را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید:

$$8(a+2\sqrt{2})^3 = 315+236\sqrt{2}$$

این رابطه را بسط می‌دهید، نسبت به a مرتّب می‌کنید و به‌دست می‌آورید:

$$8a^3+48\sqrt{2}a^2+192a-108\sqrt{2}-315=0 \qquad (1)$$

و برآن می‌شوید تا عبارت معادله را تجزیه کنید. روشهای گوناگون تجزیه را به کار می‌برید و سرانجام به‌دست می‌آورید:

$$12\sqrt{2}(4a^2-9)+8a^3+192a-315=0$$
$$12\sqrt{2}(2a+3)(2a-3)+8a^3+192a-315=0$$

اگر بتوانید یکی از دو عامل $2a+3$ یا $2a-3$ را از سه جمله‌ای درجهٔ سوّم استخراج کنید، به تجزیهٔ عبارت دست می‌یابید. پس چنین عمل می‌کنید:

$$\begin{aligned}8a^3+192a-315 &= 8a^3-27+27+192a-315\\ &= 8a^3-27+192a-288\\ &= (2a-3)(4a^2+6a+9)+96(2a-3)\\ &= (2a-3)(4a^2+6a+105)\end{aligned}$$

و رابطهٔ داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$(2a-3)\left[4a^2+6(4\sqrt{2}+1)a+36\sqrt{2}+105\right]=0$$

عبارت داخل کروشه نسبت به a از درجهٔ دوم است و مبیّن آن را حساب می‌کنید و خواهید داشت:

$$\begin{aligned}\Delta' &= 9(4\sqrt{2}+1)^2-4(36\sqrt{2}+105)\\ &= -123-72\sqrt{2}<0\end{aligned}$$

پس این سه‌جمله‌ای جواب ندارد و جواب معادلهٔ (۱) عبارت است از:

$$2a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

راه حلّی طولانی را به‌کار برده‌اید؛ اما خشنودید که به جواب دست یافته‌اید. اما پس از آن‌که شمارهٔ بعدی مجله به دستتان می‌رسد با تعجب می‌بینید که این مسأله هم راه حلّی ساده‌تر دارد. معادلهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود:

$$(8a^3+192a-315)+(48a^2-108)\sqrt{2}=0$$

حاصل جمع یک مقدار گویا با یک مقدار گنگ، تنها آن‌گاه برابر صفر است که هریک از آن دو مقدار، صفر باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}8a^3+192a-315=0 & (2)\\ 48a^2-108=0 & (3)\end{cases}$$

از معادلهٔ (۳) داریم:

$$48a^2-108=12(2a-3)(2a+3)$$
$$2a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$
$$2a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

معادلهٔ (۲) نمی‌تواند جواب منفی داشته باشد (زیرا حاصل جمع سه عدد منفی نمی‌تواند صفر باشد) و جواب $a=-\frac{3}{2}$ پذیرفته نیست. جواب $a=\frac{3}{2}$ را هم درمعادلهٔ (۲) امتحان می‌کنیم که در آن صدق می‌کند؛ بنابراین، معادلهٔ (۱) جواب یکتای $a=\frac{3}{2}$ دارد.

مسأله‌ای را با فکر خودتان حل کرده‌اید، از این‌رو، راه حلّ دیگری را که برای آن یافته‌اید، با علاقه و دقّت ازنظر می‌گذرانید، و چون درمی‌یابید این راه حل بر پایهٔ یک ویژگی مهم انجام گرفته است، که تاکنون یا بر آن آگاهی نداشته‌اید، یا به اهمیت آن پی نبرده بودید، شادمان می‌شوید و این ویژگی در خاطرتان پابرجا می‌ماند.

یادآوری. کاربرد این مسأله درتجزیهٔ رادیکالهای مرکب با فرجهٔ ۳ است:

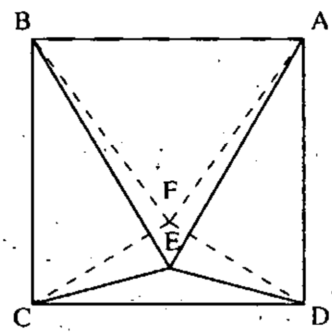
$$\sqrt[3]{315+236\sqrt{2}}=2\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\right)=3+4\sqrt{2}$$

سنجش راه حلهای یک مسأله

برای ورزیده شدن در حل مسأله‌های ریاضی، نباید به دستیابی

به راه حل یک مسأله بسنده کنید. سعی کنید نه تنها خودتان آن را از راه یا راه‌های دیگری هم حل کنید؛ بلکه از جاهای گوناگون هم راه حلهایی را که برای آن به کار رفته است، به‌دست آورید. پس ازآن، این راه حلها را باهم بسنجید و ببینید هرکدام از آنها چه امتیازی دارد.

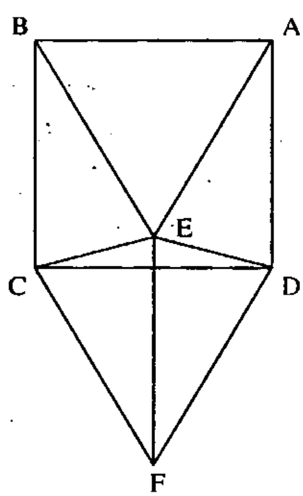
مثال ۳. در داخل مربع ABCD نقطهٔ E چنان به‌دست آمده که مثلث ECD متساوی‌الساقین و هر زاویهٔ مجاور به CD از آن برابر با ۱۵ درجه است. ثابت کنید: زاویهٔ AEB به اندازهٔ ۶۰ درجه است.



۱) بسادگی درمی‌یابید که AE با BE برابر و مثلث AEB متساوی‌الساقین است و کافی است ثابت کنید این مثلث متساوی‌الاضلاع است. پس چنین استدلال می‌کنید؛ چون هریک از دو مثلث AEB و CED به رأس E متساوی‌الساقین است، نقطهٔ E بر عمودمنصف دو ضلع AB و CD از مربع واقع است. اگر مثلث AEB متساوی‌الاضلاع نباشد، نقطهٔ F بر عمودمنصف دو ضلع AB و CD وجود خواهد داشت، که مثلث ABF متساوی‌الاضلاع باشد. در این صورت، هریک از زاویه‌های ABF و BAF برابر ۶۰ درجه و هریک از زاویه‌های FAD و FBC برابر ۳۰ درجه است. از برابری AF و همچنین BF با AB نتیجه می‌شود AF با AD و BF با BC برابر است. مثلثهای ADF و BCF متساوی‌الساقین‌اند و هریک از زاویه‌های ADF و BCF برابر ۷۵ درجه و هریک از زاویه‌های FDC و FCD برابر با ۱۵ درجه و مثلث FCD همان مثلث ECD است و F بر E واقع و مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است.

۲) دریک کتاب می‌بینید که برای حلّ این مسأله، پس از اثبات برابری AE با BE چنین استدلال شده است: اگر AE با AB برابر نباشد، یا از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر است. درحالت AB > AE، زاویهٔ AEB باید از هریک از دو زاویهٔ EAB و EBA بزرگتر و بنابرآن، باید به اندازه‌ای بیش از ۶۰ درجه باشد. در این صورت، زاویهٔ AED به اندازه‌ای کمتر از ۷۵ درجه و کوچکتر از زاویهٔ ADE خواهد بود. نتیجه می‌شود AD < AE که خلاف فرض AB > AE است و تناقض پیش می‌آید. در حالت AB < AE به روش مشابه به‌دست می‌آید AD > AE و باز تناقض وجود خواهد داشت. بنابراین AB = AE و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.

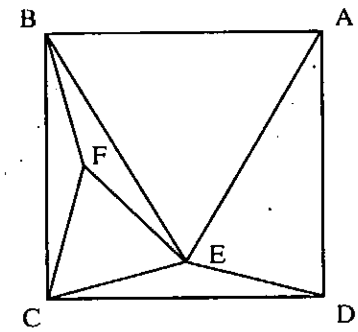
۳) دریک کتاب دیگر: مثلث متساوی‌الاضلاع CDF مطابق با شکل رسم می‌شود. پاره خط EF که عمود منصف CD است، با AD موازی است و دو مثلث ADE و FDE باهم برابرند؛ زیرا FD که با CD برابر است، با AD نیز برابر است و دو زاویهٔ EDF و EDA که هردو به اندازهٔ ۷۵ درجه‌اند، باهم برابرند و ضلع DE درهر دو مثلث مشترک است. از برابری این دو مثلث، به دست می‌آید که دو زاویهٔ FED و AED باهم برابر و هرکدام به اندازهٔ ۷۵ درجه‌اند. بنابراین، مثلث ADE متساوی‌الساقین است و AE با AD و در نتیجه با AB برابر است و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



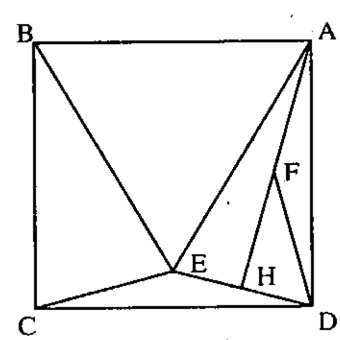
۴) در یک مجلهٔ ریاضی، مثلث BCF برابر با مثلث CDE مطابق با شکل رسم می‌شود. از برابری CF با CE و از این که هریک از زاویه‌های BCF و DCE به اندازهٔ ۱۵ درجه است، به دست می‌آید که زاویهٔ ECF به اندازهٔ ۶۰ درجه و مثلث CEF متساوی‌الاضلاع و EF با BF برابر است.

از این که زاویه‌های BFC و CFE به ترتیب به اندازه‌های

۱۵۰ و ۶۰ درجه‌اند. نتیجه می‌شود، زاویهٔ BFE به اندازهٔ ۱۵۰° است و دو مثلث BFC و BFE با هم برابرند و بنابرآن، BE با BC و با AB برابر است و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



۵) در همان مجلّه: مطابق با شکل، مثلث AFD برابر با مثلث CDE رسم می‌شود و AF امتداد می‌یابد تا در H با DE برخورد کند. از این‌که هریک از دو زاویهٔ FAD و FDA به اندازهٔ ۱۵ درجه‌اند، نتیجه می‌شود که زاویهٔ FDH به اندازهٔ ۶۰ درجه و زاویهٔ DFH به اندازهٔ ۳۰ درجه است. زاویهٔ H از مثلث DFH به اندازهٔ ۹۰درجه می‌شود و در این مثلث قائم‌الزاویه، ضلع DH نصف ضلع DF و بنابرآن، نصف ضلع DE است. AH عمود-منصف DE است و AE با AD و با AB برابر و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



از مقایسهٔ راه حلّی که خودتان به‌کار برده‌اید، با چهار راه حلّ دیگری که به آنها دست یافته‌اید، چه نتیجه‌هایی را به‌دست می‌آورید؟ غیر از آن‌که درمی‌یابید از این راه‌حلها، کدام ساده‌تر درک می‌شود، کدام با برهان مستقیم و کدام با برهان غیرمستقیم یا برهان خلف ثابت شده است، برای توضیح دادن کدام یک مدت زمان کمتری صرف می‌شود، آیا بر نکته‌ها و ویژگیهای تازه‌ای آگاهی یافته‌اید؟ آیا نکته‌ها و ویژگیهایی را فراموش کرده بودید و اکنون به یادتان آمد؟ آیا راه حلّ تازه‌ای از مسأله به نظرتان رسیده است؟ و سرانجام آن که، کدام مسألهٔ ساده، در حالت عکس، به این مسأله تبدیل شده است؟

تمرین ۲:

۱ـ از دو رابطهٔ زیر که نسبت به a و b از درجهٔ دومند، رابطه یا رابطه‌هایی را بین a و b به‌دست آورید که نسبت به a و b از درجهٔ یکم باشند. راه حلهایی گوناگون را می‌توانید به‌کار ببرید. درهرحال، جوابها را امتحان کنید.

$$\begin{cases} 3a^2 - 7ab + 2b^2 = 8 \\ a^2 + 2ab - 8b^2 = 7 \end{cases}$$

۲ـ کدام عبارت جبری است که نسبت به x و y از درجهٔ دوم، متقارن و متجانس (=همگن) باشد و اگر $x = y$ حاصل عبارت صفر شود و اگر

$$x = \sqrt[4]{\frac{7 - 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}} \quad \text{و} \quad y = \sqrt[4]{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}}}$$

حاصل عبارت برابر با ۲۴ شود.

۳ـ ثابت کنید اگر $x + y + z = a$ ، آن‌گاه:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

۴ـ به فرض $-1 \leq y \leq 1$ و $y \neq 0$ و

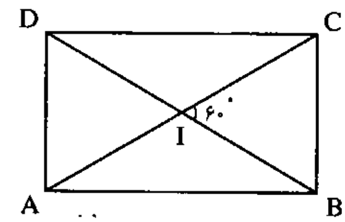
$$\operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$$

y را به صورت تابعی از x و به ساده‌ترین صورت به‌دست آورید.

۵ـ کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که اگررقم سمت راست آن به سمت چپ آن برده شود، عددی یک‌و نیم برابر آن عدد به‌دست آید.

۶ـ مستطیل ABCD که دو قطر آن در I باهم برخورد می‌کنند و باهم زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند، مطابق با شکل صفحه بعد داده شده است. نخست انتقالی روی آن انجام می‌گیرد که نقطهٔ I را روی نقطهٔ B می‌برد. آن‌گاه تقارن آن نسبت به رأس D به‌دست می‌آید. سرانجام به مرکز D و به زاویهٔ α درجه در جهت عکس

حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌یابد که دراین حالت، رأس A در جای نخستین خود واقع می‌شود. زاویهٔ α چند درجه است؟آخرین وضع مستطیل چگونه است؟ برایند سه تبدیل یاد شده، چه تبدیلی است؟



حلّ مسأله‌های تمرین ۱:

۱ـ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ -1\leq x\leq 1\end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

اما در حالت $x=\pm 1$ معادله به رابطهٔ نامکن $2=0$ تبدیل می‌شود. پس مجموعهٔ جواب معادله، تهی است.

۲ـ میانگین حسابی دو عدد مثبت نابرابر از میانگین هندسی آنها بزرگتر است؛ زیرا:

$$(a-b)^2>0 \Rightarrow a^2+b^2-2ab>0$$

$$a^2+b^2+2ab>4ab \Rightarrow (a+b)^2>4ab$$

$$a+b>2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

از این رو پاره‌خط MN به قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه نزدیکتر است و $a>b$.

۳ـ دو مجموعه باهم برابرند.

۴ـ دو مثلث BCD و BCM متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BM}{BC}=\frac{BC}{CD} \Rightarrow BM=\frac{b^2}{a},$$

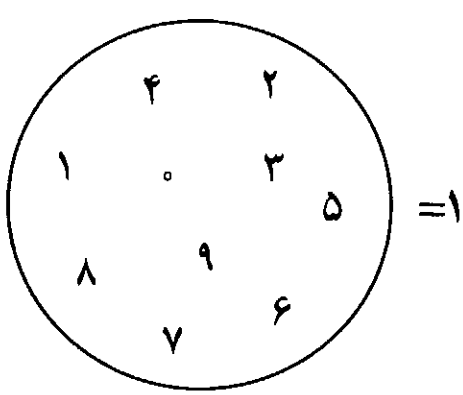
$$AM=AB-BM=a-\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}$$

۵ـ g جملهٔ هفتم از تصاعد هندسی با جملهٔ اوّل A و با قدر نسبت $k=\frac{b}{a}$ است.

$$\begin{cases} g=a\cdot k^6=\frac{b^6}{a^5} \\ g=9a\end{cases} \Rightarrow \frac{b^6}{a^6}=9,\ \frac{b}{a}=\sqrt[3]{3}$$

۶ـ عمود MK بر AB رسم می‌شود. ارتفاع CH چه بیرون و چه درون مثلث باشد، MK برابر با نصف CH و در نتیجه، برابر با نصف AM است. اما MK ارتفاع مثلث AMB است و نصف AM که باشد، بنابر آنچه در مثال ۹ ثابت شد، زاویهٔ MAB یا ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه است.





با چند عمل سادهٔ حسابی و فقط یک بار استفاده از ارقام ۰ تا ۹، می‌تواند حاصل، عدد ۱ باشد؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



فصلی از کتاب FAMOUS PROBLEMS

• ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۳)

معادلات جبری که با استفاده از ریشه‌های دوم حل‌پذیرند

قضایا[1]ی زیر که از نظریهٔ معادلات جبری[2] برگرفته شده‌اند، احتمالاً برای خواننده آشنا به نظر می‌رسند، اما برای تأمین وضوح بیشتر نظرگاهمان، بحث مختصری در موردشان مطرح می‌کنیم.

اگر x، کمیتی[3] که باید رسم شود، تنها به عبارات گویا[4] و ریشه‌های دوم[5] وابسته باشد، ریشهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر[6] $\varphi(x)=0$ است، که درجه[7]اش همواره توانی[8] از ۲ است.

۱. برای به دست آوردن مفهوم روشنی از ساختار[9] کمیت x، آن را، فی‌المثل، به صورت

$$x = \frac{\sqrt{a+\sqrt{c+ef}}+\sqrt{d+\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{r}}$$

فرض می‌کنیم، که در آن a، b، c، d، e، f، p، q، r عباراتی گویا هستند.

۲. تعداد رادیکالها[10]ی یکی روی دیگری رخ دهند. در هر جملهٔ x ی مرتبهٔ *(آن)* جمله[11] نامیده می‌شود؛ عبارات پیشین شامل جمله‌های از مراتب ۰، ۱، ۲ اند:

۳. فرض می‌کنیم μ مرتبهٔ ماکزیمم[12] را مشخص کند، بنابراین هیچ جمله‌ای نمی‌تواند بیش از μ رادیکال یکی روی دیگری داشته باشد.

۴. در مثال $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$، سه عبارت از مرتبهٔ اوّل داریم، اما از آن‌جا که آن را می‌توان به صورت

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{3}$$

نوشت، مثال مورد بحث تنها به دو عبارت متمایز وابسته است.

فرض می‌کنیم که تحویل مزبور در جمیع جملات x انجام گرفته باشد، لذا هیچ یک از n جملهٔ از مرتبهٔ μ نمی‌تواند به‌گونه‌ای گویا به صورت تابعی[13] از هر یک از جمله‌های از مرتبهٔ μ یا کمتر دیگر بیان شود.

همین فرض را در مورد جمله‌های از مرتبهٔ $\mu-1$ یا کمتر درنظر می‌گیریم، خواه جمله‌های مزبور به طور صریح، خواه به‌طور

ضمنی رخ دهند. واضح است که فرض[۱۴] مزبور بسیار طبیعی است و در مباحث بعدی از اهمیت بسیاری برخوردار است.

۵. صورت نرمال[۱۵] x.

در صورتی که عبارت x مجموع[۱۶] جمله‌هایی با مخرجها[۱۷]ی متفاوت باشد، می‌توانیم آنها را به یک مخرج تحویل کرده، به این ترتیب x را به صورت خارج‌قسمت[۱۸] دو تابع تام[۱۹] به دست آوریم.

$\sqrt{Q}$ را یکی از جملات x از مرتبهٔ μ درنظر می‌گیریم ؛ این جمله می‌تواند در x تنها به طور صریح رخ دهد، زیرا μ از مرتبهٔ ماکسیمم است. گذشته از این، از آن‌جا که توانهای $\sqrt{Q}$ را می‌توان به صورت توابعی از $\sqrt{Q}$ و Q، که عبارتی از مرتبهٔ پایینتر است، بیان کرد، می‌توانیم بگذاریم :

$$x = \frac{a + b\sqrt{Q}}{c + d\sqrt{Q}}$$

که a، b، c، d ی آن شامل بیش از $n-1$ جمله از مرتبهٔ μ، علاوه بر جملات از مرتبهٔ پایینتر نیست.

$\sqrt{Q}$ ، با ضرب هر دو جملهٔ کسر مورد بحث در $c - d\sqrt{Q}$، از مخرج آن ناپدید می‌شود، و می‌توان نوشت

$$x = \frac{(ac - bdQ) + (bc - ad)\sqrt{Q}}{c^2 - d^2Q} = \alpha + \beta\sqrt{Q}$$

که α و β ی آن شامل بیش از $n-1$ جمله از مرتبهٔ μ نیستند.

در مورد جملهٔ از مرتبهٔ μ ی دوم، به روشی مشابه، $x = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{Q_1}$ را داریم، و همین‌طور الی‌آخر.

بنابراین x می‌تواند چنان تبدیل شود که شامل جمله‌ای از مرتبهٔ مفروض μ تنها در صورتش[۲۰] و تنها به‌طور خطی باشد.

ولی ملاحظه می‌کنیم که ممکن است حاصل‌ضربهایی[۲۱] از مرتبهٔ μ رخ دهند ؛ زیرا α و β همچنان به $n-1$ جملهٔ از مرتبهٔ μ وابسته‌اند. در این‌صورت، ممکن است قرار دهیم

$$\alpha = \alpha_{11} + \alpha_{12}\sqrt{Q_1} \quad , \quad \beta = \beta_{11} + \beta_{12}\sqrt{Q_1}$$

و در نتیجه

$$x = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\sqrt{Q_1}) + (\beta_{11} + \beta_{12}\sqrt{Q_1})\sqrt{Q}$$

۶. به طریقی مشابه در مورد جملات از مرتبهٔ $\mu - 1$ متفاوتی، که به‌طور صریح و در Q، Q_1، و غیره، رخ می‌دهند، عمل می‌کنیم، و بنابراین هر یک از کمیّتهای مزبور تابع خطی تام[۲۲] از مرتبهٔ $\mu - 1$ تحت بررسی خواهد شد. در این صورت به جملاتی از مرتبهٔ پایینتر می‌رسیم و سرانجام x، یا دقیقتر، جملات از مراتب متفاوتش، را تحت صورت توابع خطی تام عبارات رادیکالی فردی که به‌طور صریح رخ می‌دهد، به دست می‌آوریم. آن‌گاه می‌گوییم که x به *صورت نرمال* تحویل شده است.

۷. فرض می‌کنیم m تعداد کلّ[۲۳] ریشه‌های دوم مستقل(۴) رخ‌دهندهٔ در این صورت نرمال باشد. با دادن علامت دوگانه[۲۴] به ریشه‌های دوم مزبور و ترکیب آنها به جمیع طرق ممکن، دستگاهی از 2^m مقدار[۲۵] $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ به دست می‌آوریم، که آنها را مقادیر مزدوج[۲۶] می‌نامیم.

اکنون باید معادله‌ای را که مقادیر مزدوج مزبور را به عنوان ریشه می‌پذیرد جست‌وجو کنیم.

۸. لزوماً جمیع مقادیر مزبور متمایز نیستند ؛ بنابراین، اگر داشته باشیم

$$x = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

عبارت مزبور، چون علامت $\sqrt{b}$ را تغییر دهیم، تغییر نمی‌کند.

۹. اگر x کمیّتی دلخواه باشد و چند جمله‌ای[۲۷] زیر را تشکیل دهیم

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2m})$$

$F(x) = 0$ به طور واضح معادله[۲۸]ای است که مقادیر مزدوج مورد بحث را به عنوان ریشه دارد. این معادله از درجهٔ 2^m است، اما می‌تواند ریشه‌های برابر داشته باشد (۸).

ضرایب[۲۹] *چند جمله‌ای F(x)، مرتب شده نسبت به x گویا هستند.*

زیرا چون علامت یکی از ریشه‌های دوم را تغییر می‌دهیم، با این کار دو ریشه، مثلاً x_λ و $x_{\lambda'}$ را به هم تبدیل می‌کنیم ؛ چراکه تمام ریشه‌های $F(x) = 0$ دقیقاً مقادیری مزدوج‌اند و از آن‌جا که ریشه‌های مورد بحث تنها تحت حاصل‌ضرب

$$(x - x_\lambda)(x - x_{\lambda'})$$

وارد F(x) می‌شوند، صرفاً ترتیب عوامل[۳۰] F(x) تغییر می‌کند، و

در نتیجه چند جمله‌ای تغییر نمی‌کند.

در این صورت $F(x)$، چون علامت هر یک از ریشه‌های دوم مورد بحث را تغییر دهیم، ناوردا[۳۱] (تغییرناپذیر) می‌ماند؛ و بنابراین تنها شامل مربعات آنهاست؛ و در نتیجه $F(x)$ تنها ضرایب گویا دارد.

۱۰. هنگامی که هر یک از مقادیر مزدوج مورد بحث در معادلهٔ با ضرایب گویای مفروض $f(x)=0$ صدق کند، این موضوع در مورد جمیع مقادیر دیگر نیز صادق است.

$f(x)$ لزوماً مساوی $F(x)$ نیست، و ممکن است غیر از x_1 ها ریشه‌های دیگری را نیز اختیار کند.

فرض می‌کنیم $x_1=\alpha+\beta\sqrt{Q}$ یکی از مقادیر مزدوج مورد بحث باشد؛ اکنون $\sqrt{Q}$، جمله‌ای از مرتبهٔ μ؛ α و β تنها به جملاتی از مرتبهٔ μ و جملاتی از مرتبهٔ پایینتر وابسته‌اند. در این صورت، باید مقدار مزدوج

$$x_1'=\alpha-\beta\sqrt{Q}$$

موجود باشد.

اکنون معادلهٔ $f(x_1)=0$ را تشکیل می‌دهیم. $f(x_1)$ را می‌توان در صورت نرمال نسبت به $\sqrt{Q}$ قرار داد،

$$f(x_1)=A+B\sqrt{Q}$$

عبارت فوق، تنها وقتی که A و B به‌طور همزمان صفرند، می‌تواند برابر صفر باشد. چه در غیر این صورت باید داشته باشیم:

$$\sqrt{Q}=-\frac{A}{B}$$

یعنی، $\sqrt{Q}$ بتواند به‌طور گویا به صورتی تابع جملاتی از مرتبهٔ μ و جملاتی از مرتبهٔ پایینتر واقع در A و B بیان شود، که مناقض فرض استقلال جمیع ریشه‌های دوم است (۴).

اما آشکارا داریم

$$f(x_1')=A-B\sqrt{Q}$$

در نتیجه اگر $f(x_1)=0$، آن‌گاه $f(x_1')=0$، که از آن قضیهٔ زیر حاصل می‌شود:

اگر x_1 در معادلهٔ $f(x)=0$ صدق کند، این مطلب در مورد جمیع مقادیر مزدوج مستخرج از x_1 با تغییر علامات ریشه‌های از مرتبهٔ μ، نیز صادق است.

اثبات مقادیر مزدوج دیگر به طریقی مشابه به دست می‌آید. به عنوان مثال، چنان که بدون تأثیر بر عمومیت استدلال[۳۲] می‌توان انجام داد، فرض می‌کنیم، که عبارت x_1 تنها به دو جملهٔ از مرتبهٔ μ ی $\sqrt{Q}$ و $\sqrt{Q'}$ وابسته است. $f(x_1)$ را می‌توان به صورت نرمال زیر تحویل کرد:

$$f(x_1)=p+q\sqrt{Q}+r\sqrt{Q'}+s\sqrt{Q}\times\sqrt{Q'}=0 \qquad (a)$$

اگر x_1 به بیش از دو جمله از مرتبهٔ μ وابسته باشد، باید به عبارت پیشین تنها تعداد بیشتری از جملات با ساختار مشابه اضافه کنیم.

معادلهٔ (a) تنها هنگامی که به طور جداگانه

$$p=0\ ,\ q=0\ ,\ r=0\ ,\ s=0 \qquad (b)$$

را داریم ممکن است، چه در غیر این صورت $\sqrt{Q}$ و $\sqrt{Q'}$ برخلاف فرضمان، با رابطه‌ای گویا به یکدیگر مربوط می‌شوند.

اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{R}$، $\sqrt{R'}$، ... جملات از مرتبهٔ $\mu-1$ ی باشند که x_1 به آنها وابسته است: جمله‌های مزبور در p، q، r، s رخ می‌دهند؛ در این صورت کمیتهای p، q، r، s، که در آنها رخ می‌دهند، می‌توانند به صورت نرمال، نسبت به $\sqrt{R}$ و $\sqrt{R'}$، تحویل شوند؛ و اگر، به خاطر اختصار، تنها دو کمیّت $\sqrt{R}$ و $\sqrt{R'}$ را در نظر بگیریم،

$$p=k+\lambda_1\sqrt{R}+\mu_1\sqrt{R'}+v_1\sqrt{R}.\sqrt{R'}=0 \qquad (c)$$

و سه معادلهٔ مشابه برای q، r، s داریم.

فرض استقلال ریشه‌های مزبور، که تاکنون چند بار به کار رفته است، معادلات

$$k=0\ ,\ \lambda=0\ ,\ u=0\ ,\ v=0 \qquad (d)$$

را سروسامان می‌دهد.

در نتیجه، معادلات (c) و نتیجتاً $f(x)=0$ چون به جای x_1 مقادیر مزدوج حاصل از تغییر علامات $\sqrt{R}$ و $\sqrt{R'}$ را قرار دهیم، برقرار می‌شوند.

بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ نیز توسط جمیع مقادیر مزدوج حاصل از x_1 با تغییر علامات ریشه‌های از مرتبهٔ $\mu-1$، برقرار است.

همین استدلال در مورد جملات از مرتبهٔ $\mu-2$، $\mu-3$، ... به کار می‌رود و قضیه‌مان به‌طور کامل اثبات می‌شود.

۱۱. تاکنون دو معادلهٔ

$$F(x)=0\ ,\ \ f(x)=0$$

را مورد بررسی قرار داده‌ایم. هر دو معادله دارای ضرایب گویا هستند و شامل x_1 ها به عنوان ریشه‌اند. $F(x)$ از درجهٔ 2^m است و می‌تواند ریشه‌های چندگانه[۳۳] داشته باشد؛ $f(x)$ می‌تواند دارای ریشه‌های دیگری جز x_1 ها باشد. اکنون معادلهٔ دیگری، $\varphi(x)=0$، را معرفی می‌کنیم، که به عنوان معادله‌ای از پایین‌ترین درجه، با ضرایب گویا، و پذیرندهٔ ریشهٔ x_1 و در نتیجه تمام x_1 ها، تعریف شده است (۱۰).

۱۲. ویژگیهای معادلهٔ $\varphi(x)=0$.

I. $\varphi(x)=0$ *معادله‌ای تحویل‌ناپذیر است؛* یعنی $\varphi(x)$ نمی‌تواند به دو عامل چند جمله ای گویا تجزیه شود. تحویل‌ناپذیری مزبور نظر به این فرض است که $\varphi(x)=0$ معادله‌ای گویا از *پایین‌ترین* درجه است که توسط x_1 ها برقرار می‌شود.

زیرا اگر داشته باشیم

$$\varphi(x)=\psi(x)\chi(x)$$

آن‌گاه $\varphi(x_1)=0$ ایجاب کنندهٔ $\psi(x_1)=0$ یا $\chi(x_1)=0$ یا هردوست. اما از آن‌جا که معادلات مزبور توسط تمام مقادیر مزدوج مورد بحث برقرارند (۱۰)، $\varphi(x)=0$ در این صورت معادلهٔ از پایینترین درجهٔ برقرار توسط x_1 ها نخواهد بود.

II. $\varphi(x)=0$ *ریشه‌های چندگانه* ندارد. در غیر این صورت $\varphi(x)$ می‌تواند، توسط روشهای معروف جبر، به عوامل اوّل تجزیه شود، و $\varphi(x)=0$ تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

III. $\varphi(x)=0$ *ریشه‌های چندگانهٔ دیگری جز x_1 ها ندارد،* در غیر این صورت $F(x)$ و $\varphi(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترکی[۳۴] را می‌پذیرد، که می‌تواند به‌طور گویا معین شود. در این صورت می‌توانیم $\varphi(x)$ را به عوامل گویا تجزیه کنیم، و $\varphi(x)$ تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

IV. فرض می کنیم M تعداد x_1 هایی باشد که کمیتهای متمایز دارند، و فرض می‌کنیم:

$$x_1, x_2, \ldots, x_M$$

مقادیر متمایز مورد بحث باشند. در این صورت داریم:

$$\varphi(x)=C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_M)$$

زیرا $\varphi(x)=0$ توسط کمیّتهای x_1 برقرار می‌شود و ریشه‌های چندگانه ندارد. در این صورت چند جمله‌ای $\varphi(x)$، به استثنای عامل ثابتی که مقدارش اثری بر $\varphi(x)=0$ ندارد، معین می‌شود.

V. $\varphi(x)=0$ *تنها معادلهٔ تحویل ناپذیر با ضرایب گویای برقرار با x_1 ها است،* زیرا اگر $f(x)=0$ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر گویای دیگر برقرار با x_1 و در نتیجه با x_1 ها باشد، $f(x)$ بر $\varphi(x)$ بخش‌پذیر می‌شود و بنابراین تحویل‌ناپذیر نخواهد بود.

به این ترتیب، بنا به دلیل پنج ویژگی $\varphi(x)$ به این ترتیب اثبات شده، می‌توانیم معادلهٔ مزبور را، به‌طور مختصر، به عنوان تنها معادلهٔ تحویل‌ناپذیر برقرار با x_1 ها، مشخص کنیم.

۱۳. اکنون به مقایسهٔ $F(x)$ و $\varphi(x)$ می‌پردازیم. این دو چندجمله‌ای x_1 ها را به عنوان تنها ریشه‌های خود دارند، و $\varphi(x)$ ریشه‌های چندگانه ندارد. $F(x)$، در این صورت، بر $\varphi(x)$ بخش‌پذیر است؛ یعنی:

$$F(x)=F_1(x)\varphi(x)$$

$F_1(x)$ لزوماً ضرایب گویا دارد؛ زیرا خارج قسمت حاصل از تقسیم $F(x)$ بر $\varphi(x)$ است. اگر $F_1(x)$ ثابت نباشد، ریشه‌های متعلق به $F(x)$ را می‌پذیرد، و با پذیرفتن یک x_1 جمیع x_1 ها را می‌پذیرد (۱۰). در نتیجه؛ $F_1(x)$ نیز بر $\varphi(x)$ بخش‌پذیر است، و

$$F_1(x)=F_2(x)\varphi(x)$$

این استدلال، در صورتی که $F_2(x)$ ثابت نباشد، در حالی که درجهٔ خارج قسمت با هر عمل پایینتر می‌آید، همچنان برقرار است. در نتیجه در پایان تعداد محدودی تقسیم به معادله‌ای به صورت زیر می‌رسیم:

$$F_{\nu-1}(x)=c_1.\varphi(x)$$

و در مورد $F(x)$،

$$F(x)=c_1.[\varphi(x)]^{\nu}$$

در این صورت چند جمله‌ای $F(x)$، به استثنای عامل ثابت، توانی از چند جمله‌ای درجه مینیمم $\varphi(x)$ است.

۱۴. اکنون می‌توانیم M، درجهٔ $\varphi(x)$ را معین کنیم. $F(x)$ از درجهٔ ۲^m است؛ از این گذشته، توان vام $\varphi(x)$ است. در نتیجه:

$$۲^m = v.M$$

بنابراین، M نیز توانی از ۲ است و قضیهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

درجهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیری که توسط عبارتی، که تنها از ریشه‌های دوم تشکیل شده است، برقرار می‌شود، همواره توانی از ۲ است.

۱۵. از طرف دیگر، از آن‌جا که تنها یک معادلهٔ تحویل‌ناپذیر برقرار توسط جمیع x_1 ها موجود است (۱۲، v)، عکس قضیه را نیز داریم:

اگر معادلهٔ تحویل‌ناپذیری از درجهٔ ۲^h نباشد، نمی‌تواند با استفاده از ریشه‌های دوم حل شود.

* * *

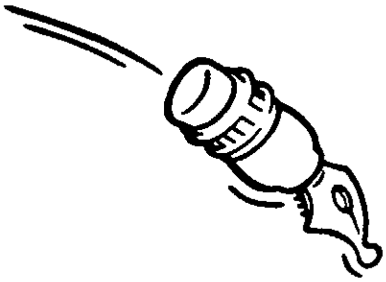
یادداشتها

1. Propositions
2. Theory of Algebraic Equations
3. Quantity
4. Rational Expressions
5. Square Roots
6. Irreducible Equation
7. Degree
8. Power
9. Structure
10. Radicals
11. Order of Term
12. Maximum Order
13. Function
14. Hypothesis
15. Normal Form
16. Sum
17. Denominators
18. Quotient
19. Intire Function = Integral Function
20. Numerator
21. Products
22. Integral Linear Function
23. Total Number
24. Double Sign
25. Value
26. Conjugate Values
27. Polynomial
28. Equation
29. Coefficients
30. Factor
31. Invariable
32. Reasoning
33. Multiple Roots
34. Highest Common Divisor



یکی از شرایط اساسی برای این‌که درخت علم بتواند با کمال سرعت، رشد و نمو کند آن است که در محلّ مسدودی کاشته نشود، برای این درخت هوایی لازم است که زود به زود تازه و تجدید شود و نسیمی که از خارج بوزد، و عدهٔ بیشماری که در تقویت آن سهیم شوند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو



آنچه از دوست رسد ...

با عرض سلام، خدمت دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

از این که به طور مرتّب نامه‌های پرمحتوا و محبت‌آمیز شما عزیزان در دفتر مجله به دست ما می‌رسد، بسیار خوشحالیم و از این بابت خداوند بزرگ را شکرگزاریم.

هر روز در لابه‌لای نامه‌های رسیده، نه تنها به مقاله‌ها و مسائل برمی‌خوریم، بلکه به نامه‌هایی از طرف شما عزیزان برخورد می‌کنیم، که نشانه آن است که مجله را به طور نقّادانه بررسی می‌کنید و با ارائهٔ پیشنهادات و انتقادات سازنده، ما را در راستای پیشرفت کار و غنی‌تر شدن مجله یاری می‌رسانید.

مانند همیشه یک نامه از لابه‌لای نامه‌ها انتخاب کرده‌ایم، به گونه‌ای که باعث علاقه‌مندی بیشتر شما به ریاضی شود : اینجانب مازیار قاسخرادهٔ سنگرودی از استان مازندران و شهرستان بهشهر با شما مکاتبه می‌کنم. اگر ممکن است، نامهٔ من را چاپ کنید تا بقیهٔ دانش‌آموزان بفهمند که خواندن یک مطلب می‌تواند نظر دانش‌آموز را به کلّی عوض کند. من دانش‌آموزی بودم که اصلاً به درس ریاضی هیچ علاقه‌ای نداشتم (البته نمی‌گویم که درسم بد بود، چون ترم اوّل نمرهٔ خوبی از ریاضی گرفتم) و تا جایی این کار ادامه داشت که قصد داشتم به رشته‌ای بروم که ریاضی در آن نباشد. بدون اغراق می‌گویم، از کلاس ریاضی و درس ریاضی بدم می‌آمد. تا روزی که به کتابخانهٔ شهرمان رفتم و مجلهٔ شما را دیدم ؛ شمارهٔ ۲۲ بود، ابتدا به آن سطحی نگاه کردم و دیدم مجلهٔ خوبی است، سپس دوباره آن را خواندم و باور کنید که به کلّی نظرم نسبت به ریاضی عوض شده و هم‌اکنون خیلی به ریاضیات علاقه‌مند شده‌ام و حتی در رشتهٔ ریاضی ثبت‌نام کرده‌ام و ....

اسامی تعدادی از خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : سعید حسن‌پور (خمینی شهر)، فخرالدین ملائی دارایی (ساری - روستای دارابکلا)، شیرین میر (مشهد)، سید محمّد پویان (تهران)، مهدی حسنی (زنجان)، رادفر (تهران)، سیدضیاء حسینی (کرمان)، نیما هنرمند (بندرانزلی)، احسان ژاله رجبی (زنجان)، ثاقب کوهپایه عراقی (اراک)، عنایت‌اله راستی‌زاده (شیراز)، حسین منصوری (دانشجوی رشتهٔ ریاضی - بوشهر) و سرکار خانم الهام نظام اسلامی (کرج).

از همگی شما برای ارسال مسائل همراه با حل و مقاله‌های درسی و کمک درسی و پیشنهادات سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد. و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهیم کرد.

آقای رضا بیات تاجور (تهران) : مقاله‌ای تحت عنوان حلقه و میدان در برهان شمارهٔ ۸ چاپ شده است. آقای مجید رضا نجاد (اراک) در برهان شمارهٔ ۲۴ فهرست الفبایی مقاله‌های برهانهای ۱ الی ۲۳ را به این منظور آوردیم، که در صورت نیاز به مقاله عنوان شده، مراجعه کنید.

آقای امین خسروشاهی (مشهد)، روش تثلیث زاویه به کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار، در حالت کلّی امکان‌پذیر نیست و امتناع آن را می‌توانید در برهان شمارهٔ ۲۵ ملاحظه کنید.

سرکار خانم فرناز طاهرخانی (شاهرود)، ریشهٔ nام گیری ($1 < n \in N$) از دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی، راه حلّ کلّی ندارد و همواره برقرار نیست، فقط در بعضی موارد خاص که شما هم اشاره کرده‌اید، ممکن است، این عمل امکان‌پذیر باشد.

آقای احمد بابایی (رودسر)، از آن‌جا که جدولهای اعداد ارسالی شما می‌تواند، مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را می‌آوریم و حلّ کلیدی جدول را در آنچه از دوست رسد ... در شمارهٔ بعد چاپ خواهیم کرد.

۱	۲		۳	۴
۵		۶		۷
	۸	۹	۱۰	
۱۱		۱۲		۱۳
۱۴	۱۵		۱۶	۱۷

❊ افقی:

۱ـ عددی اول به صورت $\overline{ab}$، که رابطهٔ: $b^{۲}-۱۶a=۱$ * بین ارقام آن برقرار است.

۳ـ اگر نصف عدد تام $\overline{mcd}$ را با یک مکعب کامل جمع کنیم، مجذور این عدد حاصل می‌شود.

۸ـ ریشهٔ معادلهٔ لگاریتمی: $x^{\log_{۷}^{۵^{\log_{۵}^{۱۳^{\log_{۱۳}^{۷}}}}}}=۱۰۰$

۱۴ـ عددی است اوّل که از نصف عدد ۸ افقی بزرگتر است، و حاصل، مجموع ارقام آن هم عددی اوّل است، و اگر این عدد را با مقلوبش جمع کنیم، یک مجذور کامل به دست می‌آید.

۱۶ـ اگر این عدد را نصف کنیم، و نصف آن را مجذور کنیم، تصویر آن در آینهٔ تخت، همان عدد اوّلیه می‌باشد.

❊ عمودی:

۱ـ عددی است اوّل که مقلوبش هم اوّل است.

۴ـ مجموع اعداد طبیعی، تا این عدد دو رقمی برابر است با: ۱۸۹۱.

۶ـ اگر یک واحد به عدد ۸ افقی اضافه کنیم، به دست می‌آید.

۱۱ـ ریشهٔ معادلهٔ: $\binom{x+۱}{۱۱}+\binom{x+۱}{۱۰}=\binom{۸۹}{۱۱}$

۱۳ـ ۳ برابر این عدد به اضافهٔ یک مجذور کامل، عدد ۸ افقی را به‌دست می‌دهد.

آقای علی مشکین قلم (دانشجوی کامپیوتر تبریز)، از شما به خاطر ارسال زندگینامهٔ ریاضیدانان همراه با عکس آنها متشکریم. در صورت نیاز، در بخش مشاهیر ریاضی جهان یا ادب ریاضی از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای امیرحسین بسطامی (دانشجو از تهران)، از شما به خاطر ارسال ۱۸ مسأله با راه حل، متشکریم. از آن جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین یکی از آنها را با راه حل آورده‌ایم:

ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۱}{۸}$$

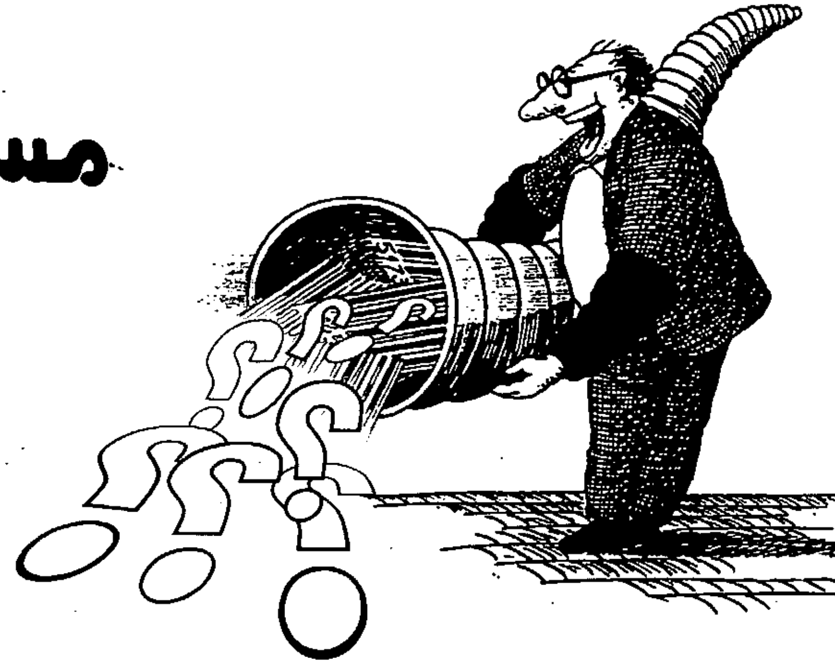
حل: ابتدا عبارت $\cos\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}$ را بر $۲\sin\frac{\pi}{۷}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\cos\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}=\frac{(۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{\pi}{۷})\cos\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}}{۲\sin\frac{\pi}{۷}}$$

$$=\frac{(\sin\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷})\cos\frac{۳\pi}{۷}}{۲\sin\frac{\pi}{۷}}=\frac{\sin\frac{۴\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}}{۴\sin\frac{\pi}{۷}}$$

$$=\frac{\sin\pi+\sin\frac{\pi}{۷}}{۸\sin\frac{\pi}{۷}}=\frac{۱}{۸}$$

مسائل برای حل



□ احمد قندهاری

□ محمد هاشم رستمی

□ حمید رضا امیری

□ میرشهرام صدر

□ سید محمدرضا هاشمی موسوی

مسأله‌های ریاضی ۲

۱. نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم و در ربع چهارم قرار دارد و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات $\sqrt{۳۴}$ است، مختصات نقطه را بیابید.

۲. اگر خط به معادلهٔ $x+ay=۴$ بر خط به معادلهٔ $ax+by=۳$ عمود باشد و از نقطهٔ $A(-۱,۱)$ نیز بگذرد، مقدار a و b را بیابید $(a,b\neq ۰)$.

۳. اگر نقاط مفروض $A(۲m-n,۴m+۴)$ و $B(۲m+n,۴n-۴)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۲,۲)$ قرینهٔ یکدیگر باشند، مقدار m و n را بیابید.

۴. معادلهٔ عمود منصف پاره خط MN را با فرض $M(-۲,۱)$ و $N(۲,-۳)$، بنویسید.

۵. نمودار $y=|x-۲|$ را رسم کنید.

۶. طول مستطیلی، ۴ برابر عرض آن و محیط مستطیل، ۵۰ متر است. قطر مستطیل را حساب کنید.

۷. رأس مربعی روی مبدأ مختصات واقع است، در صورتی که معادلهٔ یک ضلع این مربع $۶x+۸y=۳$ باشد، مساحت مربع را حساب کنید.

۸. به ازای چه مقدارهایی از m، سهمی به معادلهٔ $y=(۲m^۲-۸)x^۲-۴$، دارای نقطهٔ ماکزیمم است؟

۹. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P=(\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۲}})(\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۲})\sqrt[۳]{۴}$$

۱۰. مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}$$

۱۱. درستی برابری زیر را تحقیق کنید. $(x\neq \frac{k\pi}{۲})$

$$۲\cos^۲ x(۱+\tan^۲ x)+۲\sin^۲ x(۱+\cot^۲ x)=۴$$

مسأله‌های ریاضی ۴

۱. با توجه به مجموعهٔ داده‌ها $\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵\}$، میانگین و انحراف معیار را حساب کنید.

۲. جملهٔ سوّم یک تصاعد عددی ۴، و جملهٔ یازدهم آن برابر ۱۲- است، جملهٔ نوزدهم آن چه عددی است؟

۳. شش جملهٔ اوّل یک تصاعد هندسی را مشخص کنید، که جملهٔ سوّم آن ۹- و جملهٔ پنجم آن ۸۱- باشد.

۴. معادلهٔ $\cot^۲ x-۳\cot x+۲=۰$ را حل کنید و جواب عمومی آن را بنویسید.

۵. اگر $\tan(x+y)=\frac{۱}{۳}$ و $\tan y=-۲$، حاصل $|\cos x|$ را

بیابید.

۶. اگر $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$، طول دو بردار و زاویهٔ بین آن دو بردار را حساب کنید.

۷. با حرفهای کلمهٔ PENCIL، چند کلمهٔ چهار حرفی می‌توان ساخت؟ (تکرار حروف جایز نیست.)

۸. با عددهای ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت، به طوری که:

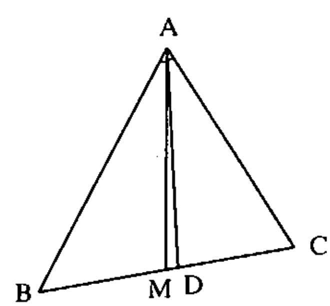
الف ـ زوج باشد. ب ـ بر ۵ بخش‌پذیر باشد. ج ـ باقیماندهٔ آن بر ۱۰ برابر ۲ باشد. د ـ بزرگتر از ۳۴۰۰۰ باشد.

۹. دو عدد از مجموعهٔ $\{1,2,3,\dots,9\}$ انتخاب می‌کنیم، اگر مجموع این دو عدد زوج باشد، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که، هر دو عدد فرد باشند.

صورت مسأله‌های هندسهٔ ۲

۱. الف. در مثلث ABC، $AB \neq AC$ است، ثابت کنید $d_a < m_a$ است، که d_a اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A و m_a اندازهٔ میانهٔ نظیر رأس A است.

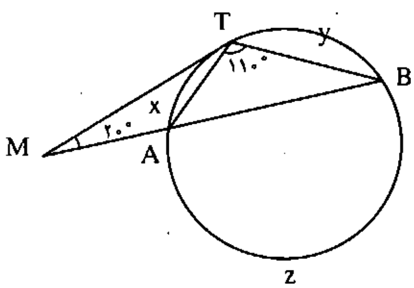
ب. ثابت کنید: در هر مثلث $d_a + d_b + d_c \le m_a + m_b + m_c$. تساوی در چه مثلثی برقرار است؟



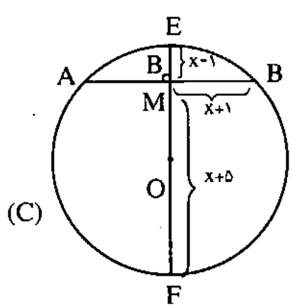
۲. خط d و دو نقطهٔ A و B غیر واقع بر این خط، در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید، که از آن نقطه، پاره خط AB به زاویهٔ α دیده شود و فاصلهٔ این نقطه از خط، برابر طول پاره خط AB باشد.

۳. از مثلثی ضلع $BC = a$، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۴. با استفاده از شکل داده شده، اندازهٔ x، y و z را تعیین کنید (خط MT در نقطهٔ T بر دایره مماس است).



۵. در دایرهٔ C(O,R) اندازهٔ x و از روی آن اندازهٔ R شعاع دایره را تعیین کنید.



۶. سه نقطهٔ $A = (1,2)$، $B = (-2,1)$ و $C = (3,-2)$ در یک دستگاه مختصات داده شده‌اند.

الف. قانون انتقالی را که نقطهٔ B را به نقطهٔ C نظیر می‌کند، تعیین کنید.

ب. مختصات نقطه‌های A'، B' و C' به ترتیب تبدیل ـ یافته‌های نقطه‌های A، B و C را با استفاده از انتقال قسمت الف به دست آورید.

پ. نقطهٔ A'' دوران یافتهٔ نقطهٔ A' تحت دوران $R(x,y) = (y,x)$، نقطهٔ B'' قرینهٔ نقطهٔ B' نسبت به مبدأ مختصات و نقطهٔ C'' مجانس نقطهٔ C تحت تجانس $H(x,y) = (2x, 2y)$ را تعیین کنید.

ت. اندازهٔ ارتفاع رأس A'' از مثلث $A''B''C''$ و اندازهٔ مساحت این مثلث را به دست آورید.

۷. بازتاب خط $D: 2x - y + 1 = 0$ ، خط $D': x + 2y - 3 = 0$ است. معادلهٔ محور تقارن این بازتاب را بنویسید.

مسائل حسابان ۲

مسألهٔ ۱. مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = |x^2 - 4x + 3|\sqrt{|x+1|}$ را در نقطهٔ $x_0 = 3$ بررسی کنید و زاویهٔ بین دو نیم مماس را در این نقطه بیابید.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید: تناوب اصلی تابع به معادلهٔ $f(x) = \pi x - \lfloor nx \rfloor$ ، $n > 0$ برابر $\frac{1}{n}$ است. $\lfloor x \rfloor$ نماد جزء صحیح x است.

مسألهٔ ۳. جدول تغییرات و منحنی به معادلهٔ $y = \frac{\cos x}{2\cos x + 1}$ را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

مسألهٔ ۴. جدول تغییرات و منحنی تابع به معادلهٔ $y = \text{Arcsin}(x-2)$ را رسم کنید.

مسألهٔ ۵. در دایره‌ای به شعاع ۲cm مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کرده‌ایم، مقدار این مساحت را بیابید.

مسألهٔ ۶. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4) > -1$ را حل کنید.

مسألهٔ ۷. معادله‌های دایره‌هایی را بنویسید که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$ بگذرد.

مسألهٔ ۸. معادلهٔ یک هذلولی را بنویسید که نقاط $F\begin{vmatrix}1\\2\sqrt{3}\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}1\\-2\sqrt{3}\end{vmatrix}$ کانونهای آن باشد و خروج از مرکز آن $\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

مسألهٔ ۹. مطلوب است محاسبهٔ $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{9+x^2}$.

مسألهٔ ۱۰. مطلوب است محاسبهٔ $\int_0^4 [x+1]dx$.

مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

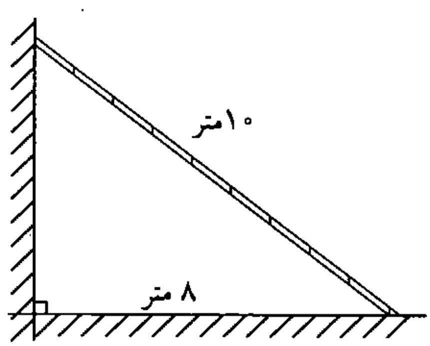
مسألهٔ ۱. ثابت کنید: برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 داریم: $|\text{Arctan}\, x_2 - \text{Arctan}\, x_1| < |x_2 - x_1|$.

مسألهٔ ۲. سوی تقعّر و نقاط عطف تابع به معادلهٔ $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ را بیابید.

مسألهٔ ۳. نقطه‌ای روی منحنی تابع به معادلهٔ $y = x^2 - 2x$ بیابید، که فاصله‌اش از خط به معادلهٔ $y = 2x - 9$ مینیمم باشد و مقدار مینیمم را بیابید.

مسألهٔ ۴. مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع به معادلهٔ $y = \frac{3x^2-1}{x^3}$.

مسألهٔ ۵. نردبانی به طول ۱۰ متر به دیواری تکیه دارد (مطابق شکل). اگر فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار قائم ۸ متر باشد، چنانچه پای نردبان به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ متر دورتر شود، به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی ارتفاع نردبان را حساب کنید.



مسألهٔ ۶. به کمک بالا ریمان یا پایین ریمان ثابت کنید: $\int_0^b x^3dx = \frac{b^4}{4}$.

مسألهٔ ۷. به کمک قاعدهٔ هوپیتال حدّ تابع به معادلهٔ

$y=\dfrac{x-\sin x-\frac{x^{3}}{6}}{x^{5}}$ وقتی $x\to 0$ را بیابید.

مسألهٔ ۸. مطلوب است محاسبهٔ $\int xe^{2x}dx$.

مسألهٔ ۹. مطلوب است محاسبهٔ $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\dfrac{5+\mathrm{Arc}\sin x}{4+9x^{2}}dx$.

مسألهٔ ۱۰. سطح محصور بین منحنی تابع به معادلهٔ $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ و محورxها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

مسائل ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی

۱. اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند باشد و $|E|=19$ و برای هر $a\in V$ داشته باشیم : $\deg(a)\geq 3$ ، در این صورت حداکثر مقدار $|V|$ را بیابید.

۲. اگر M ماتریس مجاورت گراف K_p باشد، ثابت کنید هر درایهٔ واقع روی قطر اصلی ماتریس M^{2} برابر است با $(p-1)$.

۳. در یک تقسیم، مقسوم ۱۸ برابر باقیمانده است و باقیمانده حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد. مقسوم، مقسوم علیه، باقیمانده و خارج قسمت را معلوم کنید.

۴. اگر $(a^{m},b^{n})=1$ ، ثابت کنید $(a,b)=1$.

۵. با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$ عبارت $(2^{2n}+6n-1)$ همواره بر ۹ بخش‌پذیر است.

۶. ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $3^{15n+2}\times 2^{2n+2}\times 20^{2n}+3\overset{13}{\equiv}0$.

۷. مطلوب است تعداد شناسنامه‌هایی که شمارهٔ آنها پنج رقمی بوده و در هر یک از آنها، هر یک از رقمهای ۱ و ۵، حداقل یک بار به کار رفته باشد.

۸. اگر $A=\{2,4,6\}$ و رابطهٔ R روی A به صورت زیر تعریف شده باشد، مطلوب است محاسبهٔ (ROR) .

$R=\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\}$

۹. اگر یک شرکت ساعت‌سازی دارای سه کارخانه باشد که ۴۷ درصد، ۲۶ درصد و ۲۷ درصد از محصولات این شرکت را تأمین می‌کنند و درصد تولید ساعتهای معیوب در این کارخانه‌ها به ترتیب ۸ و ۶ و ۵ باشد، چه قدر احتمال دارد جنسی که به تصادف از تولیدات این شرکت انتخاب می‌شود، معیوب باشد.

۱۰. یک تاس و دو سکه را با هم می‌اندازیم و این عمل را ۵ بار تکرار می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که دقیقاً سه بار از این ۵ بار «دو سکه H و تاس عدد ۶» را نشان دهد.

۱۱. در جعبه‌ای ۷ عدد لامپ وجود دارد که ۳ تای آنها خراب است، یک نمونهٔ ۴تایی را از آن جعبه به تصادف خارج می‌کنیم. اگر تابع توزیع احتمال X ، تعداد لامپهای خراب در این نمونه باشد، جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

مسائل ریاضی عمومی ۲ پیش دانشگاهی

۱. اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=|x^{3}+3x|$ ، مشتق‌پذیری تابع را در نقاط $x=0$ و $x=-3$ بررسی کنید.

۲. معادلهٔ خط مماس بر منحنی با ضابطهٔ $\sin x\cos y=\frac{1}{2}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{4}$ واقع بر منحنی را بیابید.

۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+x+1}$ مفروض است، نقاط بحرانی و نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق یا نسبی تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

۴. ضرایب a وb و c را چنان تعیین کنید که، تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^{2}+bx+c$ در (۷ و ۱) ماکزیمم نسبی داشته باشد و نمودار تابع از نقطهٔ $(2,-2)$ بگذرد.

۵. ارتفاع یک استوانهٔ مستدیر قائم با بزرگترین مساحت جانبی محاط در یک کره به شعاع ۶ سانتیمتر را بیابید.

۶. نمودار منحنی با ضابطهٔ $y=\dfrac{2x^{2}+1}{x^{2}+2x}$ را رسم کنید.

۷. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که، بر خطهای به معادلهٔ $D:4x-3y-30=0$ و $D':4x-3y+10=0$ مماس بوده و خط $\Delta:x+3y-10=0$ قطری از آن باشد.

۸. معادلهٔ هذلولی را بنویسید که دو خط به معادله‌های $3x+4y=7$ و $3x-4y=-1$ مجانبهای آن و $F(6,1)$ یکی از کانونهای آن باشد.

۹. با استفاده از نمودار، مقدار انتگرال معین زیر را بیابید:

$$\int_{-3}^{2}|x^2-3x|dx$$

۱۰. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را بیابید:

الف) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\sin 3x}{1+\cos x}dx$

ب) $\int_{-2}^{6}x^2\sqrt[3]{x+2}\ dx$

۱۱. حاصل $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$ را بیابید.

۱۲. حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y=\frac{1}{\cos x}$ و محور yها و خط به معادلهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ را بیابید.

مسائل ریاضی پایهٔ پیش‌دانشگاهی

۱. برای هر عدد طبیعی n به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:

الف.

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ب. ثابت کنید: 10^n-1 بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲. ثابت کنید: $3+\sqrt{5}$ عددی گنگ است.

۳. جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n=n^2-22n+120$ است، جملهٔ چندم آن منفی است؟

۴. از ارتفاع ۲ متری زمین، توپی را رها می‌کنیم. در صورتی که توپ در هر بار برخورد به زمین، نصف ارتفاع قبل بالا بیاید، مجموع فاصله‌هایی را بیابید که توپ در هر بار برخورد به زمین بالا می‌آید، تا این که بر سطح زمین ساکن شود.

۵. اگر مجموع یازدهٔ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی ۱۱۰ و مجموع هفت جملهٔ ابتدایی آن ۱۴ باشد، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۶. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع چهار جملهٔ نخست آن ۱۵ و مجموع هشت جملهٔ اولیهٔ آن ۲۵۵ است، قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۷. در دنبالهٔ فیبوناتچی، مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناتچی بر کدام یک از اعداد اول، بخش‌پذیر است.

۸. اگر $\log_3^a$ و $\log_3^b$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-(\log_3^{10})^2=0$ باشند، حاصل $\frac{ab}{\log_3^a+\log_3^b}$ را بیابید.

۹. یک شرکت، x واحد کالا را در هفته تولید می‌کند و به فروش می‌رساند، معادله‌های هزینه و تقاضای هفتگی به صورت زیر داده شده است:

معادلهٔ هزینه: $C(x)=5000+2x$

معادلهٔ تقاضا: $x=1000-10p$

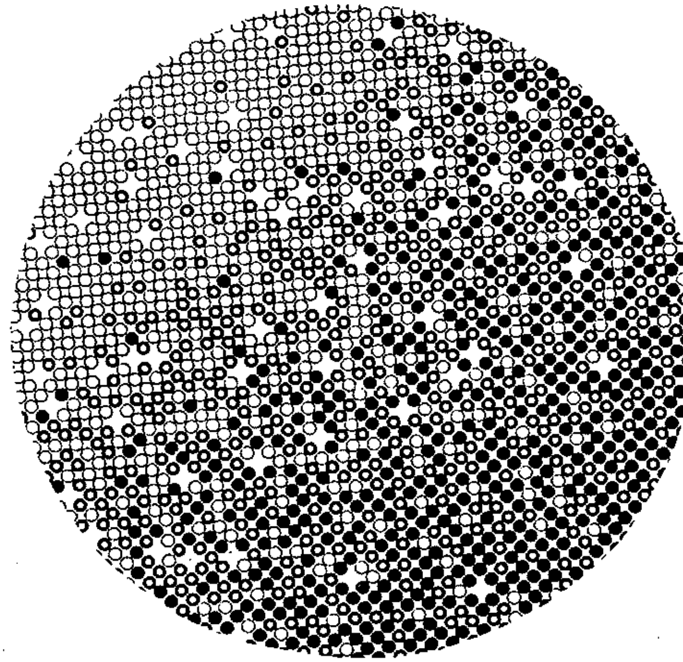
الف ـ معادلهٔ درآمد شرکت را پیدا کنید. ب ـ چند واحد کالا در هفته تولید کند، تا بیشترین درآمد را داشته باشد، ج ـ سپس بیشترین درآمد شرکت را در هفته بیابید. د ـ چند واحد کالا در هفته تولید کند، تا بیشترین سود را داشته باشد.

۱۰. در کلاسی ۱۰ مرد و ۲۰ زن شرکت دارند، به طوری که نصف مردان و نصف زنان چشم قهوه‌ای هستند، یک نفر را به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم، احتمال این که مرد یا چشم قهوه‌ای باشد، کدام است؟

۱۱. احتمال آن که یک دانش‌آموز از درسهای فیزیک و ریاضی نمره بیاورد، بترتیب ۰/۴ و ۰/۳ است؛ اگر احتمال گذراندن حداقل یکی از آنها ۰/۶ باشد، احتمال آن را به دست آورید، که دانش‌آموز در هر دو درس نمره بیاورد.

۱۲. اگر در بسط دو جمله‌ای $(K^5x^3+4)^5$، مجموع ضرایب برابر ۲۴۳ باشد، K را بیابید.

حلّ مسائل برهان ۲۵



حلّ مسائل ریاضی ۱

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 4\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3\}$

$$A\cup B=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3\ ;\ x\geq 4\}$$

$$\Rightarrow (A\cup B)'=\{x\in\mathbb{R} \mid -3\leq x<4\}$$

$$A'=\{x\in\mathbb{R} \mid x<4\}\ ,\quad B'=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq -3\}$$

$$\Rightarrow A'\cap B'=\{x\in\mathbb{R} \mid -3\leq x<4\}$$

بنابراین :

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

۲. می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر با 2^n است. بنابراین :

$$2^{k+5}-112=2^{k+2}\ ;\ 2^5\times 2^k-2^2\times 2^k=112\ ;$$

$$2^k(32-4)=112\ ;\ 28\times 2^k=112\ ;\ 2^k=\frac{112}{28}=4\ ;$$

$$2^k=2^2\ ;\ \boxed{k=2}$$

۳.

$$P=\frac{2^5\times 2^x+2^3\times 2^x-2^4\times 2^x+5\times 2\times 2^x}{27\times 2\times 2^x+9\times 2^2\times 2^x+9\times 2^4\times 2^x-45\times 2^2\times 2^x}$$

$$=\frac{2^x(32+8-16+10)}{2^x(54+36+144-180)}=\frac{34}{54}=\frac{17}{27}$$

۴.

$$\begin{cases}x-y=\sqrt{5}\\ xy=2\end{cases}\ :\ \begin{cases}x-y=\sqrt{5}\\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}$$

$$(x^3-y^3)^2=\left[(x-y)(x^2+xy+y^2)\right]^2$$

$$=\left[\sqrt{5}\left((x-y)^2+3xy\right)\right]^2$$

$$=5\left[(\sqrt{5})^2+3(2)\right]^2$$

$$=5(5+6)^2=5\times 11^2=5\times 121=605$$

۵.

$$\sqrt{4x-4}+\sqrt{\frac{1}{x+1}}+\sqrt{\frac{2}{2-x}}$$

دامنهٔ متغیّر :

$$\begin{cases}4x-4\geq 0\\ \dfrac{1}{x+1}>0\\ \dfrac{2}{2-x}>0\end{cases}\ ;\ \begin{cases}x\geq 1\\ x>-1\\ x<2\end{cases}\Rightarrow 1\leq x<2$$

۶.

$$1)\ 2x^3+2x^2-8x-8=2x^2(x+1)-8(x+1)$$

$$=2(x+1)(x^2-4)$$

$$=2(x+1)(x-2)(x+2)$$

$$2)\ (2x^3+x+5)^2-(x+3)^2$$

$$=(2x^3+x+5-x-3)(2x^3+x+5+x+3)$$

$$=2(x^3+1)(2x^3+2x+8)$$

$$=4(x+1)(x^2-x+1)(x^3+x+4)$$

۷.

$$P=\frac{(x-k)(x+k)(x^2-kx+k^2)(k^2+kx+x^2)(x-1)(x-2)}{(x+k)(x-k)(x^2+kx+k^2)(k^2-kx+x^2)(x-2)}$$

$$=x-1$$

حلّ مسائل هندسهٔ ۱

● محمد هاشم رستمی

۱ـ با توجه به شکل، $AB=A'B'$ و $AC=A'C'$، از آن‌جا :

$$\begin{cases}2x-3=y+3\\ y+1=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=6\\ -x+y=-1\end{cases}\Rightarrow x=5\ ,\ y=4$$

۲ـ ارتفاع برج را x و اندازهٔ پاره‌خط AH را برابر y فرض می‌کنیم، در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH داریم :

$$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{y+100}$$

$$\Rightarrow x-\frac{\sqrt{3}}{3}y=\frac{100\sqrt{3}}{3}\qquad(1)$$

$$\operatorname{tg}60^\circ=\frac{CH}{AH}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{x}{y}\Rightarrow x=\sqrt{3}\,y\qquad(2)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}y=\frac{100\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}y=\frac{100\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow y=50\Rightarrow x=50\sqrt{3}$ ارتفاع برج

۳ـ می‌دانیم که $BC^2=BH\cdot AB$ است. پس :

$$64=2\times AB\Rightarrow AB=32$$

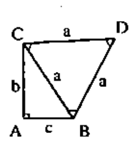
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم : $AB^2=AC^2+BC^2$. بنابراین :

$$32^2=AC^2+8^2\Rightarrow AC=8\sqrt{15}$$

و مساحت مثلث برابر است با :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{15}\times 8=32\sqrt{15}$$

۴ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به داده‌های مسأله داریم :



$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=2\times\frac{1}{2}bc\Rightarrow a^2\sqrt{3}=4bc\ ,\ a^2=b^2+c^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}(b^2+c^2)=4bc\Rightarrow\sqrt{3}\,b^2-4bc+\sqrt{3}c^2=0$$

$$\Rightarrow(\sqrt{3}b-c)(b-\sqrt{3}c)=0\Rightarrow\sqrt{3}b-c=0$$

$$\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ b-\sqrt{3}c=0\Rightarrow\frac{b}{c}=\sqrt{3}$$

۵ـ با توجه به این که نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه، برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است، خواهیم داشت :

$$\left(\frac{AH}{A'H'}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\frac{x-1}{2x+1}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5x-5=4x+2\Rightarrow x=7$$

۶ـ داریم :

الف. اندازهٔ ضلع مربع محیط بر یک دایره برابر قطر آن دایره

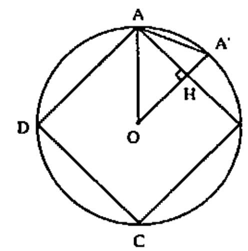
است. بنابراین:

ضلع مربع محیطی $= 2\times12 = 24cm$

ب. ضلع مربع محاط در دایره‌ای به شعاع R برابر $C_4 = R\sqrt{2}$ است. پس:

$C_4 = 12\sqrt{2}$

پ. برای محاسبهٔ C_8 از دستور محاسبهٔ C_8 بر حسب C_4 (C_{2n} برحسب C_n) می‌توان استفاده کرد و یا می‌توان از شکل زیراستفاده نمود، که در آن 'AA ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره و AB ضلع مربع محاط در دایره است. داریم:



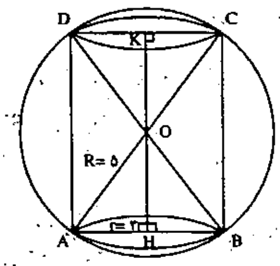
$OA' = 12 , OH = AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\times12\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\Rightarrow HA' = OA' - OH = 12 - 6\sqrt{2}$,

$AA' = \sqrt{AH^2 + HA'^2} = \sqrt{72 + (12-6\sqrt{2})^2}$

$= 12\sqrt{2-\sqrt{2}}$

۷ـ ارتفاع استوانه را محاسبه می‌کنیم. داریم:



$OH = \sqrt{25-9} = 4$

$\Rightarrow HK = 8cm$ ارتفاع استوانه

از آن‌جا با توجه به این که $r = 3$، $h = 4$ و $R = 5$ است، داریم:

جانبی استوانه $S = 2\pi rh = 2\pi\times3\times8 = 48\pi cm^2$

حجم استوانه $= \pi r^2h = \pi\times3^2\times8 = 72\pi cm^3$

حجم کره $= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\times5^3 = \frac{500\pi}{3}cm^3$

$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم کره}} = \frac{72\pi}{\frac{500\pi}{3}} = \frac{216}{500} = \frac{54}{125}$

حلّ مسائل ریاضی ۳

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱. $\frac{x}{x+1}+2>\frac{1}{x+1}$; $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}+2>0$;

$\frac{x-1}{x+1}+2>0$; $\frac{x-1+2x+2}{x+1}>0$; $\frac{3x+1}{x+1}>0$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$3x+1$	$-$		$-$		$+$
جواب	$+$		$-$		$+$

مجموعهٔ جوابهای نامعادله $= \left\{x\in\mathbb{R} \middle| x<-1 \ ; \ x>\frac{-1}{3}\right\}$

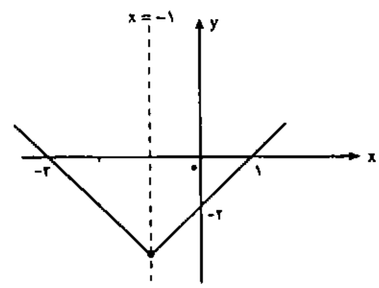
۲. $\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{2x+9}=0$; $\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{2x+9}$;

$3x^2+4=2x+9$; $3x^2-2x-5=0$;

$(x+1)(3x-5)=0$; $x=-1$; $x=\frac{5}{3}$

۳. $f(x)=|x+1|-2=\begin{cases}x-1 & x\ge-1\\ -x-3 & x<-1\end{cases}$

با استفاده از تعریف یک به یکی:



$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow|x_1+1|-2=|x_2+1|-2$

$\Rightarrow|x_1+1|=|x_2+1|$

$\Rightarrow x_1+1=\pm(x_2+1)\not\Rightarrow x_1=x_2$

اگر خطی موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین f یک به‌یک نیست.

۴. $S_n=(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n$ (1)

$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a-\frac{d}{2})n$ (2)

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲):

$\begin{cases}\frac{d}{2}=1\\ a-\frac{d}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=2\\ a=3\end{cases}$, $13+7a+7d=13+21+14=48$

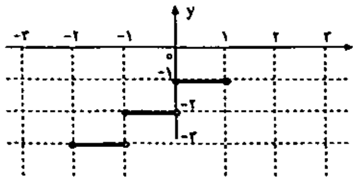
۵. اگر a_n، a و q بترتیب جملهٔ اول، جمله nام و قدر نسبت تصاعد هندسی مورد نظر باشند:

$a_3=aq^2$, $a_9=aq^8$: $a_3.a_9=a^2q^{10}=96$

$a_2=aq=6$, $a_{10}=aq^9$: $a_2.a_{10}=a^2q^{10}$

$\Rightarrow a_2.a_{10}=a_3.a_9$; $a_{10}=\frac{a_3.a_9}{a_2}=\frac{96}{6}=16$

۶. برای رسم نمودار $y=[x+1]-2$ یا $y=[x]-1$، با شرط $-2\le x<1$، بترتیب زیر عمل می‌کنیم:



$-2\le x<-1$: $y=-2-1=-3$

$-1\le x<0$: $y=-1-1=-2$

$0\le x<1$: $y=0-1=-1$

۷. با توجه به قانونهای لگاریتم:

$\log_5(x-1)-\log_5(x^2-1)=-2\log_5^2$:

$\log_5\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\log_5^{\frac{1}{4}}$:

$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$; $x+1=4$; $\boxed{x=3}$

حلّ مسائل ریاضی ۵

● میرشهرام صدر

۱ـ $-x^2\le0$; $x^2-x+1>0$;

$x^4-x^3=0\Rightarrow x^3(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$		$-$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$	
x^3		$-$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$+$	
P		$-$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$-$	

$D=(0,1)$

۲ـ در صورتی که به جای x در تابع x- قرار دهیم، خواهیم داشت:

$\begin{matrix}-bx\\ ax\end{matrix}\begin{cases}af(-x)+bf(x)=-cx\\ af(x)+bf(-x)=cx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-abf(-x)-b^2f(x)=bcx\\ a^2f(x)+abf(-x)=acx\end{cases}$

$(a^2-b^2)f(x)=(a+b)cx$

$\Rightarrow f(x)=\frac{cx}{a-b}$ $(a\ne-b)$

۳ـ الف:

$\begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}>0\Rightarrow x\in(0,5)\\ \log\frac{5x-x^2}{4}\ge0\Rightarrow\log\frac{5x-x^2}{4}\ge\log1\Rightarrow\frac{5x-x^2}{4}\ge1\end{cases}$

$\Rightarrow x\in[1,4]$

$\Rightarrow\begin{cases}x\in(0,5)\\ x\in[1,4]\end{cases}\Rightarrow D_f=[1,4]$

ب:

$g(x)=\frac{x+1}{x-[x]}$

$x-[x]=0\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in Z\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-Z$

۴ـ $D_{fog}=\{x|x\in D_g , g(x)\in D_f\}$

$x-2\ge0\Rightarrow D_f=[2,+\infty)$

$x^2-1\ge0\Rightarrow x^2\ge1\Rightarrow x\le-1$ یا

$x\ge1\Rightarrow D_g=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$\begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \text{و} \\ \sqrt{x^2-1} \in [2,+\infty) \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \geq 2 \Rightarrow x^2-1 \geq 4 \\ \Rightarrow x^2 \geq 5 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5} \ \text{یا} \ x \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \text{و} \\ x \in (-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

۵ـ الف : $L = \lim_{x\to 2}(x^2-2x)\tan\frac{\pi}{4}x = 0\times\infty$

در این حالت، برای رفع ابهام، حدّ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$L = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}x}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\cot\frac{\pi}{4}x} = \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{\tan\left[-\frac{\pi}{4}(x-2)\right]}$$

وقتی $x \to 2$ ، خواهیم داشت $x-2 \to 0$ ، بنابراین با تغییر متغیر زیر داریم :

$$\begin{cases} x-2=t \Rightarrow x=t+2 \\ x\to 2 \\ t\to 0 \end{cases}$$

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{(t+2)\times t}{\tan(-\frac{\pi}{4}t)} \sim \lim_{t\to 0}\frac{(t+2)\times t}{-\frac{\pi}{4}t} = \frac{2}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{-8}{\pi}$$

ب : $L = \lim_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-8x-1}+2x = \infty-\infty$

$$L = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x-1}+2x\right)\times\frac{\sqrt{4x^2-8x-1}-2x}{\sqrt{4x^2-8x-1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-8x-1}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x(-8-\frac{1}{x})}{x\left(-\sqrt{4-\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}-2\right)}$$

$$= \frac{-8}{-4} = 2$$

۶ـ

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(\tfrac{1}{2}) \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}[-x] = -3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{a|x-2|}{x-2} = \lim\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{-a(x-2)}{x-2} = -a \qquad (2)$$

$$f(2) = (b+1)\times 2 = 2b+2 \qquad (3)$$

با توجه به تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه و رابطه‌های (۱) و ب(۲) و (۳) داریم :

$$\begin{cases} -a=-3 \\ 2b+2=-3 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=\frac{-5}{2}$$

۷ـ الف :

$$y = 3\sin^5\left(\sqrt[5]{\frac{x+2}{x}}\right) \Rightarrow y' = 3\times 5\times\frac{\frac{-2}{x^2}}{5\sqrt[5]{\left(\frac{x+2}{x}\right)^4}}$$

$$= \frac{-6}{x^2\sqrt[5]{\left(\frac{x+2}{x}\right)^4}}$$

ب : $y = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)\times\sqrt[3]{x^2-1} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}(x\sqrt{x}-1)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\left(\frac{3x}{2\sqrt{x}}\right)(x^2-1)-2x(x\sqrt{x}-1)}{(x^2-1)\sqrt[3]{x^2-1}}$$

۸ـ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x+\Delta x+2}{2(x+\Delta x)-3}-\frac{x+2}{2x-3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x-3)(x+\Delta x+2)-(x+2)[2(x+\Delta x)-3]}{\Delta x[2(x+\Delta x)-3](2x-3)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-7\Delta x}{\Delta x[2(x+\Delta x)-3](2x-3)} = \frac{-7}{(2x-3)^2}$$

۹ـ ابتدا محلّ تقاطع دو منحنی را به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{cases} y = x^2-3x-3 \\ y = x^2-5x+1 \end{cases}$$

$$x^2-3x-3 = x^2-5x+1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2^2-3\times 2-3 = -5$$

$$\Rightarrow A\Big|_{-5}^{2} \quad \text{محل برخورد دو منحنی}$$

سپس شیب خط مماس بر هر دو منحنی را در نقطهٔ $A\Big|_{-5}^{2}$ به‌دست می‌آوریم :

$$y = x^2-3x-3 \Rightarrow y' = 2x-3 \Rightarrow m_1 = 1 \ \text{(مماس)}$$

$$y = x^2-5x+1 \Rightarrow y' = 2x-5 \Rightarrow m_2 = -1 \ \text{(مماس)}$$

$$\tan\alpha = \frac{|m_1-m_2|}{1+m_1m_2} = \frac{|1-(-1)|}{1+1(-1)} = \frac{2}{1-1} \quad \text{تعریف نشده}$$

جون $\tan\alpha$ ، تعریف نشده است ؛ لذا زاویهٔ بین دو منحنی برابر است با : $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

حلّ مسائل جبر و احتمال

● **میرشهرام صدر**

۱ـ روش استدلالی که به کمک یک مثال بتوان، درستی یک حکم را نقض کرد، روش استدلال به‌وسیلهٔ مثال نقض گوییم. برای بررسی رابطهٔ $n(A-B)=n(A)-n(B)$ ، فرض کنیم، $A=\{2,3,4,5\}$ و $B=\{3,4,6\}$. بنابراین داریم :

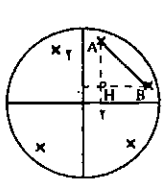
$$A-B=\{2,5\} \Rightarrow n(A-B)=2 \qquad (1)$$

$$n(A)=4,\ n(B)=3$$

$$\Rightarrow n(A)-n(B)=4-3=1 \qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم که حکم $n(A-B)=n(A)-n(B)$ در حالت کلی برقرار نیست. درحقیقت با ارائهٔ یک مثال نقض، نادرستی این حکم را در حالت کلی ثابت کردیم.

۲ـ اگر دو قطر عمود بر هم را در دایره رسم کنیم، دایره به چهار قسمت تقسیم می‌شود، اگر این چهار قسمت را به عنوان چهار لانه و پنج نقطه را به عنوان پنج کبوتر در نظر بگیریم و قرار باشد کبوترها، لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل یک لانه موجود است که با بیش از یک کبوتر پُر می‌شود. بنابراین داریم :



$$AH < 2 \Rightarrow AH^2 < 4$$

$$BH < 2 \Rightarrow \underline{BH^2 < 4}$$

$$AH^2+BH^2 < 8 \Rightarrow AB^2 < 8$$

$$\Rightarrow AB < 2\sqrt{2}$$

۳ـ اثبات به برهان خُلف. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ و هیچ کدام از 2^n زیرمجموعهٔ A، حاصل جمع اعضایشان بر n بخش‌پذیر نباشد، بنابراین، زیرمجموعه‌هایی از A مانند :

$$A_1=\{a_1\},\ A_2=\{a_1,a_2\}, A_3=\{a_1,a_2,a_3\},$$
$$\ldots, A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

نیز مجموع اعضایشان مضرب n نیست، پس عددهای زیر هیچ کدام بر n بخش‌پذیر نیستند :

$$S_1=a_1\ ,\ S_2=a_1+a_2\ ,\ S_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots,\ S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

از طرفی می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم این n عدد طبیعی بر n، یکی از اعداد ۱ تا ۱ − n است (جون این عددها هیچ کدام بر n بخش‌پذیر نیستند، پس صفر جزو باقیمانده‌ها نیست)، لذا جون n موجود است و ۱ − n باقیمانده، داریم (از ۱ تا ۱ − n)، پس طبق **اصل لانهٔ کبوتری**، حداقل ۲ عدد از این n عدد باقیماندهٔ تقسیمشان بر n با هم برابر می‌شود، فرض کنیم S_i و S_j بر n هم باقیمانده باشند که $j>i$ ، پس داریم :

$$S_j-S_i=kn\ ,(k\in z)\ ,\ S_j-S_i=a_{i+1}+\ldots+a_j$$

واضح است که $a_{i+1},\ldots,a_j$ اعضای A هستند و اگر قرار دهیم $B=\{a_{i+1},\ldots,a_j\}$ ، همواره $B\subset A$ و دیدیم که مجموع اعضای B مضرب n است و این، با فرض خُلف تناقض دارد، در نتیجه، حکم ثابت می‌شود.

۴ـ $n=1: 2! < 2^2(1!)^2 \Rightarrow 2 < 4$ درست است

$n=k: (2k)! < 2^{2k}(k!)^2$ فرض استقرا

$n=k+1: (2k+2)! < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$ حکم استقرا

دو طرف فرض استقرا را در $(2k+2)(2k+1)$ ضرب می‌کنیم :

$$(2k+2)(2k+1)(2k)! < (2k+2)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

$$\Rightarrow (2k+2)! < 2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

$$<2(k+1)(2k+2)2^{2k}(k!)^2$$
$$\Rightarrow (2k+2)! < (k+1)^2 2^{2k+2}(k!)^2$$
$$\Rightarrow (2k+2)! < 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$$

۵ـ الف :
$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\Leftrightarrow a^2c^2+2abcd+b^2d^2 \le a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2-2abcd \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \ge 0$$

ب :
$$a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1) \ge 2(ab+a+b)$$
$$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \ge 0$$

۶ـ الف :
$$A\cap B=\varnothing,\ A\cup B=M \Rightarrow B'=A$$
$$B'=M\cap B'=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup(B\cap B')$$
$$=A\cap B'=\varnothing\cup(A\cap B')$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap B')$$
$$=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$$
$$\Rightarrow B'=A$$

ب :
$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$
$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$$
$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$
$$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']=(A\cap B)-C$$

۷ـ
$$A_1=\{m\in Z \mid m\ge -1\ ,\ 2^m\le 1\}=\{-1,0,1\}$$
$$A_2=\{m\in Z \mid m\ge -2\ ,\ 2^m\le 2\}=\{-2,-1,0,1\}$$
$$A_2^2-A_1^2=\{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),$$
$$(-1,-2),(0,-2),(1,-2)\}$$

چون مجموعهٔ $A_2^2-A_1^2$ دارای ۷ عضو است، بنابراین $128=2^7$ زیرمجموعه دارد.

۸ـ الف :
$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (b-d)=5(a-c)$$

۱ـ بازتابی
$$(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow (b-b)=5(a-a)$$
$$\Leftrightarrow 0=0$$

۲ـ تقارنی
$$(a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$$
$$(a,b)R(c,d) \Rightarrow (b-d)=5(a-c)$$
$$\Rightarrow -(b-d)=-5(a-c)$$
$$\Rightarrow (d-b)=5(c-a)$$
$$\Rightarrow (c,d)R(a,b)$$

۳ـ تعدّی
$$\begin{cases}(a,b)R(c,d)\\ \text{و}\\ (c,d)R(e,f)\end{cases} \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$
$$\left.\begin{matrix}(a,b)R(c,d) \Rightarrow b-d=5(a-c)\\ (c,d)R(e,f) \Rightarrow d-f=5(c-e)\end{matrix}\right\}$$
$$\Rightarrow b-f=5(a-e) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

بنابراین، رابطهٔ R روی $\mathbb{R}^2$ هم ارزی است.

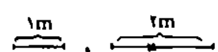
ب :
$$[(2,3)]=\{(x,y) \mid (x,y)R(2,3)\}$$
$$(x,y)R(2,3) \Rightarrow y-3=x-2 \Rightarrow y=x+1$$
$$[(2,3)]=\{(x,y) \mid y=x+1\}$$

۹ـ
$$3^{6n+2}+3^{2n+1}+1 \overset{13}{\equiv} 0$$
$$\left.\begin{matrix}3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{6n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{6n+2} \overset{13}{\equiv} 9\\ 3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{2n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{2n+1} \overset{13}{\equiv} 3\end{matrix}\right\}$$
$$\Rightarrow 3^{6n+2}+3^{2n+1} \overset{13}{\equiv} 12$$
$$\Rightarrow 3^{6n+2}+3^{2n+1}+1 \overset{13}{\equiv} 0$$

۱۰ـ الف :
$$n(S)=\binom{11}{3}=165$$
$$n(A)=\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}=40$$
$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{40}{165}=\frac{8}{33}$$

ب :
$$n(B)=\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{0}+\binom{5}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{0}\binom{4}{3}\binom{2}{0}$$
$$=30+12+4=46 \Rightarrow P(B)=\frac{46}{165}$$

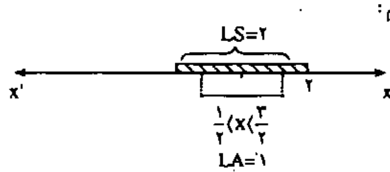
۱۱ـ



اگر قطعه چوب ۲ متری را در نقطهٔ A ارّه کنیم، آن‌گاه سه قطعه چوب با طولهای ۱ و x و x−۲ متری داریم. اگر بخواهیم با این سه قطعه چوب، مثلث بسازیم، بنا به اصل نامساوی در مثلث داریم :

$$\begin{cases}2-x+x>1 \Rightarrow 2>1 & \text{(همواره درست است)}\\ 2-x+1>x \Rightarrow x<\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ x+1>2-x \Rightarrow x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

چون نقطهٔ A را روی پاره‌خط دو متری درنظر می‌گیریم، بنابراین داریم :



$$\Rightarrow P(A)=\frac{LA}{LS}=\frac{1}{2}$$

۱۲ـ
$$\begin{cases}P(1)=x\\ P(2)=2x\\ P(3)=3x\\ P(4)=4x\\ P(5)=5x\\ P(6)=6x\end{cases} \Rightarrow x+2x+3x+4x+5x+6x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{21}$$

$$P(1)=\frac{1}{21};\ P(2)=\frac{2}{21};\ P(3)=\frac{3}{21};$$
$$P(4)=\frac{4}{21};\ P(5)=\frac{5}{21};\ P(6)=\frac{6}{21}$$

$$\begin{cases}P(\text{ر})=3P(\text{پ})\\ P(\text{پ})=x\\ P(\text{ر})=3x\end{cases} \Rightarrow x+3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$
$$P(\text{ر})=\frac{3}{4};\ P(\text{پ})=\frac{1}{4}$$

درصورتی که تاس کمتر از ۴ و سکّه رو بیاید، خواهیم داشت :
$$A=\{(1,\text{ر}),(2,\text{ر}),(3,\text{ر})\}$$

$$P[(1,\text{ر})]=P(1)\times P(\text{ر})=\frac{1}{21}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{84};$$
$$P[(2,\text{ر})]=P(2)\times P(\text{ر})=\frac{2}{21}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{84}$$
$$P[(3,\text{ر})]=P(3)\times P(\text{ر})=\frac{3}{21}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{84}$$
$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{84}+\frac{6}{84}+\frac{9}{84}=\frac{18}{84}$$

حلّ مسائل حسابان ۱

● حمیدرضا امیری

۱ـ درحالت کلی اگر $|x|\ge a$ ، در این صورت $x\ge a$ یا $x\le -a$ پس :

$$|4x-2|\ge 2 \Rightarrow \begin{cases}4x-2\ge 2 \Rightarrow x\ge 1\\ \text{یا}\\ 4x-2\le -2 \Rightarrow x\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 1\ \text{یا}\ x\le 0\}$$

۲ـ خیر، دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=(\sqrt{x})^2$ به دلیل این که دامنه‌های برابر ندارند، مساوی نمی‌باشند.

$$D_f=\mathbb{R}\ \text{و}\ D_g=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$$

۳ـ طبق فرض مسأله $f(x)=2x-1$ و

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ x-2 & x<0\end{cases}$$

$$x>0 \Rightarrow fog(x)=f(g(x))=2(x+1)-1=2x+1$$
$$x=0 \Rightarrow fog(0)=f(g(0))=f(2)=3$$
$$x<0 \Rightarrow fog(x)=f(g(x))=2(x-2)-1=2x-5$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ 3 & x=0\\ 2x-5 & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=2x-1>0 \Rightarrow gof(x)=(2x-1)-1=2x-2$$
$$f(x)=2x-1=0 \Rightarrow gof(x)=g(0)=2$$
$$f(x)=2x-1<0 \Rightarrow gof(x)=(2x-1)-2=2x-3$$

$$\Rightarrow gof(x)=\begin{cases}2x-2 & x>\frac{1}{2}\\ 2 & x=\frac{1}{2}\\ 2x-3 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

حال، قسمت دوم مسأله را حل می‌کنیم، اگر $h(x)=tg(\sin x)$ ، داریم :

$$h(-x)=tg(\sin(-x))=tg(-\sin x)=-tg(\sin x)=-h(x)$$
$\Rightarrow h(-x)=-h(x) \Rightarrow$ تابع h فرد است.

۴ـ طبق فرض مسأله داریم :
$$f(x)=(x^2-4)Q(x)+(2x-1)$$
$$\Rightarrow f(x)=(x-2)(x+2)Q(x)+(2x-1)$$

در تساوی فوق x را به $(x-4)$ تبدیل می‌کنیم :
$$f(x-4)=(x-6)(x-2)Q(x-4)+(2x-9)$$

و اگر قرار دهیم $Q_1(x)=(x-6)Q(x-4)$ ، در این صورت داریم :

$f(x-4)=(x-2)Q_1(x)+(2x-9)$

پس، باقیمانده $f(x-4)$ بر $(x-2)$ برابر $(2x-9)$ است.

۵ـ طبق فرض مسأله، تابع f زوج است، پس طبق تعریف برای هر $x\in D_f$، همواره $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$. حال اگر فرض کنیم: $f(x)=y$، چون $f(-x)=f(x)$، پس: $f(-x)=y$
بنابراین، دو عضو دامنه، به یک عضو از بُرد نسبت داده شده است و این، با تعریف یک به یک بودن تابع تناقض دارد.

۶ـ با توجه به رابطهٔ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ داریم:

$$\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{2\sin x(4\cos^3 x-3\cos x)}{2\sin x\cos x}$$
$$=4\cos^2 x-3=4(1-\sin^2 x)-3=1-4\sin^2 x$$

۷ـ طبق فرض مسأله داریم، $3-\sin x\le f(x)\le 4-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

حال برای محاسبهٔ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ از قضیهٔ ساندویچ یا فشار استفاده می‌کنیم:

① $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(3-\sin x)=3-1=2$

② $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(4-2\operatorname{tg}\frac{x}{2})=4-2\times 1=2$

① و ② $\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=2$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)}=\frac{1}{2}$$

۸ـ 1) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}$ مبهم

روش اوّل: (تغییر متغیر)

اگر در کسر فوق x را به z^7 تغییر دهیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{\sqrt[3]{z^7}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^2\sqrt[3]{z}-1}=\frac{0}{0}$$

رفع ابهام: $\frac{(z-1)}{z^2\sqrt[3]{z}-1}=\frac{(z-1)(z^4\sqrt[3]{z^2}+z^2\sqrt[3]{z}+1)}{(z^7-1)}$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^4\sqrt[3]{z^2}+z^2\sqrt[3]{z}+1)}{(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)}=\frac{3}{7}$$

روش دوم: (استفاده از قاعدهٔ هوپیتال)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{7}$$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^4-2x}-x^2=\infty-\infty$ مبهم

رفع ابهام: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-2x}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4-2x}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^4-2x}+x^2\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4-2x)-x^4}{\sqrt{x^4-2x}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x^3+x-2)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x^3+x-2)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=-\infty$$

3) $\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=0\times\infty$ مبهم

(از تغییر متغیر و سپس از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم.)

رفع ابهام: اگر $(x-1)=y\Rightarrow x=y+1$

$x\to 1\Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\operatorname{tg}\left[-\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}=\frac{(x-1)}{-\frac{\pi}{2}(x-1)}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

۹ـ چون می‌خواهیم تابع در $x_0=1$ پیوسته باشد، پس باید $f(1)$ با حدّ چپ تابع در $x_0=1$ و با حدّ راست تابع در $x_0=1$ برابر باشد.

① $f(1)=2a-1$

② $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=1$

① و ② $\Rightarrow 2a-1=1\Rightarrow \boxed{a=1}$

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}[-x+1]-b=0-b=-b$

$\Rightarrow -b=1\Rightarrow \boxed{b=-1}$

۱۰ـ ابتدا محلّ تلاقی دو منحنی را می‌یابیم:

$$\begin{cases}y=x^3-2x^2\\ y=x^3-2\end{cases}\Rightarrow x^3-2x^2=x^3-2\Rightarrow -2x^2=-2$$

$\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow A_1\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix},\ A_2\begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix}$

$y'=3x^2-4x\Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'(1)=3-4=-1$

معادلهٔ خط مماس: $(y+1)=-1(x-1)\Rightarrow \boxed{y=-x}$

۱۱ـ 1) $y=\sqrt[5]{(2x-1)^3}\Rightarrow y'=\frac{3\times 2}{5\sqrt[5]{(2x-1)^2}}$

$$\left(y=\sqrt[m]{u^n}\Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}\right)$$

2) $y=\sin^4\left(\cos^3(x^2)\right)$

$\Rightarrow y'=4\times\left[-3\times(2x)\sin x^2\cos^2 x^2\right]$
$\cos\left(\cos^3(x^2)\right)\sin^3\left(\cos^3(x^2)\right)$

$\left(y=\sin^m u\Rightarrow y'=mu'\cos u\sin^{m-1}u\right)$

3) $y=\frac{2x^2-4x}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow$

$$y'=\frac{(4x-4)\sqrt{x^2-1}-\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\times(2x^2-4x)\right)}{(x^2-1)}$$

4) $f(x)=\frac{\sin^3 2x}{\cos^2 x}$

$$y'=\frac{(3\times 2\cos 2x\sin^2 2x)(\cos^2 x)-(-2\sin x\cos x)(\sin^3 2x)}{\cos^4 x}$$

۱۲ـ طبق فرض مسأله $f'(x)=3x-1$، از طرفی داریم:

$y=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$

1) $y=f(4x)\Rightarrow y'=4\times f'(4x)$

$\Rightarrow y'=4\times[3(4x)-1]\Rightarrow y'=48x-4$

2) $y=f(\sin x)\Rightarrow y'=\cos x\times f'(\sin x)\Rightarrow$

$y'=\cos x\times[3(\sin x)-1]\Rightarrow y'=3\sin x\cos x-\cos x$

حلّ مسائل جبر خطی پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱ـ اگر x و y دو بردار از $\mathbb{R}^n$ و مضرب ناصفری از هم باشند، یعنی $x=\alpha y$ که $\alpha\neq 0$، پس $x-\alpha y=\vec{0}$ و تساوی اخیر، یک ترکیب خطی از این دو بردار است، که بردار صفر را تولید کرده و این ترکیب خطی دارای ضرایب ناصفر است، پس دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

۲ـ طبق فرض f نگاشتی خطی و $f(1,0)=(1,-1,0)$ و $f(0,1)=(0,1,2)$. حال برای محاسبهٔ $f(2,-1)$ به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا $(2,-1)$ را برحسب بردارهای $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌نویسیم،
$(2,-1)=2(1,0)-1(0,1)$

حال f را روی دو طرف تساوی اثر می‌دهیم،

$f(2,-1)=f[2(1,0)-1(0,1)]$
$=2f(1,0)-1f(0,1)$ چون f خطی است.
$=2(1,-1,0)-1(0,1,2)=(2,-3,-2)$

۳ـ برای محاسبهٔ هستهٔ هر یک از نگاشتهای داده شده، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

1) $f(x,y)=(x-2y,2x+y)$

هسته: $K_f=\{(x,y)|f(x,y)=(0,0)\}$
$=\{(x,y)|(x-2y,2x+y)=(0,0)\}$
$\Rightarrow K_f=\{(x,y)|x=0\ ,\ y=0\}=\{(0,0)\}$

و بُعد K_f صفر است.

2) $f(x,y,z)=(x,y+z)$

$K_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(0,0)\}$
$K_f=\{(x,y,z)|(x,y+z)=(0,0)\}$
$K_f=\{(x,y,z)|x=0\ ,\ y+z=0\}$

که K_f تقاطع دو صفحهٔ $x=0$ و $y+z=0$ می‌باشد، که یک خط بوده و بُعد آن یک است.

3) $f(x,y)=(x,0,0)$

$K_f=\{(x,y)|f(x,y)=(0,0,0)\}$
$K_f=\{(x,y)|(x,0,0)=(0,0,0)\}=\{(x,y)|x=0\}$

که K_f یک خط در صفحه را مشخص می‌کند و بُعد آن یک است (محور yها).

4) $f(x,y,z)=(x,2y,0)$

$K_f=\{(x,y,z)|(x,2y,0)=(0,0,0)\}$
$K_f=\{(x,y,z)|x=0\ ,\ y=0\}$

در این نگاشت K_f محلّ برخورد دو صفحهٔ $x=0$ و $y=0$ است، که همان محور zها می‌باشد و بُعد آن یک است.

۴ـ چون نگاشت خطی است و همواره هستهٔ هر نگاشت خطی، یعنی K_f باید شامل بردار صفرِ فضای دامنه باشد، پس باید $(0,0,0)\in K_f$، بنابراین باید داشته باشیم:

$(0,a+b,2a-b+3)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\ 2a-b+3=0\end{cases}\overset{a=-b}{\Rightarrow}-2b-b+3=0$$

$\Rightarrow b=۱ \;,\; a=-۱$

$\Rightarrow a^۳+۲b^۲-۶=(-۱)^۳+۲(۱)^۲-۶=-۵$

۵ـ فرض کنیم (x,y) نقطهٔ دلخواهی از خط $۲y=x-۱$ باشد و نگاشتِ خطی f را روی این نقطه اثر می‌دهیم که خواهیم داشت:

$f(x,y)=(X,Y)\Rightarrow(x-y,۲x+y)=(X,Y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=X & ①\\ ۲x+y=Y\end{cases}\Rightarrow ۳x=X+Y\Rightarrow x=\frac{X+Y}{۳}$$

$$①\Rightarrow y=x-X=\frac{X+Y}{۳}-X\Rightarrow y=\frac{Y-۲X}{۳}$$

حال در معادلهٔ خط به جای x و y، تبدیل‌یافته‌های آنها را برحسب X و Y قرار می‌دهیم،

$$۲y=x-۱\Rightarrow ۲\left(\frac{Y-۲X}{۳}\right)=\left(\frac{X+Y}{۳}\right)-۱$$

۶ـ اگر $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، برای بررسی پوشایی این نگاشت، از رابطهٔ $m-n=$ بُعد هستهٔ f، استفاده می‌کنیم که اگر تساوی برقرار باشد، نگاشت f پوشا بوده و در غیر این صورت، پوشا نمی‌باشد.

۱) $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$

$f(x,y)=(x-۲y,-۲x+۴y)$

$K_f=\{(x,y)|(x-۲y,-۲x+۴y)=(۰,۰)\}$

$K_f=\{(x,y)|x-۲y=۰\}\Rightarrow$ بُعد $k_f=۱$

و چون $۲-۲\neq۱$، پس تابع پوشا نمی‌باشد.

۲) $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۲$

$f(x,y,z)=(y,z)$

$K_f=\{(x,y,z)|(y,z)=(۰,۰)\}$

$K_f=\{(x,y)|y=۰\;,\;z=۰\}=$ محور xها

$\Rightarrow$ بُعد $K_f=۱$ و $۳-۲=۱$ $\Leftarrow$ نگاشت پوشاست.

۳) $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۲$

$f(x,y,z)=(z,۰)$

$K_f=\{(x,y,z)|(z,۰)=(۰,۰)\}$

$K_f=\{(x,y,z)|z=۰\}=$ صفحهٔ xoy

$\Rightarrow$ بُعد $K_f=۲$ و $۲\neq۳-۱$ $\Leftarrow$ نگاشت پوشا نمی‌باشد.

۴) $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$

$f(x,y,z)=(x-y,y+z,۲x)$

$K_f=\{(x,y,z)|(x-y,y+z,۲x)=(۰,۰,۰)\}$

$K_f=\{(x,y,z)|x-y=۰,y+z=۰,۲x=۰\}$

$K_f=\{(x,y,z)|x=y=z=۰\}=\{(۰,۰,۰)\}$

بُعد $K_f=۰=۳-۳\Rightarrow$ نگاشت پوشاست.

(توجه دارید که در مورد نگاشتهای از $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$، شرط لازم و کافی برای پوشا بودنِ آنها، یک به یک بودن است.)

۷ـ طبق فرض مسأله $f(x,y)=(x-۲y,x+y)$، حال برای به‌دست آوردن ضابطهٔ $f^{-۱}$ به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$f(x,y)=(x_۱,y_۱)\Rightarrow(x-۲y,x+y)=(x_۱,y_۱)$

$$\Rightarrow-\begin{cases}x-۲y=x_۱\\ x+y=y_۱ & ①\end{cases}\Rightarrow ۳y=y_۱-x_۱\Rightarrow y=\frac{y_۱-x_۱}{۳}$$

$$①\Rightarrow x=y_۱-y\Rightarrow x=y_۱-\frac{y_۱-x_۱}{۳}=\frac{۲y_۱-x_۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲y_۱-x_۱}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x,y)=\left(\frac{۲y-x}{۳},\frac{y-x}{۳}\right)$$

۸ـ طبق قضیهٔ کتاب، می‌دانیم که اگر f یک نگاشت خطی باشد، $f^{-۱}$ نیز نگاشتی خطی است. از طرفی می‌دانیم اگر $f(۱,۰)=(۱,-۱)$ و $f(۰,۱)=(۲,۱)$، در این صورت $f^{-۱}(۱,-۱)=(۱,۰)$ و $f^{-۱}(۲,۱)=(۰,۱)$، پس کافی است برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۳,-۳)$، ابتدا $(۳,-۳)$ را برحسب ترکیب خطی بردارهای $(۲,۱)$ و $(۱,-۱)$ بنویسیم و سپس از خاصیت خطی بودنِ $f^{-۱}$ (مشابه مسألهٔ ۲) استفاده کنیم.

$(۳,-۳)=۳(۱,-۱)+۰(۲,۱)$

$\Rightarrow f^{-۱}(۳,-۳)=f^{-۱}[۳(۱,-۱)]$

$\Rightarrow f^{-۱}(۳,-۳)=۳f^{-۱}\underbrace{(۱,-۱)}_{(۱,۰)}=۳(۱,۰)=(۳,۰)$

۹ـ طبق فرض مسأله داریم، $f(x,y)=(۲x,-y)$، بنابراین، برای محاسبهٔ $f^{-۱}of(۲,-۳)$ یا $fof^{-۱}(۲,-۳)$ نیاز به ضابطهٔ $f^{-۱}$ داریم:

$f(x,y)=(x_۱,y_۱)\Rightarrow(۲x,-y)=(x_۱,y_۱)$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=x_۱\Rightarrow x=\frac{x_۱}{۲}\\ -y=y_۱\Rightarrow y=-y_۱\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x,y)=(\frac{x}{۲},-y)$$

$f^{-۱}of(۲,-۳)=f^{-۱}[f(۲,-۳)]$

$=f^{-۱}(۴,۳)=(\frac{۴}{۲},-۳)=(۲,-۳)$

$fof^{-۱}(۲,-۳)=f\left[f^{-۱}(۲,-۳)\right]$

$=f(۱,۳)=(۲,-۳)$

(البته در حالت کلّی نیز $f^{-۱}of(X)=X$ و $fof^{-۱}(X)=X$)

۱۰ـ برای حلّ دستگاه داده شده به کمک ماتریس وارون، نیاز به وارونِ ماتریس ضرایب دستگاه داریم و سپس از رابطهٔ $X=A^{-۱}B$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & +۱\\ ۱ & -۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$A_{۱۱}=۳\;,\;A_{۱۲}=۳\;,\;A_{۱۳}=۳$

$A_{۲۱}=-۱\;,\;A_{۲۲}=-۵\;,\;A_{۲۳}=-۳$

$A_{۳۱}=۱\;,\;A_{۳۲}=-۱\;,\;A_{۳۳}=-۳$

$$\Rightarrow A^*=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۱\\ ۳ & -۵ & -۱\\ ۳ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

$|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$
$=۲\times۳+(-۱)\times۳+(۱)\times۳=۶$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۶} & -\frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۶}\\ \frac{۳}{۶} & -\frac{۵}{۶} & \frac{-۱}{۶}\\ \frac{۳}{۶} & \frac{-۳}{۶} & \frac{-۳}{۶}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۶} & -\frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۶}\\ \frac{۳}{۶} & -\frac{۵}{۶} & -\frac{۱}{۶}\\ \frac{۳}{۶} & -\frac{۳}{۶} & -\frac{۳}{۶}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۰\\ -۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۲\\ z=۳\end{cases}$$

حلّ مسأله‌های هندسهٔ تحلیلی

● محمد هاشم رستمی

۱ـ بردار هادی محور xها $i=(۱,۰,۰)$ و $a=۲i-j+۳k$ است. با توجه به این‌که قرینهٔ بردار a نسبت به بردار b، بردار a' است، به قسمی که $a'=۲\frac{a\cdot b}{b\cdot b}b-a$ بنابراین، قرینهٔ بردار a نسبت به بردار i را اگر a' بنامیم، داریم:

$$a'=۲\frac{a\cdot i}{i\cdot i}i-a\Rightarrow a'=۲\frac{۲+۰+۰}{۱}(۱,۰,۰)-(۲,-۱,۳)$$

$\Rightarrow a'=(۴,۰,۰)-(۲,-۱,۳)=(۴-۲,۰+۱,۰-۳)$

$\Rightarrow a'=(۲,۱,-۳)$ یا $a'=۲i+j-۳k$

نکته. قرینهٔ بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نسبت به محور xها بردار $a'=(a_۱,-a_۲,-a_۳)$ است، که از این ویژگی نیز مسألهٔ بالا را می‌توان حل کرد.

۲ـ با توجه به این که $a=i+۳j$ یا $a=(۱,۳,۰)$ و $b=۲j+۳k$ و یا $b=(۰,۲,۳)$ است، داریم:

الف: $\cos(a,b)=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{۰+۶+۰}{\sqrt{۱+۹+۰}.\sqrt{۰+۴+۹}}$

$=\frac{۶}{\sqrt{۱۳۰}}\Rightarrow(a\hat{,}b)=۲k\pi+\mathrm{Arc}\cos\frac{۶}{\sqrt{۱۳۰}}$

ب: a' تصویر بردار a روی بردار b (و یا راستای بردار b) برابر است با:

$$a'=\frac{a\cdot b}{b\cdot b}b\Rightarrow a'=\frac{۶}{۱۳}(۰,۲,۳)$$

$$\Rightarrow a'=(۰,\frac{۱۲}{۱۳},\frac{۱۸}{۱۳})\text{ یا } a'=\frac{۱۲}{۱۳}j+\frac{۱۸}{۱۳}k$$

پ: $a\cdot b=۰+۶+۰=۶$

$a\times b=(۹,-۳,۲)\Rightarrow|a\times b|=\sqrt{۸۱+۹+۴}=\sqrt{۹۴}$

۳ـ با توجه به این که $A=(۰,۲,۳)$ و $B=(۱,-۱,۱)$ است، داریم:

الف: $A'=(۰,۲,-۳)$ و $B'=(۱,-۱,-۱)$

ب: $AB:\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z-۱}{۲}$

$A'B':\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z+۱}{-۲}$

$$\text{پ: }\begin{cases}AB & \frac{x-۱}{-۱}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z-۱}{۲}\\ A'B' & \frac{x-۱}{-۱}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z+۱}{-۲}\end{cases}\Rightarrow M(\frac{۳}{۲},\frac{-۵}{۲},۰)$$

نقطهٔ M روی صفحهٔ xoy است.

۴ـ نقطهٔ دلخواه $N\begin{vmatrix}۲t+۱\\ -t+۲\\ ۳t\end{vmatrix}$ روی خط D را درنظر می‌گیریم. با توجه به این که $N\begin{vmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{vmatrix}$ است، داریم:

$\vec{MN}=(۲t,-t,۳t-۳)$

از طرفی $\vec{V}_D=(۲,-۱,۳)$ است. حال شرط عمود بودن $\vec{MN}$ بر $\vec{V}_D$ را می‌نویسیم:

$\vec{MN}\perp\vec{V}_D\Rightarrow\vec{MN}\cdot\vec{V}_D=۰\Rightarrow ۴t+t+۹t-۹=۰$

$\Rightarrow ۱۴t-۹=۰\Rightarrow t=\frac{۹}{۱۴}$

پای عمود رسم شده از A بر خط D. $\Rightarrow N=\left(\frac{16}{7},\frac{19}{14},\frac{27}{14}\right)$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{\left(\frac{16}{7}-1\right)^2+\left(\frac{19}{14}-2\right)^2+\left(\frac{27}{14}-3\right)^2}$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2+\left(\frac{-9}{14}\right)^2+\left(\frac{-15}{14}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{14}\sqrt{324+81+225}\Rightarrow MN=\frac{3\sqrt{70}}{14}$$

۵ـ معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر خط D را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بر نقطهٔ A بگذرد. داریم:

$$D:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+2=0\\2x-z=0\end{cases}$$

دسته صفحهٔ گذرنده بر خط D: $\alpha(3x-2y+2)+\beta(2x-z)=0$

$$A=(2,0,1)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته صفحه}}\alpha(6-0+2)+\beta(4-1)=0$$

$$\Rightarrow 8\alpha+3\beta=0 \text{ یا } \alpha=\frac{-3}{8}\beta$$

$$\Rightarrow\frac{-3}{8}\beta(3x-2y+2)+\beta(2x-z)=0$$

$$\Rightarrow -9x+6y-6+16x-8z=0$$

معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده $\Rightarrow 7x+6y-8z-6=0$

۶ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی را که از صفحهٔ P به فاصلهٔ ۴ قرار دارند، می‌نویسیم و نقطه‌های برخورد آنها با خط D را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این که $D:\begin{cases}x+y-z=2\\2x-y=4\end{cases}$ و $P=2x+2y-z+1=0$ است، داریم:

$$3x-z=6\Rightarrow x=\frac{z+6}{3} \text{ و } 2x-y=4\Rightarrow x=\frac{y+4}{2}$$

معادلهٔ پارامتری خط D $\Rightarrow D:x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{3}$

برای نوشتن معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ مورد نظر فرض می‌کنیم: $M(x,y,z)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، دراین صورت:

$$4=\frac{|2x+2y-z+1|}{\sqrt{4+4+1}}\Rightarrow|2x+2y-z+1|=12$$

$$\Rightarrow P_1:2x+2y-z-11=0 \quad \text{و}$$

$$P_2:2x+2y-z+13=0$$

معادلهٔ صفحه‌های مکان هندسی

$$\begin{cases}P_1: 2x+2y-z-11=0\\D: x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{3}=t\Rightarrow x=t,y=2t-4,z=3t-6\end{cases}$$

$$2(t)+2(2t-4)-(3t-6)-11=0$$

$$\Rightarrow 3t-13=0\Rightarrow t=\frac{13}{3}\Rightarrow M_1=\left(\frac{13}{3},\frac{14}{3},7\right)$$

$$\begin{cases}P_2: 2x+2y-z+13=0\\D: x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{3}=t\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(t)+2(2t-4)-(3t-6)+13=0\Rightarrow 3t+11=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-11}{3}\Rightarrow M_2=\left(\frac{-11}{3},\frac{-34}{3},-17\right)$$

حلّ مسائل ریاضی عمومی ۱

● میرشهرام صدر

۱ـ الف:

$$\overline{x_1}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{2+3+3+6+7+9}{6}=\frac{30}{6}=5$$

$$\sigma_1^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x_1})^2}{n}$$

$$=\frac{(2-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{6}$$

$$=\frac{9+4+4+4+16}{6}=\frac{37}{6}$$

$$\Rightarrow\sigma_1=\sqrt{\frac{37}{6}}\cong 2/48$$

$$\overline{x_2}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+6+8}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$\sigma_2^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x_2})}{n}$$

$$=\frac{(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(6-4)+(8-4)}{6}$$

$$=\frac{9+4+1+0+4+16}{6}=\frac{34}{6}$$

$$\Rightarrow\sigma_2=\sqrt{\frac{34}{6}}\cong 2/38$$

بلمقایسهٔ σ_1 و σ_2، ملاحظه می‌کنیم که پراکندگی در داده‌های گروه اوّل، بیشتر از پراکندگی داده‌های گروه دوم است.

ب:

$$V_1=\frac{\sigma_1}{\overline{x_1}}=\frac{2/48}{5}\cong 0/5\ ;\ V_2=\frac{\sigma_2}{\overline{x_2}}=\frac{2/38}{4}\cong 0/6$$

۲ـ برای این که بررسی کنیم که دو پیشامد A و B مستقل یا وابسته هستند، یک بار مقدار $P(A)\times P(B)$ و بار دیگر مقدار $P(A\cap B)$ را به دست می‌آوریم. اگر این دو مقدار با یکدیگر برابر باشند، آن‌گاه دو پیشامد A و B مستقل‌اند. در غیر این صورت دو پیشامد A و B وابسته هستند.

$$P(B)=1-P(B')\Rightarrow P(B)=1-0/35=0/65$$
$$P(A)\times P(B)=0/25\times 0/65=0/1625 \qquad (1)$$
$$P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=1-P(A\cup B)$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=1-0/6=0/4$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 0/4=0/25+0/65-P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=0/5 \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم که $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$، پس دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

۳ـ

$$P(x=k)=\binom{n}{k}\times P^k\times(1-P)^{n-k}$$

$$P(x=40)=\binom{50}{40}\times(0/6)^{40}\times(1-0/6)^{50-40}$$
$$=\binom{50}{40}\times(0/6)^{40}\times(0/4)^{10}$$
$$P=0/6\Rightarrow P'=1-P=1-0/6=0/4$$
$$E(x)=n.P'=50\times 0/4=20$$

بنابراین، انتظار داریم ۲۰ نفر دارای خونی با RH منفی باشند.

۴ـ می‌دانیم که

$$x^4\le x^4+4x^3+6x^2+4x<x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

یا این که $x^4\le x^4+4x^3+6x^2+4x\le(x+1)^4$، بنابراین چون $x>0$، داریم:

$$x\le\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x}\le x+1$$

در نتیجه: $\left[\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x}\right]=x$

۵ـ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+7}{n^2-1}=2$$

برای هر $\varepsilon>0$ وجود دارد عددی مانند $M>0$، به طوری که اگر $n\ge M$ در این صورت $\left|\frac{2n^2+7}{n^2-1}-2\right|<\varepsilon$. بنابراین داریم:

$$n\ge M\Rightarrow\left|\frac{2n^2+7-2n^2+2}{n^2-1}\right|<\varepsilon$$

$$n\ge M\Rightarrow\left|\frac{9}{n^2-1}\right|<\varepsilon$$

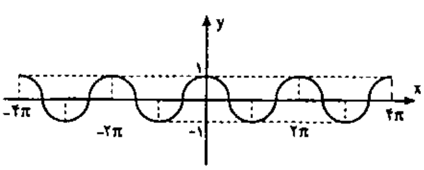
$$n\ge M\Rightarrow|n^2-1|>\frac{9}{\varepsilon}$$

$$n\ge M\Rightarrow n^2>\frac{9}{\varepsilon}+1 \quad (\text{جون } n\to+\infty)$$

$$n\ge M\Rightarrow n\ge\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}+1}$$

بنابراین، اگر $M\ge\left[\sqrt{\frac{9}{\varepsilon}+1}\right]+1$، آن‌گاه حدّ بالا برقرار خواهد بود.

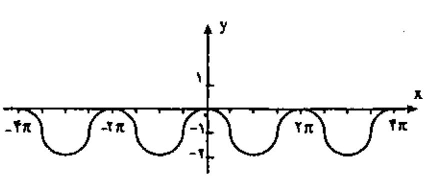
۶ـ ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ را در فاصلهٔ $[-4\pi,4\pi]$ رسم می‌کنیم:



(نمودار ۱)

$$y=\cos x(-4\pi\le x\le 4\pi)$$

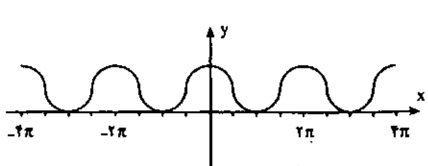
اکنون اگر نمودار را به اندازهٔ یک واحد موازی محور yها به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-1+\cos x$ به‌دست می‌آید:



(نمودار ۲)

$$y=-1+\cos x(-4\pi\le x\le 4\pi)$$

در این مرحله، برای رسم نمودار $y=|-1+\cos x|$ کافی است قرینهٔ (نمودار ۲) را نسبت به محور xها به دست آوریم:



(نمودار ۳)

۷ـ

$$(\lambda+2)x+(4\lambda-3)y-5+3\lambda=0$$
$$\Rightarrow \lambda x+2x+4\lambda y-3y-5+3\lambda=0$$
$$\Rightarrow (x+4y+3)\lambda+(2x-3y-5)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x+4y+3=0\\ 2x-3y-5=0\end{cases} \Rightarrow x=1\ ,\ y=-1$$
$$\Rightarrow A\Big|_{-1}^{1}$$ (مختصات نقطهٔ ثابت)

۸ـ جملهٔ عمومی بسط فوق به صورت زیر است :

$$t_k=\binom{15}{k-1}\times(2x^2)^{k-1}\times\left(\frac{3}{x^3}\right)^{15-(k-1)}$$
$$\Rightarrow t_k=\binom{15}{k-1}\times 2^k\times 3^{16-k}\times(x^2)^{k-1}\times(x^{-3})^{16-k}$$

برای این که شمارهٔ جملهٔ مستقل از x را بیابیم، باید در معادلهٔ زیر مقدار k را به دست آوریم :

$$(x^2)^{k-1}\times(x^{-3})^{16-k}=x^0$$
$$\Rightarrow x^{2k-2-48+3k}=x^0\Rightarrow 5k=50\Rightarrow k=10$$

برای به دست آوردن مجموع ضرایب بسط فوق کافی است در عبارت $\left(2x^2+\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ قرار دهیم، $x=1$:

مجموع ضرایب بسط $\left(2\times(1)^2+\frac{3}{1^3}\right)^{15}=(2+3)^{15}=5^{15}$

۹ـ الف :

$$(27^x)^{x+2}=\frac{1}{9}\Rightarrow\left[(3^3)^x\right]^{x+2}=\frac{1}{3^2}\Rightarrow 3^{3x(x+2)}=3^{-2}$$
$$\Rightarrow 3x^2+6x=-2\rightarrow 3x^2+6x+2=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\ ,\ x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$$

ب :

$$\mathrm{Ln}(2x-1)+\mathrm{Ln}13=\mathrm{Ln}91-\mathrm{Ln}(x+1)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Ln}(2x-1)\times 13=\mathrm{Ln}\frac{91}{x+1}\Rightarrow(2x-1)\times 13=\frac{91}{x+1}$$
$$\Rightarrow (x+1)(2x-1)=7$$
$$\Rightarrow 2x^2+x-8=0$$

$\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{65}}{4}$ (ق. ق) و $x=\frac{-1-\sqrt{65}}{4}$ (غ. ق. ق)

۱۰ـ

$$un:\frac{2n^2+4n+2-2}{(n+1)^2}=\frac{2(n^2+2n+1)-2}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{2(n+1)^2}{(n+1)^2}-\frac{2}{(n+1)^2}\Rightarrow un=2-\frac{2}{(n+1)^2}$$
$$u_1=2-\frac{2}{4}=\frac{3}{2}\ ,\ u_2=2-\frac{2}{9}=\frac{16}{9},\ \ldots,\ u_n$$
$$=2-\frac{2}{(n+1)^2}\ ,\ u_{n+1}=2-\frac{2}{(n+2)^2}$$

با توجه به جمله‌های دنبالهٔ $\{u_n\}$ ملاحظه می‌کنیم که $u_n < u_{n+1}$ ؛ بنابراین، این دنباله صعودی است.

با توجه به جمله‌های دنبالهٔ $\{u_n\}$ ملاحظه می‌کنیم، که برای هر $n\in N$ داریم $u_n\geq\frac{3}{2}$ و $u_n<2$، یعنی این دنباله از بالا و پایین کراندار است.

۱۱ـ برای یافتن مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ (در صورت وجود) باید از فرمول $y=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ استفاده نماییم، اگر حدّ تابع برابر یک عدد حقیقی باشد، در این صورت، تابع دارای مجانب افقی است. بنابراین :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^3+(a-b+2)x^2+4}{2x^2+5}$$

حدّ بالا وقتی برابر یک عدد حقیقی است، که ضریب x^3 برابر صفر باشد، یعنی داریم :

$$a-1=0\Rightarrow a=1$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-1)x^3+(1-b+2)x^2+4}{2x^2+5}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-b)x^2}{2x^2}=\frac{3-b}{2}$$

از طرفی می‌دانیم که $y=2$ مجانب افقی منحنی است، بنابراین :

$$\frac{3-b}{2}=2\Rightarrow 3-b=4\rightarrow b=-1$$

حلّ مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

● احمد قندهاری

۱. باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عدد طبیعی M وجود دارد که :

$$n\geq M\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$$
$$|a_n-L|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{4n^2-1}{n^2-4}-4\right|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow\left|\frac{4n^2-1-4n^2+16}{n^2-4}\right|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow\left|\frac{15}{n^2-4}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{15}{|n^2-4|}<\varepsilon\Rightarrow\frac{|n^2-4|}{15}>\frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow|n^2-4|>\frac{15}{\varepsilon}\qquad n\rightarrow+\infty\Rightarrow|n^2-4|=n^2-4$$
$$\Rightarrow n^2-4>\frac{15}{\varepsilon}\Rightarrow n^2>\frac{15}{\varepsilon}+4\Rightarrow n>\sqrt{\frac{15}{\varepsilon}+4}$$
$$\Rightarrow M\geq\left\lfloor\sqrt{\frac{15}{\varepsilon}+4}\right\rfloor+1$$
$$\Rightarrow n\geq\left\lfloor\sqrt{\frac{15}{\varepsilon}+4}\right\rfloor+1\Rightarrow\left|\frac{4n^2-1}{n^2-4}-4\right|<\varepsilon$$

۲.

$$2>1\Rightarrow 2^{\frac{1}{n}}>1$$

اگر $2^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ که $\alpha_n>0$ فرض شود داریم :

$$(2^{\frac{1}{n}})^n=(1+\alpha_n)^n\Rightarrow 2=\binom{n}{1}\alpha_n+\binom{n}{2}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n$$
$$\Rightarrow 2>\binom{n}{2}\alpha_n^2\Rightarrow 2>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2\Rightarrow\alpha_n^2<\frac{4}{n(n-1)}$$
$$\Rightarrow 0<\alpha_n^2<\frac{4}{n(n-1)}\qquad n\rightarrow\infty\Rightarrow\frac{4}{n(n-1)}\rightarrow 0$$
$$\Rightarrow 0<\alpha_n^2<0\Rightarrow\alpha_n^2=0\Rightarrow\alpha_n=0$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$$

۳. جملات این دنباله عبارتند از :

$$\sqrt{3},\sqrt{3\sqrt{3}},\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ldots$$

حدس می‌زنیم برای هر $n\in N$ ، $a_n<3$، حال به کمک استقرا ثابت می‌کنیم که این حدس درست است.

$n=1\ ,\ a_1<3$

$n=k\ ,\ a_k<3$ فرض استقرا

باید ثابت کنیم $n=k+1\ ,\ a_{k+1}<3$ یا باید ثابت کنیم :

$$\sqrt{3a_k}<3$$

داریم : $\sqrt{3a_k}<3\xrightarrow{\text{به توان ۲}}3a_k<9\Rightarrow a_k<3$

چون به رابطهٔ $a_k<3$ رسیدیم، این رابطهٔ فرض استقراست، پس حکم یعنی، $a_{k+1}<3$ درست است. پس این دنباله کراندار است.

برای نشان دادن این که دنباله صعودی است، ثابت می‌کنیم :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{3a_n}}{a_n}\Rightarrow\frac{3a_n}{a_n^2}=\frac{3}{a_n}>1$$ زیرا $a_n<3$

$$\Rightarrow\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2>1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$$

پس این دنباله، صعودی هم هست.

۴.

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2}=\frac{(A+B)k+2A+B}{(k+1)(k+2)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ 2A+B=1\end{cases}\Rightarrow A=1\ ,\ B=-1$$
$$\Rightarrow\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$
$$\frac{\sin\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\cos\frac{1}{k+1}\cdot\cos\frac{1}{k+2}}=\frac{\sin\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)}{\cos\frac{1}{k+1}\cdot\cos\frac{1}{k+2}}$$
$$=\frac{\sin\frac{1}{k+1}\cos\frac{1}{k+2}-\cos\frac{1}{k+1}\sin\frac{1}{k+2}}{\cos\frac{1}{k+1}\cdot\cos\frac{1}{k+2}}$$

این کسر را تفکیک می‌کنیم :

$$=\tan\frac{1}{k+1}-\tan\frac{1}{k+2}$$

مقدار سری $=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{k+1}-\tan\frac{1}{k+2}\right)$

بنا به قاعده ادغام :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)-f(k+1)\right)=f(1)-f(n+1)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{1}{k+1}-\tan\frac{1}{k+2}\right)=\tan\frac{1}{2}-\tan\frac{1}{n+2}$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\tan\frac{1}{2}-\tan\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\tan\frac{1}{2}-\tan 0=\tan\frac{1}{2}$$

۵. فرض می‌کنیم $\{a_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ پس $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ و

$\forall n \in N ,\ a_n \neq 1$

$\Rightarrow \{f(a_n)\} = \left\{f(1+\frac{1}{n})\right\} = \left\{(1+\frac{1}{n})\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\}$

$= \left\{(1+\frac{1}{n})\times 1\right\} = \left\{1+\frac{1}{n}\right\}$

$\Rightarrow \lim f(a_n) = 1 = l_1$

فرض می‌کنیم $\{b_n\} = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ و $\forall n \in N ,\ b_n \neq 1$

$\Rightarrow \{f(b_n)\} = \left\{f(1-\frac{1}{n})\right\} = \left\{(1-\frac{1}{n})\left[1-\frac{1}{n}\right]\right\}$

$= \left\{(1-\frac{1}{n})\times 0\right\} = \{0\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0 = l_2$

چون $l_2 \neq l_1$، پس تابع فوق در $x_0 = 1$ حد ندارد.

.۶

$x \to 2^+ \Rightarrow \lim f(x) = 2a + \lfloor 4 - 2.5 \rfloor = 2a+1$

حدّ راست

$x \to 2^- \Rightarrow \lim f(x) = 2b - 1 + 4 = 2b+3$ حدّ چپ

$x = 2 \Rightarrow f(2) = \lfloor -8 + 1.4 \rfloor = \lfloor -6.6 \rfloor = -7$

مقدار تابع

$\Rightarrow 2a+1 = -7 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

$2b+3 = -7 \Rightarrow \boxed{b=-5}$

.۷

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8ax^3 + b - 8a - b}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8ax^3 - 8a}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8a(x^3-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{8a(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$= 8a(1+1+1) = 24a = f'_+(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4bx^2 + 4 - 4b - 4}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4bx^2 - 4b}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4b(x^2-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4b(x-1)(x+1)}{x-1}$

$= 4b(1+1) = 8b = f'_-(1)$

$\Rightarrow 24a = 8b \Rightarrow \boxed{3a=b}$

چون تابع f در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه حد دارد و پیوسته هم هست.

$x \to 1^+ \Rightarrow \lim f(x) = 8a+b$

$x \to 1^- \Rightarrow \lim f(x) = 4b+4$

$\Rightarrow 8a+b = 4b+4 \Rightarrow \boxed{8a-3b=4}$

$b = 3a \Rightarrow 8a - 12a = 4 \Rightarrow -4a = 4$

$\Rightarrow \boxed{a=-1}\ ,\ \boxed{b=-3}$

.۸

$f(x) = x^4 + 2x - 1$

$f(0) = -1$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow f(0).f(\frac{1}{2}) < 0$

درنتیجه $f(x)$ یک صفر بین دو عدد ۰ و $\frac{1}{2}$ است، پس منحنی محور xها را در این بازه در یک نقطه قطع می‌کند.

.۹

$y = x - 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

مجانب قائم : $y \to \infty \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim(x+1+\frac{x^2}{x}) \Rightarrow \boxed{y = 2x+1}$

معادله مجانب مایل

$x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim(x+1+\frac{x^2}{-x}) \Rightarrow \boxed{y=1}$

معادله مجانب افقی

.۱۰

$5x^2 - 2y^2 = 18 \quad y=1 \Rightarrow 5x^2 - 2 = 18$

$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x=+2}$

$10xx'_t - 4yy'_t = 0 \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$10\ (2).x'_t = 4(1).y'_t \longrightarrow y'_t = \frac{20x'_t}{4} \Rightarrow y'_t = 5x'_t$

پس آهنگ افزایش مؤلفهٔ y، ۵ برابر آهنگ افزایش مؤلفهٔ x است.

.۱۱

$A'\left|^{2}\right. \Rightarrow A\left|_{2}\right. \quad , \quad f(x) = x^3 + x$

$y = 2 \Rightarrow x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A\left|^{1}_{2}\right. \Rightarrow A'\left|^{2}_{1}\right.$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \xrightarrow{x=1} m_{\text{مماس بر منحنی } f} = 4 \Rightarrow m_{\text{مماس بر منحنی } f^{-1}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$m_{\text{قائم بر منحنی } f^{-1}} = -4$

$y - y_{A'} = m'_{\text{قائم}}(x - x_{A'}) \Rightarrow y - 1 = -4(x-2)$

$\Rightarrow \boxed{y = -4x+9}$

.۱۲ داریم:

$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$2\sin\frac{7x}{2}.\sin\frac{x}{2} = \cos 3x$

$\Rightarrow \cos(\frac{7x}{2} - \frac{x}{2}) - \cos(\frac{7x}{2} + \frac{x}{2}) = \cos 3x$

$\Rightarrow \cos 3x - \cos 4x = \cos 3x \Rightarrow -\cos 4x = 0$

$\Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow \left\{ 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right.$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} ,\ k \in Z$



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

$((۶\times۶)-۶)\div۶=۵$

$۶+((۶-۶))\times۶=۶$

$۶+((۶+۶)\div۶)=۸$

$(۶-(۶\div۶))\times۶=۳۰$

$(۶\times۶)-۶-۶=۲۴$

$(۶\times۶)+(۶+۶)=۴۸$

$(۶+۶)\times۶-۶=۶۶$

$(۶\times۶-۶)\times۶=۱۸۰$

پاسخ ۲:

پناهگاهها را A، B، C و D می‌نامیم.

طی ۸ روز اوّل، مسافر ۴ رفت و برگشت به پناهگاه A انجام می‌دهد که طی این مدت هربار یک روز غذا در پناهگاه A ذخیره می‌کند (یعنی هربار سه وعده غذا با خود می‌برد، دو وعده را مصرف می‌کند، و یک وعده را در A ذخیره می‌کند، پس در پایان روز هشتم به اندازهٔ ۴ روز غذا در A ذخیره دارد).

روز نهم به اندازهٔ ۳ روز غذا برمی‌دارد، یک وعده را در راه مصرف می‌کند و به اندازه دو روز غذا در A ذخیره می‌کند. به این ترتیب در پایان روز نهم به اندازهٔ ۶ روز غذا در A ذخیره دارد.

روزهای دهم و یازدهم یک رفت و برگشت از پناهگاه A به پناهگاه B برای ذخیره کردن یک روز غذا در B انجام می‌دهد. روز دوازدهم از A به B می‌رود و برای دو روز دیگر غذا در B ذخیره می‌کند. به این ترتیب در پایان روز دوازدهم به اندازه ۳ روز غذا در پناهگاه B ذخیره دارد، و این امکان برایش فراهم می‌شود که در پایان روز پانزدهم در مقصدش باشد. پس این مسافر می‌تواند این مسیر لم‌یزرع را در مدت ۱۵ روز بپیماید.

پاسخ ۳:

هر مهره دارای ۶ وجه است. وقتی دو مهره را با هم می‌اندازند، برای دو وجه $۳۶=۶\times۶$ نوع ترکیب وجود دارد. برای اینکه، امکان دو رنگ یکسان داشتن، نصف کل امکانها باشد، باید ۱۸ ترکیب مربوط به حالتی باشد که دو سطح مهره‌ها یک رنگ باشند.

مهره اوّل ۵ سطحش قرمز و یک سطحش آبی است. فرض می‌کنیم X سطح مهرهٔ دیگر قرمز باشد. در این صورت سطوح آبی رنگ آن $X-۶$ خواهد بود.

تعداد ترکیبهایی که دو سطح مهره‌ها همرنگ باشند برابر حاصل‌ضرب تعداد سطوح قرمز مهرهٔ اوّل در تعداد سطوح قرمز مهره دوم، یعنی $۵X$ است.

همچنین تعداد ترکیبهایی که دو رنگ آبی می‌دهد، مساوی حاصل‌ضرب ۱ در $X-۶$، یعنی $X-۶$. می‌باشد. در نتیجه تعداد ترکیبهایی که دو سطح از یک رنگ باشند برابر است با:

$$۵x+۶-x=۱۸\Rightarrow ۴x=۱۲\Rightarrow x=۳$$

پس مهرهٔ دیگر، سه طرفش قرمز و سه طرفش آبی است.

پاسخ ۴:

فرض کنیم پول خرید یک متر پارچه یک تومان و طول وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گرفته است L باشد. هنگامی که پارچه فروش گمان می‌کند که یک متر پارچه فروخته است، در واقع L متر پارچه فروخته است و قیمت خرید آن L تومان می‌باشد. پس در واقع این مقدار پارچه را به ۱/۴۰ تومان فروخته است و $۱/۴۰-L$ تومان برای L تومان خرید، سود برده است. بنابراین درصد سود او برابر است با:

$$\frac{۳۹}{۱۰۰}=\frac{۱/۴۰-L}{L}\Rightarrow L=\frac{۱۴۰}{۱۳۹}=۱/۰۰۷۱$$

پس وسیلهٔ اندازه‌گیری او قدری بیشتر از ۷ میلیمتر، بزرگتر از یک متر بوده است.

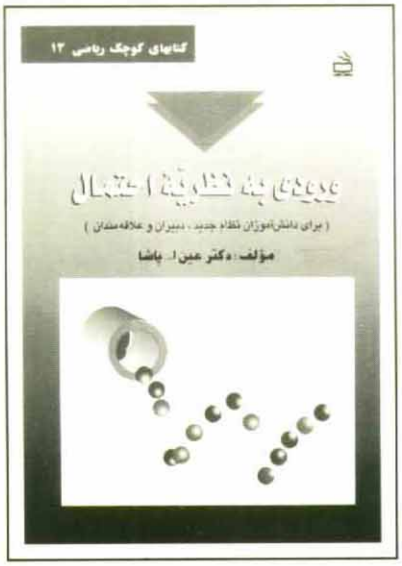
پاسخ ۵:

$$\frac{۳۵}{۷۰}+\frac{۱۴۸}{۲۹۶}=۱$$

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

ورودی به نظریهٔ احتمال

جدید



مؤلف : دکتر عین‌ا... پاشا

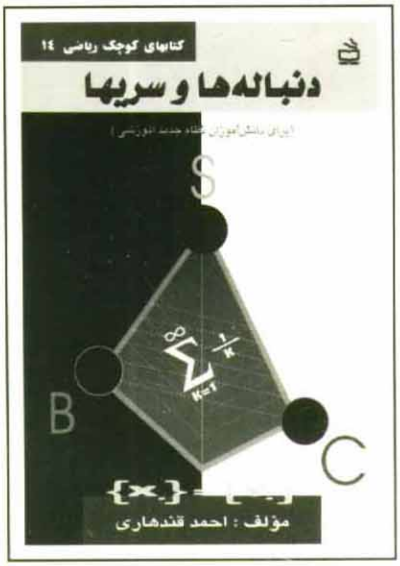
۱۱۲ صفحه / تک رنگ / چاپ اوّل / ۳۳۰۰ ریال

این کتاب که سیزدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه است، به نظریهٔ احتمال و مباحث مربوط به آن اختصاص دارد.

به نظر مؤلف محترم، محدود بودن حجم کتابهای درسی باعث شده است تا این نظریه از حدّ مقدماتی، فراتر نرفته و حتی برخی از موضوعها با ابهامهایی بیان شود، لذا این کتاب در جهت تکمیل مطالب درسی و رفع برخی از ابهامها تألیف شده است. بخشها و قسمتهای مختلف کتاب عبارتند از : تاریخچهٔ احتمال، احتمال همشانس، اصول احتمال، امید ریاضی، احتمال و ژنتیک که در تمام این فصلها مسائل کلیدی و اساسی طرح و حل شده‌اند در انتها نیز به تجزیه و تحلیل و حل تشریحی پرسشهای چهارگزینه‌ای دانشگاهها پرداخته شده است. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

دنباله‌ها و سریها

جدید



مؤلف : احمد قندهاری

۱۲۸ صفحه / تک رنگ / چاپ اول / ۳۵۰۰ ریال

این کتاب که چهاردهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه می‌باشد به دو موضوع اساسی و مهم یعنی دنباله‌ها و سریها می‌پردازد.

مؤلف محترم در این کتاب و برای هر مفهوم پس از بیان تعریفها و اصول اولیه و قضیه‌های لازم، با طرح و حل مسائل کلیدی و اساسی، این مفاهیم را به طور مبسوط برای دانش‌آموز تجزیه و تحلیل می‌کند و مشکلات مربوط به درسهای همگرایی و واگرایی دنباله‌ها و سریها را برطرف می‌سازد. در لابه‌لای موضوعهای بحث شده در کتاب به دو موضوع تصاعدهای حسابی و هندسی نیز پرداخته شده است، کتاب از تمرینهای متنوع و متعادلی برخوردار است و در انتهای آن نیز طرح و حل تشریحی پرسشهای چهار گزینه‌ای به چشم می‌خورد، مطالعه این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و دبیرانِ محترم توصیه می‌کنیم.

توجه : از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند :

۱ ـ مثلثات / احمد فیروزنیا ۲ ـ ورودی به نظریه اعداد/ حمید رضا امیری ـ مازیار رامین راد
۳ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی ۴ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن/ محمّد عابدی
۵ ـ بردارها / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی ۶ ـ عبارتهای جبری و معادلات / علی حسن‌زاده ماکویی
۷ ـ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر

شرف‌الدین طوسی (ریاضیدان مسلمان ایرانی)

شرف‌الدین طوسی که گاهی او را شرف‌الدین مسعودی نیز نامیده‌اند، چنان‌که از آثارش پیداست، ریاضیدانی بسیار زبردست، منجمی عالیقدر و مخترع آلات نجومی بود. وی در نیمهٔ دوم سدهٔ ششم و اوایل سدهٔ هفتم هجری می‌زیست و در حدود سال ۶۱۰ درگذشت.

اصل وی چنان‌که از نسبش پیداست از طوس بوده و نوشته‌اند که به شهرهای دمشق و موصل و بغداد سفر کرده و در آن‌جا به تدریس می‌پرداخته است. یکی از مهمترین شاگردان او در موصل، ریاضیدان و منجم معروف، کمال‌الدین ابن یونس بوده است. تاریخ درگذشت او را در منابع مختلف ۶۰۹ یا ۶۱۰ هجری قمری ثبت کرده‌اند و می‌دانیم که در سال ۶۰۶ یعنی در اواخر عمرش در همدان به سر می‌برده است؛ زیرا جوابی که در آن سال به یک سؤال ریاضی داده به صورت یک رسالهٔ مختصر موجود است.

مهمترین اثر ریاضی شناخته شدهٔ شرف‌الدین طوسی کتاب *«فی‌الجبر و المقابله»* اوست. این کتاب که به تازگی مورد بررسی متخصصان تاریخ علوم، قرار گرفته از جهت تاریخ علم جبر حائز اهمیّت فوق‌العاده است؛ زیرا تا قبل از این بررسیها اگرچه مورخان علوم از نظریهٔ هندسی حلّ معادلات درجهٔ سوّم توسط عمرخیام آگاهی داشتند و می‌دانستند که او چگونه این روش را برای جدا کردن ریشه‌های معادلات مذکور به کار برده، امّا نمی‌دانستند که مسلمانان روشهای خاصی هم برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای عددی از درجات مختلف داشته‌اند.

در این جا چند نمونه از معادلاتی را که شرف‌الدین طوسی حل کرده است، نقل می‌کنیم:

$$x^{۳}+۱۲x^{۲}+۱۰۲x=۳۴۳۴۵۳۹۵$$

$$x^{۳}+۶x^{۲}+۳۰۰۰۰۰۰۰x=۹۹۶۶۹۴۴۰۷$$

$$x^{۳}-۳۰x^{۲}-۶۰۰x=۲۹۷۹۲۳۳۱$$

شرف‌الدین طوسی همچنین مخترع نوعی اسطرلاب بدیع است موسوم به «اسطرلاب خطی» و آن قطعه چوبی بوده است مدرّج و به شکل عصا و به همین مناسبت آن را «عصای طوسی» نیز نامیده‌اند. طوسی این اسطرلاب را با یک ریسمان دولا و یک خط کش سوراخ‌دار به کار می‌برده است. تاکنون هیچ نمونهٔ ساخته شده‌ای از آن به دست نیامده امّا شرف‌الدین طوسی روش ساختن و به کار بردن آن را در چند رساله بیان کرده و سهولت ساختن و سادگی به کار بردن آن را ستوده است. چند نسخهٔ خطی از رسالهٔ *«في الاسطرلاب الخطّی»* در موزهٔ بریتانیا و استانبول موجود است. متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی این رساله در روزنامهٔ *آسیایی* به چاپ رسیده است.

برگرفته از کتاب «زندگینامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی» ابوالقاسم قربانی / مرکز نشر دانشگاهی

مجلهٔ ریاضی

برهان

۲۷

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شمارهٔ سوم، زمستان ۱۳۷۷، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

□ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه □ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
□ سردبیر: حمیدرضا امیری □ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
□ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: □ حمیدرضا امیری □ محمدهاشم رستمی □ احمد قندهاری □ میرشهرام صدر
□ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی □ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
□ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی □ طراح گرافیک: امیر بابایی □ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال هشتم، زمستان ۱۳۷۷، شمارهٔ سوّم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

حرف اوّل

وقتی در یک روزنامه خواندم که کشور جمهوری اسلامی ایران جزءِ سه کشوری است که بیشترین تعداد جمعیت آن نسل جوان است، احساس عجیبی پیدا کردم، احساسی که با قدرت و حسِّ اقتدار و نوعی ترس آمیخته بود. بله! ما جوانترین کشور دنیا هستیم، چه سرمایه‌ای بالاتر و ارزشمندتر از این، و ثروتی بیشتر از این ثروت و چه قدرتی در دنیا بالاتر از این قدرت؟ اما هرکجا ثروتی و سرمایه‌ای انباشته باشد، چشم طمعکاران، دزدان و غارتگران و بخصوص استعمارگران به آن دوخته می‌شود و درصدد آن هستند تا این سرمایه را از چنگ صاحبان اصلی‌اش خارج کنند و در صورتی که موفق نشدند آن را از بین برده و یا به هدر بدهند.

فرصت و تهدید، دو مفهوم قابل تبدیل به یکدیگرند یعنی می‌توانیم با بی‌اعتنایی و عدم سیاستگزاری صحیح و یا احتمالاً با سهل‌انگاری یک فرصت مناسب و طلایی را به یک تهدید جدّی تبدیل کنیم و برعکس، با پشتکار و برنامه‌ریزی صحیح، یک تهدید را به یک فرصت تبدیل کنیم.

جنگ تحمیلی در ابتدا یک تهدید جدّی محسوب می‌شد ولی با رهبری هوشمندانه و خدایی امام راحل و عزم راسخ مردم مسلمانِ ما این تهدید به یک فرصت طلایی برای رشد و نموّ خلاقیتها، همبستگی و یکدلی و ایثار تبدیل گشت.

الآن نیز ما به یک فرصت طلایی دست پیدا کرده‌ایم و آن هم استفاده از نیروهای جوان، خلّاق و با انرژی است که اگر این مسأله و فرصت را جدی نگیریم خیلی سریع به تهدیدی جدّی برای سلامت جامعه ما تبدیل می‌شود.

جوانانِ عزیز، شما سرمایه‌های این مملکت هستید و بدون هیچ تردیدی در تیررَس دشمنان اسلام و انقلاب قرار دارید و همانطور که مشاهده می‌کنید دشمن از هیچ کاری برای نابودی و به اضمحلال کشاندن شما سرمایه‌های گرانقدر ما فروگذاری نمی‌کند. به عناوین مختلف و با ابزارهای متفاوت شما را به بیراهه می‌کشاند تا غیرت، دین، مذهب، علم، اخلاق، ایثار، احترام به بزرگترها و ... را از شما گرفته و بی‌غیرتی بی‌دین و مذهبی، خودسری، بی قید و بندی و خودبینی را جایگزین آن کند.

بهوش باشید و نگذارید با تبلیغات و تهاجم فرهنگیِ غرب، اصالتها و فرهنگِ غنیِ اسلامی و ایرانی ما را لگدکوب کنند و همه چیز ما را به باد فنا بسپارند.

بیایید این فرصت را غنیمت شمرده و از آن به بهترین وجه و در جهت شکوفایی استعدادها و برای آبادانی، همبستگی و اقتدار کشور اسلامیمان، استفاده کنیم و با توکّل به خدا و بهره‌جویی از رهنمودهای رهبر حکیم انقلاب اسلامی، همهٔ راهها، کانالها و شبکه‌های ورودیِ تهاجم و تهدید دشمنان خود را شناسایی و مسدود کنیم. ان‌شاءا...

والسلام - سردبیر

● پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم (۱)

● به پیشواز سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

هدف اصلی در این رشته مقاله‌ها، کاوشی در «تاریخ ریاضیات» و بویژه «فلسفهٔ تاریخ ریاضیات» است. می‌خواهیم قانونمند بودن تکامل دانش ریاضی و جنبه‌های فلسفی آن را بررسی کنیم، مقام هر ملت را، و بخصوص مقام ریاضیات ایرانی را، در گذشتهٔ تاریخی پیشرفت ریاضیات بشناسیم. ولی در آغاز بهتر دیدیم با دیدگاه‌های برخی از موزّخان دانش در این زمینه، که به جای خود بسیاری از دشواریهای ذهنی را حل می‌کنند، آشنا شویم و سپس بحث جدّی خود را آغاز کنیم.

دربارهٔ تاریخ ریاضیات (شمارهٔ ۱ سال ۱۹۶۳،
مجلهٔ ریاضیات در دبیرستان، چاپ مسکو)

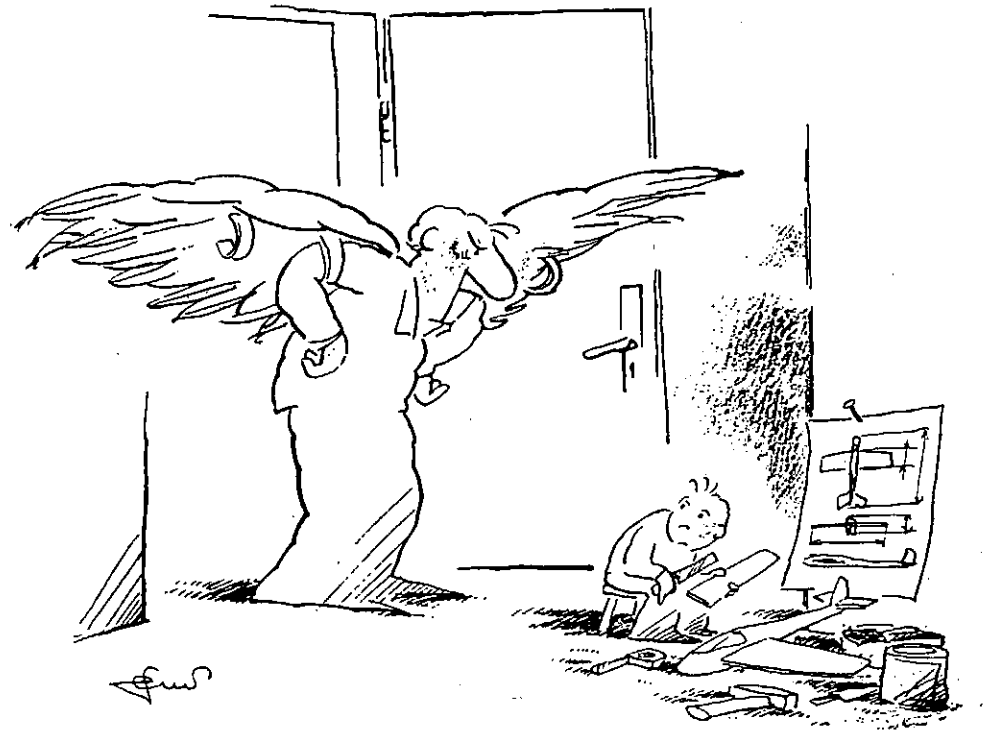
بوریس گنِه دِنکو

آشنایی با تاریخ دانش، برای هر درس خوانده‌ای سودمند است؛ ولی برای معلمان، آگاهی از تاریخ در زمینه‌ای که با آن سروکار دارند و آشنایی با قانونهای تکامل آن، ضرورت کامل دارد.

همهٔ ما از دوران تحصیل خود، به یاد داریم که نگاه کوتاهی به تاریخ شاخه‌ای از دانش، تا چه اندازه برایمان جالب بود. بیان چند جمله از تاریخ ریاضیات یا کاربرد آن در مسأله‌هایی که در برابر جامعهٔ انسانی قرار دارد و یا اهمیت موضوعهای تجربی برای پیشرفت ریاضیات، تا چه اندازه شرح بحثهای ریاضی را زنده و قابل درک می‌کند. شور و شوق دانش‌آموزان، دربارهٔ حلّ و بحث مسأله‌هایی که به صدها سال پیش برمی‌گردد، قابل وصف نیست. این هم روشن است که علاقه به موضوع درس، یکی از شرطهای اساسی برای یادگیری و پایداری آگاهیها در حافظه است. آگاهیهای مربوط به تاریخ ریاضیات، می‌تواند روشن کند که چگونه هدف آموزش ریاضی در گذر زمان تغییر می‌کند. گفت و گوی معلم با دانش‌آموزان خود دربارهٔ تاریخ دانش، برای برانگیختن نیروهای خلّاق جوانان و برای محکم کردن اعتقاد آنها به استعدادهای پنهان خود، ارزش درجه اوّل دارد. تاریخ ریاضیات، به معلم امکان می‌دهد، از نقش ریاضیات در پیشرفت صنعت و دانشهای دیگر و نیز در تکامل نظر فلسفی انسان نسبت به طبیعت و اهمیت آن در زمان ما، تصویری روشن رو به روی ما قرار دهد.

باید پذیرفت، چنان کتابهایی که معلم بتواند آگاهیهای لازم را در زمینهٔ تاریخ دانش به‌دست آورد، بسیار اندک است و بویژه با توجه به زمان اندکی که معلم در کلاس دارد، کتابهایی لازم است که به طور دقیق، روش استفاده از منبعها و این که چه مطلبی، در کجا و در چه زمانی باید طرح شود، روشن کند. و این هم به عهدهٔ معلمان باتجربه است که با کار گروهی، کتابهای لازم را تهیه کنند.

معلمان و دانش‌آموزان، به کتابهایی نیاز دارند که در آنها، به زندگی بزرگان و نمایندگان دانش بشری، نگاهی کوتاه، ولی گویا انداخته باشد. در زمینهٔ تاریخ ریاضیات، باید دو گونه کتاب فراهم شود: اوّل کتابهای مربوط به ریاضیدانان مشهور همهٔ جهان، و



دوم کتابهای مربوط به ریاضیدانان سرزمینی که معلم و دانش‌آموز در آن زندگی می‌کنند. طبیعی است، درکتاب اوّل هم، ریاضیدانان سرزمین خودی نباید فراموش شوند. بجز این، باید کتابهایی فراهم شود که بستگی دانش را با زندگی و عمل روشن کند، داستان پیدایش موضوعهای ریاضی را شرح دهد و نوع برخورد آنها را با دشواریهایی که طبیعت در برابر انسان می‌گذارد و یا نیازهای فنی و دفاعی به او تحمیل می‌کند، بیان نماید.

البته فراهم کردن این گونه کتابها ساده نیست؛ ولی رنجی که نویسندگان در این راه می‌برند، به هدر نمی‌رود؛ زیرا همین کتابها راه زندگی را به جوانان نشان می‌دهد و استعدادهای خفتهٔ آنان را بیدار می‌کند و همین شکفتگی استعدادهاست که ثمر خود را در پیشرفت دانش به بار می‌آورد.

بین شاخه‌های دانش که انسان در درازای هزاران سال به وجود آورده است، ریاضیات، جای ویژه و در ضمن مهمی را به خود اختصاص داده است. ریاضیات با دانشهای فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد و فن‌آوری فرق دارد، با وجود این، به عنوان یکی از روشهای بنیانی، در بررسی‌های مربوط به این دانشها به کار می‌رود و پیداست که این نقش در آینده، گسترش بیشتری هم پیدا می‌کند.

ریاضیات که در دوره‌های باستانی پدید آمد، در جریان پیشرفت خود، راهی دراز و پیچیده پیموده است. در طول مدت هزاران سال، به طور دائم، ویژگیها، موضوع و انگیزه‌های پیشرفت آن تغییر کرده است. ریاضیات از نخستین مفهومهای مربوط به خط‌راست، به عنوان کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه، یا تشکیل نخستین عنصرهای عدد به عنوان واحدهای اوّلیه، راه خود را آغاز کرد، تا امروز که به یک دانش انتزاعی خالص تبدیل شده است و روشها و مفهومهایی ویژهٔ خود دارد. زمانی بود که انسان، با زحمت، ۲ را با ۳ جمع یا ۴ را از ۷ کم می‌کرد. ولی امروز، البته پس از گذشت هزاران سال، به جایی رسیده است که می‌تواند به محاسبهٔ حرکت جرمهای آسمانی یا پدیده‌های درونی اتم بپردازد. وسیله‌های سادهٔ محاسبه، مثل سنگریزه‌ها، تکّه چوبها، شکافهای روی درخت یا عضوهای گوناگون بدن، جای خود را به ابزارهای تازه‌ای مثل رایانه‌ها داده است، که می‌توانند صدها هزار یا میلیونها عمل را روی عددهای چند رقمی، در طول یک یا چند ثانیه انجام دهند.

به طور طبیعی، این پرسشها پیش می‌آید: «مسیر این پیشرفت چگونه پیموده شده است؟ چه عاملهایی مفهومها و روشهای ریاضیات را تکامل داده است؟ دورانهای اصلی تکامل ریاضیات و به طور کلی قانونهای تکامل ریاضیات کدام است؟» اینها پرسشهای اساسی است که در برابر تاریخ ریاضیات قرار دارد و باید به آنها پاسخ داده شود. پاسخ به این پرسشها، نه تنها از دیدگاه مسأله‌های تاریخی اهمیت دارد؛ بلکه بویژه برای زندگی امروز و

پیشرفت دانشهای روز، دارای اهمیتی جدّی است. تنها به این وسیله است که تاریخ گذشتهٔ ریاضیات می‌تواند مسیر پیشرفت حال و آیندهٔ آن را روشن کند و خیلی بیشتر از آشنایی با پیشامدهای سادهٔ تاریخی، قانونهای حاکم بر تاریخ را روشن کند. از این راه است که می‌توان فهمید چگونه و به چه صورتی، ریاضیات کنونی بر گذشتهٔ خود آرمیده و چگونه راه تکامل خود را به سوی آینده می‌گشاید. سرانجام، این روش برخورد با تاریخ ریاضیات، می‌تواند رابطه‌ای را که پیشرفت دانشهای طبیعی، صنعت و روابط تولیدی، با پیشرفت ریاضیات دارد، کشف کند. چنین مطالعه‌ای روشن می‌کند که، این تأثیر و بستگی متقابل است؛ یعنی همان‌گونه که پیشرفت صنعت و دانشهای طبیعی، ریاضیات را پیش برده است، پیشرفت ریاضیات هم به سهم خود، بر تکامل صنعت و دانشهای طبیعی اثر گذاشته است. بی‌جهت نیست که نویسندهٔ کتاب «دفترهای فلسفی» به «تاریخ اندیشهٔ انسانی، تاریخ دانش و تاریخ صنعت» اهمیّت جدّی داده است. ولی باید پذیرفت، هنوز دوره‌ای از تاریخ ریاضیات که به طور همه جانبه پاسخگوی این طرح باشد، آماده نشده؛ گرچه مقدمه‌های کار و سندهای اصلی فراهم است.

دربارهٔ تاریخ ریاضیات و اهمیت آن برای خود ریاضیات و برای پیشرفت دانشهای طبیعی و صنعت زمان ما، دیدگاه‌های متفاوتی وجود دارد. می‌توان به تعداد زیادی از دانشمندان (که موفّقیتهای جدّی در شاخه‌های اختصاصی ریاضیات به‌دست آورده‌اند) برخورد که لزوم بررسی تاریخ ریاضیات را برای پیشرفت امروزی مفهومهای ریاضی، نمی‌پذیرند. آنچه موجب پیدایش این دیدگاه شده است، می‌توان به این ترتیب، برشمرد: البته تاریخ ریاضیات برای مطالعهٔ تکامل جامعه و شکل گرفتن فلسفه لازم است؛ ولی دانش به جلو می‌رود و به طور دائم، با مفهومها و اندیشه‌های تازه‌ای غنی می‌شود، که در گذشته، نشانی از آنها هم، وجود نداشته است. بنابراین توجه به اندیشه‌ها و موضوعهای گذشته، ممکن است ذهن ما را از دانش امروزی و راه آیندهٔ آن منحرف کند. روشن است که بررسی بسیاری از موضوعهای مربوط به گذشته، در مقام مقایسه با آنچه امروز داریم، ابتدایی و ناچیز به‌نظر می‌رسد. آیا از این جا این نتیجه به‌دست نمی‌آید که بررسی تاریخ ریاضیات نمی‌تواند نقشی مثبت داشته باشد؟ از این گذشته، بار اندیشه‌های کهنه، ممکن است ما را به عقب بکشاند و به طور کلی، تأثیری نامطلوب روی پیشرفت اندیشه‌های تازه و تکامل دانش بگذارد. به همین دلیل، هواداران این دیدگاه، مرتّب تبلیغ می‌کنند که تاریخ ریاضیات، یک دانش تاریخی است و تنها به کار کسانی می‌آید که به بررسی تاریخ تکامل جامعهٔ انسانی مشغولند.

اکنون اگر این اعتقاد را بپذیریم که تاریخ ریاضیات، بخشی از تاریخ عمومی است، باز هم در میان کتابهای تاریخی، نشانی از آن نمی‌بینیم. کافی است کتابهای تاریخی ـ که برای دانش‌آموزان دبیرستانی نوشته شده است یا کتابهای تاریخ عمومی ـ را ورق بزنیم، تا قانع شویم که چیزی دربارهٔ تاریخ تکامل دانشها ـ ریاضیات، دانشهای طبیعی و صنعت ـ پیدا نمی‌کنیم.

در این کتابها، نه نامی از ریاضیدانان بزرگ پیدا می‌کنیم (و آیا تنها ریاضیدانان؟) و نه از خود دانش ریاضی، که در واقع انسان را به دوره‌های پیشرفت بعدی هدایت کرده است، خبری به دست می‌آوریم. و البته، چنین وضعی برای کتابهای عمومی تاریخ، طبیعی و از لحاظ روانی، قابل درک است. برای نمونه، کتابی را انتخاب کنیم که مربوط به تاریخ یونان باستان باشد. در این کتاب، ولو ناچیز، می‌توان آگاهیهایی دربارهٔ مجسمه سازی و نویسندگان بزرگ یونان باستان یافت. دانش‌آموزان از این کتابها، دربارهٔ زندگی و کارهای آشیل، اریستوفان، فیدیاس، آگاهیهایی به دست می‌آورند؛ ولی جست وجوی نامهای اقلیدس، ارشمیدس و دموکریت در این کتابها، به جایی نمی‌رسد. در حالی که تنها آشیل، و دیگر هنرمندان دنیای کهن، سازندهٔ تاریخ تمدن انسانی نبوده‌اند. برای تاریخ فرهنگ و تمدن بشر، و برای مجموعهٔ دانشها و صنعت امروزی، نمی‌توان نقش کسانی مثل ارشمیدس، اقلیدس، دموکریت و آپولونیوس را از یاد برد. به این ترتیب، وضع ناراحت کننده‌ای به‌وجود می‌آید؛ درحالی که برای تکامل و پیشرفت همهٔ جنبه‌های زندگی امروزی، دانش ریاضی، نقش اساسی و تعیین کننده‌ای دارد و کتابهای درسی تاریخ نخواسته‌اند، ولو به صورتی کوتاه، چگونگی پیشرفت این دانش را در اختیار دانش‌آموزان بگذارند. دانش‌آموزان در درس تاریخ، نمی‌توانند دلیل این امر را دریابند که چرا دانشهای مختلف، و در کنار آنها ریاضیات، نقش اساسی و جدّی داشته است.

این وضع، جنبه های ناگوار دیگری هم دارد. پیش از همهٔ این گونه برداشتها، پیشرفت دانشهای تجربی، صنعت و ریاضیات را از تکامل کلی تاریخی و از تکامل بستگیهای اجتماعی جدا می کند و ریاضیات را از لحاظ تاریخ جامعه های انسانی و تاریخ تمدن، به چیزی صوری و سطحی تبدیل می کند.

وقتی ریاضیات چنین جایگاه نمایانی را در زندگی جامعه های امروزی به دست آورده است، باید این حق را داشته باشد که دست‌کم فصلهایی از کتابهای درسی تاریخ عمومی را به خود اختصاص دهد. باید ترتیبی داده شود که ریاضیات بتواند به عنوان عنصری که آموزش فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و کارهای دستی را سامان می‌دهد، به رسمیت شناخته شود.

این برخورد منفی با تاریخ ریاضیات از طرف برخی ریاضیدانان ـ که دربارهٔ آن صحبت کردیم ـ عمومی نیست. بیشتر ریاضیدانان زمان ما و برجسته‌ترین نمایندگان دانشها، به تاریخ ریاضیات، به عنوان عاملی که نقش اساسی در شکل دادن نظریه‌های ریاضی دارد، می‌نگرند و بسیاری از آنان، پژوهشهایی در تاریخ دانش دارند. نمونه‌هایی می‌آوریم.

همهٔ کسانی که با مسأله‌های تربیتی سر و کار دارند، با نام ریاضیدان بزرگ آلمانی «فه‌لیکس کلاین»، که در پایان سدهٔ نوزدهم و آغاز سدهٔ بیستم می‌زیست، آشنا هستند. شهرت کلاین، تنها به خاطر دانش او نیست که توانسته است در ریاضیات، به نتیجه‌های تازه و جالبی برسد؛ بلکه به این دلیل هم هست که در پیشرفت آموزش اروپایی گامهای جدّی برداشت و در بهبود آموزش ریاضیات، نقش اساسی داشت. کلاین همچنین نوشتهٔ جالب و آموزنده‌ای دربارهٔ تاریخ ریاضیات به نام «دربارهٔ پیشرفت ریاضیات در سدهٔ نوزدهم» دارد. گرچه این اثر در ارزیابی دانشمندان سدهٔ نوزدهم، دچار داوریهای ذهنی شده و تا حدّ زیادی به خطا رفته است؛ ولی کلاین نشان داد، ارزش واقعی ریاضیات سدهٔ نوزدهم را بخوبی درک کرده است؛ سده‌ای که توانست دامنهٔ ریاضیات را گسترش دهد و آن را با طرح مطلبهای تازه، بیش از پیش غنی کند.

کتاب بزرگ سه جلدی یکی دیگر از ریاضیدانان به نام «اُ. نیگه باور» با عنوان «بحثهایی در تاریخ ریاضیات باستان» هم مشهور است. در این کتاب، از پژوهشهای نویسندهٔ آن دربارهٔ دانش ریاضیات در سرزمین بابل صحبت شده است، کتابی که تصور ما را دربارهٔ تکامل ریاضیات در عهد باستان بکلی دگرگون می کند.

«آندره کولموگوروف» پژوهش تاریخی بسیار جالبی دربارهٔ تکامل اندیشه های ریاضی برای فرهنگ بزرگ روسی نوشته است. این مقاله می‌تواند به عنوان یکی از نوشته های ژرف و نادری باشد که از دیدگاه فلسفهٔ منطقی دربارهٔ تاریخ ریاضیات نوشته شده است.

سرانجام از کتابی با عنوان «دانشی که بیدار می‌شود» نام می‌بریم. این کتاب را «وان در واردن» ریاضیدان هلندی نوشته است و می‌تواند برای معلمان ریاضیات بسیار سودمند باشد.

ریاضیات، دانشی است که آغاز آن، در ژرفای تاریخ گذشتهٔ انسانی گم می‌شود. مفهوم عدد برای نخستین بار، کی و چگونه پدید آمد؟ این، یکی از دشوارترین مسأله‌های تاریخی است. مطلب بر سر این است که این مفهوم، در دوران پیش از تاریخ و خیلی پیش از زمانی که انسانها به نوشتن تاریخ خود پرداختند، به‌وجود آمده است. دراین باره، امکانهای بسیار کمی داریم. این امکانها عبارت است از بررسی ویژگیهای زبان وهمچنین مطالعهٔ ملتهایی که با دوران پیش از تاریخ خود، فاصلهٔ زیادی ندارند. ولی نباید از یاد برد که در این بررسی هم، نمی‌توان به نخستین مرحله‌های پیدایش مفهوم عدد دست یافت. هنر شمردن، مربوط به زمانی است که هنوز تصوری دربارهٔ عدد، به عنوان یک مفهوم ریاضی، وجود نداشت. به این نکتهٔ اساسی توجه کنیم که مفهومهای ریاضی، در دوره‌ای از تکامل جامعهٔ انسانی به‌وجود آمد که بشر به مرحلهٔ بالایی از پیشرفت فکری رسیده بود. ولی حرکت این مفهومها و قوام گرفتن آنها، تاریخی دراز دارد که به نوبهٔ خود، در تکامل اندیشهٔ انسانی اثر داشته است.

دنبالهٔ مقاله در شمارهٔ بعد

نگاشتهای خطی

ترکیب نگاشتهای خطی و ماتریس ترکیب دو نگاشت خطی

(قسمت دوم)

● حمیدرضا امیری

قضیهٔ زیر ارتباط بین ترکیب دو نگاشت خطی و ماتریس این ترکیب با ماتریسهای دو نگاشت را بوضوح بیان می‌کند.

قضیه: اگر $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ و $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ دو نگاشت خطی باشند و A و B به ترتیب ماتریسهای نگاشتهای f و g باشند، در این صورت، اولاً fog نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ بوده و ثانیاً ماتریس این نگاشتِ خطی $A\times B$ می‌باشد.

تذکر: درواقع حاصل‌ضرب دو ماتریس، مشخص کنندهٔ ترکیب دو نگاشت خطی است و بعکس، و چون ترکیب نگاشتها، خاصیت جا به جایی ندارد، لذا ضرب دو ماتریس نیز خاصیت جا به جایی ندارد.

مسأله: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ بترتیب ماتریسهای نگاشتهای خطی f و g باشند، در این صورت، ماتریس نگاشت خطی gof را به‌دست آورید.

$$M_{gof}=B\times A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 10 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

تعریف: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ باشد، دراین صورت، fof تعریف شده و در صورتی که A ماتریس نگاشت خطی f باشد، A^2 ماتریس نگاشت خطی fof و...و A^n ماتریس نگاشت خطیِ $\underbrace{fofo\cdots of}_{\text{n بار}}$.

تست: اگر f و g دو نگاشت خطی و $fog:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تعریف شده باشد، در این صورت، نگاشت f کدام می‌تواند باشد؟

۱) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ۲) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

۳) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ۴) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

بُرد نگاشتِ fog زیر مجموعهٔ بُرد f و دامنهٔ آن، زیرمجموعهٔ دامنهٔ g است و چون $fog:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ و $R_{fog} \subseteq \mathbb{R}^2$ پس می‌بایست $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ و $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ باشند.

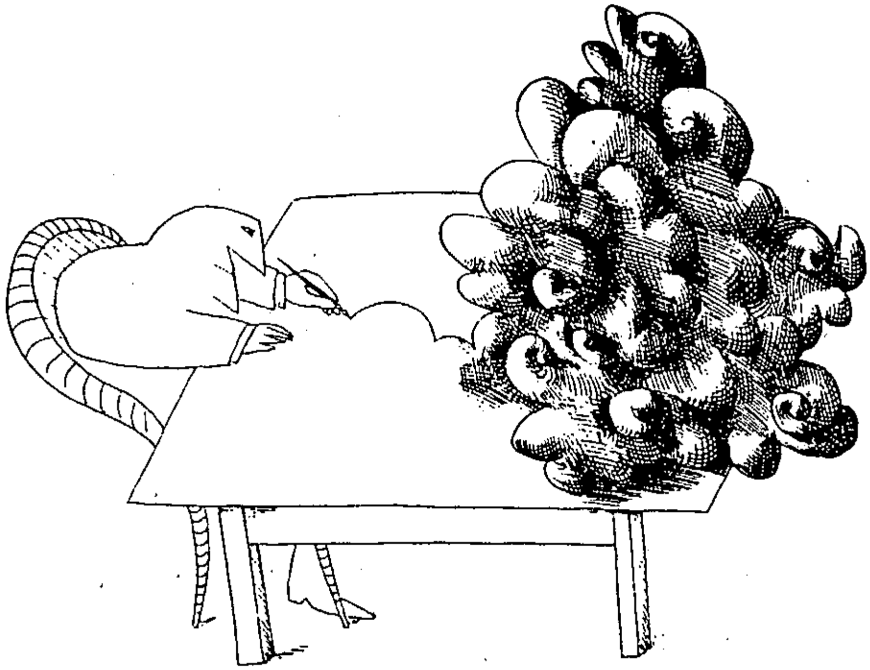
نتیجهٔ مهّم (ماتریس تبدیلهای متوالی): با توجه به قضیهٔ ترکیب نگاشتها، اگر f_1 و f_2 و ... و f_n نگاشتهای خطی و A_1 و A_2 و ... و A_n بترتیب ماتریسهای این نگاشتها باشند و f_1 روی نقطهٔ x اثر کرده و x_1 حاصل شده، سپس f_2 روی x_1 اثر کند و ... و f_n روی x_{n-1} اثر کند تا در نهایت، نقطهٔ y حاصل شود، در این صورت، ماتریس ترکیب این نگاشتها، یعنی ماتریس نگاشت $(f_n o f_{n-1} o \cdots o f_2\, o f_1)$ برابر است با $(A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1)$ و بنابراین :

$$(f_n o f_{n-1} o \cdots o f_2\, o f_1)(x)=y$$

یا

$$(A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1)x=y$$

مسأله: اگر نگاشت $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تقارن نسبت به محور yها



و $g: IR^2 \to IR^2$ تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل باشد، ماتریس ترکیب این دو نگاشت را بیابید.

(ماتریس نگاشت f) × (ماتریس نگاشت g)= ماتریس gof

$$=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=R_{\frac{-\pi}{2}}$$

ماتریس حاصل ماتریس دوران به اندازهٔ $\frac{-\pi}{2}$ است (حول مبدأ)

$$\text{fog ماتریس} =\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=R_{\frac{\pi}{2}}$$

توجه دارید که اگر نقطه‌ای مانند x تحت تأثیر (gof) قرار گیرد ؛ یعنی ابتدا تحت تأثیر نگاشت f و سپس حاصل آن یعنی f(x)، تحت تأثیر نگاشت g واقع می‌شود، در حقیقت ابتداً نقطهٔ x نسبت به محور yها قرینه شده وسپس نسبت به نیمساز ربع اوّل قرینه می‌شود.

تست: ترکیب دو نگاشت، ابتدا تقارن نسبت به مبدأ مختصات و سپس تقارن نسبت به محور xها کدام است؟

۱) تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم

۲) تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل

۳) دوران طول مبدأ به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$

۴) تقارن نسبت به محور yها

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

×(ماتریس تقارن نسبت به محور xها) = ماتریس ترکیب دو نگاشت (ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات)

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}= \text{تقارن نسبت به محورyها}$$

مسأله : $A\Big|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$ نقطهٔ دلخواهی در صفحه است، می‌خواهیم قرینهٔ این نقطه را نسبت به خط $y = mx$ بیابیم. با استفاده از ترکیب نگاشتهای خطی، ماتریس این تبدیل در صفحه را به‌دست آورید. ($m = tg\alpha$ ضریب زاویهٔ خط مورد نظر است.)

حل: نگاشت $f:IR^2 \to IR^2$ با ماتریس A را دوران به اندازهٔ $(-\alpha)$ حول مبدأ و نگاشت $g:IR^2 \to IR^2$ با ماتریس B تقارن نسبت به محور xها و نگاشت $h:IR^2 \to IR^2$ با ماتریس C دوران به اندازهٔ α حول مبدأ را درنظر می‌گیریم، اگر نقطهٔ A و خط $y = mx$ را ابتدا تحت تأثیر نگاشت f قرار دهیم، خط بر محور xها منطبق می‌شود و می‌توان در مرحلهٔ بعد، قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به محور xها به دست آورد(توسط نگاشت g) که نقطهٔ حاصل به اندازهٔ $(-\alpha)$ انحراف دارد و بنابراین، توسط نگاشت h این انحراف جبران می‌شود. حال با توجه به ترکیب نگاشتها، نگاشت(hogof) می‌تواند منظور ما را برآورده کند که ماتریس این نگاشت، برابر است با $D = (CBA)$ و به صورت زیر محاسبه

می‌شود :

$$D=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم : ماتریسهای تقارن نسبت به خط $y = mx$ یعنی $A=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}$ دارای سه ویژگی زیر می‌باشند که با مقایسهٔ ویژگیهای ماتریس دوران حول مبدأ، به تفاوت آنها در ویژگی (I) پی‌خواهید برد.

I) دترمینان ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ برابر با ۱− است.

II) طول هر بردار ستونی در این ماتریسها، برابر واحد است.

$$x=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{bmatrix} \text{ و } y=\begin{bmatrix}\sin 2\alpha\\ -\cos 2\alpha\end{bmatrix} \Rightarrow |x|=|y|=1$$

III) بردارهای ستونی، همواره بر هم عمود می‌باشند.

$$x.y=\cos 2\alpha\sin 2\alpha-\sin 2\alpha\cos 2\alpha=0 \Rightarrow x\perp y$$

تذکر مهم : اگر A ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ باشد، همواره هر نقطه را نسبت به خط $y = mx$ قرینه می‌کند و اگر دوباره روی نقطهٔ حاصل اثر کند، نقطه برخودش منطبق می‌شود و در حالت کلّی اگر تعداد تأثیرهای A روی یک نقطه زوج باشد، نقطه برخودش منطبق خواهد شد. در واقع $A^{2k}=I$ و $A^{2k+1}=A$.

تست : اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{-\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ دراین صورت حاصلِ $B^{41}\times A^{6}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{-\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt3}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt3}{2}\end{bmatrix}$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

ماتریسهای A و B هر دو ماتریسهای تقارن نسبت به خط $y = mx$ می‌باشند ؛ زیرا $|A|=|B|=-1$. بنابراین، براساس مطالب قبل داریم :

$$B^{41}=(B^{40})\times B^{1}=I\times B=B \quad \text{و} \quad A^{6}=I$$

$$\Rightarrow B^{41}\times A^{6}=B\times I=B$$

تمرین : با استفاده از ترکیب نگاشتها، ماتریسِ نگاشتِ تقارن نسبت به خط $y=-x$ را بیابید.

مثال : قرینهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-1\\ 2\end{vmatrix}$ را نسبت به خط $y+2x=0$ به‌دست آورید.

$$y+2x=0 \Rightarrow y=-2x \Rightarrow tg\alpha=-2$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \text{ و } \sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$: از طرفی

ماتریس تقارن $\Rightarrow \cos 2\alpha=\frac{-3}{5}$ و $\sin 2\alpha=\frac{-4}{5}$

$$=\begin{bmatrix}-\frac35 & -\frac45\\ -\frac45 & \frac35\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-\frac35 & -\frac45\\ -\frac45 & \frac35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

توجه دارید که نقطهٔ داده شده، روی خط $y=-2x$ واقع است، لذا قرینهٔ آن نسبت به خط $y=-2x$ بر خودش منطبق خواهد شد!

یک ویژگی مهم در ماتریسهای دوران حول مبدأ

اگر نقطهٔ A را ابتدا به اندازهٔ α حول مبدأ دوران داده و به A_1 و سپس A_1 را به اندازهٔ β ، حول مبدأ دوران داده و به A_2 تبدیل کنیم، درواقع، نقطهٔ A را به اندازهٔ $(\alpha+\beta)$ حول مبدأ

دوران داده‌ایم. حال اگر R_α و R_β ماتریس تبدیل دوران به اندازهٔ α و β باشند، طبق مطالب قبل، ماتریس این دو تبدیل متوالی که می‌بایست دوران به اندازهٔ $(\alpha+\beta)$ یعنی $R_{\alpha+\beta}$ باشد، برابر است با $R_\beta \times R_\alpha$، بنابراین $R_\beta R_\alpha = R_{(\alpha+\beta)}$. این رابطه قابل تعمیم بوده و در حالت کلی، با فرض $\alpha=\beta$ داریم:

اگر R_α ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویه α باشد، در این صورت:

$$(R_\alpha)^n = (R_{n\alpha}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

مسألهٔ مهم: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$، در این صورت، حاصل $A^{۱۳۷۸}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا متذکر می‌شویم که $R_{۲\pi} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$ یعنی ماتریس دوران به اندازهٔ ۲π، همان ماتریس واحد است (دوران به اندازهٔ ۲π تأثیری روی نقطه یا شکل ندارد؛ همان طور که ماتریس واحد عضو خنثی برای عمل ضرب است.)

حال اگر کمی دقت کنیم، مشاهده می‌کنیم که $A = R_{\frac{\pi}{۴}}$ و می‌دانیم $A^۸ = R_{۸\frac{\pi}{۴}} = R_{۲\pi} = I$، از طرفی $۱۳۷۸ = (۸\times۱۷۲)+۲$ (۱۳۷۸ را بر ۸ تقسیم می‌کنیم) پس خواهیم داشت:

$$A^{۱۳۷۸} = (A^۸)^{۱۷۲} \times A^۲ = (I)^{۱۷۲} \times A^۲ = I \times A^۲ = A^۲$$

$$= R_{۲\frac{\pi}{۴}} = R_{\frac{\pi}{۲}} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

تست: حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} \cos۱۵۰^\circ & -\sin۱۵۰^\circ \\ \sin۱۵۰^\circ & \cos۱۵۰^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}^۳ \times \begin{bmatrix} \cos۱۵^\circ & \sin۱۵^\circ \\ -\sin۱۵^\circ & \cos۱۵^\circ \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

حل: گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

اگر ماتریسها را بترتیب، از چپ به راست (بدون درنظر گرفتن توانِ آنها) A و B و C بنامیم، داریم:

$$A = R_{۱۵۰^\circ} \text{ و } B = R_{۴۵^\circ} \text{ و } C = R_{-۱۵^\circ}$$

$$\Rightarrow AB^۳C = R_{(۱۵۰^\circ+۱۳۵^\circ-۱۵^\circ)} = R_{۲۷۰^\circ} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مسأله: معادلهٔ دوران یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $xy=۱$ را حول مبدأ به اندازهٔ (-۴۵°) پیدا کنید.

حل: اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطهٔ دلخواهی از منحنی $xy=۱$ باشد، دراین صورت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{۲}x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y = X \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲}x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y = Y \end{cases}$$

حال x و y را بر حسب X و Y به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۲}y = X+Y \Rightarrow y = \frac{X+Y}{\sqrt{۲}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۲}X+\sqrt{۲}Y}{۲}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}X+\sqrt{۲}Y}{۲}\right) = X$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}x + \frac{X+Y}{۲} = X \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}x = X - \left(\frac{X+Y}{۲}\right)$$

$$\overset{\text{پس از ساده شدن}}{\Longrightarrow} x = \frac{\sqrt{۲}X-\sqrt{۲}Y}{۲}$$

حال در معادلهٔ منحنی $xy=۱$ به جای x و y تبدیل یافته‌های آنها بر حسب X و Y را قرار می‌دهیم که خواهیم داشت:

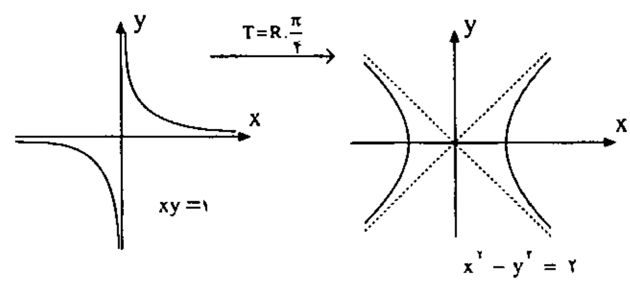
$$xy=۱ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{۲}X-\sqrt{۲}Y}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}X+\sqrt{۲}Y}{۲}\right) = ۱$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y\right)\left(\sqrt{2}X+\sqrt{2}Y\right)=4$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}X\right)^2-\left(\sqrt{2}Y\right)^2=4$$

$$\Rightarrow 2X^2-2Y^2=4 \Rightarrow X^2-Y^2=2$$

نمودارهای $xy=1$ و $x^2-y^2=2$ در زیر رسم شده است.



تست : اگر f نگاشت تقارن نسبت به خط $y=\frac{-2}{5}x$ باشد، fof کدام نگاشت است؟

۱) تقارن نسبت به خط $y=\frac{2}{5}x$

۲) تقارن نسبت به خط $y=\frac{5}{2}x$

۳) تقارن نسبت به خط $y=x$

۴) نگاشت همانی

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

اگر A ماتریس نگاشت f باشد، A^2 ماتریس نگاشت fof بوده و طبق مطالب قبل $A^2=I$ ، پس $fof=i$ ، که i نگاشت همانی است.

تست : ماتریس $\begin{bmatrix}3&-4\\4&3\end{bmatrix}$ ماتریس نگاشتِ fog است که f یک تجانس و g دوران است. نسبت تجانس در این تبدیل کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

حل : گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$\begin{bmatrix}3&-4\\4&3\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{-4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

پس نسبت تجانس ۵ است. (توجه دارید که درماتریسهای دوران، باید طول هر بردار ستونی، واحد باشد و برای واحد کردنِ طول یک بردار، کافی است هر مؤلفهٔ آن را بر طول آن بردار تقسیم کنیم، که در این تست، هر مؤلفه بر طول بردار یعنی $\sqrt{3^2+4^2}=5$ تقسیم شده است.)

تست : معادلهٔ منحنی $x^2-y^2=1$ پس از تبدیل توسط نگاشت f با ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2=1$ ۲) $x^2+y^2=-1$

۳) $x^2+y^2=1$ ۴) $y^2-x^2=1$

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

(روش اوّل)

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-y=X\\x=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-X\\x=Y\end{cases}$$

$$x^2-y^2=1\overset{y=-x}{\underset{x=y}{\Rightarrow}}(Y)^2-(-X)^2=1\Rightarrow Y^2-X^2=1$$

(روش دوم)

منحنی $x^2-y^2=1$ یک هذلولی افقی است و f با توجه به ماتریسِ آن، یک دوران حول مبدأ به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ است، پس حاصل اثر این نگاشت بر منحنی مذکور، یک هذلولیِ قائم است.

در این قسمت، با توجه به شناختی که نسبت به نگاشتهای دوران و تقارن نسبت به خطهای گذرا از مبدأ پیداکرده‌ایم، می‌خواهیم به این مطلب مهم برسیم که :

«نتیجهٔ ترکیب دو تقارنِ متوالی نسبت به خطهای مارّ بر مبدأ، یک دوران است.»

$$\begin{bmatrix}\cos2\alpha&\sin2\alpha\\\sin2\alpha&-\cos2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{پس از ساده شدن}}\begin{bmatrix}\cos(2\alpha-2\theta)&-\sin(2\alpha-2\theta)\\\sin(2\alpha-2\theta)&\cos(2\alpha-2\theta)\end{bmatrix}=R_{(2\alpha-2\theta)}$$

تست : نقطهٔ A را ابتدا نسبت به خط $y=x$ و سپس نسبت به خط $x=\sqrt{3}y$ قرینه می‌کنیم، ماتریس ترکیب این دو نگاشت

کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$y = x \Rightarrow tg\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲\alpha = \frac{\pi}{۲}$$

$$y = \frac{۱}{\sqrt{۳}}x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲\theta = \frac{\pi}{۳}$$

و طبق مطلب قبل، حاصل این دو تقارن، دورانی است به زاویهٔ $\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۲}\right) = -\frac{\pi}{۶}$.

تمرین : خط به معادلهٔ $y = mx$ که $m = tg\alpha$ مفروض است، با توجه به ترکیب نگاشتها، ماتریس نگاشت «تصویر قائم روی خط $y = mx$» را به‌دست آورید. (راهنمایی : از سه تبدیل دوران به اندازهٔ $-\alpha$ ، تصویر قائم روی محور xها و دوران به اندازهٔ α استفاده کنید.)

جواب : ماتریس تصویر قائم یک نقطه روی خط $y = xtg\alpha$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix}$$

تذکر مهم : اگر A ماتریس تصویر قائم روی خط $y = mx$ باشد، داریم :

$$A^۲ = \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۴\alpha + \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos^۳\alpha + \sin^۳\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos^۳\alpha + \sin^۳\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha + \sin^۴\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) & \sin\alpha\cos\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) \\ \sin\alpha\cos\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) & \sin^۲\alpha(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^۲\alpha \end{bmatrix} = A$$

ثابت شد که $A^۲ = A$ ، بنابراین، همواره برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم : $A^n = A$.



لابد میل دارید بدانید که **اراتوستن** چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او از این قبیل بود : می‌دانیم که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، پس اگر من بتوانم طول یک درجهٔ آن را بر حسب استاد "Stade" معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷/۵ متر است) برای تعیین محیط کرهٔ زمین کافی است عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم، بنابراین مطلب رجوع شده بود به این‌که طول کمان یک درجه را معین کنند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو



تاریخچهٔ مجله های ریاضی ایران(۲۶)

در سیرمان در مجله‌های ریاضی ایران به **مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی** رسیدیم و قسمتهایی از مقالهٔ **نظریهٔ بازیهای** آن را انتخاب و نقل کردیم و اکنون قسمت آخر این مقاله را که به یکی از رشته‌های جدید ریاضیات پرداخته است، بازگو می کنیم :

۲. بازیهای صفر ـ مجموع

۲. ۰. مقدمه

در آخرین تمرین، ملاحظه کردیم که در بازی با جدول پی ـ آمد

	X		Y		Z	
A	۸	۲	۱	۹	۷	۳
B	۴	۶	۹	۱	۳	۷
C	۲	۸	۶	۴	۸	۲
D	۶	۴	۴	۶	۶	۴

در غیاب پرداختهای جنبی، برای تشریک مساعی، انگیزه‌ای به بازیکنها ارائه نمی‌شود. اگر فرض کنیم که جایزهٔ شرکت در این بازی، وجوه نقدی است، در این صورت می‌توانیم بسادگی نشان دهیم که حتی اگر پرداختهای جنبی هم مجاز باشد، در تشریک مساعی فایده‌ای نخواهد داشت. دلیل این مطلب، آن است که کل دستاورد هر دو بازیکن، بی‌توجه به نتیجهٔ بازی، یکسان (۱۰) است. در این صورت، هر مجموع اضافه ای که یک بازیکن به عنوان نتیجهٔ تشریک مساعی به‌دست آورد، دیگری باید از دست بدهد. بنابراین، پرداخت جنبی نمی‌تواند کاری جز بی‌اثر کردن سود و زیانهای مزبور انجام دهد.

می‌توانیم از این حذف سود و زیانها، در ساده کردن جدول پی ـ آمد استفاده کنیم. برای این کار، $۵=۱۰\times\frac{۱}{۲}$ را از تمام درایه‌های جدول کم می کنیم و به این ترتیب، آن را به‌صورت زیر درمی‌آوریم :

	X		Y		Z	
A	۳	-۳	-۴	۴	۲	-۲
B	-۱	۱	۴	-۴	-۲	۲
C	-۳	۳	۱	-۱	۳	-۳
D	۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱

در این صورت، ۵ اضافه‌ای را، که هر بازیکن در جدول اصلی دریافت می کند، می‌توان به عنوان جایزهٔ شرکت در بازی در نظر گرفت، و این مقدار، به هیچ‌وجه در استراتژی بازی اثر نمی گذارد.

در جدول پی ـ آمدی که هم‌اکنون در بالا نشان دادیم، مجموع دو درایهٔ واقع در هر خانه صفر می‌شود ؛ به عبارت دیگر، هر چه یک بازیکن می‌برد، دیگری می‌بازد. بازی با چنین جدول پی ـ

آمدی به *بازی صفر ـ مجموع*[1] (دقیق‌تر، *بازی صفر ـ مجموع دو نفری*[2]) موسوم است. تعبیر اقتصادی آن، رجوع به وضعیتی دارد که در آن، دو شخص یا گروه، برای مقدار ثابتی کالا به رقابت می‌پردازند. از لحاظ ریاضی، این بازی، از نوعی است که به بهترین وجهی توضیح داده می‌شود، و اساساً بدین علت است که در مورد آن، اجبار نداریم که اوضاع بغرنج حاصل از امکان تشریک مساعی را به حساب آوریم. در بقیهٔ مقاله، تنها به این نوع بازی خواهیم پرداخت.

۲ . ۱. دستاوردهای تضمین شده

تحلیل بازیهای صفر ـ مجموع عمومیمان را با بررسی این مطلب که زمانی که بازیکنان، با توجه به روش قبلاً موصوف، به بازیها با احتیاط می‌پردازند چه اتفاقی می‌افتد، آغاز می‌کنیم. از آن‌جا که در این مرحله $b_{ij} = -a_{ij}$ به ازای جمیع مقادیر i و j برقرار است، می‌توانیم جدول بی ـ آمد را با حذف درایه‌های با حروف ایرانیک ساده کنیم، و بنابراین، جدول مزبور به صورت زیر به نظر خواهد رسید :

	۱	۲	…	n
۱	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
۲	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

هنگامی که B سطر i را انتخاب می‌کند، می‌داند بی‌توجه به عملی که بازیکن دوم انجام می‌دهد، حداقل به کمترین مقدار نشان داده شده در سطر i خواهد رسید ؛ این مقدار را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\min_j a_{ij}$$

واضح است که خواست او بر این است که مینیمم تضمین شدهٔ مورد بحث، تا آن جا که امکان دارد بزرگ باشد، و به این مقصود می‌تواند با انتخاب سطری (یا یکی از سطرهایی) که $\min_j a_{ij}$ به ازای آن بیشترین است، نائل شود ؛ یعنی، کوچکترین درایهٔ هر سطر را در نظر گرفته، سپس سطر شامل ماکزیمم این مینیممها را انتخاب می‌کند، و با این انتخاب، اطمینان می‌یابد که حداقل به مبلغ μ، که در آن

$$\mu = \max_i(\min_j a_{ij}) \qquad (1)$$

است، خواهد رسید. به روشی مشابه، هنگامی که R ستون j را انتخاب می‌کند، می‌داند که حداقل، کوچکترین درایه‌های ایرانیک اکنون نامرئی واقع در این ستون، یعنی، حداقل $\min_i(-a_{ij})$ را دریافت خواهد کرد و تا سر حد امکان، برای بزرگتر کردن این مقدار، ستونی را که آن را ماکزیمم می‌کند، برمی‌گزیند، و به این طریق، می‌تواند به دریافت حداقل ν ، که در آن

$$\nu = \max_j(\min_i(-a_{ij})) \qquad (2)$$

است، مطمئن شود.

می‌توان برای ν فرمول معادلی را که بیش از آن که به درد نظریه بخورد مناسب محاسبه‌هاست، با استفاده از معادلهٔ (۲) و به طریق زیر، به‌دست آورد :

$$\begin{aligned}\nu &= \max_j(\min_i(-a_{ij}))\\ &= \max_j(-\max_i a_{ij})\\ &= -\min_j(\max_i a_{ij}) \qquad (3)\end{aligned}$$

این فرمول دارای این تعبیر است که، بازیکن R، با انتخاب ستون j، آگاه است که حداکثر $\max_i a_{ij}$ را *می‌پردازد* و با انتخاب ستون مزبور که این مقدار را به حداقل می‌رساند، می‌تواند *زیان* خود را به $\min_j(\max_i a_{ij})$ ، که $-\nu$ است، منحصر کند.

برای توضیح این تعاریف، بار دیگر بازی بررسی شده در آغاز این بخش را، مورد بررسی قرار می‌دهیم، و این بار، جدول مورد بحث را برای نشان دادن مینیمم هر سطر (برای محاسبهٔ μ) و ماکزیمم هر ستون (برای محاسبهٔ ν از معادلهٔ (۳)) افزایش می‌دهیم.

j / i	۱	۲	۳	می نیمم سطر	
۱	۳	−۴	۲	−۴	
۲	−۱	۴	−۲	−۲	
۳	−۳	۱	۳	−۳	$\mu = -۱$
۴	۱	−۱	۱	−۱	
ماکزیمم ستون	۳	۴	۳		
	$\nu = -۳$				

B می‌تواند با انتخاب سطر ۴، مقدار زیانش را، بی‌توجه به عملی که R انجام می‌دهد، تا ۱ نگه دارد ؛ و R می‌تواند با انتخاب ستون ۱ یا ۳، مقدار زیانش را، بی‌توجه به کاری که B می‌کند، تا ۳ نگه دارد.

تمرینها

۱. μ، ν و $\mu+\nu$ را در مورد بازیهای با جدول پی‌آمد زیر محاسبه کنید.

(*i*)

	۱	۲
۱	۱	۲
۲	۴	۳

(*ii*)

	کاغذ	قیچی	سنگ
کاغذ	۰	−۱	۱
قیچی	۱	۰	−۱
سنگ	−۱	۱	۰

این بازی می‌تواند توسط دو نفر که باید هر یک همزمان، یکی از دستهایشان را جلو آورند، اجرا شود. در این صورت، جدول پی‌آمد فوق، با دست باز که «کاغذ» را نمایش می‌دهد، دو انگشت تشکیل دهندهٔ V که «قیچی» را نشان می‌دهد و مشت گره شده که «سنگ» را نمایش می‌دهد ؛ در صورتی که :

سنگ قیچی را کُند کند
قیچی کاغذ را ببرد
کاغذ سنگ را بپوشاند
و مشابه با مشابه مساوی شود
حاصل خواهد شد

(*iii*)

	۱		۲	
۱	۰	۳	۲	۱
۲	۳	۰	۱	۲

۲. در تمام مثالهای فوق، $\mu+\nu \leq ۰$. آیا این موضوع همواره در مورد بازی صفر ـ مجموع صادق است؟ (*راهنمایی* : کل مبلغی را که توسط R و B، به صورت مشترک به‌دست آمده، در نظر بگیرید.)

یادداشتها

۱ـ Zero - sum Game

۲ـ Two - Person zero - sum Game



تماشای این اعداد و اعمال ضرب و جمع، خالی از تعجب و تفریح نیست.

۴۹۷+۲=۴۹۹	۴۷+۲=۴۹	۹+۹=۱۸
۴۹۷×۲=۹۹۴	۴۷×۲=۹۴	۹×۹=۸۱
۱۲×۱۲=۱۴۴	۲۶۳+۲=۲۶۵	۲۴+۳=۲۷
۲۱×۲۱=۴۴۱	۲۶۳×۲=۵۲۶	۲۴×۳=۷۲

دیفرانسیل ـ خطّی سازی و خطا

● احمد قندهاری

اگر تابع به معادلهٔ $y = f(x)$، در بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد و $x \in (a, b)$، چنانچه به x نموّی (رشدی) مانند Δx نسبت دهیم؛ به‌طوری که $(x + \Delta x) \in (a, b)$، خواهیم داشت:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

بنابه تعریف حدّ تابع، می‌توان نوشت: برای هر $\varepsilon > 0$، وجود دارد $\delta > 0$ که:

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

یا

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{|\Delta y - f'(x).\Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$$

از عبارت $\frac{|\Delta y - f'(x).\Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$ نتیجه می‌شود که $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ در مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است. چنانچه Δx به اندازهٔ کافی کوچک باشد $|\Delta y - f'(x)\Delta x| \cong 0$، (تقریباً مساوی $\cong$) و $f'(x).\Delta x$ تقریب مناسبی برای محاسبهٔ Δy است.

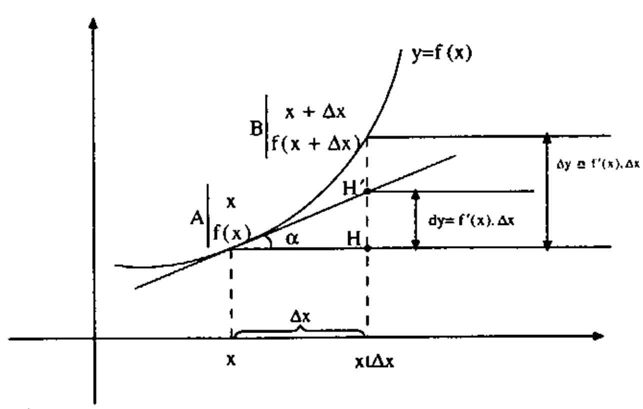
پس اگر $|\Delta x|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، داریم: $\Delta y \cong f'(x).\Delta x$.

عبارت $f'(x).\Delta x$ را دیفرانسیل تابع گوییم و آن‌را با نماد dy نشان می‌دهیم.

پس:

$$\Delta y \cong f'(x).\Delta x \quad , \quad dy = f'(x).\Delta x$$

به شکل زیر توجه کنید.



$$A \text{ شیب خط مماس در نقطهٔ} = f'(x) = \tan\alpha = \frac{HH'}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow HH' = f'(x).\Delta x = dy$$

اگر به شکل دقت کنیم، Δy تغییر عرض تابع f دراثر تغییر x به $x + \Delta x$ است؛ ولی dy تغییر عرض خطّ مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به‌طول x دراثر تغییر x به $x + \Delta x$ است. عمل جایگزینی

خطّ مماس به جای f را اصطلاحاً **خطّی‌سازی** و مقدار BH' را **خطای خطّی‌سازی** گوییم و با کوچکتر شدن Δx، مقدار این خطا کاهش می‌یابد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = x^2 + x$، مطلوب است محاسبهٔ Δy و dy و $\Delta y - dy$ برای

الف: هر x و Δx

ب: $x = 2$ و $\Delta x = 0/1$

ج: $x = 2$ و $\Delta x = 0/01$

د: $x = 2$ و $\Delta x = 0/001$

حل:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - x^2 - x$$

$$\Rightarrow \Delta y = \Delta x(2x+1+\Delta x)$$

$$dy = f'(x).\Delta x = (2x+1)\Delta x$$

$$\Delta y - dy = \Delta x(2x+1+\Delta x) - (2x+1)\Delta x = (\Delta x)^2$$

بقیهٔ محاسبات در جدول زیر نوشته شده است.

x	Δx	Δy	dy	Δy − dy
x	Δx	$\Delta x(2x+1+\Delta x)$	$(2x+1)\Delta x$	$(\Delta x)^2$
۲	۰/۱	۰/۵۱	۰/۵۰	۰/۰۱
۲	۰/۰۱	۰/۰۵۰۱	۰/۰۵	۰/۰۰۱
۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰۰۰۱

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد، هر چه‌قدر Δx به صفر نزدیکتر می‌شود، عبارت $(\Delta y - dy)$ کوچکتر می‌شود و عبارت $(\Delta y - dy)$ از Δx کوچکتر است، پس $\Delta y \cong dy$ و این تقریب از Δx کمتر است.

انتشار خطا

دربرخی از اندازه‌گیریها، به‌علّت محدودیت وسایل اندازه‌گیری، معمولاً اندازهٔ مقدار واقعی متغیر، در دست نیست؛ بلکه با خطایی که آن‌را (متغیر) Δ می‌نامیم، اندازه‌گیری اولّیه انجام می‌شود. این عمل، باعث می‌شود در محاسبات بعدی نیز مقدار واقعی کمیت مورد نظر به‌دست نیاید. به‌عنوان مثال، اگر در اندازه‌گیری طول شعاع یک دایره، به‌اندازهٔ $\frac{1}{100}$ سانتیمتر خطا کرده باشیم، در محاسبهٔ مساحت دایره، مقدار واقعی مساحت دایره به‌دست نمی‌آید.

به‌علت وجود خطا در محاسبهٔ طول شعاع، اندازهٔ مساحت دایره با خطا به‌دست می‌آید. در این صورت می گوییم، خطای اندازه‌گیری در شعاع دایره، به محاسبهٔ مساحت دایره نیز سرایت می‌کند یا انتشار می‌یابد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: در دایره‌ای به شعاع 10^{cm}، چنانچه محاسبهٔ طول شعاع با خطای $\frac{1}{100}$ سانتیمترصورت گیرد، مساحت دایره با چه خطایی محاسبه می‌شود.

حل: مساحت دایره $= S = \pi R^2 \Rightarrow S'_R = 2\pi R$

$$\Delta y \cong f'(x).\Delta x \Rightarrow \Delta S \cong S'_R \times \Delta R = 2\pi R \times \Delta R$$

$$\Rightarrow \Delta S \cong 2\pi(10)(\frac{1}{100}) = \frac{\pi}{5}$$

معنای این حل آن است که اگر در محاسبهٔ شعاع دایره به اندازهٔ $\frac{1}{100}$ سانتیمتر خطا کرده باشیم، در محاسبهٔ مساحت دایره، این خطا انتشار یافته است و مساحت دایره، با خطای تقریباً $\frac{\pi}{5}$ سانتیمترمربع محاسبه شده است. پس خطای اندازه‌گیری در طول شعاع، به محاسبهٔ مساحت دایره نیز سرایت کرده یا انتشار یافته است. به‌طور خلاصه، در تابع مشتق‌پذیر به معادلهٔ $y = f(x)$، اگر متغیر x به‌اندازه Δx تغییر کند، تغییر تابع یعنی Δy تقریباً برابر است با:

$$\boxed{\Delta y \cong dy = f'(x).\Delta x}$$

مثال ۲: در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$، اگر در نقطهٔ $x = 8$ متغیر x به‌اندازهٔ $\Delta x = \frac{1}{100}$ تغییر کند، تغییر تابع یعنی Δy تقریباً چه‌قدر است؟

حل: $x = 8\ ,\ \Delta x = \frac{1}{100}$ $\qquad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$\Delta y \cong dy = f'(x).\Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.\Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$$

مثال ۳: در کره‌ای به شعاع 10^{cm}، خطای اندازه‌گیری در حجم کره (40π) است. خطای اندازه‌گیری در شعاع کره چه‌قدر است؟

حل: حجم کره $= V = \frac{4}{3}\pi R^3 = f(R)$

$$V' = f'(R) = 4\pi R^2.\Delta R$$

$$\Delta V \cong dv = f'(R).\Delta R = 4\pi R^2.\Delta R$$

$$۴۰\pi = ۴\pi(۱۰)^۲ \times \Delta R \Rightarrow \Delta R = \frac{۱}{۱۰}$$ سانتیمتر

مثال ۴: قطر داخلی یک کرهٔ فلزی ۳۰ سانتیمتر و قطر خارجی آن، ۳۰/۴ سانتیمتر است، حجم تقریبی جدار کره چه‌قدر است؟

حل:

$$\begin{cases} R = ۳۰ \\ \Delta R = \frac{۲}{۱۰} \end{cases}$$

حجم کره $= V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = f(R)$

$$V' = f'(R) = ۴\pi R^۲$$

$$\Delta V \cong dV = f'(R).\Delta R = ۴\pi R^۲ \times \Delta R$$

$= ۴\pi(۳۰)^۲ \times \frac{۲}{۱۰} = ۷۲۰\pi$ سانتیمتر مکعب

مثال۵: در یک قطعه فلز، سوراخی به شکل استوانه به شعاع ۳ سانتیمتر و عمق ۴۰ سانتیمتر کنده شده است. اگر بخواهیم به‌وسیلهٔ تراش، قطر سوراخ را به ۶/۲ سانتیمتر برسانیم، تقریباً چند سانتیمترمکعب باید از حجم فلز را بتراشیم؟

حل:

$$\begin{cases} R = ۳ \\ \Delta R = \frac{۱}{۱۰} \end{cases}$$

حجم استوانه $= V = \pi R^۲.h = f(R)$

$$V' = f'(R) = ۲\pi R.h$$

$$\Delta V \cong dV = f'(R).\Delta R = ۲\pi Rh.\Delta R$$

$\Delta V \cong ۲\pi(۳)(۴۰)(\frac{۱}{۱۰}) = ۲۴\pi$ سانتیمترمکعب

توجه: اگر $y = f(x)$ معادلهٔ تابع مشتق‌پذیر f باشد، داریم:

اگر متغیر x باشد، آن‌گاه: $y_۱ = f(x)$

اگر متغیر $(x+\Delta x)$ باشد، آن‌گاه: $y_۲ = f(x+\Delta x)$

درنتیجه: $(۱)\ \ \Delta y = y_۲ - y_۱ = f(x+\Delta x) - f(x)$

از طرفی داشتیم: $(۲)\ \ \Delta y \cong f'(x).\Delta x$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x).\Delta x$$

یا

$$\boxed{f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x}$$

این رابطه، مقدار تقریبی وضع جدید تابع را پس از این که x به‌اندازهٔ Δx تغییر کرده است، نشان می‌دهد.

مثال ۶: مقدار تقریبی $\sqrt[۵]{۳۳}$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \sqrt[۵]{x}$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}$

حال اگر $x = ۳۲ = ۲^۵$ و $\Delta x = ۱$ در نظر بگیریم:

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[۵]{x+\Delta x} \cong \sqrt[۵]{x} + \frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}.\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[۵]{۳۲+۱} \cong \sqrt[۵]{۲^۵} + \frac{۱}{۵\sqrt[۵]{۲^{۲۰}}}.\Delta x = ۲ + \frac{۱}{۸۰} = ۲/۰۱۲۵$$

مثال ۷: مقدار تقریبی $\tan ۶۲^\circ$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \tan x$ آن‌گاه

$$f'(x) = ۱ + \tan^۲ x$$

حال اگر: $x = ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$ و رادیان $\Delta x = ۲^\circ = \frac{۲\times\pi}{۱۸۰}$ باشد:

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(x+\Delta x) \cong \tan x + (۱+\tan^۲ x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(۶۰^\circ + ۲^\circ) \cong \tan\frac{\pi}{۳} + (۱+\tan^۲\frac{\pi}{۳}) \times \frac{\pi}{۹۰}$$

$$\Rightarrow \tan ۶۲^\circ \cong \sqrt{۳} + (۱+۳) \times \frac{\pi}{۹۰} = \sqrt{۳} + \frac{۲\pi}{۴۵}$$

مثال ۸: مقدار تقریبی $\mathrm{Arc}\tan ۱/۰۲$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \mathrm{Arc}\tan x$ آن‌گاه

$$f'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$$

اگر: $x = ۱$ و $\Delta x = \frac{۲}{۱۰۰}$ آن‌گاه می‌نویسیم:

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan(x+\Delta x) \cong \mathrm{Arc}\tan x + \frac{۱}{۱+x^۲}.\Delta x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan(۱+۰/۰۲) \cong \mathrm{Arc}\tan ۱ + \frac{۱}{۱+۱}(\frac{۲}{۱۰۰})$$

$$= \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan ۱/۰۲ \cong \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۱۰۰}$$

مثال ۹: اگر α (برحسب رادیان) زاویه‌ای به‌قدر کافی کوچک

باشد، ثابت کنید $\tan\alpha \cong \alpha$ ، (α در همسایگی صفر است).

حل: فرض می‌کنیم $f(x)=\tan x$ ، آن‌گاه $f'(x)=1+\tan^2 x$

اگر $x=0$ و $\Delta x=\alpha$ داریم:

$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(x+\Delta x)\cong \tan x+(1+\tan^2 x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(0+\alpha)\cong \tan 0+(1+\tan^2 0).\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha\cong\alpha$$

مثال ۱۰: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[5]{0/9}-(0/9)^5$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[5]{x}-x^5$ آن‌گاه

$$f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-5x^4$$

اگر $x=1$ و $\Delta x=-\frac{1}{10}$ ، آن‌گاه داریم:

$$f(x+\Delta x)\cong f(x)+f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x+\Delta x}-(x+\Delta x)^5$$

$$\cong \sqrt[5]{x}-x^5+(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-5x^4).\Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{1-0/1}-(1-0/1)^5$$

$$\cong \sqrt[5]{1}-1+(\frac{1}{5\sqrt[5]{1}}-5)(-\frac{1}{10})$$

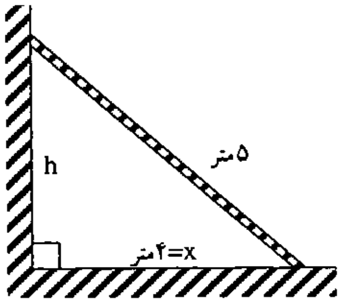
$$\Rightarrow \sqrt[5]{0/9}-(0/9)^5\cong\frac{12}{25}$$

مثال ۱۱: نردبانی به‌طول ۵ متر مطابق شکل به دیواری چنان تکیه داده‌ایم که فاصلهٔ پای نردبان از پای دیوار، ۴ متر است. به‌کمک دیفرانسیل، تغییر ارتفاع انتهای نردبان را حساب کنید؛ درصورتی که پای نردبان از دیوار ۰/۵ متر دورتر رود.

حل: در مثلث قائم‌الزاویه شکل، می‌توان نوشت $h^2=25-x^2$

یا $h=\sqrt{25-x^2}$ و $h'=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

$$\begin{cases}x=4\\ \Delta x=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad \Delta h\cong dh=h'\times\Delta x=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}.\Delta x$$



$$\Rightarrow \Delta h\cong\frac{-4}{\sqrt{25-16}}\times\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}\ \text{متر}$$

تابع به معادلهٔ $y=f(x)=x$ را در نظر می‌گیریم. اگر از دو طرف این تابع، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت (۱) $dy=dx$ ، از طرفی $dy=f'(x).\Delta x$ پس $dy=1\times\Delta x$ یا (۲) $dy=\Delta x$ ، با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\Delta x=dx$

تعریف: اگر تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ تعریف شود، دیفرانسیل x را که با dx نشان می‌دهیم، به‌صورت $\Delta x=dx$ تعیین می‌شود.

پس

$$dy=f'(x).\Delta x$$

یا

$$\boxed{dy=f'(x).dx}$$

به‌طور کلّی:

دیفرانسیل متغیر× (مشتق تابع)= دیفرانسیل هر تابع مشتق‌پذیر

مثلاً اگر تابعهای u و v و t به‌صورت $u=f(x)$ و $v=g(x)$ و $t=h(x)$ باشند داریم:

$$du=u'_x.dx=f'(x).dx$$

$$dv=v'_x.dx=g'(x).dx$$

$$dt=t'_x.dx=h'(x).dx$$

مثال ۱۲: دیفرانسیل تابع به معادلهٔ $y=\operatorname{Arc}\tan x\sqrt{1-x^2}$ را بیابید.

حل:

$$dy=y'.dx=\frac{(x\sqrt{1-x^2})'}{1+(x\sqrt{1-x^2})^2}dx$$

$$\Rightarrow dy=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}.dx$$

$$=\frac{\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(1+x^2(1-x^2)\right)}dx$$

مثال ۱۳: دیفرانسیل تابع به معادلهٔ $y=Ln\sqrt{x}+e^{2x}+a^{\sqrt{x}}$ را بیابید.

حل:

$$dy=y'.dx=\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+2e^{2x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}Lna(a^{\sqrt{x}})\right]dx$$

$$dy=\left[\frac{1}{2x}+2e^{2x}+\frac{Lna}{2\sqrt{x}}(a^{\sqrt{x}})\right]dx$$

تمرین

۱ـ مقدار تقریبی $Arccot\,0/99$ و $\sqrt[6]{63}$ و $\sqrt[n]{a^n+b}$ را بیابید.

۲ـ اگر α (برحسب رادیان) زاویه‌ای به‌قدر کافی کوچک باشد، ثابت کنید: $\sin\alpha\cong\alpha$.

۳ـ دیفرانسیل تابعهای به معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $y=Ln(Arc\tan\sqrt{x})$

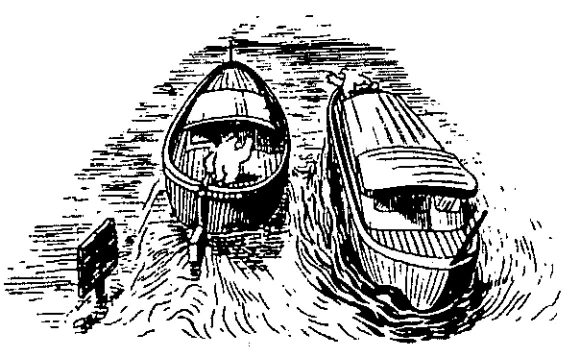
۲) $y=a^{Arc\cos x}+e^{Arc\sin x}$

۳) $y=Arc\sin(Lna^x)$

۴) $y=Arc\cos(Ln\sin x)$



تفریح اندیشه ۱



دو کشتی در طول رودخانه‌ای واقع بین دو شهر رفت‌وآمد می‌کنند. سرعت هر دو کشتی ثابت است؛ یک سرعت هنگام حرکت و یک سرعت هنگام توقف. هر کشتی همزمان و رأس ساعت مشخصی از شهر خود به طرف شهر دیگر حرکت می‌کند. اولین محل تلاقی آنها در ۷ کیلومتری یکی از شهرهاست. هر کشتی پس از رسیدن به مقصد ۴ دقیقه توقف، و مجدداً حرکت می‌کند. بار دوم این دو کشتی در ۹ کیلومتری همان شهر قبلی به هم می‌رسند. فاصله بین این دو شهر چقدر است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

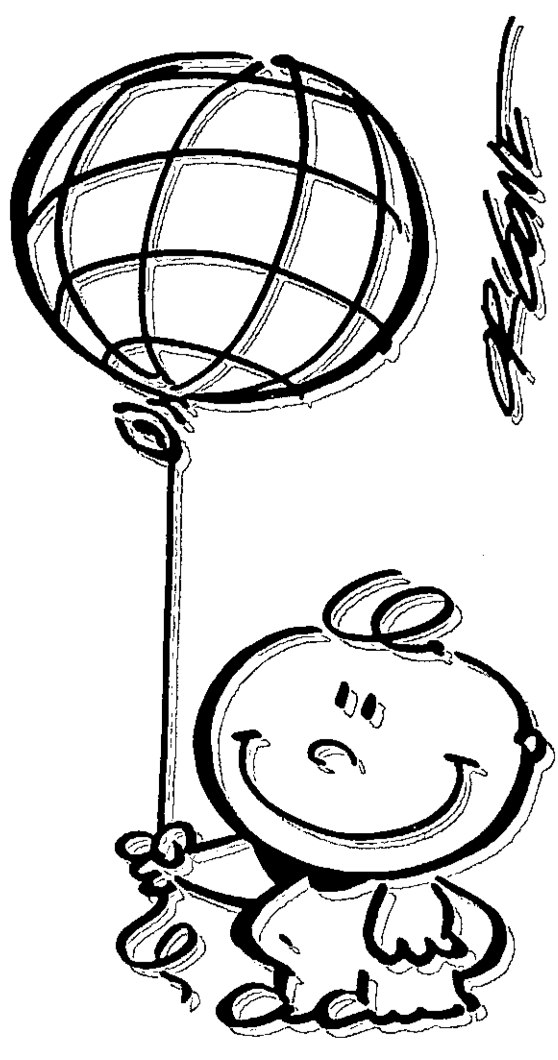
جواب در صفحهٔ ۸۸

نابرابریها

(قسمت سوّم)

● میرشهرام صدر

در شمارهٔ قبل،تعدادی از قضیه های نابرابریها را بررسی کردیم، اکنون در ادامهٔ مقالهٔ قبل،قضیه ها و نتیجه های مهم دیگری از نابرابریها را بیان میکنیم .



قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم $a > 0$؛ $x^2 > a^2 \Leftrightarrow x > a$ یا $x < -a$.

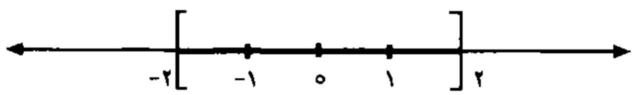
اثبات به عهدهٔ خواننده می‌باشد.

مثال. نابرابریهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید :

۱) $x^2 \leq 4$ ۲) $x^2 > 3$

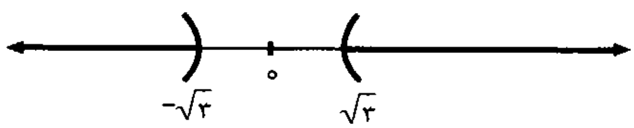
حل.

۱ـ $x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 2^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$



$[-2,2]$

۲ـ $x^2 > 3 \Rightarrow x^2 > (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x > \sqrt{3}$ یا $x < -\sqrt{3}$



$(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\infty)$

مسألهٔ ۱. اگر x یک عدد حقیقی باشد، نشان دهید $-|x| \leq x \leq |x|$.

حل. مسأله را در دو حالت بررسی می کنیم :

حالت اوّل : اگر $x \geq 0$ ،آن‌گاه طبق تعریف قدرمطلق $|x| = x$ و در این حالت $-|x| < x$ بنابراین $-|x| \leq x \leq |x|$.

حالت دوم : اگر $x < 0$ ، آن‌گاه طبق تعریف قدرمطلق $|x| = -x$ یا $x = -|x|$ و در این حالت $x < |x|$ بنابراین $-|x| \leq x \leq |x|$.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم : $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

برهان. فرض کنیم $-a \leq x \leq a$ دو حالت زیر را در نظر می گیریم :

حالت اوّل : اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $|x| = x$ ؛ با جایگزینی این رابطه در فرض داریم :

$$-a \le |x| \le a \Rightarrow |x| \le a$$

حالت دوم : اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $x = -|x|$ ؛ با جایگزینی این رابطه در فرض داریم :

$$-a \le -|x| \le a \Rightarrow -a \le -|x| \Rightarrow |x| \le a$$

بعکس، فرض کنیم $|x| \le a$، طبق مسألهٔ قبل، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم :

$$-|x| \le x \le |x|$$

$$\begin{cases} |x| \le a \Rightarrow -a \le -|x| \\ -|x| \le x \le |x| \end{cases} \Rightarrow -a \le -|x| \le x \le |x| \le a$$

$$\Rightarrow -a \le x \le a$$

مثال. فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ثابت کنید :

$$2|a+b+c| \le |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

حل.

چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم : $-|x| \le x \le |x|$ (مسألهٔ ۱) ، بنابراین :

$$-|a+b| \le a+b \le |a+b|$$

$$-|a+c| \le a+c \le |a+c|$$

$$-|b+c| \le b+c \le |b+c|$$

$$-(|a+b| + |a+c| + |b+c|) \le 2(a+b+c)$$

$$\le |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

با توجه به قضیهٔ ۱۰ خواهیم داشت :

$$2|a+b+c| \le |a+b| + |a+c| + |b+c|$$

نتیجهٔ ۵. اگر $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، نابرابریهای زیر، دو به دو معادلند :

$$x^2 \le a^2 \Leftrightarrow |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

نتیجهٔ ۶. اگر $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد، نابرابریهای زیر، دو به دو معادلند.

$$x^2 \ge a^2 \Leftrightarrow |x| \ge a \Rightarrow x \ge a \text{ یا } x \le -a$$

قضیهٔ ۱۲. (نابرابری مثلثی در اعداد حقیقی) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $|x+y| \le |x| + |y|$.

برهان. برای عددهای حقیقی x و y داریم :

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{cases} \Rightarrow -(|x| + |y|) \le x+y \le |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \le |x| + |y|$$

نتیجهٔ ۷. (تعمیم نابرابری مثلثی در اعداد حقیقی) اگر x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ، اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ اثبات این حکم به استقرا روی n است :



(نابرابری مثلثی) $n=2: |x_1+x_2| \le |x_1|+|x_2|$

$n=k: |x_1+x_2+\ldots+x_k| \le |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|$

(فرض استقرا)

$n=k+1: |x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}|$

(حکم استقرا) $\le |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|+|x_{k+1}|$

با توجه به نابرابری مثلثی داریم :

$$|x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}| \le |x_1+x_2+\ldots+x_k|+|x_{k+1}|$$

از مقایسه نابرابری بالا و فرض استقرا، درستی حکم استقرا نتیجه می‌شود :

$$|x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}| \le |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|+|x_{k+1}|$$

مسألهٔ ۲. چنانکه x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $||x|-|y|| \le |x-y|$.

حل.

(۱) $|x|=|x-y+y| \le |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \le |x-y|$

$|y|=|y-x+x| \le |y-x|+|x| \Rightarrow |y|-|x| \le |y-x|$

(۲) $\Rightarrow -|x-y| \le |x|-|y|$

با توجه به (۱) و (۲) داریم :

$$-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y| \Rightarrow ||x|-|y|| \le |x-y|$$

مسألهٔ ۳. چنانکه x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $||x|-|y|| \le |x+y|$.

حل.

$|x|=|x+y-y| \le |x+y|+|-y|=|x+y|+|y|$

(۱) $\Rightarrow |x|-|y| \le |x+y|$

اگر در رابطهٔ (۱) «xرا به y» و «yرا به x» تبدیل کنیم :

(۲) $|x+y| \ge |y|-|x| \Rightarrow |x|-|y| \ge -|x+y|$

با توجه به (۱) و (۲) داریم :

$$-|x+y| \le |x|-|y| \le |x+y| \Rightarrow ||x|-|y|| \le |x+y|$$

مثال. ماکزیمم و مینیمم عبارتهای زیر را پیدا کنید :

۱) $A=|x-3|-|x+1|$

۲) $B=|x+5|-|x+2|$

حل.

۱) با توجه به مسألهٔ (۳) داریم :

$$|A|=||x-3|-|x+1||=||3-x|-|x+1||$$
$$\le |3-x+x+1|=4$$
$$\Rightarrow |A| \le 4 \Rightarrow -4 \le A \le 4$$

۲) با توجه به مسألهٔ (۲) داریم :

$$|B|=||x+5|-|x+2|| \le |x+5-x-2|=3 \Rightarrow |B| \le 3$$
$$\Rightarrow -3 \le B \le 3$$

مثال. برای سه عدد حقیقی x ، y و z ثابت کنید :

$$|x-y| \le |x-z|+|z-y|$$

حل. با توجه به نابرابری مثلث داریم :

$$|x-z|+|z-y| \ge |x-z+z-y|=|x-y|$$
$$\Rightarrow |x-z|+|z-y| \ge |x-y|$$

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند و $a>0$ ، در این صورت یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد ؛ به طوری که $an>b$. (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.)

مثال. فرض کنیم $a>0$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به طوری که $\frac{1}{n}<a$.

حل. با توجه به قضیهٔ قبل، چون ۱ و a دو عدد حقیقی هستند و $a>0$ ، بنابراین یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد ؛ به گونه‌ای که $an>1$ ، در نتیجه $a>\frac{1}{n}$.

مثال. ثابت کنید معادله $x^2+1=0$ در مجموعهٔ عددهای حقیقی جواب ندارد.

حل. واضح است که $x=0$ در معادله صدق نمی‌کند ؛ زیرا

$0+1\neq 0$، برای هر $x\neq 0$ داریم $x^2>0$. پس $x^2+1>0$ در نتیجه x^2+1 هیچ گاه صفر نمی‌شود.

تمرین

۱ ــ برای عددهای حقیقی a، b و c ثابت کنید:

الف) اگر $a>b$ و $c>0$، آن گاه $ac>bc$.

ب) اگر $a>b$ و $c<0$، آن گاه $ac<bc$.

۲ ــ نشان دهید مجموع دو عدد منفی همواره یک عدد منفی است.

۳ ــ اگر $a\leq b$ و $c\leq d$ ثابت کنید:

الف) $a+3c\leq 3d+2b$

ب) $\frac{1}{2}a-4d\leq\frac{1}{2}b-4c$

۴ ــ اگر $a<b$ و $c<d$، در این صورت دربارهٔ $(a-b)\times(d-c)$ چه می‌توان گفت؟

۵ ــ فرض کنیم $0<a<b$ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$.

۶ ــ فرض کنیم $a>1$، به ازای عدد گویای $r>0$، ثابت کنید $a^r>1$ و به ازای عدد گویای $r<0$، ثابت کنید $0<a^r<1$.

۷ ــ اگر $0<a<1$، به ازای عدد گویای $r<0$، ثابت کنید $a^r>1$ و به ازای عدد گویای $r>0$، ثابت کنید $0<a^r<1$.

۸ ــ ماکزیمم و می نیمم عبارتهای زیر را پیدا کنید:

۱) $A=|2x-1|-|2x+3|$

۲) $B=|5x+1|-|4-5x|$

۹ ــ نابرابریهای زیر را به صورت بازه مشخص کنید:

۱) $(x-2)^2\leq 9$

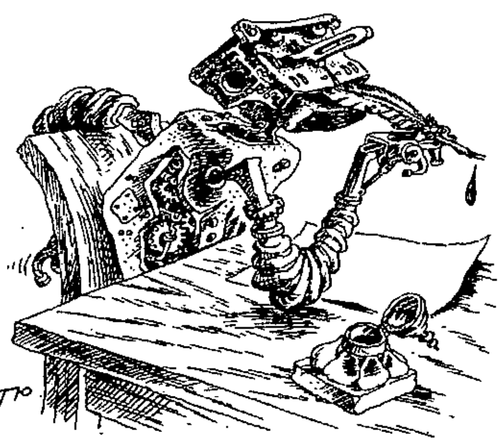
۲) $(2x-1)^2\geq 1$

۳) $(3x-2)^2\leq(5x+4)^2$

۴) $(x-3)^2\geq(2x-1)^2$

تفریح اندیشه ۲

چرخهای گردنده



عمه‌خانم تصوّر می کرد نشان دادن فیلمهایی که تابستان گذشته در تعطیلات گرفته است، بدنیست. اما درست ۵ دقیقه و ۲۰ ثانیه پس از شروع نمایش، زمانی که سرعت چرخی که از آن فیلم برداشته می‌شود، $1\frac{1}{2}$ برابر سرعت چرخی که فیلم به دور آن می‌پیچد، بود، فیلم پاره شد. چند دقیقه از فیلم مورد بحث را از دست داده‌ایم؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

● قسمت اول

کاربرد ریاضی در علوم و شگفتیهای زمین

● شادی دلکش رودسری

مقدمه

هدف اصلی در مجلات برهان، آشنایی هرچه بیشتر شما عزیزان با مفاهیم و اصول ریاضیات و اهمیت و کاربرد آن در زندگی روزمره، صنعت و سایر علوم، از جمله زمین‌شناسی می‌باشد.

آیا تا به حال دربارهٔ علم زمین‌شناسی و اهداف آن اندیشیده‌اید؟!

از آن‌جا که زمین‌شناسی یکی از رشته‌های بنیادی علوم می‌باشد، و پایه‌های اقتصادی کشور نیز بر اساس این علم بنا شده است، و کاربرد زیادی در اکتشافات مواد هیدروکربوری (نفت، گاز و زغال) و استخراج این مواد، مطالعات هیدروژئولوژیکی «آب‌شناسی» (آبهای زیرزمینی و آبهای جاری)، اکتشاف کانیهای فلزی نظیر سرب و روی، سدسازی و ... دارد، سعی می‌شود از این شماره به بعد تحت عنوان کاربرد ریاضی در علوم و شگفتیهای زمین، علاوه بر ذکر کاربرد قوانین و روابط ریاضی در کشف اسرار زمین، اطلاعاتی مفید و ارزشمند نیز در جهت ارتقای دانش عمومی شما عزیزان ارائه گردد.

به یاد داشته باشید که علوم زمین را باید در خود طبیعت بیاموزید. باید مشاهده‌گر دقیقی باشید و همه‌جا به جست‌وجوی دلایل بروید؛ و با توجه به یافته‌ها و تفسیرهای سر زمین و تجزیه و تحلیل آنها و استفاده از علوم ریاضی، فیزیک و شیمی به اطلاعات مفیدی دست یابید.

هیچ‌کدام از ما درون زمین را ندیده‌ایم و پا را از کرهٔ زمین فراتر نگذاشته‌ایم، اما پژوهشگران با بهره‌گیری مناسب از روابط بین علوم، اطلاعات خوبی را دربارهٔ جنس مواد تشکیل دهندهٔ زمین و واکنشها و وقایعی که در سطح و درون زمین اتفاق می‌افتد، به دست آورده‌اند.

در این شماره در مورد کاربرد لگاریتم در رسوب‌شناسی (یکی از رشته‌های تخصصی زمین‌شناسی) و اهمیّت آن در پروژه‌های سدسازی، جاده‌سازی، پل‌سازی و ... شرح خواهیم داد.

اندازهٔ ذرات تشکیل دهندهٔ رسوبات

پوستهٔ جامد زمین از سنگهای رسوبی، آذرین و دگرگونی تشکیل شده است، و سنگهای رسوبی به تنهایی بیش از ۷۰ درصد سطح خارجی زمین را می‌پوشانند. سنگهای رسوبی از رسوبات مختلفی تشکیل شده‌اند که طی عمل دیاژنز (سنگی شدن) به سنگ تبدیل می‌شوند.

دانه‌های رسوبی در اندازه‌های مختلفی دیده می‌شوند (جدول ۱). طبقه‌بندی دانه‌ها از روی بلندترین قطر آنها صورت

می‌گیرد. کرومباین در سال ۱۹۳۴ میلادی، مقیاسی لگاریتمی ارائه داد که به مقیاس فی (Φ) معروف شد، و عبارت است از منفی لگاریتم قطر ذره در پایهٔ ۲.

$\Phi = -\log_{۲}^{d}$ $\quad$ d = قطر ذره برحسب میلیمتر

	نام اجزای رسوب	برحسب میلیمتر (mm)	برحسب فی (Φ)
گراول	بولدر (Boulder)	۲۵۶>قطر	۸- > کمتر
	کابل (Cobble)	۱۲۸ - ۳۲	(-۵) - (-۷)
	پبل (Pebble)	۱۶-۸	(-۲) - (-۴)
ماسه	گرانول (Granule)	۲	۱-
	ماسهٔ بسیار درشت (very coarse sand)	۱	۰
	ماسهٔ درشت (coarse sand)	۰/۵	۱
	ماسهٔ متوسط (medium sand)	۰/۲۵	۲
	ماسهٔ ریز (fine sand)	۰/۱۲۵	۳
	ماسهٔ بسیار ریز (very fine sand)	۰/۶۲۵	۴
سیلت	سیلت درشت (coarse silt)	۰/۰۳۱	۵
	سیلت متوسط (medium silt)	۰/۰۱۵۶	۶
	سیلت ریز (fine silt)	۰/۰۰۷۸	۷
	سیلت بسیار ریز (very fine silt)	۰/۰۰۳۹	۸
رس	رس (clay)	۰/۰۰۳۹ > قطر	۸ > بیشتر

جدول ۱ـ طبقه‌بندی اندازهٔ دانه‌های رسوبی (آواری) برحسب میلیمتر و فی.

همان‌طور که می‌دانید، هرگاه عدد N (مثبت) را در مبنای معین a (بزرگتر از صفر و مخالف یک) به صورت $N = a^{x}$ نمایش دهیم، عدد x، که نمایندهٔ صورت نمایی عدد مفروض با مبنای a است، لگاریتم N در مبنای a خوانده می‌شود و می‌نویسیم $\log_a^N = x$ ، چنان‌که $۱۶ = ۲^{۴}$ ، لذا $\log_{۲}^{۱۶} = ۴$. لگاریتم اعداد در محاسبه کاربرد بسیار دارد و برای اعمال ضرب، توان، تقسیم و گرفتن ریشه، روشهای ساده و کوتاه به دست می‌دهد. معمولاً در محاسبات لگاریتمی، مبنا را عدد ۱۰ در نظر می‌گیرند.

نکتهٔ (۱) : لگاریتم هر عدد در مبنای خودش مساوی یک می‌باشد.

$\log_a^a = ۱$

نکتهٔ (۲) : لگاریتم یک در هر پایه‌ای برابر با صفر می‌شود.

$\log_a^{۱} = ۰$

قضیه‌های لگاریتم

۱) $\log_a^{A.B} = \log_a^A + \log_a^B$

۲) $\log_a^{A/B} = \log_a^A - \log_a^B$

۳) $\log_a^{(A)^m} = m\log_a^A$

۴) $\log_b^a = \dfrac{\log a}{\log b}$

۵) $\log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b}$

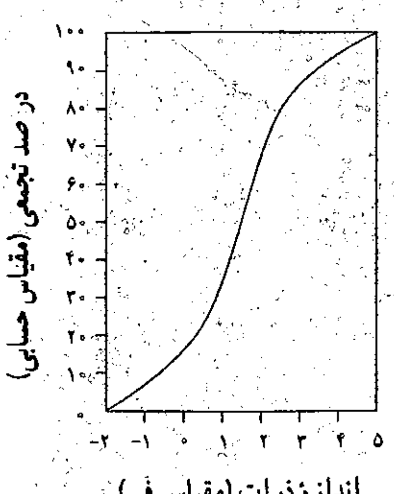
۶) $a^{\log_b^n} = n^{\log_b^a}$

۷) $a^{\log_a^x} = x$

۸) $\log_{b^n}^{a^m} = \dfrac{m}{n}\log_b^a$

۹) $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

با استفاده از فرمول مقیاس «فی (Φ)»، اندازهٔ ذرات برحسب «فی» محاسبه می‌شود و با توجه به اندازهٔ ذرات به دست آمده (ذرات، مربوط به منطقهٔ محل احداث پروژه می‌باشند، که از محل



شکل ـ نمونه‌ای از منحنی‌های تجمعی.

مورد نظر به آزمایشگاه حمل شده‌اند و آزمایشهای لازم برای شناسایی نوع خاک منطقه روی آنها صورت می‌گیرد.) منحنی مربوط به این ذرات ترسیم می‌شود (منحنی های تجمعی).

مزایای کاربرد مقیاس «فی»

۱ـ اندازهٔ دانه‌ها به صورت یک عدد کامل به دست می‌آید، در صورتی که مقیاس میلیمتری دارای تقسیمات عددی بوده و در ترسیم منحنی، اشکالاتی را ایجاد می‌کند.

۲ـ مقیاس «فی» به صورت معکوس عمل می‌کند؛ یعنی با افزایش «فی»، اندازهٔ ذرات کاهش می‌یابند و برعکس.

۳ـ مقیاس «فی» به ما اجازه می‌دهد برای رسم منحنی توزیع ذرات، از کاغذهای حسابی که کاربرد آنها ساده‌تر از کاغذهای لگاریتمی است، استفاده کنیم.

بعد از یافتن اندازهٔ ذرات و ترسیم منحنی مربوط به آن، پارامترهای خاصی، جهت شناسایی نوع خاک منطقه، از روی منحنی محاسبه می‌شوند، و براساس نتایج حاصله از تجزیه و تحلیل منحنی‌ها که منجر به تشخیص نوع خاک منطقه می‌شود و با توجه به خصوصیات و ویژگیهای خاک، اقدامات لازم برای احداث پروژه صورت می‌گیرد.

به طور مثال، در پروژه‌های سدسازی، پل‌سازی و ایجاد مناطق مسکونی، چنانچه جنس خاک منطقهٔ مورد نظر از نوع رس تشخیص داده شود، بنا به دلایلی که در زیر شرح داده خواهد شد، این منطقه برای انجام چنین پروژه‌ای مناسب نمی‌باشد:

۱ـ رس، تراکم‌پذیر بوده و در زیر فشار ناشی از طبقات فوقانی متراکم شده و باعث نشست ساختمان می‌شود.

۲ـ رس، در اثر فشار وارده تغییر شکل داده و با حرکت آهسته باعث انهدام شیبها می‌شود و به همین دلیل بسیاری از زمین‌لغزه‌ها در زمینهای رسی اتفاق می‌افتد.

ویژگیهای خاکهای دانه درشت

۱ـ قدرت تحمل فشار، ناشی از طبقات فوقانی و یا جانبی

۲ـ نفوذپذیری بالا

۳ـ عدم تغییر مقاومت بر اثر افزایش درصد آب

۴ـ معمولاً قابل تراکم نبوده، مگر در صورتی که تراکم آنها پایین باشد، که بر اثر بار دینامیک فشرده می‌شود.

۵ـ عدم تغییر مقاومت در اثر انجماد و ذوب مجدد

با توجه به دلایل فوق و با در نظر گرفتن ویژگی خاکهای مختلف، برای انجام چنین پروژه‌ای، منطقه‌ای با خاکهای دانه‌درشت مناسب می‌باشد.

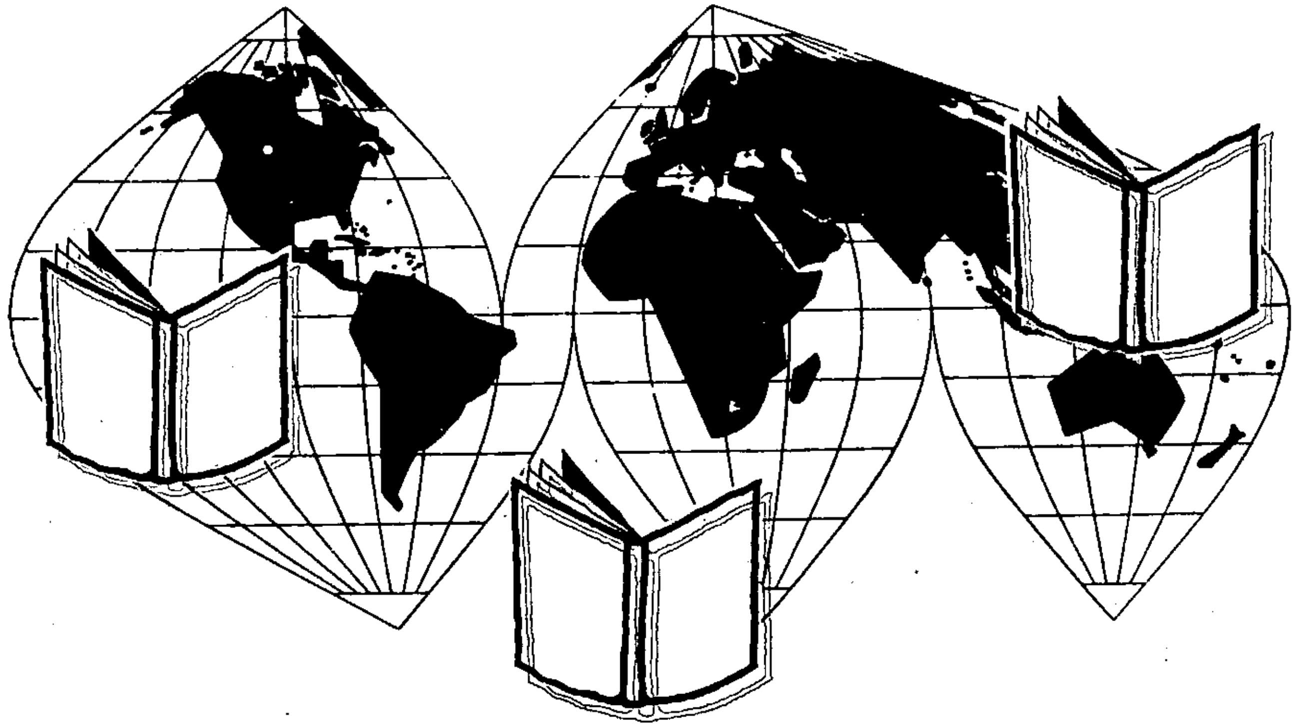
در پروژهٔ سدسازی، منطقهٔ حاوی خاک رس به علت نفوذناپذیر بودن و خاصیت چسبندگی بسیار بالای رس که باعث تشکیل لایهٔ نفوذناپذیر و تجمع آب در منطقه می‌شود، حائز اهمیت است.

حال ببینید کوچکترین اشتباه در انجام محاسبات لگاریتمی، چگونه منجر به عدم تشخیص درست اندازهٔ ذرات، اشتباه در ترسیم منحنی مربوطه، تشخیص نادرست نوع خاک منطقهٔ مورد بررسی، از بین رفتن سرمایهٔ ملی کشور و مهمتر از همه به خطر افتادن جان هزاران انسان می‌شود!



غالباً دیده شده است که دانشمندان بزرگ آثار مهم و اصلی خود را مابین بیست و پنج سالگی و سی‌و پنج سالگی به‌وجود می‌آورند. اما گالیله یک استثنای بزرگ این قانون بود، زیرا وی بعد از هفتاد سالگی توانست دینامیک را ایجاد کند و آن علمی است که از موضوع ایجاد حرکت به وسیلهٔ نیرو گفت و گو می‌کند.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو



مقاله‌های کوتاه از مجلّه‌های ریاضی معتبر جهان (۲۴)

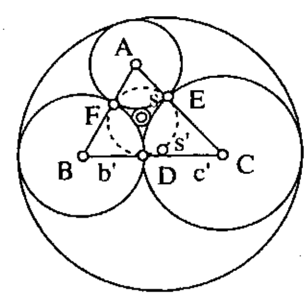
تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

Adrion Oldknow
The mathematical gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

(قسمت دوم)

● ترجمه : غلامرضا یاسی پور

با این سابقه، به بررسی بیشتر مسأله‌ای بپردازیم که توسط **فردریک سُدی** «Frederick Soddy»، شیمیدان برندهٔ جایزهٔ نوبل، به آن پرداخته شد و در ۱۹۳۶ به چاپ رسید. ممکن است در نظر اوّل آشکار نباشد؛ اما در مورد هر مثلث ABC مجموعهٔ یکتایی از سه دایره، به مراکز A، B و C موجود است که مماس برونی یکدیگرند. (سه مقطع مخروطی را به تصور آورید.) این دایره‌ها در نقطه‌های D، E و F واقع بر BC، CA و AB بر یکدیگر مماس برونیند که در آنها ID عمود بر BC و غیره است (شکل ۴).



شکل ۴

DEF را می‌توان *مثلث تماس* «Contact Triangle» مربوط به دایرهٔ محاطی O_I نامید و ABC *مثلث مماس* «Tangent Triangle» متناظر است. به این ترتیب، ID مماس مشترک دایره‌های O_B و O_C است.

فرض می‌کنیم a'، b' و c' شعاعهای سه‌تایی سُدی «Soddy Triplet» شامل دایره‌های O_A، O_B و O_C باشد. در این صورت $a = b' + c'$ و غیره، و پیرامون

$$۲S = a + b + c = ۲(a' + b' + c')$$

بنابراین $a' = S - a$ و غیره، در نتیجه :

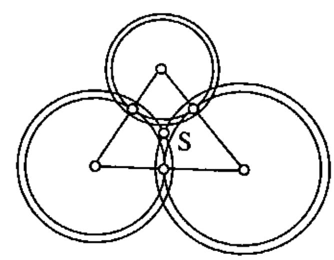
$$\Delta^۲ = Sa'b'c' \quad و \quad S = a' + b' + c'$$

به این ترتیب، سه‌تایی سُدی به دایرهٔ کوچکی مماس می‌شود که در رخنه‌ای بین آنها قرار دارد. این دایره، *دایرهٔ درونی سُدی* «Inner Soddy Circle» O_S با شعاع t است.

سه‌تایی مزبور، توسط دایرهٔ بزرگی که مماس برونی آنهاست، احاطه می‌شود. این دایره، *دایرهٔ برونی سُدی* «Outer Soddy Circle» O_S با شعاع t' است. سُدی کشف مربوط به رابطهٔ بین شعاعهای

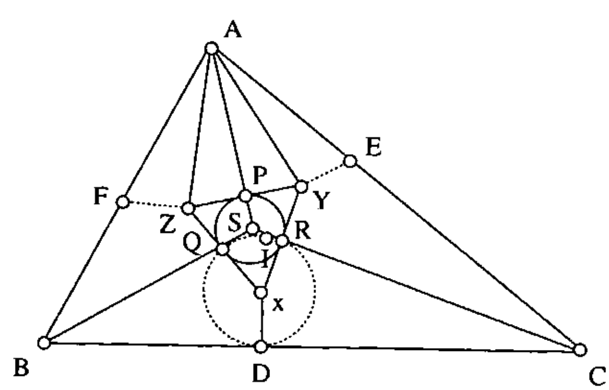
r، a'، b'، c'، t و t' را در شعر [10] «The Kiss Precise» به چاپ رساند. نیاز به تذکر است که این مطلب، پیش از این، توسط **فیلیپ بی‌کرافت** «Philip Beecroft» در ۱۸۴۲، و **رنه دکارت** «René Descartes» در ۱۶۴۳ پیدا شده بود! در هرحال، ترسیم متعارف مراکز سُدی، یا S و S'، کاری پرزحمت و شامل شماری از انعکاسهای دایره‌ها و خطوط در دایره‌های **آپولونیوس** است.

رهیافت ساده‌تر به مسألهٔ مشخص کردن جای S، یافتن مقدار tای است که توسط آن باید a'، b' و c'، شعاعهای سه‌تایی سُدی، برای گذار دادن آنها از نقطه‌ای منفرد، افزایش یابند (شکل ۵). این نقطه، نقطهٔ S و این مقدار t شعاع O_S خواهد بود.



شکل ۵

امتحان این روش با استفاده از شکلهای متعدد، برای موقع S، تقریبی به قدر کافی مناسب، برای زدن حدسهای زیر به‌دست می‌دهد. فرض می‌کنیم O_S به O_A در P مماس باشد و غیره، و مماسهای مشترک در Q، R در X تلاقی کنند ـ بنابراین، PQR مثلث تماس و XYZ مثلث مماس مربوط به O_S است (شکل ۶).



شکل ۶

حدسها

(الف) X بر ID واقع است و غیره.

(ب) YZ از A به زاویهٔ α دیده می شود که نصف زاویهٔ BAC است و غیره.

(ج) X خط ID را به نسبت

$$IX : XD = \tan\beta + \tan\gamma : ۱ = aa' : D$$

تقسیم می کند و غیره.

اثباتها

(الف) دایره‌های O_S، O_B و O_C تشکیل یک سه‌تایی مماس‌شونده می‌دهند و بنابراین، مماسهای مشترکشان در نقاط تماس D، Q و R جمیعاً در X، مرکز دایرهٔ محاطی درونی SBC تلاقی می کنند. در نتیجه XD بر BC عمود است و X بر ID قرار دارد.

(ب) Y بر نیمساز $C\hat{A}S$، Z بر نیمساز $B\hat{A}S$ قرار دارد، در نتیجه $B\hat{A}Z = Z\hat{A}S$ و $S\hat{A}Y = Y\hat{A}C$.

$$B\hat{A}C = B\hat{A}Z + Z\hat{A}S + S\hat{A}Y + Y\hat{A}C$$

$$= ۲(Z\hat{A}S + S\hat{A}Y) = ۲Z\hat{A}Y = ۲\alpha$$

و غیره.

(ج) فرض می کنیم r_A شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث SBC باشد، بنابراین:

$$IX : XD = r - r_A : r_A$$

اما $r = b\tan\beta$ و غیره، و محاسبه‌های مثلثاتی پیچیده رابطهٔ

$$r = r_A.(۱ + \cos\alpha\sec\beta\sec\gamma)$$

و غیره را به دست می‌دهد. از این روابط، و $r = \Delta/S$، $\Delta^۲ = Sa'b'c'$، نتیجه های مورد نظر به‌دست می‌آیند.

به این ترتیب، تولید ترسیم مستقیم نقطهٔ X، با استفاده از رسم خطی گذرنده از I به موازات BC و مشخص کردن طولهایی برابر $r\tan\beta$، $r\tan\gamma$ و $r\tan\gamma$، $r.IX' =$

$$IX'' = X'X''' = r\tan\beta \;,\; X'''X'''' = ID = r$$

ممکن است، و بنابراین، XX'' موازی DX'''' است.

هنگامی که X پیدا شد، می‌توان Y و Z را به همان ترتیب، یا با دَوَران X حول B، به اندازهٔ β و حول C به اندازهٔ γ ترسیم کرد. در این صورت، S، به عنوان مرکز دایرهٔ محاطی درونی XYZ رسم می‌شود و P، Q و R تقاطعهای SA با YZ و غیره‌اند.

بعضی محاسبه‌های نمادین با *درایو* «Drive» رابطهٔ بسیار ظریف

$$r = t(۲ + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)$$

را ایجاد می‌کند که فرمول دکارت را برای t، شعاع دایرهٔ درونی سُدی، یعنی :

$$\frac{۱}{t} = \frac{۲}{r} + \frac{۱}{a'} + \frac{۱}{b'} + \frac{۱}{c'}$$

را به دست می‌دهد.

زمانی که نقاط X، Y، Z، S، P، Q و R در نرم‌افزار هندسی بدقت ترسیم شوند، تغییر دادن مقیاس بسادگی امکان‌پذیر است و جست‌وجوی مفصّلی را آغاز کنیم که ملاحظهٔ آن با ترسیمهای دقیق قراردادی عملی نیست. با استفاده از این روش، قادر به ارائهٔ حدس زیر در کنفرانس ایستر ۱۹۹۴ انجمن ریاضی شدم.

خطوط AX، BY و CZ در نقطهٔ Oای منطبقند که بر خط IS قرار دارد.

دو مثلث ABC و XYZ ی را که دارای این ویژگی هستند که خطوط واصل رأسهای متناظرشان از نقطهٔ Oای می‌گذرد دو مثلث در *پرسپکتیو با مرکز O* می‌گویند. این ملاحظهٔ به ظاهر بی‌اهمیت، در دورهٔ کوتاهی از زمان، به یک رشته از کشفیات مرتبط با هم می‌انجامد. این نتایج را تنها همراه با اطلاعاتی کافی مطرح خواهیم کرد تا خوانندهٔ علاقه‌مند، ترسیمها را خود انجام دهد و/ یا رابطه‌های جبری مورد بحث را خود تأیید کند.

نسبتهای

$$d = \Delta / aa' \ , \ e = \Delta / bb' \ , \ f = \Delta / cc'$$

در مطالبی که بعد از این می‌آیند، نقشی مهم دارند و ما آنها را *وزنهای رأسی* «Vertex Weights» A، B و C می‌نامیم.

محاسبه‌های مثلثاتی ساده انتخابهای سه ـ خطی «Trilinear» زیر را برای نقاط D، E، F، X، Y، Z، S و O برحسب مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، یعنی، I(۱,۱,۱) به‌دست می‌دهند :

$$D = (۰, e, f) \ , \ X(۱, ۱+۲e, ۱+۲f) = ۱ + ۲D \ ,$$
$$P = (۱+۲d \ , \ ۱+e \ , \ ۱+f)$$

و غیره.

$$S = (۱+d, ۱+e, ۱+f) \ , \ O = (۱+۲d, ۱+۲e, ۱+۲f)$$

می‌دانیم مثلثهای ABC به مرکز G، **نقطهٔ ژرگون** «Gergonne Point» در پرسپکتیوند. AD، BE و CF در نقطهٔ G = (d, e, f) تقاطع می‌کنند.

خواننده می‌تواند چنین اظهاراتی را بسادگی، برای همخطی مثلاً ADG با قرار دادن در دترمینان (۳) آزمایش کند :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = ۰$$

اکنون، به همین ترتیب و بسادگی، می‌توان نشان داد که چهار نقطهٔ I، S، O و G همخطند.

در سه خطیهای دقیق، I دارای صورت r(۱,۱,۱) و G دارای صورت h(d, e, f) است که در آن :

$$\frac{۲}{h} = \frac{۱}{a'} + \frac{۱}{b'} + \frac{۱}{c'} \qquad (۷)$$

و بنابراین هر نقطهٔ K ی واقع بر خط IG، دارای صورت سه‌خطی دقیق

$$(۱-\lambda)r(۱,۱,۱) + \lambda\, h(d, e, f)$$

به ازای مقداری از پارامتر λ، و در نتیجه انتخاب :

$$K = (۱,۱,۱) + k(d, e, f) = ۱ + kG$$

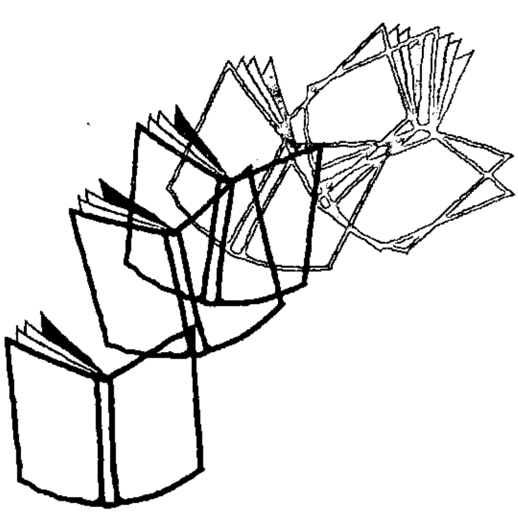
به ازای مقداری از پارامتر تبدیل شدهٔ k است (که در آن، k به ازای نقطهٔ G، مقدار ∞ را اختیار می‌کند). در نتیجه :

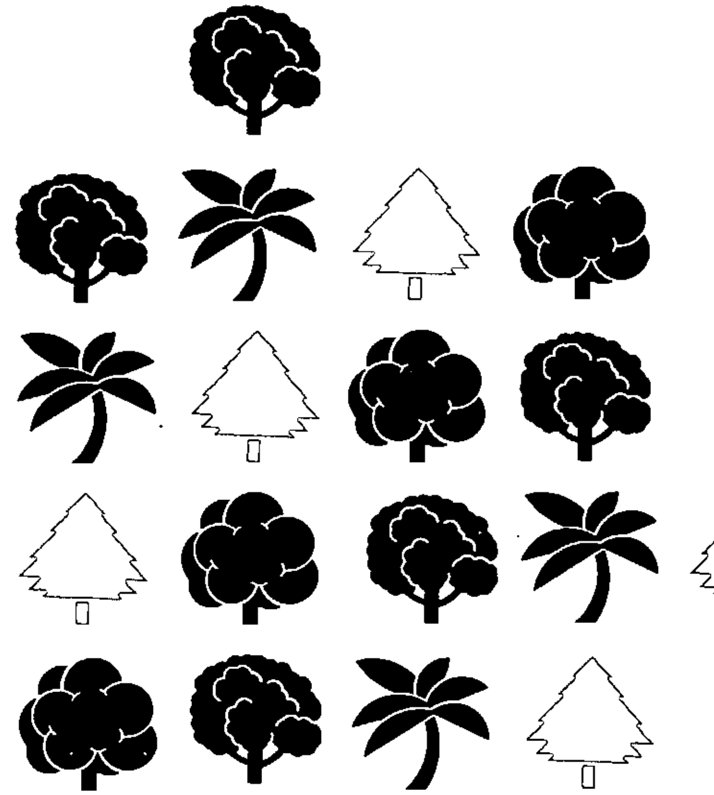
$$S = I + G$$

و :

$$O = I + ۲G$$

و همخط بودن واضح است.





ریاضیات ترکیباتی

● ترجمه: یدا... ایلخانی‌پور
از کتاب مبانی ریاضیات گسسته
● مؤلف: جوزف استرایت و پلیمنی

اگرچه در آغاز ریاضیات ترکیباتی، عاملی برای تفریح در حلّ جدولها و بازیها بود، اما در حال حاضر، یکی از میدانهای فعال تحقیق در ریاضی به حساب می‌آید. به‌علاوه کاربردهای مهمی در زمینه‌هایی نظیر کامپیوتر، تحقیق در عملیات، آمار و علوم اجتماعی و نظری دارد.

با اصل جمع و اصل شمول و عدم شمول آشنایی دارید. اینها قوانین ترکیباتی هستند، که به‌وسیلهٔ آن، تعداد عضوها در اجتماع مجموعه‌ها شمرده می‌شود. ریاضیات ترکیباتی، تا حدّ زیادی به تعیین ترتیب عضوهای یک مجموعه تحت یک شرایط خاص مربوط می‌شود. نوعاً عضوها متعلق به مجموعه‌هایی هستند که شمارا متناهی یا شمارا نامتناهی باشند. و به این ترتیب، ریاضیات ترکیباتی، به محدودهٔ ریاضیات گسسته مربوط می‌شود. زمانی که از یک نوع ترتیب خاص صحبت می‌کنیم، معمولاً چندین سؤال پیش می‌آید :

۱ـ وجود : آیا چنین ترتیبی وجود دارد؟

۲ـ شمارش و طبقه‌بندی : از این نوع خاص ترتیب، چه تعداد وجود دارد؟ آیا به یک طریق خاص می‌توان آنها را طبقه‌بندی کرد؟

۳ـ الگوریتمها : آیا روش معینی برای تهیهٔ این ترتیبها وجود دارد؟

علاوه‌بر سؤالهای فوق، می‌توان این سؤال را نیز مطرح کرد که آیا امکان یک قانون کلی وجود دارد؟ و به‌عبارت دیگر، آیا مسألهٔ قابل توجهی وجود دارد که به سؤالهای فوق مربوط باشد؟

مثالهای زیر، بعضی از نظریه‌های بالا را روشن می‌کند.

مثال: هفت فروشگاه عمومی، مدارک بسیار سرّی خود را در یک گاوصندوق نگه‌داری می‌کنند. آنها می‌خواهند تنها زمانی بتوانند در گاوصندوق را باز کنند، که اکثریت اعضا حاضر باشند. بنابراین، آنها پیشنهاد می‌کنند که در گاوصندوق را با تعدادی از قفلهای متفاوت ببندند و هر فروشگاه کلیدهایی برای قفلهای بخصوصی داشته باشد. با این امکان که دو نفر از آنان ممکن است کلید یک قفل را داشته باشند. حداّقل، چه تعداد قفل باید وجود داشته باشد؟ و چه تعداد کلید برای هر فروشگاه وجود دارد؟

حل: فرض کنید $G_1, G_2, \cdots, G_7$ نشان‌دهندهٔ فروشگاه‌ها باشند. چون فقط با اکثریت افراد، فروشگاه‌ها می‌توانند گاوصندوق را باز کنند. غیرممکن است که با حضور سه نفر، گاوصندوق باز شود. بنابراین، برای هر ۳ فروشگاه فرضی، یک قفل وجود دارد، که هیچ‌کدام کلید آن‌را ندارند. آیا می‌توان دو زیرمجموعهٔ متفاوت از سه فروشگاه که هیچ‌کدام کلید یک نوع قفل را ندارند، در نظر گرفت؟ برای مثال، فرض کنید که G_1, G_2, G_3 و G_2, G_3, G_4 کلید قفل مشابه را نداشته باشند. پس G_1, G_2, G_3, G_4 کلید قفل

را ندارند. به شرط مسأله بازمی‌گردیم که بیشتر افراد می‌توانند گاوصندوق را باز کنند. بنابراین، باید حداقل به تعداد قفلهای متعددی که وجود دارد، راه‌هایی برای انتخاب یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از هفت فروشگاه وجود داشته باشد. با توجه به تعداد کلیدهایی که هر فروشگاه باید داشته باشد، توجه خود را روی یکی از فروشگاه‌ها به نام G_7 معطوف می‌کنیم. اگر G_7 را به زیرمجموعهٔ S که شامل ۳ فروشگاه است، اضافه کنیم، مجموعهٔ چهار عضوی قادر خواهد بود که گاوصندوق را باز کند. به هر حال، همان‌طوری که اشاره کردیم، یک قفل وجود دارد که اعضای S کلید آن‌را ندارند. پس G_7 باید کلید این قفل را داشته باشد. همچنین، چون هردو زیرمجموعهٔ مختلف از سه فروشگاه، فاقد یک کلیدازیک نوع قفل هستند، G_7 حداقل باید کلیدهای زیادی داشته باشد. همان‌طوری که برای انتخاب یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از مجموعهٔ شش عضوی راه‌های زیادی وجود دارد.

این مسألهٔ کلّی، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی را مشخص می‌کند، که در همین فصل به آن می‌پردازیم.

مثال: در فصل ۵ جایگشت یک مجموعه به عنوان یک تابع یک به یک و پوشا روی خودش معرفی شد. بخصوص اگر A یک مجموعه متناهی باشد، می‌گوییم $|A| = n$ است. پس می‌بینیم که یک جایگشت A می‌تواند به‌عنوان ترتیبی از عضوهای انتخابی A یا nتایی مرتبی که دارای مختصات عضوهای A هستند، باشد. نشان دادیم که !n تا جایگشت از یک مجموعه با n عضو وجود دارد. برای مثال فرض کنید $A = \{۱,۲,۳\}$ باشد؛ پس:

$$(۱,۲,۳),(۱,۳,۲),(۲,۳,۱),(۲,۱,۳),(۳,۱,۲),(۳,۲,۱)$$

یعنی $۶ = !۳$ جایگشت از اعضای A وجود دارد.

به‌طورکلّی، برای مجموعهٔ متناهی و اختیاری A آیا یک روش مشخصی وجود دارد که به‌وسیلهٔ آن، همهٔ جایگشتهای A به‌دست آید و این سؤال در بخش بعدی مطرح می‌شود.

در فصل (۸) دوباره به جایگشت از نقطه نظر جبری می‌پردازیم.

مثال: به چند روش می‌توان ۳۷ شیرینی را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟ اگر بچه‌ها را با c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 نشان دهیم فرض کنید x_i تعدادی از شیرینیها باشد که c_i دریافت می‌کند. به ازای $i = ۱,۲,۳,۴,۵$ می‌بینیم که x_i یک عدد صحیح غیرمنفی است و،

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = ۳۷$$

در حالت کلّی، مسألهٔ تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

می‌باشد؛ درحالی‌که x_i عدد صحیح غیرمنفی است. به ازای $i = ۱,۲,\cdots,n$ و $m > ۰$ است.

تمرین:

۱ـ تعداد جایگشتهای هر مجموعه را بنویسید.

$(a)\{۱\}$ $(b)\{۱,۲\}$ $(c)\{۱,۲,۳\}$ $(d)\{۱,۲,۳,۴\}$

۲ـ فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $A = \{۱,۲,\cdots,n\}$ باشد. ترتیب «≤» روی جایگشتهای A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای دو جایگشت $\pi_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ و $\pi_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ از A تعریف می‌کنیم: $\pi_1 \le \pi_2$ به‌شرطی که یا $\pi_1 = \pi_2$ و یا $a_1 < b_1$ یا $a_1 = b_1$، ؛ $a_2 = b_2, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}$ و $a_i < b_i$ برای بعضی مقادیر i که $۱ < i \le n$، باشد. این ترتیب، به ترتیب الفبایی معروف است.

الف) نشان دهید که رابطهٔ ≤ یک ترتیب کلی از مجموعهٔ جایگشتهای A است.

ب) جایگشتهای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ را به‌صورت ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = ۷$، کدام جایگشت، بلافاصله پس از $(۱,۲,۳,۴,۶,۷,۵)$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

د) به‌ازای $n = ۷$، کدام جایگشت بلافاصله پس از $(۱,۶,۲,۷,۵,۴,۳)$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

۳ـ زیرمجموعه های سه عضوی هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

a) $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ b) $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۴ـ n و A را در تمرین ۲ درنظر بگیرید و فرض کنید k عدد صحیح باشد. درحالی‌که $۱ \le k \le n$ باشد، ترتیب ≤ را نیز ترتیب الفبایی روی زیرمجموعه های K عضوی A می‌نامیم. و ترتیب آن به‌صورت زیر است. فرض کنید:

$$S_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \quad , \quad S_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$$

دو زیرمجموعهٔ k عضوی از A باشند و فرض کنید که عضوهای آن طوری نوشته شده باشد. که: $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ و

$b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ باشد. پس $S_1 \le S_2$ است، به شرط آن‌که یا $S_1 = S_2$ باشد یا $a_1 < b_1$ و یا $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_{i-1} = b_{i-1}$ باشد و $a_i < b_i$ به ازای i و $1 < i \le k$.

الف) نشان دهید که $\le$ یک ترتیب کلی از زیرمجموعهٔ k عضوی A است.

ب) فهرست زیرمجموعه های سه عضوی $\{1,2,3,4,5,6\}$ را به ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعهٔ چهارعضوی، بلافاصله پس از $\{1,3,4,5\}$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

د) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعهٔ چهارعضوی، بلافاصله پس از $\{2,4,6,7\}$ نوشته می‌شود؟

۵ـ n و A را درتمرینهای ۲ و ۴ در نظر بگیرید. فرض کنید تعریف $\le$ در تمرین ۴ «ترتیب الفبایی» را برای همهٔ زیرمجموعه‌های A به نام $P(A)$ تعمیم دهیم. نخست می‌دانیم که زیرمجموعهٔ تهی، قبل از زیرمجموعهٔ ناتهی می‌آید. پس به ازای دو زیرمجموعهٔ ناتهی A و B که $A \ne B$. فرض کنید x کوچکترین عضو تفاضل متقارن $(A-B)\cup(B-A)$ باشد. اگر $x \in A$ باشد، پس $A < B$ ودرغیراین‌صورت $B < A$ است. (به‌ازای‌دو زیرمجموعهٔ A و B و نماد $A \le B$ بدین معناست که یا $A = B$ و یا $A < B$).

الف) نشان دهید که $\le$ یک ترتیب کلی از $P(A)$ است.

ب) فهرست زیرمجموعه های $\{1,2,3,4\}$ را به‌ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعه، بلافاصله پس از $\{1,3,4,5\}$ در ترتیب الفبایی می‌آید؟

د) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعه، بلافاصله پس از $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ می‌آید؟

هـ) به ازای $n = 7$ ، کدام زیرمجموعه بلافاصله پس از $\{1,7\}$ می‌آید؟

روشهای بنیادی شمارش

با اصول جمع و ضرب آشنا هستید، و هرکدام از آنها را برای مجموعه‌های متناهی A و B به‌صورت زیر داریم:

اصل جمع: اگر A و B از هم جدا باشند، آن گاه:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

اصل ضرب:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

در این‌جا هرکدام را به‌طورکلی ثابت می‌کنیم و دستورالعمل‌های بیشتری را ارائه می‌دهیم.

قضیه اصل جمع

اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعه‌های متناهی و دو به دو از هم جدا باشند، آن‌گاه:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

اثبات: با استقرا روی n و فرض این‌که S مجموعهٔ اعداد صحیح مثبتی باشدکه گزارهٔ فوق درآن درست باشد. واضح است که $1 \in S$ و همان‌طورکه در بخش ۴ـ۲ نشان دادیم، $2 \in S$ است. فرض کنید به ازای عدد صحیح اختیاری $k \ge 2$ ، $k \in S$ باشد؛ یعنی اصل جمع به‌ازای k مجموعهٔ متناهی صادق باشد. برای این‌که نشان دهیم $k+1 \in S$ است، فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ ، $k+1$ مجموعهٔ متناهی و از هم جدا باشند، پس $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ و A_{k+1} مجموعه‌های متناهی و از هم جدا هستند و

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| \\ &= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}| \\ &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| + |A_{k+1}| \end{aligned}$$

دردومین تساوی $2 \in S$ است؛ درحالی که در سوّمین تساوی، از فرض استقرا استفاده شده است و به همین ترتیب، $k+1 \in S$ است و خواهیم داشت $S = N$.

مثال: اگر یک جفت تاس را با هم پرتاب کنیم، به چند طریق ممکن است مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰ باشد؟

حل. فرض کنید نتیجه پرتاب تاسها جفتهای مرتّب (r,s) باشد. درحالی که r نشان‌دهندهٔ روشدن اعداد اوّلین تاس و s دومین تاس باشد، فرض کنید A مجموعهٔ جفت‌های مرتّب مجموع ۷ و

B مجموعهٔ جفتهای مرتب مجموع ۱۰ باشد ؛ پس :

$$A=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

$$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$$

بنابراین $A\cup B$ مجموعهٔ جفتهای مرتّب با نتیجه ۷ یا ۱۰ است و جواب مسأله $|A\cup B|$ است. چون A و B مجموعه‌های جدا از هم هستند، داریم :

$$|A\cup B|=|A|+|B|=۶+۳=۹$$

مثال: اگر چهار بار متوالی یک سکّه را بیندازیم، به چند طریق ممکن است یک، دو یا سه بار رو بیاید؟

حل. همان‌طوری که می‌دانیم، از چهار بار پرتاب سکّه، هربار ممکن است یک رو (H) یا یک پشت (T) بیاید. (برای مثال (HTHH) یک امکان است). فرض کنید E_k مجموعه‌ای از آمدن دقیقاً k دو باشد ؛ درحالی که $۰\le k\le ۴$ است، بنابراین

$$E_۱=\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}$$

$$E_۲=\{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}$$

$$E_۳=\{HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$$

پس $E_۱\cup E_۲\cup E_۳$ مجموعه‌ای از حالتهای آمدن یک، دو یا سه رو است و جواب مسأله $|E_۱\cup E_۲\cup E_۳|$ است، چون $E_۱$ ، $E_۲$ و $E_۳$ مجموعه‌های از هم جدا هستند، داریم :

$$|E_۱\cup E_۲\cup E_۳|=|E_۱|+|E_۲|+|E_۳|$$

$$=۴+۶+۴$$

$$=۱۴$$

قضیه اصل ضرب

اگر $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ مجموعه‌های متناهی باشند. آن‌گاه

$$|A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_n|=|A_۱|\times|A_۲|\times\cdots\times|A_n|$$

اثبات: با استفاده از اصل استقرا روی n و فرض این‌که S مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است که نتیجه صادق است، داریم $۱,۲\in S$. فرض کنید به ازای عضو اختیاری $k\ge ۲$ ، $k\in S$ باشد. یعنی قضیه به ازای هر k مجموعهٔ متناهی صادق باشد.

برای این‌که نشان دهیم $k+۱\in S$ است، فرض کنید : $A_۱, A_۲, \cdots, A_k, A_{k+۱}$ مجموعه‌های متناهی باشند. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f:(A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k)\times A_{k+۱}$$
$$\to A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k\times A_{k+۱}$$

با ضابطهٔ :

$$f(((a_۱,a_۲,\cdots,a_k),a_{k+۱}))=(a_۱,a_۲,\cdots,a_k,a_{k+۱})$$

این تابع یک به یک و پوشاست (تمرین ۱۴ را ببینید) بنابراین، طبق قضیهٔ فرعی ۱۲ـ۵ داریم :

$$|(A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k)\times A_{k+۱}|$$
$$=|A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k\times A_{k+۱}|$$

و چون $۲\in S$ و $k\in S$ است، داریم :

$$|(A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k)\times A_{k+۱}|$$
$$=|A_۱\times A_۲\times\cdots\times A_k|\times|A_{k+۱}|$$
$$=|A_۱|\times|A_۲|\times\cdots\times|A_k|\times|A_{k+۱}|$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $k+۱\in S$ است. و درنتیجه $S=N$ و اثبات کامل است.

برای درک بیشتر، اصل ضرب رابه صورت زیر نیز می توان بیان کرد.

اصل ضرب: فرض کنید که برای مرتّب کردن n موضوع انتخابی :

۱ـ اوّلین موضوع بتواند با $m_۱$ روش انتخاب شود.

۲ـ برای هرکدام از انتخابهای اوّلین موضوع، موضوع دوم بتواند در $m_۲$ روش انتخاب شود.

۳ـ به ازای اوّلین انتخابهای دو موضوع، موضوع سوّم بتواند با $m_۳$ روش انتخاب شود.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

nـ به ازای انتخاب اوّلین $n-۱$ موضوع، nامین موضوع در m_n روش انتخاب شود.

آن‌گاه n موضوع می‌تواند با هم به $m_۱\times m_۲\times\cdots\times m_n$ روش انتخاب شود.

مثال: به چند روش می‌توان ۴ کارت را به‌طور تصادفی از بین ۵۲ کارت انتخاب کرد ؛ به‌شرطی که :

الف) کارت انتخابی به بقیه کارتها برگردد؟

ب) بدون اضافه کردن کارت انتخاب شده به بقیهٔ کارتها؟

حل الف) برای انتخاب اوّلین کارت، ۵۲ انتخاب وجود دارد؛ چون اوّلین کارت که انتخاب شود، پیش از انتخاب دوم به کارتها اضافه می‌شود. باز هم برای دومین کارت ۵۲ انتخاب وجود دارد و به همین ترتیب، برای کارتهای سوّم و چهارم. بنابراین، با استفاده از اصل ضرب ترتیبی از چهار کارت انتخاب شده، به‌صورت زیر است:

تعداد انتخابها: $۵۲\times۵۲\times۵۲\times۵۲=۵۲^{۴}$

حل ب) برای انتخاب کارت اوّل، ۵۲ انتخاب وجود دارد، و چون اوّلین کارت به بقیهٔ کارتها اضافه نمی‌شود، برای انتخاب دومین کارت ۵۱ انتخاب، سوّمین ۵۰ و چهارمین ۴۹ انتخاب وجود دارد. بنابراین، با استفاده از اصل ضرب داریم:

تعداد راه‌ها: $۵۲\times۵۱\times۵۰\times۴۹$

مثال: چه تعداد عدد صحیح n وجود دارد؛ به‌طوری که $۵۰۰۰<n<۱۰۰۰۰$ و رقمهای n مجزّا باشند؟

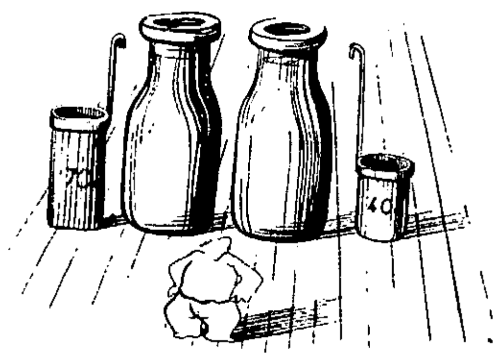
حل. اگر n عدد صحیح باشد، آن‌گاه n شامل ۴ رقم است و رقم هزارگان آن باید یکی از اعداد ۵,۶,۷,۸,۹ باشد. بنابراین، برای رقم هزارم ۵ حالت انتخاب وجود دارد. پس از انتخاب رقم هزارم، برای انتخاب رقم صدگان ۹ راه وجود دارد. (دقّت کنید که عدد صفر، می‌تواند برای این رقم استفاده شود).

به همین طریق، برای انتخاب رقم دهگان، هشت طریق و برای انتخاب رقم یکان، هفت طریق وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب $۵\times۹\times۸\times۷$ راه برای انتخاب n وجود دارد.

یکی دیگر از راه‌های اصلی و مهم شمارش در ترکیبیات، اصل لانه کبوتر است. درک این اصل بسیار آسان است. در واقع به‌نظر می رسد که اثبات آن برای دانش‌آموز بسیار آسان باشد (اگر این‌طور است، سعی کنید آن‌را ثابت کنید و برای این کار، از برهان «خلف» استفاده کنید). در شمارهٔ آینده به این اصل خواهیم پرداخت.



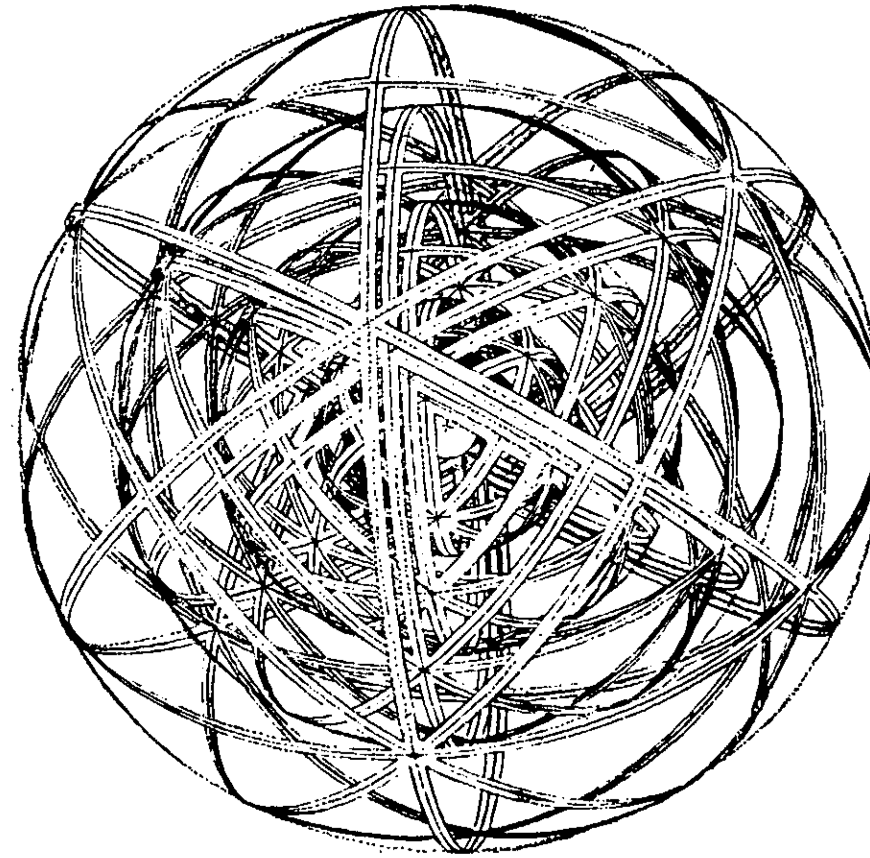
تفریح اندیشه ۳



دو بطری یک لیتری هر دو پر از شیر هستند. مهرداد دو پیمانهٔ خالی به گنجایش ۴۰ و ۷۰ سانتی‌لیتر در اختیار دارد. او می‌خواهد بدون استفاده کردن از ظرف دیگری در هر یک از دو پیمانه، ۳۰ سانتی‌لیتر شیر داشته باشد، بدون اینکه یک قطره از شیر بیرون بریزد. مهرداد در ۶ مرحله این کار را انجام می‌دهد. چگونه؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



سهمی

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

با رسم نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ به روش نقطه‌یابی آشنا هستید. در این جا برای یادآوری این مطلب، چند مثال می‌آوریم.

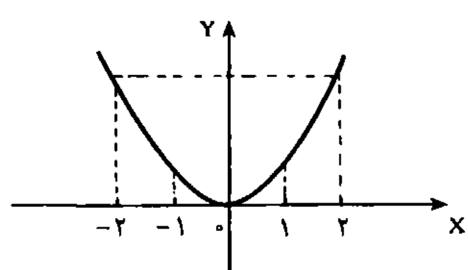
مثال (۱): نمودار $y = x^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	...
$y = x^2$	...	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، به x مقادیر مختلفی داده شده و برای y (یا x^2) به ترتیب، مقادیری به‌دست آمده است که هر نقطه مانند: (x_1, y_1)، مشخص‌کنندهٔ یک نقطه از منحنی $y = x^2$ است. درصورتی که نقاط بیشتری را مشخص کنیم، از وصل این نقاط، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم می‌شود.

(۱)



توجه: نمودار $y = x^2$، یک «سهمی» را مشخص می‌کند که نسبت به محور yها متقارن است؛ یعنی خط $x = 0$، محور تقارن نمودار است.

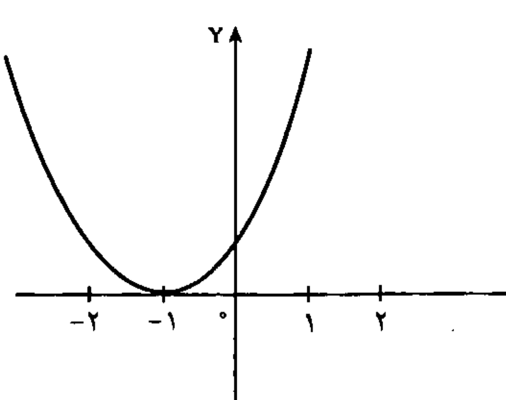
مثال (۲): نمودار $y = (x+1)^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...
$y = (x+1)^2$	...	۱	۰	۱	۴	۹	...

با توجه به جدول و مقادیر مختلف دیگری که به x بدهیم، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم خواهد شد.

(۲)



همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودار، نظیر نمودار $y = x^{۲}$ است. این نوع نمودارها را «**سهمی**» می‌نامند.

در نمودار (۱) نقطهٔ (۰,۰) و در نمودار (۲) نقطهٔ (۱,۰−) را **رأس سهمی** می‌نامند. با توجه به نمودارها، ملاحظه می‌شود که این نمودارها به ترتیب در (۰,۰) و (۱,۰−) بر محور xها مماسند.

واضح است که خط $x = -۱$ ، محور تقارن نمودار $y = (x+۱)^{۲}$ است. بدیهی است که با تعیین محور تقارن سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ و دو نقطهٔ متقارن دیگر (نسبت به محور تقارن) می‌توان نمودار را مشخص کرد.

مثال (۳): نمودار سهمی $y = x^{۲} - ۴x + ۵$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار سهمی، ابتدا محور تقارن منحنی را تعیین می‌کنیم:

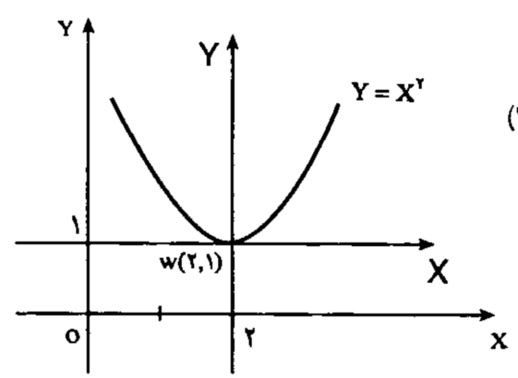
$$y = x^{۲} - ۴x + ۵ = (x^{۲} - ۴x + ۴) + ۱ = (x-۲)^{۲} + ۱;$$

$$y - ۱ = (x-۲)^{۲} \qquad (۱)$$

در این جا، با فرض $X = x - ۲$, $Y = y - ۱$:

$$Y = X^{۲} \qquad (۲)$$

بنابراین، اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ w(۲,۱) منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی $Y = X^{۲}$ را رسم کنیم، که بسیار ساده و مشخص است.



(۳)

با توجه به نمودار (۳)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

$x = ۲$ (محور تقارن) , $S(۲,۱)$ (رأس سهمی)

در این‌جا با توجه به مثال (۳)، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y = (x-\alpha)^{۲} + \beta \qquad (۱)$$

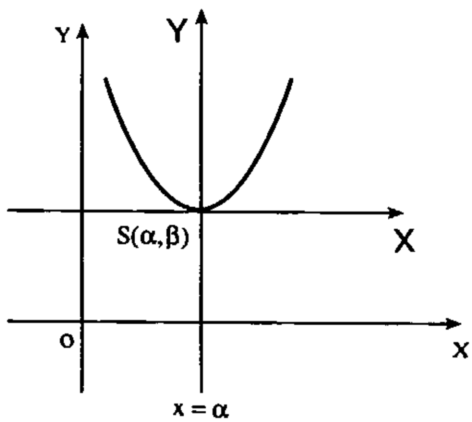
برای رسم نمودار منحنی به معادلهٔ (۱) یا $y - \beta = (x-\alpha)^{۲}$ ، فرض می‌کنیم:

$$X = x - \alpha \quad , \quad Y = y - \beta \qquad (۲)$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت ساده‌تر نوشت:

$$Y = X^{۲} \qquad (۳)$$

درنتیجه اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی به معادلهٔ (۳) را که نمودار آن مشخص است، رسم کنیم.



(۴)

با توجه به نمودار (۴)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

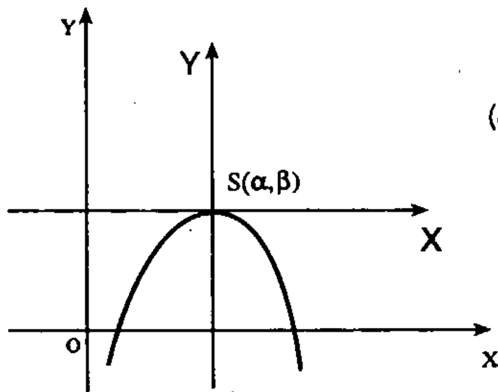
$x = \alpha$ (محور تقارن) , $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

لازم به ذکر است که رأس سهمی (S) در نمودار (۴)، از نظر عرض، کمترین مقدار را دارد. نقطهٔ S مینیمم سهمی است.

به همین ترتیب، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی:

$$y = -(x-\alpha)^{۲} + \beta$$

به‌صورت زیر است:



(۵)

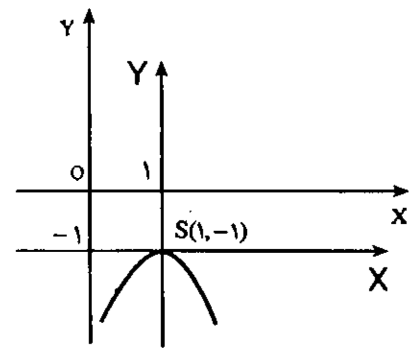
$x=\alpha$ (محور تقارن) ، $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

در نمودار (۵)، واضح است که رأس سهمی (S) از نظر عرض، بیشترین مقدار را دارد. نقطهٔ S ماکزیمم سهمی است.

مثال (۴): نمودار سهمی $y=-x^2+2x-2$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت معادلهٔ عمومی سهمی می‌نویسیم :

$$y=-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1$$
$$=-(x-1)^2-1\ ;$$
$$y+1=-(x-1)^2\ ,\ S(1,-1)$$



حال نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (1)$$

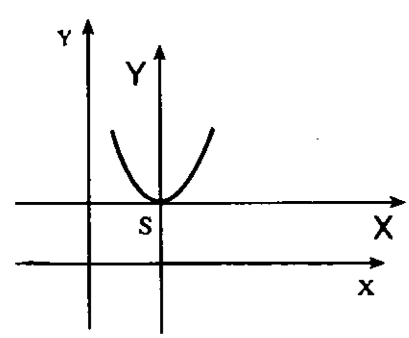
برای بررسی نمودار (۱)، دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت ۱) $a>0$:

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta\ ;\ y-\beta=a(x-\alpha)^2 \qquad (2)$$

چون $a>0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ ، مینیمم سهمی است. با فرض $X=x-\alpha$ و $Y=y-\beta$:

$$Y=aX^2 \qquad (3)$$

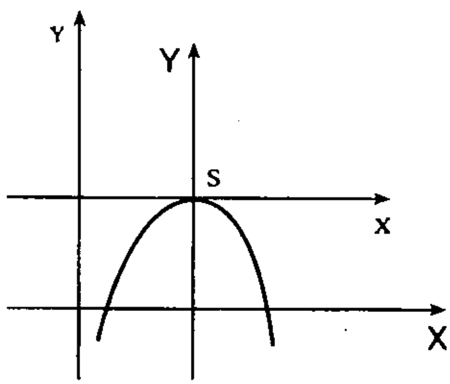


در این جا ضریب a فقط دو شاخهٔ سهمی را به هم نزدیک یا از هم دور می‌کند.

حالت ۲) $a<0$:

چون $a<0$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ ، ماکزیمم سهمی است.

نکته: برای رسم نمودار (۱) ابتدا رأس سهمی (نقطهٔ S) را تعیین می‌کنیم. سپس محور تقارن ($x=\alpha$) آن‌را تعیین و حداقل دو نقطهٔ متقارن نسبت به این خط را معیّن می‌کنیم.



در این جا با توجه به مطالب اخیر، نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$y=ax^2+bx+c \qquad (1)$$

برای بررسی سهمی به معادلهٔ (۱)، ابتدا معادلهٔ آن‌را به‌صورت استاندارد :

$$y-\beta=k(x-\alpha)^2 \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم :

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

بنابراین :

$$y+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (۳)$$

در این جا، به کمک معادلهٔ (۳)، رأس و محور تقارن سهمی به معادلهٔ (۱) را می‌نویسیم :

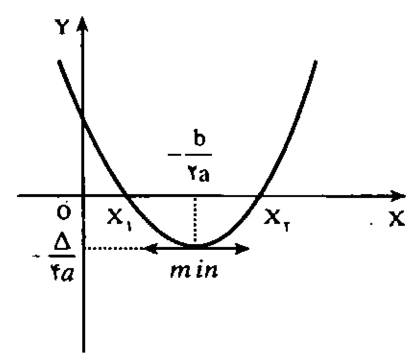
$$x=-\frac{b}{2a}\text{(محور تقارن)},\quad S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\text{(رأس سهمی)}$$

برای سادگی، عبارت b^2-4ac را به Δ نشان می‌دهیم :

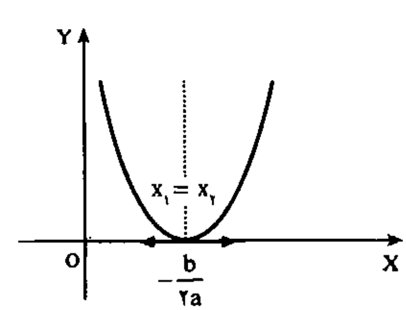
$$\Delta=b^2-4ac$$

حال برای رسم نمودار (۱) یا (۳)، باید شش حالت کلی ممکن را در نظر گرفت :

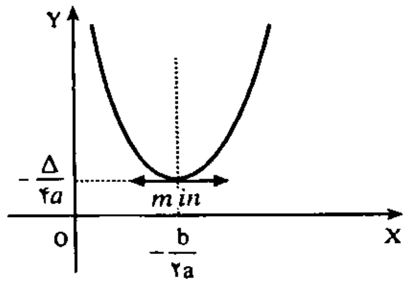
۱) $a>0$ و $\Delta>0$: در این حالت، سهمی دارای مینیمم S است و محور xها را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ، $(y=0)$ است، قطع می‌کند، و نمودار آن مانند شکل زیر است :



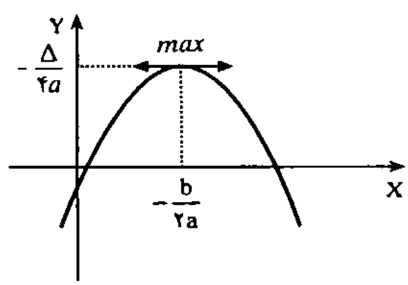
۲) $a>0$ و $\Delta=0$: در این حالت، مینیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به‌دست می‌آید و نمودار آن مانند شکل زیر است :



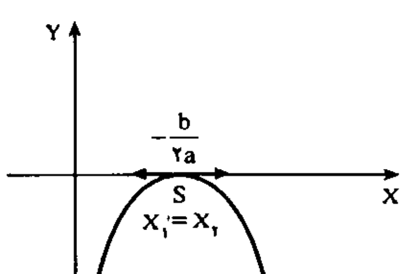
۳) $a>0$ و $\Delta<0$: در این حالت، مینیمم سهمی (S) بالای محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، و نمودار آن مانند شکل زیر است :



۴) $a<0$ و $\Delta>0$: در این حالت، سهمی دارای ماکزیمم S است و محور xها را در نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشهٔ معادلهٔ $y=0$ است، قطع می‌کند، و نمودار آن مانند شکل زیر است :

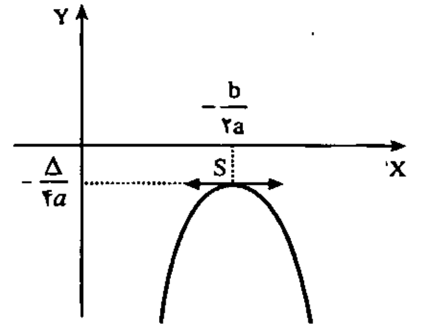


۵) $a<0$ و $\Delta=0$: در این حالت، ماکزیمم سهمی (S) برمحور xها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به‌دست می‌آید، و نمودار آن مانند شکل زیر است :



۶) $a<0$ و $\Delta<0$: در این حالت، ماکزیمم سهمی (S) پایین محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، و

نمودار آن مانند شکل زیر است :



مثال (۵): نمودار سهمی $y = x^۲ - ۳x + ۲$ را رسم کنید.

حل: چون $a = ۱ > ۰$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۸ = ۱ > ۰$، بنابراین سهمی دارای مینیمم S است :

$x = \frac{۳}{۲}$ (محور تقارن) و $S\left(\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۴}\right)$; $S\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ (رأس سهمی)

با در دست داشتن رأس سهمی و محور تقارن آن، به سادگی می‌توان نمودار سهمی مورد نظر را رسم کرد. برای دقّت بیشتر در رسم نمودار، نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را تعیین می‌کنیم :

نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها :

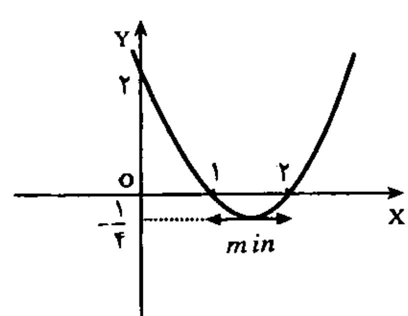
$$x = ۰ : \ y = (۰)^۲ - ۳(۰) + ۲ = ۲ \ ; \ A(۰, ۲)$$

$$y = ۰ : \ x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \ ; \ (x - ۱)(x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۱ \ ; \ x = ۲$$

نقاط برخورد سهمی با محور xها : $B(۱, ۰)$, $C(۲, ۰)$

در این‌جا با معلومات به‌دست آمده، به سادگی می‌توان نمودار سهمی را رسم کرد :



مثال (۶): نمودار سهمی $y = -۴x^۲ + ۸x - ۴$ را رسم کنید.

حل: چون $a = -۴ < ۰$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۶۴ = ۰$، بنابراین سهمی دارای ماکزیمم S است و نقطهٔ S بر محور xها مماس است ؛ یعنی معادلهٔ $y = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است :

$x = ۱$ (محور تقارن) و $S(۱, ۰)$; $S\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ (رأس سهمی)

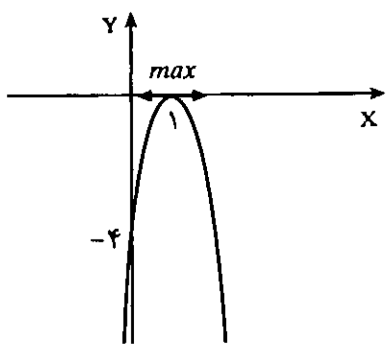
نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها :

$$x = ۰ : \ y = -۴(۰)^۲ + ۸(۰) - ۴ = -۴ \ ; \ A(۰, -۴)$$

$$y = ۰ : -۴x^۲ + ۸x - ۴ = ۰ \ ; \ -۴(x - ۱)^۲ = ۰ \ ;$$

$$x_۱ = x_۲ = ۱$$

حال با معلومات به‌دست آمده، نمودار سهمی را رسم می‌کنیم :



مثال (۷): رأس یک سهمی نقطهٔ $S(-۱, ۱)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(۱, ۲)$ است. معادلهٔ سهمی را مشخص کنید.

حل: معادلهٔ سهمی در حالت عمومی به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ است.

بنابراین :

$$S\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}\right), \ S(-۱, ۱): \begin{cases} -\frac{b}{۲a} = -۱ \\ -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a} = ۱ \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} b = ۲a \\ c - \frac{b^۲}{۴a} = ۱ \end{cases} ; \begin{cases} b^۲ = ۴a^۲ \\ c = \frac{b^۲}{۴a} + ۱ \end{cases} \Rightarrow b = ۲a \, (۱), \ c = a + ۱ \, (۲)$$

مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$A(1,2): 2 = a(1)^2 + b(1) + c \; ; \; a+b+c = 2 \qquad (۳)$$

با توجه به رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$b = 2a, c = a+1 : \; a+b+c = a+2a+a+1 = 2 \; ;$$

$$4a+1 = 2 \; ; \; 4a = 1 \; ; \; a = \frac{1}{4}$$

پس:

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{4} : \; y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}$$

(معادله مطلوب)

مثال (۸): در سهمی $y = 2x^2 - k^3x + k$، عدد k را چنان تعیین کنید که خط $x = 2$ محور تقارن آن باشد.

حل: محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$، به‌صورت زیر است:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

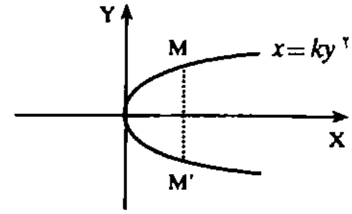
بنابراین، محور تقارن سهمی مورد نظر چنین است:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-k^3}{2(2)} = 2 \; ; \; k^3 = 8 \; ; \; \boxed{k = 2}$$

$k = 2 : \; y = 2x^2 - 8x + 2$ (معادلهٔ مطلوب)

تبصرهٔ (۱): به هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور yها باشد؛ «**سهمی قائم**» و هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور xها باشد؛ «**سهمی افقی**» گویند.

تبصرهٔ (۲): منحنی‌ها به معادله‌های $x = y^2$، $x = ky^2$، $x - \alpha = (y-\beta)^2$، $x - \alpha = -(y-\beta)^2$، $x - \alpha = k(y-\beta)^2$ و در حالت عمومی $x = ay^2 + by + c$؛ همگی یک سهمی افقی را مشخص می‌کنند، که به‌طور مثال منحنی به معادلهٔ $x = ky^2$، چنین است:



بحث و بررسی روی سهمی افقی نیز به‌طور کامل مطابق سهمی قائم است، که آن‌را به عنوان **تمرین** می‌گذاریم.

تمرین

۱ـ نمودار هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y = -x^2$

۲) $y = x^2 - 1$

۳) $y = -x^2 + 4$

۴) $y = (x-1)^2 - 1$

۵) $y = -(x+1)^2 + 1$

۶) $y = x^2 + x$

۷) $y = 4(x-1)^2$

۸) $y = 3(x+4)^2 - 2$

۹) $y = x^2 - 4x + 3$

۱۰) $y = -x^2 + x - 1$

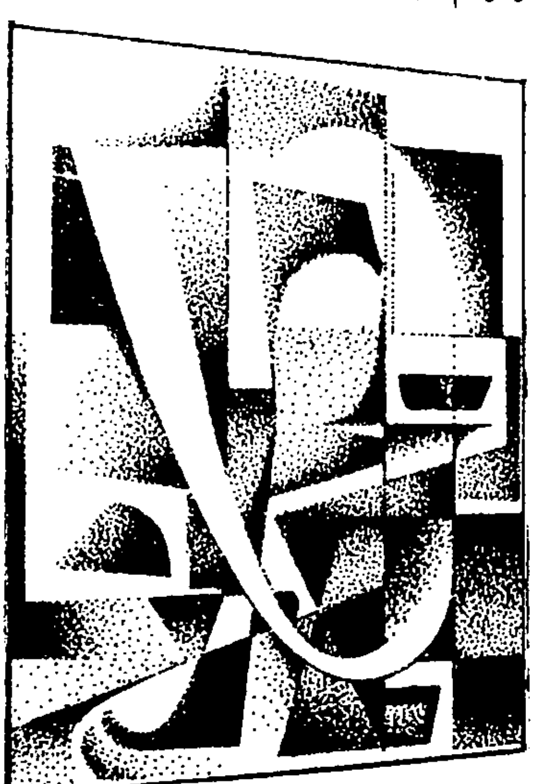
۲ـ رأس یک سهمی نقطهٔ $S(1,-2)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(-2,7)$ است. سهمی را مشخص کنید.

(جواب: $y = x^2 - 2x - 1$)

۳ـ در سهمی $y = -x^2 + mx - m^2$، عدد m را چنان تعیین کنید که خط $x = -2$، محور تقارن آن باشد.

(جواب: $m = -4$)

۴ـ رأس و محور تقارن سهمی افقی $x = ay^2 + by + c$ را تعیین کنید و به‌ازای مقادیر مختلف a و $\Delta = b^2 - 4ac$، نمودار سهمی را رسم کنید.



خانوادهٔ مسأله

هر مسألهٔ ریاضی، با مسأله های دیگری هم خانواده است. گونه ای از این هم خانوادگی، منطقی است و گونه ای از آن، پیامد دگرگونیهایی است که در ساختار هندسی مسأله یا در بیان آن پدید آمده است. آشنایی با این هر دو گونه، می تواند به یافتن راه حلّ مسأله کمک کند، و مهمتر آن که، می تواند توانمندی، ورزیدگی و آمادگی ذهنی شما را در حلّ مسأله ها افزایش دهد و در این زمینه، اطمینان خاطر را در شما پدید آورد.

خانوادهٔ منطقی مسأله

مسأله های ریاضی و قضیه های ریاضی، دارای یک ساختار منطقی اند و غیر از این که قضیه ها را برای شما ثابت کرده اند و اثبات مسأله ها را به شما واگذار کرده اند، تفاوت دیگری با هم ندارند. همانند هر قضیه، هر مسأله نیز دارای فرض و حکم است و با جابه جا کردن فرض و حکم و یا با نفی یکی یا هر دوی آنها، می توان مسأله هایی را بیان کرد که خانوادهٔ منطقی آن مسأله را تشکیل می دهند و از بین آنها، ممکن است بعضی صحیح و بعضی غلط باشند.

در مسألهٔ داده شده، اگر P فرض و Q حکم باشد، مسأله به صورت «اگر P آن گاه Q» (یعنی اگر فرض درست باشد، حکم درست است) بیان می شود و مسأله های هم خانوادهٔ منطقی آن عبارت است از :

عکس مسأله: اگر Q آن گاه P (= اگر حکم درست باشد، فرض هم درست است) ؛

عکس نقیض مسأله: اگر Q ~ آن گاه P ~ (= اگر حکم نادرست باشد، فرض نیز نادرست است) ؛

متقابل مسأله: اگر P ~ آن گاه Q ~ (= اگر فرض نادرست باشد، حکم نیز نادرست است) ؛

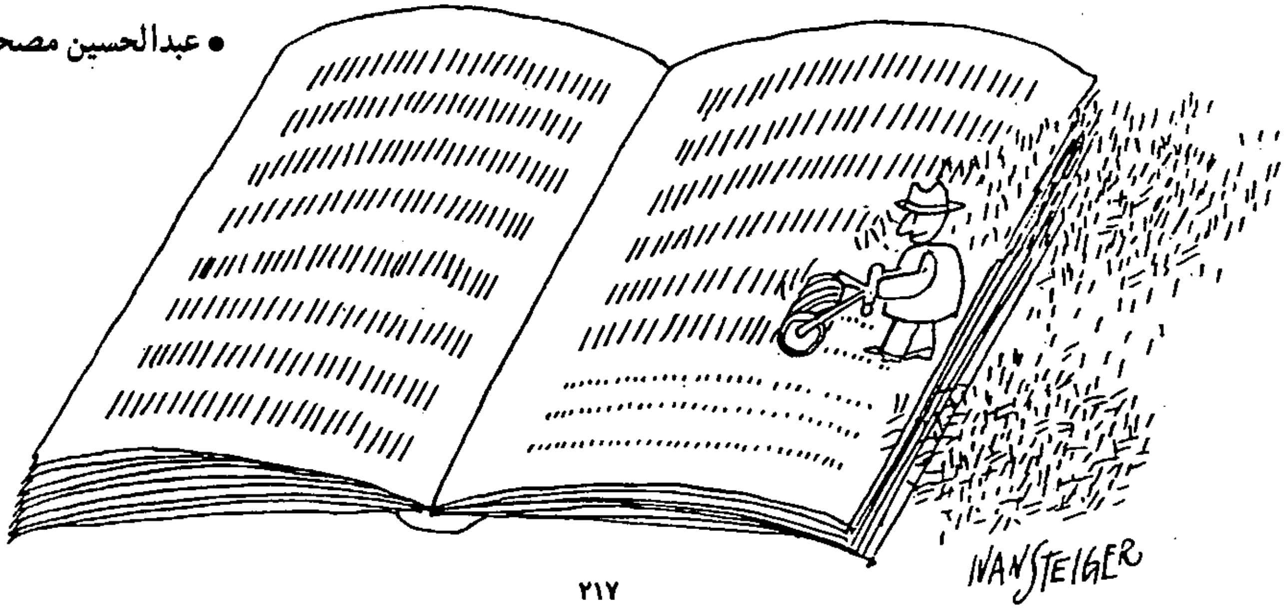
خلاف مسأله: اگر P آن گاه Q ~ یا اگر Q آن گاه P ~ (= اگر فرض درست باشد، حکم نادرست است و عکس نقیض آن).

در قضیه ها و در مسأله های ریاضی، پذیرفته می شود که فرض درست است و بر پایهٔ درستی آن، باید ثابت شود که حکم نیز درست است. اگر چنین نباشد، یعنی از درستی فرض، نتیجه شود که حکم نادرست است، آن قضیه یا مسأله، نادرست خواهد بود. با فرض این که مسألهٔ داده شده درست باشد ؛

۱) عکس مسأله ممکن است درست و ممکن است نادرست

مسألهٔ حلّ مسأله های ریاضی (۳)

● عبدالحسین مصحفی



باشد. هرگاه عکس مسأله هم درست باشد، آن مسأله به‌صورت «***اگر و تنها اگر فرض آن‌گاه حکم***» بیان می‌شود و هر کدام از فرض و حکم را ***شرط لازم و کافی*** برای دیگری می‌نامند.

۲) عکس نقیض مسأله با خود مسأله هم‌ارز است؛ یعنی هر کدام که درست باشد، دیگری نیز درست است و هر کدام که نادرست باشد، دیگری نیز نادرست است. از این‌رو، به‌جای اثبات خود مسأله، می‌توان عکس نقیض آن را ثابت کرد.

۳) متقابل مسأله، عکسِ نقیضِ عکس آن مسأله است؛ یعنی عکس مسأله و متقابل مسأله هم‌ارزند و هر کدام که درست باشد، دیگری نیز درست است. از این‌رو، متقابل مسأله، آن‌گاه درست است که مسأله به‌صورت شرط لازم و کافی بیان شده باشد.

۴) خلاف مسأله، ناهم‌ارز مسأله است؛ اگر با پذیرفتن درستی فرض مسأله، نتیجه شود که حکم مسأله نادرست است، خلاف مسأله ثابت شده و خود مسأله رد شده است. بعکس، اگر خلاف مسأله رد شود، خود مسأله ثابت شده است، که در **برهان خلف** چنین فرایندی به‌کار می‌رود.

مثال ۱: در مجموعهٔ عددهای صحیح، اگر دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، حاصل‌ضرب ab نیز بر d بخش‌پذیر است. عکس این مسأله می‌شود: اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر است، که در حالت کلی، مسأله‌ای نادرست است (در حالتهایی نادرست و در حالتهایی درست است)؛ حاصل‌ضرب ab بر خودش بخش‌پذیر است؛ اما a و b مگر در حالت ویژه، بر ab بخش‌پذیر نیستند. همچنین، ۱۲ که حاصل‌ضرب ۶ در ۲ است، بر ۴ بخش‌پذیر است؛ درصورتی که ۶ و ۲ هیچ‌کدام بر ۴ بخش‌پذیر نیستند. اما $2\times6=12$ که بر ۳ بخش‌پذیر است، عدد ۶ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

عکس نقیض مسأله می‌شود: اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر نباشد، هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر نیست، که مسأله‌ای درست است.

متقابل مسأله می‌شود: اگر هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر نباشد، حاصل‌ضرب ab نیز بر d بخش‌پذیر نیست، که در حالت کلی درست نیست. دو عدد ۲ و ۶ هیچ‌کدام بر ۴ بخش‌پذیر نیست؛ اما حاصل‌ضرب آنها بر ۴ بخش‌پذیر است.

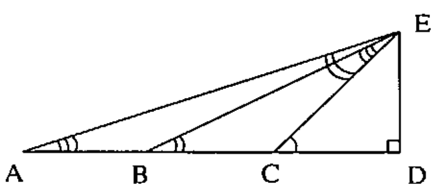
خلاف مسأله می‌شود: اگر دست‌کم یکی از دو عدد a و b بر عدد d بخش‌پذیر باشد، حاصل‌ضرب ab بر d بخش‌پذیر نیست، که مسأله‌ای نادرست است. یا این که: اگر حاصل‌ضرب ab بر d بخش‌پذیر باشد، هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر نیست، که در حالت کلی درست نیست.

یادداشت: عکس مسألهٔ مورد مثال، به‌صورت زیر بیان می‌شود و یکی از قضیه‌های بنیادی نظریهٔ اعداد است: اگر حاصل‌ضرب دو عدد a و b بر d بخش‌پذیر باشد و یکی از دو عدد a و b نسبت به d اوّل باشد، عدد دیگر بر d بخش‌پذیر است.

یادآوری: اگرچه به‌جای اثبات یک مسأله نمی‌توان عکس آن را ثابت کرد؛ اما این بدان معنا نیست که به حکم مسأله توجه نشود. در بسیاری از مسأله‌ها، توجه به حکم و بررسی آن، راه‌حل مسأله را به‌دست می‌دهد.

مثال ۲: مطابق با شکل، زاویهٔ D قائمه است و پاره‌خطهای AB، BC، CD و DE با هم برابرند. ثابت کنید:

$$\angle ECD = \angle EBD + \angle EAD$$



از این که زاویهٔ ECD زاویهٔ خارجی مثلث EBC است، نتیجه می‌گیریم:

$$\angle ECD = \angle EBD + \angle BEC$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ حکم، درمی‌یابیم که باید ثابت کنیم دو زاویهٔ BEC و EAD با هم برابرند. اگر چنین باشد، دو مثلث EAC و EBC که در زاویهٔ ECB مشترکند، با هم متشابه خواهند بود. راهنمایی می‌شویم که باید تشابه این دو مثلث را ثابت کنیم. با توجه به حالتهای کلاسیک تشابه دو مثلث، درمی‌یابیم که باید ثابت کنیم ضلعهای زاویهٔ مشترک دو مثلث، نظیر به نظیر متناسبند و لازم می‌شود اندازه‌های این ضلعها را حساب کنیم. با فرض آن که اندازهٔ DE و اندازه‌های پاره‌خطهای برابر با آن a باشد، خواهیم داشت:

$$CE = a\sqrt{2} \quad , \quad CA = 2a \quad ,$$

$$\frac{CE}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \quad , \quad \frac{AC}{CE} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad ,$$

$$\frac{CE}{BC}=\frac{AC}{CE}$$

دو مثلث ACE و BCE که در یک زاویه مشترکند و ضلعهای این زاویه، نظیر به نظیر متناسبند، با هم متشابهند و از تشابه آنها، برابری دو زاویهٔ BEC و EAC و سپس رابطهٔ حکم به‌دست می‌آید.

مثال ۳: ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای تهی باشد، دست‌کم یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است.

برای اثبات این مسأله، کافی است که مسألهٔ عکس نقیض آن را ثابت کنیم. «دست‌کم یکی از دو مجموعهٔ A و B تهی است» به این معناست که «یا A تهی است، یا B تهی است و یا A و B هر دو تهی‌اند» و نفی آن می‌شود «نه A تهی است و نه B». بنابراین، عکس نقیض مسأله می‌شود : «اگر هیچ کدام از دو مجموعهٔ A و B تهی نباشد، حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B تهی نیست».

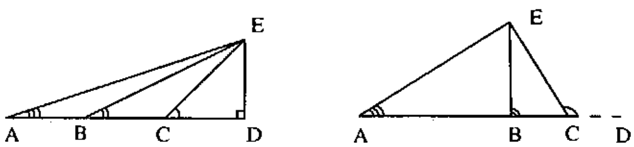
برای اثبات این مسأله هم می‌گوییم : چون A و B هیچ‌کدام تهی نیستند، دست‌کم یک عضو x متعلق به A و یک عضو y متعلق به B وجود دارد و بنا بر تعریف حاصل‌ضرب دو مجموعه، دوتایی مرتّب (x , y) عضو $A\times B$ است و این مجموعه تهی نیست. چون عکس نقیض مسأله ثابت شده، خود مسأله هم ثابت شده است.

هم‌خانواده‌های غیرمنطقی مسأله

مسأله‌های ریاضی از یکدیگر پدید می‌آیند و هر مسأله را می‌توان با دگرگونیهایی در ساختار هندسی آن، به گونه‌ای دیگر بیان کرد. همهٔ این مسأله‌ها هم‌خانواده‌اند و اگر خویشاوندی آنها شناخته شود و راه‌حلّ یکی از آنها دانسته شده باشد، از روی آن، بسادگی می‌توان به راه‌حلّ مسأله‌ای دیگر از آنها پی برد. تعدادی از این مسأله‌ها، حالتهای ویژه‌ای از یک مسألهٔ حالت کلی‌اند و چنانچه این مسأله شناخته شود، می‌توان راه‌حلّ آن را روی آن مسأله‌های حالتهای ویژه تعمیم داد. اگر هنگامی که فراغت دارید، مسأله‌های گوناگونی را که با آنها سر و کار داشته‌اید، از این دیدگاه بررسی و آنها را ریشه‌یابی کنید و به پیوندهای موجود بین زنجیره‌هایی از مسأله‌ها پی ببرید، دیدی گسترده را روی مجموعهٔ مسأله‌ها برای خود پدید می‌آورید و در روبه‌رویی با هر مسأله، بسادگی و در کمترین زمان، خواهید توانست از عهدهٔ حلّ آن برآیید.

در اوّلین برخورد، ممکن است پیوند ساختاری بین مسأله‌ها به ذهن نرسد و پنهان بماند ؛ اما با کمی ژرف‌نگری و دقت در ساختار آنها، به آن پیوند و راه‌حلّ مشترک آنها می‌توان پی برد.

مثال ۴: مسأله‌ای که در مثال ۲ بیان شد و این مسأله که «هر ضلع از مثلث قائم‌الزاویه، واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر آن ضلع بر وتر»، در ظاهر امر، به نظر نمی‌رسد که هم‌خانواده باشند ؛ درصورتی که اگر بیشتر دقت کنیم، می‌بینیم در یک ساختار مشترکند : در هر کدام از آنها، دو مثلث که یکی بخشی از دیگری است، با هم متشابهند (دو مثلث ECB و ECA) و در هر دوی آنها، زاویهٔ ECD برابر است با مجموع دو زاویهٔ EBC و EAB.

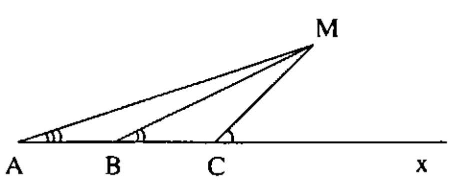


پی بردن به این وجه‌مشترک، ذهن را وامی‌دارد تا بررسی کند آیا مسأله‌ای با حالت کلی هست که این دو مسأله، حالتهای ویژهٔ آن باشند؟ اگر چنین باشد، وجه‌مشترک این مسأله‌ها باید ساختار اصلی مسألهٔ حالت کلی باشد ؛ بنابراین، مسألهٔ زیر به میان می‌آید :

سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب، روی نیم‌خط Ax جای دارند. اگر نقطهٔ M چنان باشد که :

$$\angle MCx = \angle MBx + \angle MAx$$

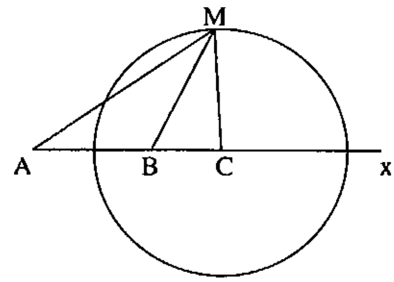
بین اندازه‌های پاره‌خطهای MC، CB و CA چه رابطه‌ای برقرار است؟



از این که زاویهٔ MCx زاویهٔ خارجی مثلث MCB است، برابری دو زاویهٔ BMC و BAM، و بنا بر آن تشابه دو مثلث MBC و MAC نتیجه می‌شود و خواهیم داشت :

$$\frac{MC}{AC}=\frac{BC}{MC}\Rightarrow \overline{MC}^{2}=AC.BC$$

پاره‌خط MC واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط AC و BC است. نقطه‌ها A، B و C که ثابت باشند، اندازه‌های AC، BC و MC نیز مقدارهای ثابتند و نقطهٔ M بر دایرهٔ به مرکز C و به شعاع $R=\sqrt{AC.BC}$ جای دارد.



بسادگی ثابت می‌شود که نظیر هر نقطهٔ M واقع بر این دایره، زاویهٔ MCx با مجموع دو زاویهٔ MBx و MAx برابر است. بنابراین، دایرهٔ به مرکز C و به شعاع R، مکان هندسی M است.

اکنون با درنظر گرفتن جاهای مختلف M روی دایره و بنابر چگونگی وضع سه نقطهٔ A، B و C، می‌توانیم مسأله‌هایی گوناگون را بیان کنیم که هر کدام حالت ویژه‌ای از این مسألهٔ حالت کلی است. همهٔ آنها هم‌خانواده‌اند و یک راه اثبات دارند.

هرگاه AB و BC برابر باشند و اندازهٔ آنها a فرض شود، اندازهٔ MC می‌شود $a\sqrt{2}$ و در این حالت، اگر M در جایی از دایره انتخاب شود که زاویهٔ MCx به اندازهٔ ۴۵ درجه باشد، عمود MH که بر Cx رسم شود، پاره‌خطهای MH و CH نیز برابر با a می‌شوند و مسألهٔ مثال ۲ را خواهیم داشت.

هرگاه M بر نقطهٔ برخورد دایرهٔ به قطر BC با دایرهٔ مکانش واقع باشد، MB بر AC عمود خواهد بود و مسألهٔ «هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویرش بر وتر» نموده خواهد شد.

هرگاه M در جایی از دایره قرار گیرد که MC برAC عمود باشد، نتیجه خواهد شد که تفاضل دو زاویهٔ B و A از مثلث MAB برابر ۹۰ درجه و این مثلث به رأس M شبه قائمه است.

و مسأله‌های دیگری که هر کدام نظیر یک موضع M روی دایره است.

مسأله آفرینی

نظیر هر مسأله، اگر مسأله‌های هم‌خانواده‌اش را بیابید و مسألهٔ حالت کلی همهٔ آنها را به‌دست آورید، با بررسی حالتهای گوناگون این مسألهٔ کلی، چه‌بسا به مسأله‌هایی دست یابید که نه‌تنها برای خود شما، بلکه برای دیگران هم تازگی داشته باشند. دستیابی به راه‌حلّ ابتکاری و زیبای یک مسأله لذتبخش و شوق‌انگیز است. اما لذتبخش‌تر از آن، دستیابی به طرح و بیان مسأله‌هایی است که تازگی داشته باشند.

تمرین ۳:

۱ـ برای امتحان عمل‌ضرب عددها، روشی به‌کار می‌رود که آن را *طرح q به q* می‌نامند؛ اگر در عمل‌ضرب عدد a در عدد b، حاصل‌ضرب برابر با P به‌دست آمده باشد، باقیماندهٔ تقسیم a بر q برابر با r، باقیماندهٔ تقسیم b بر q برابر با s، باقیماندهٔ تقسیم rs بر q برابر با t و باقیماندهٔ تقسیم P بر q برابر با u باشد، چنانچه عمل ضرب صحیح انجام گرفته باشد، دو عدد t و u با هم برابر خواهند بود. در این فرایند، قضیه‌ای به‌کار می‌رود؛ فرض و حکم و قضیه‌های هم‌خانواده منطقی آن را نام ببرید و معلوم کنید کدام درست و کدام نادرستند؟

۲ـ هرگاه A زیرمجموعهٔ B، B زیرمجموعهٔ C و C زیرمجموعهٔ A باشد، ثابت کنید سه مجموعهٔ A، B و C با هم برابرند. فرض و حکم این مسأله و مسأله‌های هم‌خانوادهٔ منطقی آن را بیان و معلوم کنید کدامها درست و کدامها نادرستند، و سرانجام، مسأله را به‌صورت صحیح آن بیان کنید.

۳ـ ثابت کنید اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به هم اوّل باشند، دو عدد $s=a+b$ و $P=ab$ نیز نسبت به هم اوّلند. این مسأله را از راه اثبات نادرستی خلاف آن ثابت کنید.

۴ـ دایرهٔ مثال ۴ را چگونه باید رسم کرد؟ به عبارت دیگر، اگر سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب، روی نیم‌خط Ax داده شده باشند و M نقطه‌ای باشد که زاویهٔ MCx با مجموع دو زاویهٔ MBx و MAx برابر باشد، دایرهٔ مکان M را باید چگونه رسم کرد؟ نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ مکان M چه وضعی دارد؟

۵ ـ دو مسألهٔ زیر را درنظر بگیرید:

مسألهٔ الف: «مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. نقطهٔ P را روی ضلع AB یا در امتداد آن، و نقطهٔ Q را روی ضلع AC یا در امتداد آن، چنان به‌دست می‌آوریم که دو پاره‌خط AP و AQ با دو ضلع AB و AC، یا هر دو هم‌جهت یا هر دو ناهم‌جهت باشند و تناسب:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}$$

برقرار باشد. ثابت کنید : ارتفاع نظیر رأس A در هر یک از دو مثلث APQ و ABC میانهٔ نظیر همان رأس در مثلث دیگر است.»

مسألهٔ ب: «در هر چهارضلعی محاطی، اگر دو قطر بر هم عمود باشند، خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر بر یک ضلع عمود شود، ضلع روبه‌رو به آن را نصف می‌کند و اگر دو ضلع بر هم عمود باشند، خطی که از نقطهٔ برخورد آنها بر یک ضلع روبه‌رو عمود شود، ضلع روبه‌روی دیگر را نصف می‌کند.»

آیا دو مسألهٔ بالا هم‌خانواده‌اند؟ کدام‌یک از آنها حالت کلی‌تر را بیان می‌کند؟

پاسخهای مسأله‌های تمرین ۲:

۱ـ یک راه‌حلّ مسأله، تجزیهٔ سه‌جمله‌ایهاست که می‌شوند :

$$\begin{cases}(a-2b)(3a-b)=8\\(a-2b)(a+4ab)=7\end{cases}$$

عامل $a-2b$ نمی‌تواند صفر باشد و از تقسیم دو برابری بر هم رابطهٔ $a=3b$ به‌دست می‌آید.

۲ـ مقدارهای داده شده برای x و y پس از ساده شدن می‌شوند :

$$x=2-\sqrt{3}\ ,\ y=2+\sqrt{3}$$

عبارت جبری $f(x,y)$ چون نسبت به x و y متقارن است، با عوض کردن x و y با هم فرق نمی‌کند و چون نسبت به x و y همگن است، همهٔ جمله‌های آن نسبت به x و y همدرجه‌اند؛ بنابراین :

$$f(x,y)=ax^2+bxy+ay^2$$

$$x=y \Rightarrow x^2(a+b+a)=0 \Rightarrow b=-2a$$

$$x=2-\sqrt{3}\ ,\ y=2+\sqrt{3} \Rightarrow 14a+b=24$$

$$\begin{cases}b=-2a\\14a+b=24\end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix}a=2\\b=-4\end{vmatrix}$$

۳ـ داریم :

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}$$

$$\left[(x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+k^2) \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \ge \frac{a^2}{3}$$

۴ـ دو طرف را تفضیل در صورت و ترکیب در مخرج می‌کنیم و پس از آن، به توان ۲ می‌رسانیم، که خواهیم داشت :

$$\frac{1-tgx}{1+tgx}=\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}$$

$$\frac{tg^2x-2tgx+1}{tg^2x+2tgx+1}=\frac{1+y}{1-y}$$

باز در صورت تفضیل و در مخرج ترکیب می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$y=\frac{2tgx}{1+tg^2x}=\sin 2x$$

۵ ـ عدد را N، رقم سمت راست آن را x و عدد بدون رقم x را y می‌گیریم :

$$N=10y+x\ ,\ N'=10^nx+y$$

$$10^nx+y=\frac{3}{2}(10y+x) \Rightarrow 28y=(2\times10^n-3)x$$

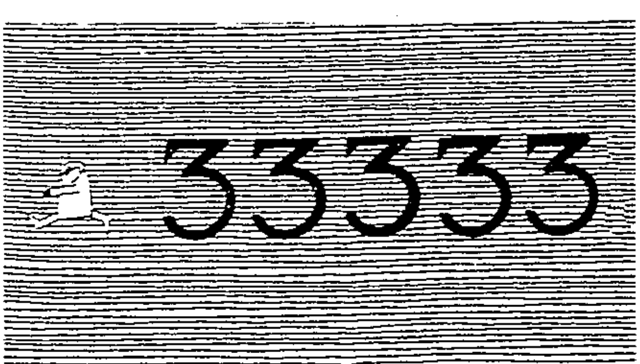
طرف اوّل مضرب ۴ و مضرب ۷، و عدد داخل پرانتز فرد است؛ پس x مضرب ۴ و کوچکترین مقدارش ۴ است و

$$7y=2\times10^n-3$$

طرف دوم مضرب ۷ است؛ پس کوچکترین مقدار n برابر ۵ و در نتیجه :

$$y=28571\ ,\ N=285714$$

۶ـ برآیند سه تبدیل، دَوَران به مرکز A و به زاویهٔ $60°$ خواهد شد.



بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آنها

● محمد صادق عسگری

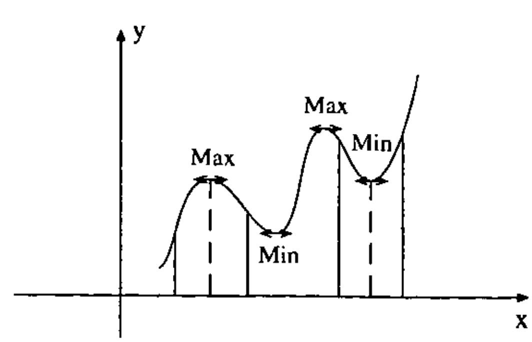


در ادامهٔ بررسی قضیه‌های پیوستگی «قضایای مقدار میانی - بولتزانو - ماکزیمم و می‌نیمم مطلق» به بررسی قضیه‌های کاربرد مشتق می‌پردازیم که عبارتند از : ۱ـ قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ۲ـ قضیهٔ رول ۳ـ قضیهٔ مقدار میانگین. بدیهی است که خواننده باید با تعریف مشتق و روشهای مشتق‌گیری، آشنایی داشته باشد.

تعریف اکسترمم نسبی توابع حقیقی

نقطه‌ای به‌طول $x = c$ از دامنهٔ تابع حقیقی f را طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) f می‌گوییم ؛ هرگاه همسایگی $(c-\delta, c+\delta)$ از نقطهٔ $x = c$ موجود باشد ؛ به‌طوری که برای هر $t \in (c-\delta, c+\delta)$ داشته باشیم $f(t) \le f(c)$ $(f(t) \ge f(c))$.

مقدار $f(c)$ را ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) تابع f می‌گویند. به‌علاوه ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع f را، اکسترمم‌های نسبی تابع f نیز می‌گویند.



قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع حقیقی

فرض کنیم تابع حقیقی f بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و در نقطه داخلی $x = c$ از این فاصله $(a < c < b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد ؛ در این صورت، اگر f در $x = c$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$.

اثبات: بنا به فرض تابع f در $x = c$ دارای ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) است. بنابراین، همسایگی $(c-\delta, c+\delta)$ وجود دارد ؛ به‌طوری که برای هر $x \in (c-\delta, c+\delta)$ داریم :

$$(*) \quad (f(x) \ge f(c))\, f(x) \le f(c)$$

ادامهٔ اثبات را برای ماکزیمم نسبی بیان می‌کنیم، برای حالت می‌نیمم نسبی به‌طورمشابه برقرار است ؛ چون f در $x = c$

مشتق‌پذیر است، بنابراین :

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ (**)$$

دو حالت ۱) $x\to c^+$ ۲) $x\to c^-$ را در نظر می‌گیریم.

۱) اگر $x\to c^+$ آن‌گاه $x\geq c$ ، بنابر (*) $f(x)\leq f(c)$

بنابراین $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ ، درنتیجه داریم :

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \text{ یا } f'(c)\leq 0$$

۲) اگر $x\to c^-$ آن گاه $x\leq c$ ، بنابر (*) $f(x)\leq f(c)$ ،

بنابراین $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ ، درنتیجه داریم :

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \text{ یا } f'(c)\geq 0$$

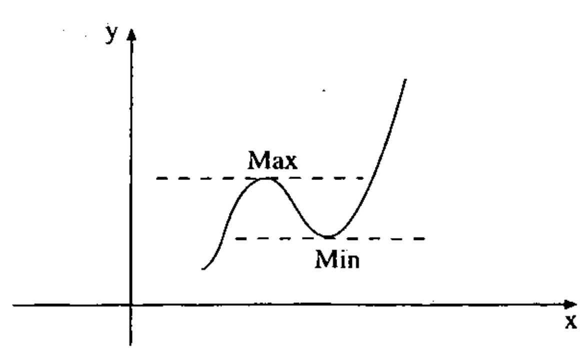
بنابر روابط (۱) و (۲) داریم : $f'(c)=0$.

تعبیر هندسی قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

اگر تابع حقیقی f در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه، یک خط مماس منحصر به‌فرد می‌توان بر نمودار تابع رسم کرد، که ضریب زاویهٔ آن، برابر با مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=c$ است ؛ یعنی :

$f'(c)=$ ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطه $x=c$

با توجه به نکتهٔ بالا، قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، می‌تواند بیان دیگری از این مطلب باشد. پس اگر تابع f در نقطهٔ $x=c$ از دامنهٔ تابع دارای اکسترمم نسبی و به‌علاوه، در این نقطه، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $f'(c)=0$ ، یعنی : ضریب زاویهٔ خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، صفر است. به‌عبارت دیگر، خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه، موازی محور طولهاست.



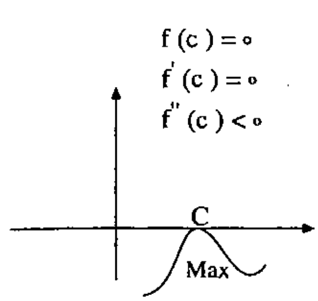
نتیجه‌های قضیه‌های ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

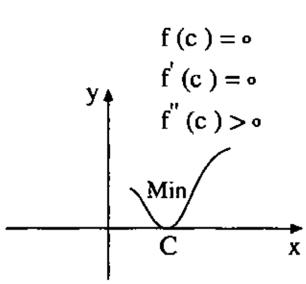
نتیجهٔ ۱: اگر تابع f در نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش دارای اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه یا f در این نقطه، مشتق‌پذیر نیست یا $f'(c)=0$.

این نتیجه، یک شرط لازم را برای طول نقاط اکسترمم نسبی بیان می‌کند ؛ زیرا تابع $f(x)=x^3$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است و به‌علاوه $f'(0)=0$ درصورتی که تابع f در $x=0$ دارای اکسترمم نسبی نیست. بنابراین، برای پیدا کردن طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f با استفاده از این نتیجه، می‌توان در دامنهٔ تابع به دنبال ریشه‌های مشتق یا نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست. این نقاط درصورتی اکسترمم‌های نسبی هستند که مشتق تابع، یعنی $f'(x)$ ، در این نقاط تغییر علامت دهد. چون در تابع $f(x)=x^3$ ، داریم $f'(x)=3x^2$ ، درنتیجه، مشتق تابع در $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد ؛ بنابراین تابع در $x=0$ اکسترمم نسبی ندارد.

نتیجهٔ ۲: اگر تابع f در نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش دارای مشتقات مرتبهٔ اوّل و دوم باشد و به‌علاوه $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$ آن‌گاه نقطهٔ $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی و اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ ، آن‌گاه نقطهٔ $x=c$ طول نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع است. در حالتی که $f''(c)=f'(c)=0$ در مورد نقطهٔ $x=c$ حکمی نمی‌توان داد.

نتیجهٔ ۳: اگر تابع f در نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش دارای مشتقات مرتبهٔ اول و دوم باشد و به‌علاوه $f(c)=f'(c)=0$ و $f''(c)<0$ ، آن گاه نمودار تابع f در $x=c$ دارای ماکزیمم نسبی و اگر $f(c)=f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ ، آن‌گاه f در این نقطه، دارای می‌نیمم نسبی است. به‌علاوه، در این دو حالت، نمودار تابع بر محور طولها مماس است.





نتیجهٔ ۴: اگر تابع کسری با ضابطهٔ $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ دارای اکسترمم نسبی و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $y_\circ=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$، به‌عبارت دیگر، مختصات نقاط اکسترمم نسبی توابع کسری، درصورتی که این توابع در این نقاط، مشتق‌پذیر باشند، در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

اثبات: بنابرقضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی داریم: $y'(x_\circ)=\circ$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^{\text{۲}}}$$

$$\Rightarrow y'(x_\circ)=\frac{f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)}{[g(x_\circ)]^{\text{۲}}}=\circ$$

$$\Rightarrow f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)=\circ$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

$$\Rightarrow y_\circ=\frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}\Rightarrow y_\circ=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

نتیجهٔ ۵: اگر تابع حقیقی با ضابطهٔ $y=\frac{ax^{\text{۲}}+bx+c}{a'x^{\text{۲}}+b'x+c'}$ در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه خط به معادله $y=y_\circ$ در این نقطه، بر نمودار تابع، مماس است، و به علاوه معادلهٔ $y_\circ=\frac{ax^{\text{۲}}+bx+c}{a'x^{\text{۲}}+b'x+c'}$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است.

بنابراین، برای محاسبهٔ اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax^{\text{۲}}+bx+c}{a'x^{\text{۲}}+b'x+c'}$ کافی است ضابطهٔ تابع را طرفین وسطین کنیم و آن را برحسب x مرتّب نماییم. سپس مبین این معادله را برابر صفر قرار دهیم. ریشه‌های حاصل از معادله $\Delta=\circ$، اکسترمم‌های نسبی تابع فوق هستند.

مثال ۱: نقاطی را بر نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{\sin x-\text{۱}}{\cos x+\text{۱}}$ در فاصلهٔ $\circ\le x\le \text{۲}\pi$ بیابید؛ به‌طوری که خط مماس در آنها، موازی محور طولها باشد.

حل: این نقاط، ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=\circ$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$y=\frac{\sin x-\text{۱}}{\cos x+\text{۱}}\Rightarrow y'=\frac{\text{۱}+\cos x-\sin x}{(\text{۱}+\cos x)^{\text{۲}}}$$

$$y'=\circ\Rightarrow \text{۱}+\cos x-\sin x=\circ$$

$$\Rightarrow \sin x-\cos x=\text{۱}\Rightarrow(\sin x-\cos x)^{\text{۲}}=\text{۱}$$

$$\Rightarrow \sin^{\text{۲}}x+\cos^{\text{۲}}x-\text{۲}\sin x\cos x=\text{۱}$$

$$\Rightarrow \text{۱}-\sin\text{۲}x=\text{۱}\Rightarrow \sin\text{۲}x=\circ$$

$$\Rightarrow \text{۲}x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{\text{۲}}\Rightarrow x=\frac{\pi}{\text{۲}}$$ ریشهٔ مورد قبول

$$\Rightarrow y(\frac{\pi}{\text{۲}})=\circ$$

درنتیجه، این تابع در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{\text{۲}}\\ \circ\end{matrix}\right.$ دارای خط مماس موازی محور طولهاست.

به‌علاوه، چون $y(\frac{\pi}{\text{۲}})=y'(\frac{\pi}{\text{۲}})=\circ$، بنابراین نمودار تابع در این نقطه، بر محور طولها مماس است.

مثال ۲: ضرایب a و b را در تابع باضابطهٔ $y=ax^{\text{۳}}+bx^{\text{۲}}+\text{۱}$ بیابید؛ به‌طوری که نمودار تابع در نقطه‌ای به‌طول $x=\text{۱}$، بر محور xها مماس باشد.

حل: برای آن که نمودار تابع در این نقطه، بر محور xها مماس باشد، باید داشته باشیم $f(\text{۱})=f'(\text{۱})=\circ$، درنتیجه:

$$\begin{cases}f(x)=ax^{\text{۳}}+bx^{\text{۲}}+\text{۱}\\ f'(x)=\text{۳}ax^{\text{۲}}+\text{۲}bx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(\text{۱})=a+b+\text{۱}=\circ\\ f'(\text{۱})=\text{۳}a+\text{۲}b=\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-\text{۱}\\ \text{۳}a+\text{۲}b=\circ\end{cases}\Rightarrow a=\text{۲}\ ,\ b=-\text{۳}$$

مثال ۳: ضرایب a و b را در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax^{\text{۲}}+bx+\text{۱}}{x+\text{۲}}$ بیابید؛ به‌طوری که نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-\text{۱}\\ \text{۱}\end{matrix}\right.$ ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل: چون تابع در $x=-\text{۱}$ مشتق‌پذیر و دارای ماکزیمم نسبی است، درنتیجه اولاً $f'(-\text{۱})=\circ$ ثانیاً مختصات نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}-\text{۱}\\ \text{۱}\end{matrix}\right.$ در ضابطه تابع صدق می‌کند؛ یعنی: $\begin{cases}f(-\text{۱})=\text{۱}\\ f'(-\text{۱})=\circ\end{cases}$

$$y=\frac{ax^{\text{۲}}+bx+\text{۱}}{x+\text{۲}}$$

$$y' = \frac{(2ax+b)(x+2)-(ax^2+bx+1)}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a-b+1}{1}=1 \\ \dfrac{(-2a+b)(1)-(a-b+1)}{1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ -2a+b-a+b-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b \\ -3a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow \ a=-1\ ,\ b=-1$$

مثال ۴: ضرایب a و b را در تابع با ضابطهٔ $y=a\sin x+b\cos x+2$ بیابید؛ به‌طوری که نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}\\ 2(1+\sqrt{3})\end{array}\right.$ می‌نیمم نسبی تابع باشد.

حل: چون تابع در $x=\frac{\pi}{3}$ مشتق‌پذیر و دارای می‌نیمم نسبی است، درنتیجه: اولاً $f'(\frac{\pi}{3})=0$ و ثانیاً مختصات نقطهٔ M در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ یعنی:

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{3})=2(1+\sqrt{3}) \\ f'(\frac{\pi}{3})=0 \end{cases}$$

$$y=a\sin x+b\cos x+2$$

$$y'=a\cos x-b\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\sin\dfrac{\pi}{3}+b\cos\dfrac{\pi}{3}+2=2(1+\sqrt{3}) \\ a\cos(\dfrac{\pi}{3})-b\sin(\dfrac{\pi}{3})=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{3}}{2}+\dfrac{b}{2}+2=2+2\sqrt{3} \\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{b\sqrt{3}}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\sqrt{3}+b=4\sqrt{3} \\ a-b\sqrt{3}=0 \end{cases} \Rightarrow a=3\ ,\ b=\sqrt{3}$$

مثال ۵: نقاطی را بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{2x-1}{x+3}$ بیابید؛ به‌طوری که خط مماس در آن نقاط، عمود بر خط به معادله $7y+x=1$ باشند.

حل: باید ضریب زاویهٔ خط مماس (m) و ضریب زاویهٔ خط (m′) در رابطهٔ $mm'=-1$ صدق کنند. بنابراین داریم:

$$\text{ضریب زاویهٔ خط مماس} = m = f'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$$

$$\text{ضریب زاویهٔ خط} = m' = -\frac{1}{7}$$

$$mm'=-1 \Rightarrow \frac{7}{(x+3)^2}\times\frac{-1}{7}=-1$$

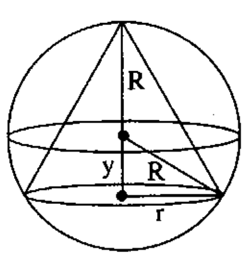
$$\Rightarrow \frac{1}{(x+3)^2}=1 \Rightarrow (x+3)^2=1$$

$$\Rightarrow (x+3)=\pm1 \Rightarrow x=-3\pm1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-4 \end{cases} \Rightarrow \ A_1\left|\begin{array}{l}-2\\-5\end{array}\right. \quad A_2\left|\begin{array}{l}-4\\9\end{array}\right.$$

مثال ۶: می‌خواهیم یک مخروط به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h را در یک کره به شعاع R محاط کنیم. شعاع r و ارتفاع h را حساب کنید؛ درصورتی که حجم مخروط ماکزیمم باشد.

حل: با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} R+y=h \\ y^2+r^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=y+R \\ r^2=R^2-y^2 \end{cases}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(R^2-y^2)(y+R)$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}(R-y)(y+R)^2$$

برای یافتن طول نقاط ماکزیمم تابع حجم، باید معادلهٔ $V'_y=0$ را حل کنیم:

$$V' = -\frac{\pi}{3}(y+R)^2 + \frac{2\pi}{3}(R-y)(y+R) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}(y+R)(-y-R+2R-2y) = 0$$

$$\Rightarrow y+R=0\ ,\ -3y+R=0$$

$\Rightarrow y=-R$ غیرقابل قبول ، $y=\frac{R}{3}$ قابل قبول

$$\Rightarrow h = y+R \Rightarrow \boxed{h=\frac{4R}{3}}$$

$$r^2 = R^2 - y^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{R^2}{9} \Rightarrow r^2 = \frac{8R^2}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}}$$

مثال ۷: ضرایب a و b را در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^2+ax+3}{x+b}$ بیابید ؛ به‌طوری که مختصات نقاط اکسترمم تابع در روابط $x_{Min}+x_{Max}=2$ و $y_{Max}+y_{Min}=8$ صدق کنند.

حل: بنابر قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، طول نقاط اکسترمم نسبی، تابع ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ می‌باشند ؛ بنابراین داریم :

$$f(x) = \frac{x^2+ax+3}{x+b}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+a)(x+b)-(x^2+ax+3)}{(x+b)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow (2x+a)(x+b)-x^2-ax-3=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2bx+\cancel{ax}+ab-x^2-\cancel{ax}-3=0$$

$$\Rightarrow x^2+2bx+ab-3=0$$

$$\Rightarrow x_{Max}+x_{Min} = -2b = 2 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

برای محاسبهٔ اکسترمم‌های نسبی این تابع داریم :

$$y=\frac{x^2+ax+3}{x+b} \Rightarrow y=\frac{x^2+ax+3}{x-1}$$

$$\Rightarrow y(x-1) = x^2+ax+3 \Rightarrow yx-y = x^2+ax+3$$

$$\Rightarrow x^2+(a-y)x+y+3=0 \Rightarrow \Delta=0$$

$$\Rightarrow \Delta = (a-y)^2 - 4(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow a^2+y^2-2ay-4y-12=0$$

$$\Rightarrow y^2-(2a+4)y-12=0$$

$$\Rightarrow y_{Max}+y_{Min} = 2a+4 = 8$$

$$\Rightarrow 2a+4=8 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

مثال ۸: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=xLnx+1$ را بیابید.

حل: ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم :

$$y = xLnx+1 \Rightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$$

$$y' = Lnx + x\times\frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1+Lnx$$

$$y'=0 \Rightarrow 1+Lnx=0 \Rightarrow Lnx=-1$$

$$\Rightarrow x=e^{-1} \Rightarrow x=\frac{1}{e} \qquad M\left|\begin{matrix}\frac{1}{e}\\ -\frac{1}{e}\end{matrix}\right.$$

برای آن‌که ماکزیمم یا می‌نیمم بودن نقطهٔ M را بررسی کنیم، با استفاده از نتیجهٔ (۲)، داریم :

$$y''=\frac{1}{x} \qquad y''(\frac{1}{e}) = e>0$$

چون $y'(\frac{1}{e})=0$ و $y''(\frac{1}{e})>0$ ، بنابراین نقطهٔ M، نقطهٔ می‌نیمم نسبی این تابع است.

مثال ۹: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=x|x+2|+1$ را بیابید.

حل: دامنهٔ تابع برابر است با $D=\mathbb{R}$. برای تعیین اکسترمم‌های نسبی این تابع، ابتدا تابع را برحسب ضابطه‌هایش می‌نویسیم :

$$f(x) = x|x+2|+1 = \begin{cases} x(x+2)+1 & x\geq -2 \\ -x(x+2)+1 & x<-2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & x\geq -2 \\ -x^2-2x+1 & x<-2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x>-2 \\ -2x-2 & x<-2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست ؛ بنابراین با تعیین علامت مشتق، اکسترمم‌های نسبی را می‌یابیم :

قابل قبول

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x>-2\ , & 2x+2=0 \Rightarrow x=-1 \\ x<-2 & -2x-2=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول

$$f'_{+}(-2)=-2\ ,\ f'_{-}(-2)=2$$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
y'		+	‖	−	0	+	
y		↗	1 Max	↘	0 Min	↗	

بنابراین : $\text{Max}\begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix}$ و $\text{Min}\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$

مثال ۱۰: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ را بیابید :

حل: دامنهٔ تابع برابر با $D_f=\mathbb{R}$ با استفاده از نتیجهٔ (۵) اکسترمم‌های نسبی را می‌یابیم :

$$y=\frac{x}{x^2-x+1} \Rightarrow yx^2-yx+y=x$$

$$\Rightarrow yx^2-(y+1)x+y=0 \rightarrow \Delta=0$$

$$(y+1)^2-4y^2=0 \Rightarrow (y+1)^2=4y^2$$

$$\Rightarrow y+1=\pm 2y$$

$$\Rightarrow y+1=2y \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$\Rightarrow y+1=-2y \Rightarrow 3y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}$$

$$y_{Max}=1 \quad , \quad y_{Min}=-\frac{1}{3}$$

مثال ۱۱: اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ را بیابید.

حل: دامنهٔ تابع برابر $D_f=\mathbb{R}$ برای محاسبه اکسترمم‌های نسبی داریم :

$$y'=2ax+b \Rightarrow y'=0$$

$$\Rightarrow 2ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\ ,\ y=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

چون تابع از مرتبهٔ اوّل و دوم مشتق‌پذیر است و به علاوه $y''=2a$ ، درنتیجه، نقطهٔ $M\begin{vmatrix}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{vmatrix}$ اکسترمم نسبی تابع است. اگر $a>0$ نقطهٔ M، نقطهٔ می‌نیمم نسبی، و اگر $a<0$ ، آن‌گاه M، نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

مثال ۱۲: مقدار a را چنان بیابید که بین عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x^2-1}{ax^2-4x}$ رابطهٔ $y_1=4y_2$ برقرار باشد.

حل: بنابر نتیجهٔ (۵) برای تعیین عرضهای نقاط اکسترمم نسبی تابع داریم :

$$y=\frac{x^2-1}{ax^2-4x} \Rightarrow ayx^2-4yx=x^2-1$$

$$\Rightarrow (ay-1)x^2-4yx+1=0 \Rightarrow \Delta'=0$$

$$\Rightarrow \Delta'=4y^2-(ay-1)=0 \Rightarrow 4y^2-ay+1=0$$

y_1 و y_2 ریشه‌های معادلهٔ بالا هستند. می‌خواهیم رابطهٔ $y_1=4y_2$ بین y_1 و y_2 برقرار باشد، بنابراین داریم :

$$y_1=4y_2 \Rightarrow y_1+y_2=5y_2 \Rightarrow 5y_2=\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2=\frac{a}{20}}$$

$$4y^2-ay+1=0 \Rightarrow \frac{4a^2}{400}-\frac{a^2}{20}+1=0$$

$$\frac{a^2}{100}-\frac{a^2}{20}+1=0 \Rightarrow \frac{a^2-5a^2}{100}=-1 \Rightarrow -4a^2=-100$$

$$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=\pm 5}$$

(ادامه دارد)



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۲۴)

از: 100 Great problems of Elementary Mathematics

● ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

مسأله بیلیارد «الحسن»

محاط کردن مثلث متساوی‌الساقینی که ساقهایش، از دو نقطهٔ معلوم داخل یک دایره می‌گذرند، در آن دایره.

این مسأله از ریاضیدان مسلمان **ابوعلی الحسن بن الحسن بن الهیثم** (۹۶۵ ـ ۱۰۳۹ میلادی) است، که نامش توسط مترجمان کتاب نورشناسی «optics» وی به صورت الحسن ترجمه شده است. مسألهٔ فوق در کتاب مزبور، دارای صورت زیر است:

« بر آینهٔ کروی مقعری نقطه‌ای را بیابید که پرتو نورانی آینده از نقطه‌ای معلوم، باید بر آن بخورد تا به نقطهٔ معلوم دیگری منعکس شود.»

این مسأله را می‌توان به صورتهای گوناگون دیگری نیز طرح کرد؛ به عنوان مثال: *« بر یک میز بیلیارد دایره شکل، دو توپ موجود است؛ چگونه باید به یکی از آنها ضربه بزنیم تا پس از برخورد به لبهٔ میز و بازگشت، به توپ دیگر برخورد کند؟»* یا *« بر پیرامون دایره‌ای، نقطه‌ای را بیابید که مجموع فاصله‌هایش از دو نقطهٔ معلوم داخل آن دایره، برابر می‌نیمم (یا ماکزیمم) ی‌باشد.»*

پس از الحسن، گروه کاملی از ریاضیدانان به این مسأله پرداختند که از این قبیلند: **هویگنس** «Huygens»، **بارو** «Barrow»، **هوپیتال** «de L'Hôpital»، **ریکاتی** «Riccati» و **کولته** «Quéletet».

حل: فرض می‌کنیم دایرهٔ مفروض R، مرکزش M، شعاعش r، نقاط مفروض P و p باشند، و M مبدأ مختصات قائم xy ی‌باشد که در آن، P و p دارای مختصات $A|B$ و $a|b$ اند.

اگر OS و Os، که از P و p می‌گذرند، ساقهای مثلث OSs مورد جست‌وجو باشد، زاویه‌های ϕ و φ ای، که این ساقها با شعاع OM می‌سازند، باید برابر باشند.

اگر زاویه‌هایی را که خطوط PO، MO و pO با محور xها می‌سازند، با A، μ و λ نمایش دهیم، آن‌گاه، از یک طرف:

$$\phi = A - \mu \quad , \quad \varphi = \mu - \lambda$$

یا

$$\tan\phi = \frac{\tan A - \tan\mu}{1 + \tan\mu \tan A} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{\tan\mu - \tan\lambda}{1 + \tan\mu \tan\lambda}$$

در حالی که، از طرف دیگر، اگر $x|y$ مختصات O باشند:

$$\tan A=\frac{y-B}{x-A}\ ,\ \tan\mu=\frac{y}{x}\ ,\ \tan\lambda=\frac{y-b}{x-a}$$

و در نتیجه، از آن‌جا که $\tan\phi=\tan\varphi$:

$$\frac{\dfrac{y-B}{x-A}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\,\dfrac{y-B}{x-A}}=\frac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{y-b}{x-a}}{1+\dfrac{y}{x}\,\dfrac{y-b}{x-a}}$$

یا سرانجام، اگر قرار دهیم :

$$Ab+Ba=H\ ,\quad Aa-Bb=K\ ,$$
$$A+a=h\ ,\quad B+b=k$$

آن‌گاه :

$$H(x^2-y^2)-2Kxy+(x^2+y^2)[hy-kx]=0$$

از آن‌جا که نقطهٔ $O(x|y)$ باید روی دایرهٔ R قرار داشته باشد، نتیجه می‌شود که معادلهٔ دایره، یعنی :

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (۱)$$

در این مرحله کاربرد دارد و شرطمان به صورت زیر درمی‌آید :

$$H(x^2-y^2)-2kxy+r^2[hy-kx]=0 \qquad (۲)$$

از آن‌جا که معادلهٔ (۲) نمایشگر یک هذلولی است، شرطمان صورت زیر را به خود می‌گیرد :

نقطهٔ O مورد نظر، نقطهٔ تقاطع دایرهٔ (۱) با هذلولی (۲) است.

از آن‌جا که، در حالت کلی، در مورد دایره و هذلولی، چهار نقطهٔ تقاطع موجود است، در حالت عمومی برای مسأله‌مان، چهار جواب موجود است.

در این مورد، حالت خاصی که در آن C و c، فاصله‌های نقاط P و p از مرکز M، برابرند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این حالت، به‌طور طبیعی عمودمنصف Pp را به عنوان محور xها اختیار می‌کنیم، و در این صورت داریم :

$$A=a,\ B=-b,\ H=0,\ K=c^2,\ h=2a,\ k=0$$

و، بنا به (۲) :

$$-2c^2xy+2ar^2y=0$$

این معادله توسط هریک از شرایط زیر برقرار است :

$$y=0 \quad (۳) \qquad \text{و} \qquad x=a\frac{r^2}{c^2} \quad (۴)$$

از (۳) رابطهٔ متناظر $x=\pm r$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، نقاط تقاطع R با محور xها شرط مربوط به نقطهٔ Oای را که در جست‌وجوی آنیم، برقرار می‌کند.

از (۴) نتیجه می‌شود که :

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{r^2}{x}$$

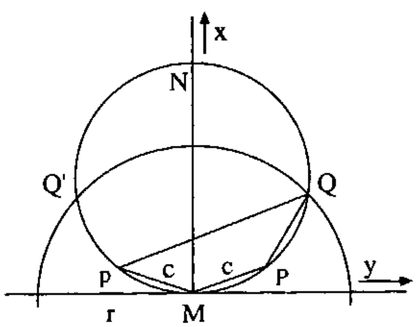
اکنون اگر از M دایرهٔ τ ای را رسم کنیم که قطر آن $MN=d=c^2/a$ بر محور xها قرار دارد، و اگر $Q(X|Y)$ نقطهٔ تقاطع این دایره با R باشد، از آن‌جا که MNQ مثلثی قائم‌الزاویه است، نتیجه می‌گیریم که :

$$MQ^2=MN.X \ \text{یا}\ r^2=dX$$

اما، از آن‌جا که $r^2/x=d$، به‌دست می‌آوریم :

$$X=x$$

در نتیجه، نقاط تقاطع دایره‌های R و τ نیز شرط مربوط به نقطهٔ Oی مورد نظر را برآورده می‌کنند.



شکل ۱

برای موجود شدن این نقاط تقاطع، باید $r<d$ یا $c^2>ar$ باشد. فرض می‌کنیم این شرط برقرار است.

چهارضلعی MPpQی واقع در دایرهٔ τ چهارضلعی‌ای محاطی است، و بنابراین، بنا به قضیهٔ بطلمیوس، باید مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای مقابل آن، برابر حاصل‌ضرب قطرهای آن باشد :

$$PQ.Mp+pQ.MP=MQ.Pp$$

یا

$$(PQ+pQ)c=2br \qquad (۵)$$

$MP.pQ'$، به ازای هر نقطهٔ دیگر Q' از R، محاطی نیست، و بنابراین مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای مقابل آن، باید بزرگتر از حاصل‌ضرب قطرهای آن باشد :

$$(PQ' + pQ')c > 2br \qquad (6)$$

از (۵) و (۶) به‌دست می‌آوریم :

$$PQ + pQ < PQ' + pQ'$$

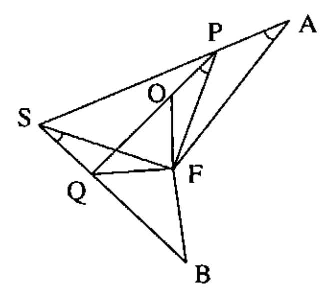
مسألهٔ : « *بر دایره‌ای مفروض، نقطه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌هایش از دو نقطهٔ معلوم واقع بر این دایره و به فاصلهٔ برابر از نقطهٔ وسط این دایره، می‌نیمم باشد.* »، دارای جواب جالب زیر است :

نقطهٔ مورد جست‌وجو، نقطهٔ تقاطع دایرهٔ مفروض با دایره‌ای است که از دو نقطهٔ معلوم و مرکز دایرهٔ مفروض می‌گذرد.

تبصره: «الحسن» در رابطه با مسألهٔ فوق، مسألهٔ زیر را نیز حل کرد :

« *چگونه به توپی واقع در یک میز بیلیارد دایره شکل، ضربه وارد کنیم که پس از دوبار برخورد با لبهٔ میز، به‌جای اوّلش بازگردد؟* »

حل: فرض می‌کنیم میز بیلیارد دارای شعاع r و مرکز M باشد. همچنین فرض می‌کنیم موقعیت اوّلیهٔ توپ، نقطهٔ P باشد، بنابراین $MP = c$ معلوم است. فرض می‌کنیم توپ مورد بحث، ابتدا در نقطهٔ U به دایره برخورد و امتداد PM را در F به زاویهٔ قائمه قطع کند ؛ سپس در V با دایره برخورد و از آن‌جا به P بازگشت کند. در این صورت : UM و VM نیمسازهای مثلث PUV اند. قرار می‌دهیم :



شکل ۲

$$MF = x, \; FU = y, \; UP = z$$

با استفاده از قضیهٔ نیمسازها در مثلث FUP :

$$y/z = x/c$$

و بنا به قضیهٔ فیثاغورس :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad z^2 = y^2 + (x+c)^2$$

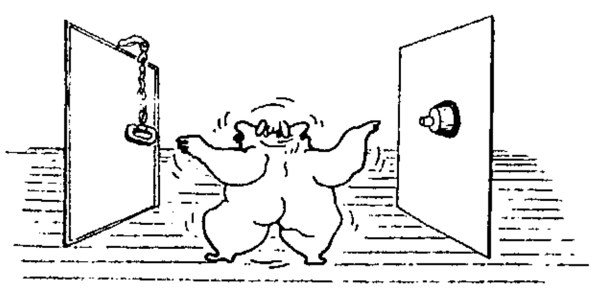
اگر y و z را از این سه معادله حذف کنیم، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را برای مجهول x به‌دست می‌آوریم :

$$2cx^2 + r^2x = cr^2$$

از این معادله، x بسادگی قابل رسم است.



تفریح اندیشه ٤



مهرداد در انتخاب یکی از دو شرکتی که به او پیشنهاد کار داده بودند تردید داشت. اولی سالانه ۳۶۰۰۰ ریال حقوق به اضافهٔ ۲۰۰۰ ریال افزایش حقوق در هر شش ماه را پیشنهاد می‌کند، و دومی سالانه ۳۶۰۰۰ ریال حقوق به اضافه ۸۰۰۰ ریال اضافه حقوق در هر سال. مهرداد پس از آنکه خوب فکر می‌کند پیشنهاد اولی را می‌پذیرد. چرا؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

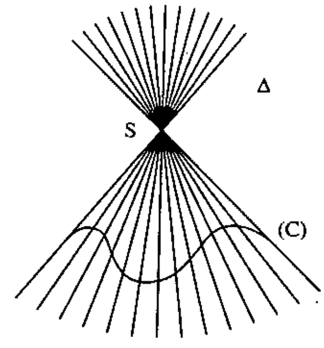
● محمد هاشم رستمی

مکان هندسی

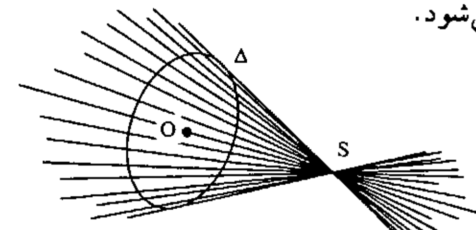
(قسمت شانزدهم)

مقطعهای مخروطی

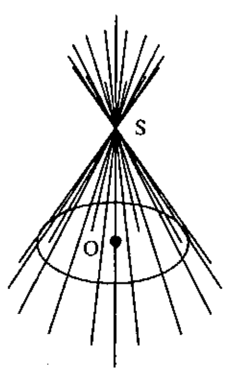
سطح مخروطی. اگر خط Δ چنان تغییر مکان دهد که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و بر منحنی ثابت (C) مماس باشد، سطحی به وجود می‌آید که آن را سطح مخروطی می‌نامند. نقطهٔ S رأس، منحنی (C) قاعده و خط Δ مولد سطح مخروطی نامیده می‌شوند.



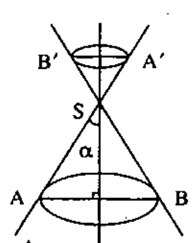
اگر قاعدهٔ سطح مخروطی دایره باشد، سطح مخروطی مستدیر نامیده می‌شود.



اگر در سطح مخروطی مستدیر عمودی که از رأس بر قاعده فرود می‌آید، از مرکز دایره بگذرد، سطح مخروطی را «دوّار» می‌نامند. در این حالت، این خط عمود را محور سطح مخروطی دوّار می‌نامند.



سطح مخروطی دوّار را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف نمود: دو خط راست Δ و D متقاطع در نقطهٔ S را در نظر می‌گیریم.



اگر خط D ثابت بماند و خط Δ حول خط D، چنان دوران نماید که همواره از نقطهٔ ثابت S بگذرد و با خط D، زاویهٔ ثابتی مانند α بسازد، سطحی به وجود می‌آورد که آن را سطح مخروطی دوّار می‌نامند. نقطهٔ S رأس، خط Δ مولد و خط D محور سطح

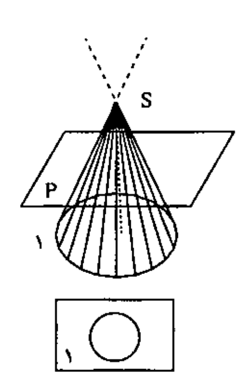
مخروطی دوّار نامیده می‌شوند.

چون خط Δ محدود نیست، سطح مخروطی در دو طرف S به وجود می‌آید که هر جزء را که در یک طرف رأس باشد، یک دامنهٔ سطح مخروطی می‌نامند.

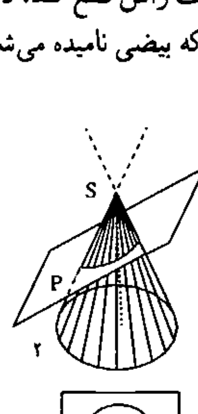
مخروط. اگر قاعدهٔ سطح مخروطی، مسطح و بسته باشد، بخشی از سطح مخروطی که بین رأس و قاعدهٔ آن محصور است، مخروط می‌نامند. بدیهی است در صورتی که سطح مخروطی مستدیر یا دوّار باشد، مخروط نیز بترتیب، مستدیر یا دوّار خواهد بود.

فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی دوّار. اگر صفحهٔ P از نقطهٔ S رأس سطح مخروطی دوّار به مولد Δ و محور نگذرد، فصل مشترکش با این سطح مخروطی دوّار، به یکی از صورتهای زیر است :

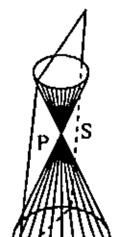
الف. صفحهٔ P بر خط D محور سطح مخروطی عمود باشد در این صورت منحنی مقطع، دایره است.



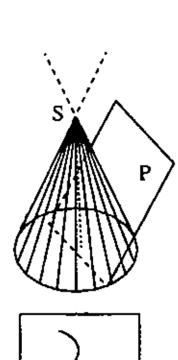
ب. صفحهٔ P بر محور عمود نباشد ؛ امّا تمام مولدهای سطح مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند، در این صورت مقطع، منحنی مسدودی است که بیضی نامیده می‌شود.



پ. صفحهٔ P برخی از مولدها را در یک طرف رأس و برخی دیگر را در طرف دیگر آن قطع کند، یا به بیان دیگر، صفحهٔ هر دو دامنهٔ سطح مخروطی را تلاقی نماید. در این صورت، مقطع، منحنی است که از دو شاخهٔ متمایز و نامسدود تشکیل می‌شود که به آن هذلولی می‌گویند.

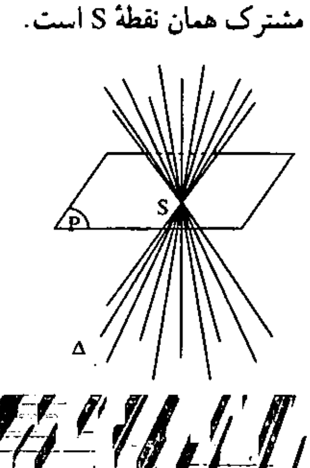


ت. صفحهٔ P با یکی از مولدهای سطح مخروطی موازی باشد. در این صورت، مقطع، منحنی نامسدودی است که سهمی نامیده می‌شود.



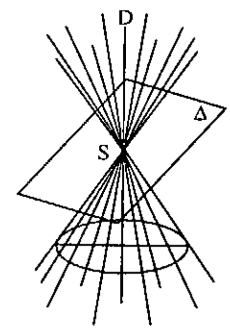
حالتهای ویژه. اگر صفحهٔ P بر نقطهٔ S رأس مخروطی دوّار بگذرد، فصل مشترک آن با سطح مخروطی دوّار به یکی از صورتهای زیر است :

۱. اگر صفحهٔ P **فقط** شامل نقطهٔ S باشد (بر هیچ یک از مولدها نگذرد)، فصل مشترک همان نقطهٔ S است.

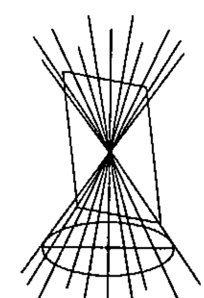


این حالت را حالت خاص دایره می‌نامند.

۲. اگر صفحهٔ P شامل تنها یک مولد سطح مخروطی دوّار باشد، مقطع یک خط راست است که صفحه در طول همین خط راست بر سطح مخروطی مماس است. این حالت را، حالت خاص سهمی می‌نامند.



۳. اگر صفحه شامل دو مولد سطح مخروطی دوّار باشد، فصل مشترک دو خط متقاطع است (همان دو مولد). این حالت را، حالت خاص هذلولی می‌نامند.



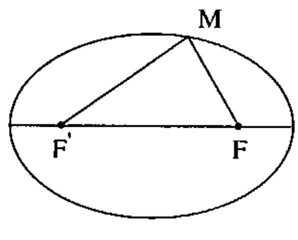
مقطعهای مخروطی. دایره، بیضی، هذلولی و سهمی را که فصل مشترک یک صفحه با یک سطح مخروطی دوّار (در حالتهای مختلف) می‌باشند، مقطعهای مخروطی می‌نامند که در حالتهای ویژه به نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع تبدیل می‌شوند.

بیضی. بیضی مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. دو نقطهٔ ثابت را کانونهای بیضی نامیده و معمولاً به F و F' نشان می‌دهند. مقدار ثابت را عدد ثابت بیضی نامیده و به ۲a نشان می‌دهند.

فاصلهٔ بین دو کانون را که عدد ثابتی است، فاصلهٔ کانونی بیضی می‌نامند و به ۲c نمایش می‌دهند.

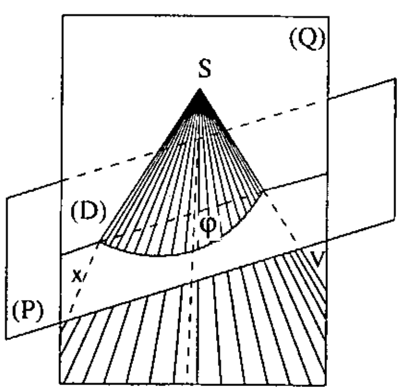
اگر M نقطه‌ای واقع بر بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a باشد، داریم:

$$MF + MF' = 2a$$



قضیهٔ داندلن. اگر صفحه‌ای همهٔ مولدهای سطح مخروطی دوّاری را در یک طرف رأس قطع کند، مقطع آن با سطح مخروطی دوّار یک بیضی است.

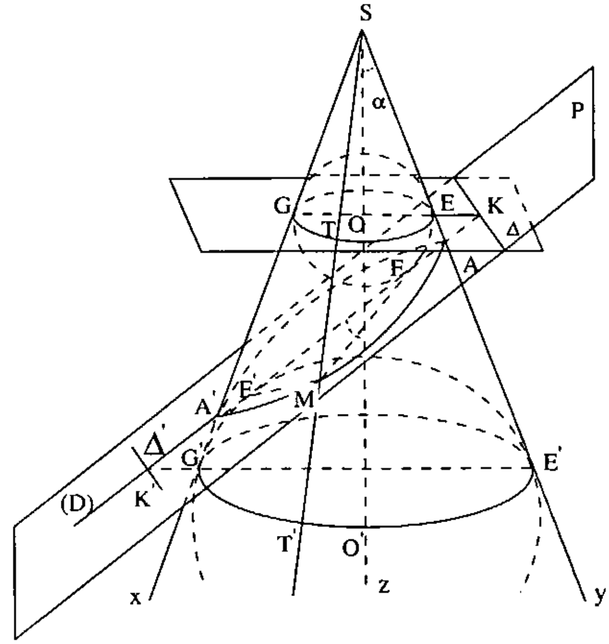
اثبات به روش هندسی. سطح مخروطی دوّار به رأس S و محور D، و صفحهٔ P را که همهٔ مولدهای سطح مخروطی را در یک طرف S قطع کرده است، در نظر می‌گیریم.



نخست صفحهٔ Q را چنان بر محور سطح مخروطی دوّار مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ قاطع P عمود باشد و آن را صفحهٔ شکل می‌نامیم. سپس برای ساده کردن اثبات این قضیه، سطح مخروطی و صفحهٔ قاطع را بر صفحهٔ شکل تصویر می‌کنیم. تصویر صفحهٔ P بر صفحهٔ شکل و مقطع آن با صفحهٔ مذکور، خطی مانند D ، و تصویر سطح مخروطی دوّار بر صفحهٔ شکل و فصل مشترکش با آن صفحه، زاویهٔ xSy خواهد بود. چون صفحهٔ P تمام مولدها را در یک طرف رأس S قطع کرده است، خط D دو ضلع زاویهٔ xSy را در یک طرف رأس S قطع می‌کند. (شکل)

زاویهٔ بین خط D و محور مسطح مخروطی دوّار که آن را با φ نشان می‌دهیم، زاویهٔ محور با صفحهٔ قاطع است. اگر α

زاویهٔ مولد با محور سطح مخروطی دوّار باشد، چون صفحهٔ قاطع در یک طرف S قرار دارد و عمود بر محور نیست، $\alpha < \varphi < 90^\circ$ است.



نقطه‌های برخورد خط D با Sy و Sx را به ترتیب، A و A′ می‌نامیم. دایره‌های محاطی درونی و محاطی خارجی مماس بر ضلع AA′ از مثلث SAA′ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی درونی (O) با ضلعهای SA، AA′ و SA′ را به ترتیب، E، F و G و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی بیرونی (O′) با ضلعهای Sy، AA′ و Sx را بترتیب، E′ ، F′ و G′ می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم که مقطع یک بیضی است که A و A′ رأسهای محور بزرگ و F و F′ دو کانون آن هستند. زاویهٔ xSy و دایره‌های O و O′ را در حول محور SZ یک دور دوران می‌دهیم ؛ از دوران دایره‌های محاطی درونی و برونی، دو کره به وجود می‌آیند که به ترتیب، در F و F′ بر صفحهٔ قاطع و در طول دو دایره به قطرهای EG و E′G′ بر سطح مخروطی مماسند. حال اگر M یک نقطهٔ دلخواه از منحنی مقطع باشد، باید ثابت کنیم که :

$MF + MF' = AA'$

اگر نصف محیط مثلث SAA′ را P بنامیم، داریم :

$FA = AE = P - SA'$

و : $F'A' = A'G' = P - SA'$

پس : $FA = F'A'$ و $AF' = AE'$

بنابراین از یک طرف :

$AF + AF' = A'F' + AF' = AA'$

و از طرف دیگر :

$AF + AF' = AE + AE' = EE'$

پس : $EE' = AA'$

چون M در صفحهٔ قاطع است، MF مماس بر کرهٔ O و MF′ مماس بر کرهٔ O′ است ؛ و چون M روی سطح مخروطی است مولد SM بر کره‌های O و O′ مماس است (T و T′ نقطه‌های تماس، روی دایره‌های تماس واقعند).

پس : $MF = MT$

و : $MF' = MT'$

یعنی : $MF + MF' = MT + MT' = TT'$

و چون تمام مولدهای مخروط ناقص، واقع بین دو دایرهٔ تماس، با هم برابرند، $TT' = EE' = AA'$ ؛ یعنی :

$MF + MF' = AA'$

و با فرض $AA' = 2a$ ، خواهیم داشت :

$MF + MF' = 2a$

معمّاهایی با ماهیت ریاضی

(قسمت اوّل)

● هوشنگ شرقی

در ریاضیات و بخصوص ریاضیات نوین، همواره با مسأله‌هایی روبه‌رو بوده‌ایم که از آنها به‌عنوان ساختمانهای غیرعادی یاد می‌شود. مسائلی در محدودهٔ این ساختمانها قرار دارند که به هیچ یک از گروه‌های کلاسیک ریاضی (جبر، آنالیز، ترکیبیات، هندسه و...) تعلّق ندارند یا لااقل به‌طور مستقیم به آنها مربوط نمی‌باشند و در نظر اول، نمی‌توان تشخیص داد که به کدام مبحث ریاضی تعلّق دارند. در مثالهایی که در این گفتار می‌آوریم، خواننده، این موضوع را به روشنی مشاهده می‌کند و زیبایی خیره‌کنندهٔ این مسائل را که در همین شناوری آنها نهفته است، درک می‌کند. مثلاً چه‌قدر زیباست که یک مسألهٔ ریاضی که به نظر می‌رسد ماهیتی جبری دارد، به شیوه‌ای هندسی حل شود. در این جا ما تلاش کرده‌ایم مثالهای خود را به‌گونه‌ای طبقه‌بندی کنیم که مثالهای هر گروه، به نوعی، با یکی از مباحث کلاسیک ریاضی مربوط باشد (هر چند به ظاهر چنین به نظر نیاید) و این کار را با مسأله‌هایی آغاز می‌کنیم که به بحث استقرای ریاضی مربوط می‌شوند. فرض بر این است که خواننده با اصل استقرای ریاضی که در کتابهای مختلف و از جمله کتاب جبر و احتمال سوّم ریاضی، و ریاضی گسسته دورهٔ پیش‌دانشگاهی و سایر کتابهای کمک درسی فراوان مورد بحث قرار گرفته است، آشنایی کافی دارد. پیش از شروع مثالها، اکیداً توصیه می‌کنیم، خواننده پیش از خواندن راه حلّ خود، روی مسأله، تدبیر کافی نماید که در این صورت، زیبایی مسأله‌ها را بهتر درک خواهد کرد.



حل مسأله‌هایی به کمک اصل استقرای ریاضی

مثال ۱: در یک جزیرهٔ دور افتاده و در دل آب و به دور از تمدن بشری، مردمان قبیلهٔ «تروگالیا» زندگی آرام خود را ادامه می‌دادند. در این نوع، زندگی بدوی این مردم، هیچ گونه وسیلهٔ ارتباط کلامی یا اشاره‌ای با هم نداشته و حتی آیینه‌ای هم ندارند که چهرهٔ خود را در آن ببینند، و تنها و تنها رئیس قبیله است که با زبان خاصّ خود که همهٔ افراد آن را می‌فهمند، می‌تواند برای افراد قبیله صحبت کند و دستورهای خود را که حتماً باید اجرا شود، به آنها ابلاغ نماید و این کار، هر روز صبح، یک بار در میدان اجتماعات عمومی قبیله انجام می‌شود، که در آن همه حاضر می‌شوند. آن روز صبح، رئیس قبیله با چهره‌ای برافروخته، روبه همهٔ افراد کرد و گفت: «در بین شما عده‌ای هستند که روی پیشانی خود، علامتی دارند، اینها فوری بروند و خودکشی کنند!» یک ماه بعد، جمعی از افراد خودکشی کردند. آنها چند نفر بودند و از کجا پی به این که روی پیشانی خود علامتی دارند، بردند؟ باز هم تکرار می‌شود که آنها هیچ وسیله‌ای برای دیدن چهرهٔ خود (اعم از آیینه، آب شفّاف یا ...) ندارند و هیچ نوع ارتباط زبانی یا اشاره‌ای هم با هم ندارند و با لمس کردن هم نمی‌توانند پی به وجود علامت روی پیشانی خود برند. و باز توصیه می‌کنیم، پیش از آن که وسوسه شوید، پاسخ را بخوانید و خوب به راه حلّ آن بیندیشید. در این صورت، به پیچیدگی معمّا بیشتر پی می‌برید.

***

پاسخ: شاید به‌طور مستقیم به نظر نیاید؛ ولی مسأله، ماهیّتی استقرایی دارد. فرض کنید، تنها یک نفر در قبیله بر پیشانی خود، علامت داشته باشد، در این صورت، او با مشاهدهٔ سایر افراد که روی پیشانی خود علامت ندارند، فوری درمی‌یابد که تنها خودش روی پیشانی علامت دارد و همان روز اوّل، خودکشی می‌کند. اما اگر در قبیله دو نفر بر پیشانی علامت داشته باشند، هر یک از آنها در بین جمع، یک نفر را دارای علامت می‌بیند و با اتّکا به استدلال قبلی، می‌فهمد که اگر همان یک نفر دارای علامت باشد، باید روز حکم، خودکشی کند و لذا یک روز صبر می‌کند و چون پس از یک روز، متوجه عدم خودکشی آن نفر می‌شود، درمی‌یابد که خود نیز بر پیشانی علامت دارد و روز دوم، هر دو، همزمان خودکشی می‌کنند. لازم به ذکر است که در این‌جا سایر افراد دو نفر را می‌بینند که بر پیشانی علامت دارند و بیشتر (در قسمت بعدی می‌بینیم که دو روز) صبر می‌کنند. به همین ترتیب، اگر سه نفر بر پیشانی علامت داشته باشند، هر یک از آنها، می‌بینند که دو نفر بر پیشانی خود علامت دارند و مطابق استدلال قبل، اگر همین دو نفر علامت داشته باشند، باید روز دوم خودکشی نمایند، و چون روز سوم فرا رسید و هر سه نفر دیدند که هیچ کدام خودکشی نکرده‌اند، همه همزمان در روز سوم خودکشی می‌کنند. نکتهٔ جالب در این مسأله، تقارن دیدگاه همهٔ افراد دارای علامت می‌باشد که احساس مشترکی را به آنها القا می‌کند و همین، برای سایر افراد نیز صادق می‌باشد.

حدس استقرایی چه می‌گوید؟ «اگر n نفر در قبیله، دارای علامتی بر پیشانی خود باشند، باید روز nام خودکشی کنند.»

اکنون این حدس را به استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم:

درستی گزاره برای $n=1$ را قبلاً ثابت کرده‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم گزاره برای $n=k$ درست باشد؛ یعنی اگر k نفر دارای علامت بر پیشانی خود باشند، روز kام خودکشی کنند، درستی گزاره برای $n=k+1$ نیز بسادگی اثبات می‌گردد و گذر استقرایی انجام می‌شود. فرض کنیم: $k+1$ نفر در پیشانی خود علامت داشته باشند، هر یک از آنها چه می‌بینند؟ k نفر را که بر پیشانی علامت دارند و طبق فرض استقرا باید روز kام خودکشی کنند. (اگر فقط همین k نفر علامت داشته باشند) پس k روز صبر می‌کنند و چون روز $k+1$ام فرا رسد، همه همزمان می‌فهمند که خودشان نیز علامت دارند و همان روز، همگی به یقین رسیده و خودکشی می‌کنند.

با توجه به حکم استقرای فوق، روشن است که وقتی این افراد روز سی‌ام خودکشی می‌کنند، باید سی نفر بوده باشند.

اینک یک سؤال بامزه از شما می‌کنیم: اگر این افراد، از دستور رئیس سرپیچی کنند و خودکشی نکنند، چه اتفاقی می‌افتد؟!

مثال ۲: هر چند حق داشتید که بپرسید افراد قبیلهٔ مثال ۱ که این‌قدر فهیم هستند و توانایی استدلال استقرایی را دارند، چرا از حداقل لوازم تمدن بی‌بهره‌اند؛ ولی نباید غافل بود که تبعیت آنها از دستور نابخردانه رئیس خود، مبنی بر خودکشی بی‌دلیل، نشانهٔ دوری آنها از تمدن انسانی است، اینک مثالی دیگر داریم از افرادی که به نوع دیگری از تمدن انسانی بدورند و به جای خودکشی، به دیگرکشی دست می‌زنند:

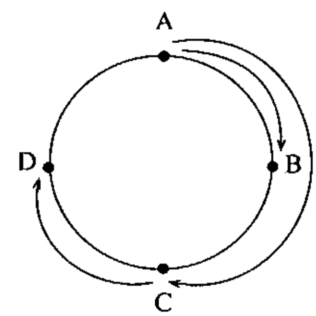
به تعداد ۴۰۹۶ نفر دور یک دایره ایستاده‌اند و همزمان، هر یک به سمت نفر بعدیِ خود (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) تیراندازی می‌کند. بدیهی است که نفر اوّل، نفر دوم را می‌کشد و نفر سوّم، نفر چهارم را و... سپس همین روال تکرار می‌شود.

بگویید آخرین فردی که زنده می‌ماند، چندمین نفر است؟ (نسبت به اوّلین نفری که تیراندازی کرده است.)

***

پاسخ: همان نفر اوّل

ـ بسادگی درمی‌یابیم که $۲^{۱۲} = ۴۰۹۶$ ، اینک فرض می‌کنیم که این افراد، دو نفر بودند (A و B) بدیهی است که اگر A اوّل شلیک کند، B می‌میرد و A زنده می‌ماند. اگر این افراد ۴ نفر باشند، (A و B و C و D) مطابق دیاگرام زیر، اوّل A شلیک کرده و B می‌میرد، سپس C شلیک کرده و D می‌میرد، و حالا نوبت A است که با شلیک خود، C را از بین برده و خود زنده می‌ماند.



اگر عدهٔ این افراد، هشت نفر باشند نیز، ابتدا نفرات دوم، چهارم، ششم و هشتم می‌میرند، آن‌گاه، نفرات سوّم و هفتم، و دست آخر، نفر پنجم توسط نفر اوّل به قتل می‌رسد (زیرا آخرین نوبت شلیک، متعلق به A می‌باشد) و به این ترتیب، باز هم A زنده می‌ماند.

حدس استقرایی: اگر ۲^n نفر دور یک دایره ایستاده و به ترتیب فوق، به هم شلیک کنند، آخرین نفر که زنده می‌ماند، اوّلین نفری است که شلیک کرده است.

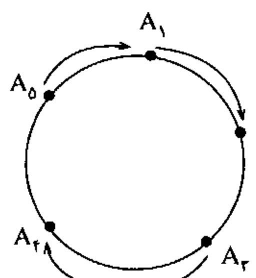
اثبات: برای $n = ۱$ قبلاً استدلال شده است. اگر حکم برای $n = k$ درست باشد ؛ یعنی اگر عدهٔ افراد ۲^k باشد، نفر اوّل زنده بماند، ثابت می‌کنیم برای $n = k + ۱$ هم درست است.

یعنی اگر عدهٔ افراد $۲^{k+۱}$ نفر باشد، باز هم همان نفر اوّل زنده می‌ماند.

استدلال ساده است، $۲^{k+۱} = ۲ \times ۲^k$ ، بنابراین وقتی نفر اوّل شلیک می‌کند، نیمی از افراد که در ردیفهای زوج ایستاده‌اند، همگی می‌میرند و عدّهٔ افراد به ۲^k نفر کاهش می‌یابد و نوبت شلیک نیز به همان نفر اوّل می‌رسد. اینک ۲^k نفر می‌مانند و طبق فرض استقرا، با شروع دوبارهٔ شلیک، همان نفر اوّل زنده خواهد ماند.

مطابق حکم استقرایی فوق، اگر عدهٔ افراد ۴۰۹۶ نفر باشد، همان اوّلین نفر که شلیک کرده، زنده خواهد ماند.

اینک به طرح مسأله‌ای دیگر در همین راستا می‌پردازیم. اگر عدهٔ افراد ۲^n نباشد، کدام فرد زنده می‌ماند. با مثالهای مختلف، سعی کنید نتیجه‌های به‌دست آمده را کنار هم گذاشته و حدس بزنید، مثلاً اگر عدهٔ افراد پنج نفر باشد، روشن است که مطابق دیاگرام زیر، نفر سوم زنده خواهد ماند. ($A_۱$ ابتدا شلیک کرده است) و اگر عدهٔ افراد، ۷ نفر باشد، نفر هفتم و چنانچه عده افراد ۱۰ نفر باشد، در آخر، نفر پنجم باقی می‌ماند (با رسم نمودار تحقیق کنید) و اگر عدهٔ افراد ۱۳ نفر باشد، نفر هفتم زنده می‌ماند.



حدس استقرایی: اگر N نفر دور دایره‌ای ایستاده و به طریق پیش که گفته شد، به هم تیراندازی کنند، در آخر، نفر ردیف kام زنده می‌ماند ؛ به‌طوری که اگر عدد N در مبنای ۲ به‌صورت $N = (a_n a_{n-۱} \ldots a_۱ a_۲)_۲$ نوشته شود، عدد k در مبنای ۲ به صورت $k = (a.a_n a_{n-۱} \ldots a_۱)_۲$ نوشته می‌شود ؛ یعنی برای یافتن شمارهٔ شخصی که زنده می‌ماند، باید عدهٔ افراد را به مبنای ۲ برد و، آخرین رقم سمت چپ را به راست انتقال داد. عدد حاصل، معرّف شمارهٔ شخصی است که زنده می‌ماند. به‌عنوان مثال، وقتی $N = ۱۷$ باشد، خواهیم داشت :

$$N = (۱۰۰۰۱)_۲ \Rightarrow k = (۰۰۰۱۱)_۲ = ۳$$

یعنی نفر سوّم زنده می‌ماند.

برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه و اثبات رابطهٔ قبل می‌توانید به مقاله‌ای که ترجمه‌ای است از خانم «شادی رستمی» به نام «مسائل بازگشتی»، مندرج در شمارهٔ اوّل «فصلنامهٔ المپیاد»، نشریهٔ مرکز المپیاد علمی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش پاییز ۱۳۷۳ رجوع کنید.

مثال ۳: در یک پادگان ۱۰,۰۰۰ سرباز و افسر و درجه‌دار مشغول خدمت هستند. سنّ این افراد، همگی بین ۲۱ و ۴۱ سال می‌باشد. مجموع سنین این افراد، چه عددی می‌تواند باشد؟ روشن

است که حداکثر این عدد، ۴۱۰۰۰۰ می‌باشد و می‌نیمم آن ۲۱۰,۰۰۰ است.

سؤال ما این است: کدام عدد طبیعی بین این دو عدد، نمی‌تواند عدد مجموع سنین این نظامیان باشد؟

***

پاسخ سؤال به نظر قدری مشکل می‌آید و در واقع، با استفاده از نمادگذاری جبری، به این مسأله تبدیل می‌شود: معادلهٔ سیّالهٔ خطی $21x + 22x_2 + ... + 41x_{21} = n$ به‌ازای کدام عدد طبیعی $210,000 \le n \le 410,000$ دارای جواب نمی‌باشد؟ ممکن است پاسخگویی به این سؤال، با شیوه‌های معمول، در نظریهٔ اعداد دشوار باشد؛ ولی با استفاده از استقرای ریاضی، حلّ مسأله آسانتر می‌شود. در واقع، با استقرا ثابت می‌کنیم که این معادله، به ازای جمیع مقادیر طبیعی n، به قسمی که $n \ge 210,000$ دارای جواب می‌باشد.

به ازای $n = 210,000$ درستی گزاره بدیهی است؛ زیرا با اختیار کردن $x_1 = 10,000$ و $x_2 = x_3 = ... = x_{21} = 0$ یک جواب قابل قبول به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم: حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم به‌ازای $n = k + 1$ نیز صحیح است. اگر معادلهٔ $21x + 22x + ... + 41x_{21} = k$ دارای یک دسته جواب باشد، آن‌گاه روشن است که:

$$21x_1 + 22x_2 + ... + 41x_{21} + 1 = k + 1$$

حال اگر حتی یکی از x_i ها به ازای $1 \le i \le 20$ مخالف صفر باشد، آن‌گاه این عدد ۱ را به یکی از ضرایب عددی همان x_i اضافه نموده و از ضرایب آن، یک واحد کم می‌کنیم؛ یعنی:

$$1 + ax_i = a(x_i - 1) + (a + 1)$$

به عنوان مثال:

$$1 + 25x_5 = 26 + (x_5 - 1)25$$

مفهوم این کار، یعنی این‌که اگر حتی یک نظامی ۲۵ ساله در جمع باشد، آن یک سال اضافه را به او داده و با حذف او، یک نظامی ۲۶ ساله جایگزین می‌کنیم. با روش فوق ثابت می‌شود که به هر حال، یک دسته جواب قابل قبول برای معادله به ازای $n = k + 1$ وجود دارد. اگر هم همهٔ ضرایب x_i از $i = 1$ تا $i = 20$ صفر باشد (یعنی همهٔ پادگان از افراد ۴۱ ساله تشکیل شده باشد)، در آن صورت، آن یک سال اضافه را به یکی از افراد ۴۱ ساله اضافه کرده و او را حذف و دو نفر ۲۱ ساله اضافه می‌کنیم.

یعنی:

$$41x_{21} + 1 = (x_{21} - 1)41 + 2 \times 21$$

که باز هم یک دسته جواب قابل قبول به‌دست می‌آید و حکم استقرا ثابت می‌شود.

اینک در انتهای این فصل، تعدادی مثال برای کار فکری مستقل شما مطرح می‌شود. تلاش کنید با تعمّق و تدّبر روی این مثالها، الگوی استقرایی آنها را کشف کرده و با استقرای ریاضی، آنها را حل کنید. مثالها، از آسان به مشکل ردیف شده‌اند.

تمرین ۱: تعداد 3^{100} سکهٔ مختلف داریم که به لحاظ ظاهری، به‌طور کامل مشابه و یکسان می‌باشند و به هیچ وجه تمایزی ندارند و یکی از آنها، از بقیه سنگینتر می‌باشد. حداّکثر، چند بار لازم است که از یک ترازوی دو کفّه‌ای استفاده شود، تا سکهٔ سنگینتر پیدا شود؟

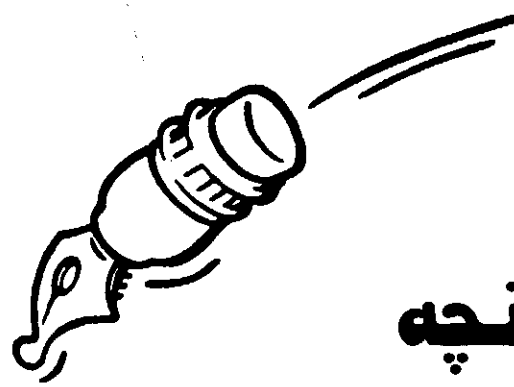
تمرین ۲: در یک کشور، ۱۳۷۷ شهر با ۲۷۵۳ جادهٔ یکطرفه، به یکدیگر مربوطند و بدون نقض قانون، حرکت در جاده‌های یکطرفه، می‌توان از شهری به شهر دیگر و از طریق این جاده‌ها حرکت کرد. ثابت کنید که همیشه جاده‌ای هست که با بستن آن، باز هم این امکان حفظ می‌شود.

تمرین ۳: در یک کشور، تعدادی شهر، ساخته شده و این شهرها هنوز با جاده‌های یکطرفه یا دوطرفه، به هم مربوط نشده‌اند. ثابت کنید که همیشه می‌توان آنها را با جاده‌های یکطرفه و دوطرفه، طوری به هم مربوط کرد که هر سه شهر دلخواه از این شهرها را که انتخاب کنیم، تعداد شهرهایی که از هر یک از آنها به طور مستقیم می‌توانیم به آنها مسافرت کنیم، سه عدد مختلف باشد.

تمرین ۴: ۲۰۰ نفر در یک مسابقهٔ شطرنج شرکت کرده‌اند. در ضمن، هر دو نفر از آنها بیش از یک دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت کنید، اگر بدانیم هیچ سه نفری وجود ندارند که با هم سه بار بازی کرده باشند، آن‌گاه تعداد دورهای بازی بیش از ۱۰,۰۰۰ دور نیست.

تمرین ۵: در کشوری، تعدادی شهر ـ که بیش از دوتاست ـ وجود دارد که قرار است با جاده‌های یکطرفه به هم مربوط شوند. ثابت کنید که می‌توان جاده‌ها را طوری کشید که از هر شهر، بتوان به هر شهر دیگر و حداکثر با دو مسافرت بین شهری، سفر کرد.

تمرین ۶: ثابت کنید، هر مربع دلخواه را می‌توان با برشهای مناسب، به قطعه‌هایی تبدیل کرد که با پهلوی هم قرار دادن این قطعه‌ها، ۱۳۷۷ مربع دیگر درست شود.



آنچه از دوست رسد ...

با اهداء سلام، خدمت همهٔ دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان

دوستان گرامی، هر روز نامه‌های پرمحتوا و مقاله‌ها و مسأله‌های شما به دستمان می‌رسد، از خداوند بزرگ سپاسگزاریم که توفیق خدمت به شما دانش‌پژوهان را به ما ارزانی داشته است. هیأت تحریریهٔ مجله، پس از مطالعه، بحث و تبادل نظر پیرامون نامه‌های ارسالی شما عزیزان، دربارهٔ موضوعهای زیر، اتفاق نظر داشتند :

۱ـ در شمارهٔ ۲۷ مجلّه، پرسشهای چهارگزینه‌ای مربوط به درسهای ریاضی نیمسال اوّل با کلید آورده شود و حلّ تشریحی آنها را در شمارهٔ ۲۸ می‌آوریم.

۲ـ در شمارهٔ ۲۸ مجلّه، پرسشهای چهارگزینه‌ای مربوط به درسهای ریاضی نیمسال دوم را با حلّ تشریحی می‌آوریم.

۳ـ از این به بعد در هر شمارهٔ مجلّه علاوه بر مسائل برای حل، پرسشهای چهارگزینه‌ای نیز آورده شود.

اسامی تعدادی از خوانندگان مجلّهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : نعیم یوسفی‌فرد (قائم‌شهر)، فرهاد اعلی فرد (اصفهان)، حامد اولاد غفاری (تبریز) ، داود خجسته (سالکویه) ، محمود نوری (گنبدکاوس)، جواد روحی (مشهد مقدس)، حنیف احمدی (رشت)، همکارمحترم آقای ابوالفضل شریعتی (اصفهان)، احمد عباس‌پور تربتی (تهران)، فرزاد هانی‌نژاد (تهران)، آرمین جعفری‌یگانه (کرج)، صادق میرشکاریان (شهربابک)، نیما پورجلالی (بابل)، اولاد عفاری و سیّدهاشمی (تبریز)، روزبه فاضل (تهران) ، بهزاد کاظمی (اهواز)، یاشار حبیب‌یار (زنجان)، همکار محترم آقای غلامرضا خسروجردی (سبزوار)، علی مشکین‌قلم (تبریز)، محمدحسین الاردبیلی (تبریز) و خانمها رعنا آهک‌چی (سلمان‌شهر) ، نسیبه نصیری (خوی)، آسیه جعفری (بجنورد).

از همگی شما برای ارسال مقاله‌های درسی و کمک‌درسی، مسأله،تست با حل تشریحی سپاسگزاریم، در صورت امکان از مقاله‌ها و مسأله‌های ارسالی شما عزیزان، پس از تصویب در هیأت تحریریه، استفاده خواهیم کرد.

پاسخ برخی از اشکالات شما عزیزان را یادآور می‌شویم :

آقای امیرحسین قدم‌السلطانی (مشهد مقدس)، حلّ درست مسأله‌هایی را که فرستاده‌اید، می‌توانید در جلدهای اوّل و دوم دایرةالمعارف هندسه، تألیف آقای محمدهاشم رستمی، از انتشارات مدرسه، ملاحظه کنید.

آقای امین صوری (اصفهان) مسأله‌های ارسالی شما به دستمان رسید، ان‌شاءا... مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مورد مسأله‌ای که اشکال دارید به جلد اوّل دایرةالمعارف هندسه، تألیف آقای محمدهاشم رستمی از انتشارات مدرسه مراجعه کنید.

آقای ابوالقاسم عباسی (نجف‌آباد)، شما در راه‌حلتان از قضیهٔ «دو خط عمود بر یک خط با یکدیگر موازیند» استفاده کرده‌اید، که این مطلب، نتیجه‌ای از اصل توازی اقلیدس است. برای اطلاع

بیشتر از این مطلب و کارهای انجام شده برای اثبات اصل توازی به کتاب هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، تألیف گرینبرگ مراجعه کنید.

آقای مهرداد کیائی (تبریز)، برای به دست آوردن معادلهٔ عمود مشترک دو خط به معادله‌های :

$$D: x-۲=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z+۱}{-۳} \quad , \quad D': \frac{x}{-۲}=y-۲=z-۴$$

راه حلّ ساده‌تری وجود دارد که در زیر آمده است :

$$M\in D\begin{vmatrix} t+۲ \\ ۲t+۲ \\ -۳t-۱ \end{vmatrix} \quad , \quad M'\in D'\begin{vmatrix} -۲t' \\ t'+۲ \\ t'+۴ \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M'M}=\begin{vmatrix} t+۲+۲t' \\ ۲t+۲-t'-۲ \\ -۳t-۱-t'-۴ \end{vmatrix} , \quad L=\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -۳ \end{vmatrix} , \quad L'=\begin{vmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M'M}\perp D \Rightarrow t+۲t'+۲+۴t-۲t'+۹t+۳t'+۱۵=۰$$

$$\overrightarrow{M'M}\perp D' \Rightarrow -۲t-۴t'-۴+۲t-t'-۳t-t'-۵=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t=-۱ \\ t'=-۱ \end{cases} ; \quad M\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{vmatrix} , \quad M'\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$$

معادلهٔ عمود مشترک $M'M: \frac{x-۱}{-۱}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۲}{-۱}$

★ ★ ★

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۵

از بین عزیزان دانش‌آموز که مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۵ را کامل حل کرده‌اند، حل آقای علیرضا قزلسفلو از شهرستان مینودشت را انتخاب کرده‌ایم که به دلیل خط بسیار زیبای ایشان عیناً متن ارسالی را به چاپ می‌رسانیم (با تشکر از نامبرده).

بسمه تعالی — مورخ: ۱۳۷۷/۲/۱۸

با عرض سلام و خسته نباشید خدمت دست اندرکاران و هیأت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان اینجانب به شرح زیر جواب مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۲۵ را به اطلاع می‌رساند.

۱ـ ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم دهگانش زوج و رقم یکانش ۶ باشد مربع کامل نیست.

حل: از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

اگر هر عدد طبیعی که مربع باشد و رقم یکان آن ۶ باشد، آنگاه رقم یکان جذر آن ۴ یا ۶ خواهد بود، زیرا رقم یکان مربع این دو عدد ۶ می‌باشد. در اینجا چون بحث صورت مسأله بر روی ارقام یکان و دهگان آن است بدون آنکه به کلیت مسأله اشکالی وارد شود، ما نیز فقط دو رقم سمت راست جذر یعنی عدد مورد نظر را در نظر می‌گیریم. حال مسأله را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

الف ـ اگر رقم یکان آن ۴ باشد: دو رقم سمت راست عدد مورد نظر : $\overline{a6}$

دو رقم سمت راست جذر عدد مورد نظر : $\overline{b4}$

حال باید با مربع کردن عدد $\overline{b4}$ با در نظر گرفتن دو رقم سمت راست حاصل، باید عدد $\overline{a6}$ بدست آید داریم:

$$\overline{b4}^۲=(۱۰b+۴)^۲=۱۰۰b^۲+۸۰b+۱۶=۱۰۰b^۲+۱۰(۸b+۱)+۶$$

رقم یکان حاصل ۶ می‌باشد که با صورت مسأله مطابقت می‌کند. ولی دهگان عدد حاصل $(۸b+۱)$ همواره فرد است که با صورت مسأله مبنی بر زوج بودن رقم دهگان عدد مورد نظر مغایرت دارد. لذا عددی که در شرایط مسأله صدق می‌کند مربع کامل نیست.

ب ـ اگر رقم یکان آن ۶ باشد:

به صورت فوق عمل می‌کنیم: دو رقم سمت راست جذر عدد مورد نظر: $\overline{b6}$

$$\overline{b6}^۲=(۱۰b+۶)^۲=۱۰۰b^۲+۱۲۰b+۳۶=۱۰۰(b^۲+b)+۱۰(۲b+۳)+۶$$

در اینجا نیز رقم یکان ۶ می‌باشد ولی دهگان عدد حاصل $(۲b+۳)$ همواره فرد است که با صورت مسأله مغایرت دارد که نتیجه می‌شود عدد مورد نظر مربع کامل نیست.

۲ـ ثابت کنید هر عدد طبیعی که رقم یکان آن ۱ یا ۴ یا ۹ و رقم دهگانش فرد باشد، مجذور کامل نیست.

هر عدد طبیعی که رقم یکان آن ۱ یا ۴ یا ۹ باشد، رقم یکان جذر آن یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۷، ۸ و یا ۹ خواهد بود. در اینجا نیز به روش مسألهٔ فوق عمل می‌کنیم:

دو رقم سمت راست جذر عدد مورد نظر : $\overline{bk}$

$$\overline{b1}^۲=(۱۰b+۱)^۲=۱۰۰b^۲+۲۰b+۱=۱۰۰b^۲+۱۰(۲b)+۱$$

$$\overline{b2}^۲=(۱۰b+۲)^۲=۱۰۰b^۲+۴۰b+۴=۱۰۰b^۲+۱۰(۴b)+۴$$

$$\overline{b3}^۲=(۱۰b+۳)^۲=۱۰۰b^۲+۶۰b+۹=۱۰۰b^۲+۱۰(۶b)+۹$$

$$\overline{b7}^۲=(۱۰b+۷)^۲=۱۰۰b^۲+۱۴۰b+۴۹=۱۰۰(b^۲+b)+۱۰(۴b+۴)+۹$$

$$\overline{b8}^۲=(۱۰b+۸)^۲=۱۰۰b^۲+۱۶۰b+۶۴=۱۰۰(b^۲+b)+۱۰(۶b+۶)+۴$$

$$\overline{b9}^۲=(۱۰b+۹)^۲=۱۰۰b^۲+۱۸۰b+۸۱=۱۰۰(b^۲+b)+۱۰(۸b+۸)+۱$$

در اینجا نیز مشاهده می‌شود که رقم دهگان اعداد حاصل همواره زوج است که با صورت مسأله مبنی بر فرد بودن رقم دهگان مغایرت دارد. پس نتیجه می‌گیریم که عددی با شرایط مسأله مربع کامل نیست.

توضیح:

ممکن است در دو مسألهٔ فوق ضرایب دهگان و یا صدگان اعداد حاصل دارای مقادیری از ۹ بزرگتر گردند که این مورد به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد نمی‌کند زیرا در این صورت مقادیر اضافی به مراتب بالاتر تحویل داده می‌شوند. یعنی دهگان به صدگان، صدگان به هزارگان و ...

با تشکر علیرضا قزلسفلو از شهرستان مینودشت

حلّ مسأله‌های برهان ۲۶

حلّ مسأله‌های ریاضی ۲

• سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱. معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $y=-x$ است. اگر $x=a$ طول نقطهٔ مفروض باشد، داریم $y=-a$ ؛ بنابراین، مختصات نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(a,-a)$ است و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$OA=\sqrt{a^۲+(-a)^۲}=\sqrt{۲a^۲}=\sqrt{۳۴};$$
$$۲a^۲=۳۴\ ;\ a=\pm\sqrt{۱۷}$$

با توجه به این که نقطهٔ مورد نظر در ناحیهٔ چهارم قرار دارد:

$$A(\sqrt{۱۷},-\sqrt{۱۷})$$

۲. چون خط $x+ay=۴$ بر خط $ax+by=۳$ عمود است:

$$mm'=\left(\frac{-۱}{a}\right)\left(\frac{-a}{b}\right)=\frac{۱}{b}=-۱\ ;\ \boxed{b=-۱}$$

و چون خط $x+ay=۴$ از نقطهٔ $A(-۱,۱)$ می‌گذرد:

$$A(-۱,۱)\ :\ (-۱)+a(۱)=۴\ ;\ \boxed{a=۵}$$

۳. نقاط A و B نسبت به نقطهٔ M قرینهٔ یکدیگرند، بنابراین، نقطهٔ M بین نقاط A و B قرار دارد:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲m-n+۲m+n}{۲} \\ =۲m=-۲;\ \boxed{m=-۱} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۴m+۴+۴n-۴}{۲} \\ =۲m+۲n=۲;۲(-۱)+۲n=۲;\ \boxed{n=۲} \end{cases}$$

۴. معادلهٔ خطی که از وسط پاره‌خط MN می‌گذرد و بر آن عمود است، معادلهٔ عمود منصّف MN است ؛ بنابراین:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{۱-(-۳)}{-۲-۲}=\frac{۴}{-۴}=-۱\ ,$$

$m'_{MN}=۱$ (شیب عمود منصّف)

نقطهٔ وسط MN چنین است:

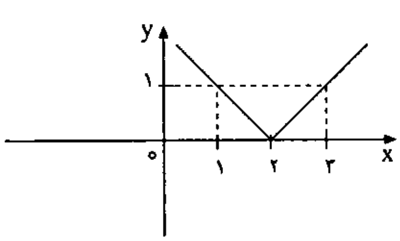
$$x_P=\frac{x_M+x_N}{۲}=\frac{-۲+۲}{۲}=۰\ ,$$
$$y_P=\frac{y_M+y_N}{۲}=\frac{۱-۳}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ P می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است، خط عمود منصّف می‌باشد:

$$y-y_P=m'_{MN}(x-x_P)\ ;$$
$$y-(-۱)=۱(x-۰)\ ;$$
$$y=x-۱$$ (معادلهٔ عمود منصّف)

۵.

x	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱



۶. اگر طول مستطیل را y و عرض مستطیل را x بگیریم:

$$\begin{cases} y=۴x \\ ۲(x+y)=۵۰ \end{cases}\ ;\ \begin{cases} y=۴x \\ x+y=۲۵ \end{cases}\ ;$$

$$x+۴x=۲۵\ ;\ ۵x=۲۵\ ;\ \boxed{x=۵}\ ,$$
$$y=۴(۵)=۲۰\ ;\ \boxed{y=۲۰}$$
$$R^۲=x^۲+y^۲=۵^۲+۲۰^۲$$

$= ۲۵+۴۰۰=۴۲۵$; $\boxed{R=\sqrt{۴۲۵}\ \text{(قطر)}}$

۷. فاصلهٔ مبدأ (رأس مربع) از خط $۶x+۸y=۳$، برابر طول یک ضلع مربع است:

$$\text{(ضلع مربع)}\ d=\frac{|۶(۰)+۸(۰)-۳|}{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳,$$

$$\text{(مساحت مربع)}\ S=(۰/۳)^۲=۰/۰۹$$

۸. سهمی به معادلهٔ عمومی $y=ax^۲+bx+c$ به شرط $a<۰$، دارای نقطهٔ ماکزیمم و به شرط $a>۰$ دارای نقطهٔ می‌نیمم است؛ بنابراین سهمی به معادلهٔ $y=(۲m^۲-۸)x^۲-۴$، به شرط $۲m^۲-۸<۰$ دارای نقطهٔ ماکزیمم است:

$$۲m^۲-۸<۰\ ;۲m^۲<۸\ ;\ m^۲<۴\ ;-۲<m<۲$$

۹.

$$\left(\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۲}}\right)\left(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۲}}\right)=\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}$$

$$=\sqrt[۳]{۴-۲}=\sqrt[۳]{۲}$$

$$P=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^۳}=۲$$

۱۰.

$$\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}\times\frac{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲}{(۲\sqrt{۳})^۲-(۳\sqrt{۲})^۲}$$

$$=\frac{(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲}{۱۲-۱۸}$$

$$=-\frac{۱}{۶}(۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲})^۲$$

۱۱. با توجه به برابریهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\text{طرف اول}=\underline{۲\cos^۲x}+۲\cos^۲x\tan^۲x+\underline{۲\sin^۲x}$$
$$+۲\sin^۲x\cot^۲x$$

$$=۲(\cos^۲x+\sin^۲x)+۲\cos^۲x\left(\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}\right)$$

$$+۲\sin^۲x\left(\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}\right)$$

$$=۲(۱)+۲\sin^۲x+۲\cos^۲x$$

$$=۲+۲(\sin^۲x+\cos^۲x)$$

$$=۲+۲=۴$$

حل مسأله‌های ریاضی ۴

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱.

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i}{n}=\frac{۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵}{۵}$$

$$=\frac{۶۵}{۵}=۱۳\quad\text{(میانگین)}$$

$$\text{انحراف معیار}\ S=\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^۲}{n}}$$

$$S=\sqrt{\frac{(۱۱-۱۳)^۲+(۱۲-۱۳)^۲+(۱۳-۱۳)^۲+(۱۴-۱۳)^۲+(۱۵-۱۳)^۲}{۵}}$$

$$=\sqrt{\frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۵}}=\sqrt{۲}\ ;$$

$$\boxed{S=\sqrt{۲}}$$

۲.

$$\begin{cases}t_۳=a+۲d=۴\\ t_{۱۱}=a+۱۰d=-۱۲\end{cases}\Rightarrow ۸d=-۱۶\ ;$$

$$\boxed{d=-۲\ \text{(قدر نسبت)}}$$

$a+۲(-۲)=۴$; $\boxed{a=۸\ \text{(جمله اول)}}$

$t_{۱۹}=a+۱۸d=۸+۱۸(-۲)=-۲۸$;

$$\boxed{t_{۱۹}=-۲۸}$$

۳.

$\text{(جملهٔ سوم)}\ t_۳=a_۱q^۲\ ;\ -۹=a_۱q^۲\quad(۱)$

$\text{(جملهٔ پنجم)}\ t_۵=a_۱q^۴\ ;\ -۸۱=a_۱q^۴\quad(۲)$

از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲):

$$\frac{-۸۱}{-۹}=\frac{a_۱q^۴}{a_۱q^۲}\ ;\ q^۲=۹\ ;\ q=\pm۳\ \text{(قدر نسبت)}$$

$$a_۱=\frac{-۹}{q^۲}=\frac{-۹}{۹}=-۱\ ;\ a_۱=-۱\quad\text{(جملهٔ اوّل)}$$

بنابراین، شش جملهٔ اوّل تصاعد، به‌صورت زیر است:

$-۱\ ,\ ۳\ ,\ -۹\ ,\ ۲۷\ ,\ -۸۱\ ,\ ۲۴۳$

۴. $\cot^۲x-۳\cot x+۲=۰$

با فرض $\cot x=a$، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$a^۲-۳a+۲=۰\ ;\ (a-۱)(a-۲)=۰$$

$$\Rightarrow a=۱\ ;\ a=۲$$

$$\cot x=۱=\cot\frac{\pi}{۴}\ ;\ x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$\cot x=۲=\cot(\text{Arccot}\,۲)\ ;$$

$$x=k\pi+\text{Arccot}\,۲$$

۵.

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$$

$$\frac{۱}{۳}=\frac{\tan x-۲}{۱+۲\tan x}\ ;\ ۱+۲\tan x=۳\tan x-۶\ ;$$

$$\tan x=۷,\ \cos^۲x=\frac{۱}{۱+\tan^۲x}$$

$$=\frac{۱}{۱+۴۹}=\frac{۱}{۵۰}\ ;$$

$$|\cos x|=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}\ ;\ |\cos x|=\frac{\sqrt{۵۰}}{۵۰}$$

۶.

$$|\vec{v_۱}|=\sqrt{(-۶)^۲+۸^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}$$

$$=\sqrt{۱۰۰}=۱۰\ \text{(طول بردار } \vec{v_۱})$$

$$\vec{v_۲}=۳\vec{i}-۴\vec{j}=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix},$$

$$|\vec{v_۲}|=\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$\text{(طول بردار } \vec{v_۲})$$

$$\vec{v_۱}.\vec{v_۲}=[-۶\ \ ۸]\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}$$

$$=-۱۸-۳۲=-۵۰\qquad\text{(ضرب اسکالر)}$$

$$\vec{v_۱}.\vec{v_۲}=|\vec{v_۱}||\vec{v_۲}|\cos\theta\ ,$$

$$-۵۰=۱۰\times۵\cos\theta\ ;$$

$$\cos\theta=-۱\ ,\ \theta=۱۸۰^\circ$$

۷.

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$$

تعداد کلمه‌هایی که تکرار حروف جایز نیست.

۸. الف ـ عددی زوج است که رقم سمت راست

آن زوج باشد ؛ بنابراین :

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ :رقم سمت راست ۰

۲ ۲ ۳ ۴ ۴ :رقم سمت راست ۲ یا ۴

$\Rightarrow ۵\times۴\times۳\times۲\times۱+۴\times۴\times۳\times۲\times۲=۳۱۲$

ب ـ عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد ؛ بنابراین :

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ :رقم سمت راست ۰

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ :رقم سمت راست ۵

$\Rightarrow ۵\times۴\times۳\times۲\times۱+۴\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۱۶$

ج ـ باقیماندهٔ عددی بر ۱۰ برابر ۲ است که رقم راست آن ۲ باشد ؛ یعنی :

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ : رقم سمت راست ۲

$\Rightarrow ۴\times۴\times۳\times۲\times۱=۹۶$

د ـ اگر عدد پنج رقمی، بزرگتر از ۳۴۰۰۰ باشد، آن‌گاه دو حالت زیر را داریم :

حالت اول: رقم سمت چپ آن ۴ یا ۵ باشد ؛ بنابراین :

۲ ۳ ۴ ۵ ۲ :رقم سمت چپ ۴ یا ۵

$\Rightarrow ۲\times۵\times۴\times۳\times۲=۲۴۰$

حالت دوم: اولین رقم سمت چپ ۳ و دومین رقم سمت چپ ۴ یا ۵ باشد ؛ بنابراین :

۲ ۳ ۴ ۲ ۱ :اولین رقم سمت چپ ۳ و دومین رقم سمت چپ ۴ یا ۵

$\Rightarrow ۱\times۲\times۴\times۳\times۲=۴۸$

با توجه به حالتهای اول و دوم داریم :

$۲۴۰+۴۸=۲۸۸$

۹. وقتی روی همهٔ حالتهایی که ممکن است در انجام یک آزمایش، رخ دهند، شرطی در نظر بگیریم، در این صورت، فضای نمونه محدودتر می‌شود ؛ بنابراین، هرگاه مجموع دو عدد زوج باشد، پس باید هردو، زوج یا هردو، فرد باشند، در نتیجه :

$A=\{۲,۴,۶,۸\}$ عددهای زوج

$B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ عددهای فرد

هردو زوج   هردو فرد

$n(s)=\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$

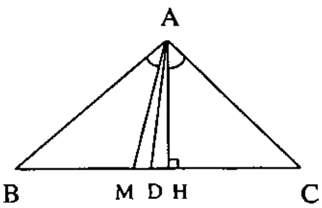
$n(c)=\binom{۵}{۲}=۱۰$ هر دو عدد فرد

$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$

حلّ مسأله‌های هندسهٔ ۲

● محمدهاشم رستمی

۱. مثلث ABC را در نظر گرفته، میانهٔ AM، ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می‌کنیم :



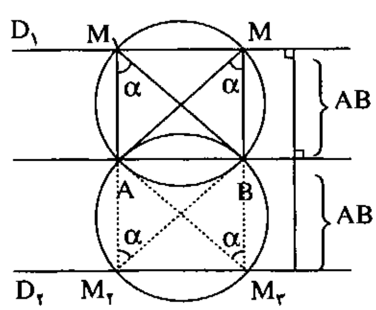
الف. با فرض $AB > AC$، داریم $M\hat{A}B < M\hat{A}C$. زاویهٔ MAB قرار نخواهد داشت ؛ از طرفی $H\hat{A}B > H\hat{A}C$ است (چرا؟). در نتیجه، نیمساز AD در درون زاویهٔ HAC واقع نیست. بنابراین، نیمساز AD درون زاویهٔ HAM واقع است ؛ یعنی نقطهٔ D بین نقطه H و M قرار دارد. در نتیجه $AD < AM$ و یا $d_a < m_a$ است.

اگر $AB < AC$ نیز باشد باز هم رابطهٔ $d_a < m_a$ برقرار است.

ب. با نوشتن رابطه‌های مشابه برای نیمسازهای زاویه‌های درونی و میانه‌های نظیر و جمع کردن عضوهای متناظر آنها داریم :

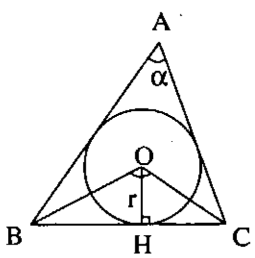
$d_a+d_b+d_c < m_a+m_b+m_c$

۲. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود،



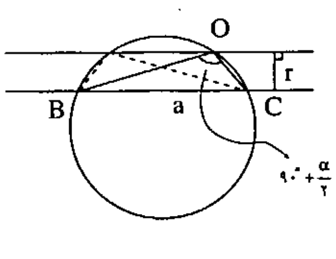
کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است، که این مکان هندسی را رسم می‌کنیم (دو قوس از دو دایرهٔ مساوی واقع در دو طرف خط AB). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ معینی از خط AB باشد، دو خط موازی خط AB و در دو طرف آن می‌باشند. بنابراین، دو خط D_1 و D_2 را موازی خط AB و به فاصله‌ای برابر طول پاره‌خط AB، در دو طرف خط AB رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو خط، با کمان درخور زاویهٔ α، جواب مسأله است و حداکثر چهار جواب وجود دارد.

۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و مثلث ABC جواب مسأله باشد. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی درونی این مثلث باشد، زاویهٔ $B\hat{O}C=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$ و $BH=r$ است.



با توجه به این که $BC=a$ معلوم است، مثلث BOC با معلوم بودن یک ضلع، ارتفاع نظیر این ضلع و زاویهٔ روبه‌روی به این ضلع، قابل رسم است ؛ این مثلث را رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز O و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطه‌های B و C، دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

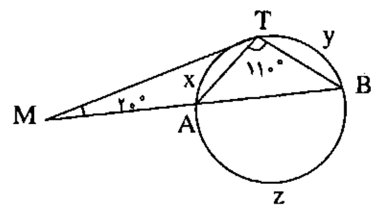
نکته. برای رسم مثلث BOC، ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم.



سپس کمان درخور زاویهٔ $۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$ روبه‌رو به این پاره‌خط را رسم می‌نماییم. آن‌گاه دو خط موازی BC و به فاصلهٔ r در دو طرف آن رسم می‌کنیم.

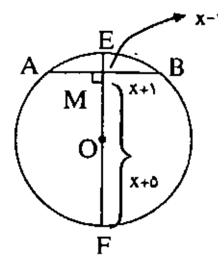
نقطه‌های برخورد این دو خط با کمان درخور زاویهٔ α نقطهٔ O رأس سوم مثلث BOC است. از O به B و C وصل می‌کنیم، مثلث BOC رسم می‌شود. (به‌دلیل یکسان بودن جوابها یک خط موازی BC و به فاصلهٔ r رسم شده است.)

۴. با توجه به شکل داده شده، $z=220^\circ$ است. از آن جا $x+y=140^\circ$ خواهد بود. از طرفی $\hat{M}=20^\circ=\frac{y-x}{2}$، پس $y-x=40^\circ$ است. در نتیجه داریم:



$$\begin{cases} x+y=140^\circ \\ y-x=40^\circ \end{cases} \Rightarrow y=90^\circ, x=50^\circ$$

۵. با توجه به این که قطر عمود بر وتر در هر دایره، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند، $MA=MB=x-1$ است. از طرفی داریم:



$$MA.MB=ME.MF \Rightarrow (x+1)(x+1)$$
$$=(x-1)(x+5)$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1=x^2+4x-5 \Rightarrow x=3$$
$$EF=x-1+x+5=2x+4=2(3)+4$$
$$=10=2R \Rightarrow R=5$$

۶. با توجه به این که $A=(1,2)$، $B=(-2,1)$ و $C=(3,-2)$ است، داریم:

الف. $T(x,y)=(x+h\ ,\ y+k)$

$$\Rightarrow T(-2,1)=(3,-2) \Rightarrow \begin{cases} x+h=3 \\ y+k=-2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2+h=3 \\ 1+k=-2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} h=5 \\ k=-3 \end{cases} \Rightarrow T(x,y)=(x+5,y-3)$$

ب. $A(1,2) \Rightarrow A'=(1+5,2-3)$

$$\Rightarrow A'=(6,-1)$$
$$B(-2,1) \Rightarrow B'=(-2+5,1-3)$$
$$\Rightarrow B'=(3,-2)$$
$$C(3,-2) \Rightarrow C'=(3+5,-2-3)$$
$$\Rightarrow C'=(8,-5)$$

پ. $A'=(6,-1)\ ,\ R(x,y)=(y,x)$

$$\Rightarrow A''=(-1,6)$$
$$B'=(3,-2)\ ,\ R(x,y)=(-x,-y)$$
$$\Rightarrow B''=(-3,2)$$
$$C'=(8,-5)\ ,\ H(x,y)=(2x,2y)$$
$$\Rightarrow C''=(16,-10)$$

ت. فاصلهٔ نقطهٔ A'' از خط $B''C''$ را به‌دست می‌آوریم.

$$B''=(-3,2), C''=(16,-10)$$
$$\Rightarrow B''C'': \frac{x+3}{16+3}=\frac{y-2}{-10-2}$$
$$\Rightarrow 19y-38=-12x-36$$
$$\Rightarrow 12x+19y-2=0$$
$$A''H=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Rightarrow A''H=\frac{|12(-1)+19(6)-2|}{\sqrt{144+361}}=\frac{100}{\sqrt{505}}$$

برای تعیین مساحت مثلث طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم.

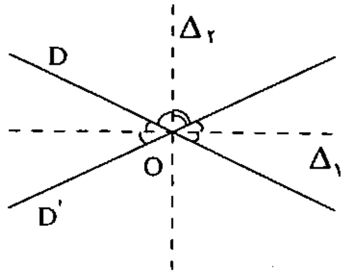
$$B''C''=\sqrt{(16+3)^2+(-10-2)^2}$$
$$=\sqrt{361+144}=\sqrt{505}$$

از آن جا:

$$S_{A''B''C''}=\frac{1}{2}A''H.B''C''$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{100}{\sqrt{505}}\right)(\sqrt{505})=50$$ واحد سطح

۷. محور تقارن، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' است و معادلهٔ این نیمسازها به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1+4}}$$



$$\Rightarrow |2x-y+1|=|x+2y-3|$$
$$\Rightarrow 2x-y+1=\pm(x+2y-3)$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \Delta_1: x-3y+4=0$$
$$\Delta_2: 3x+y+2=0$$

حل مسأله‌های ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

• میرشهرام صدر

۱. $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x^3+3x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x||x^2+3|}{x}=\lim_{x\to 0^+}|x^2+3|=3$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x^3+3x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x||x^2+3|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-|x^2+3|=-3$$

چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$، پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(-3)=\lim_{x\to -3^+}\frac{|x^3+3x|-36}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3^+}\frac{-(x^3+3x)-36}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3^+}\frac{-(x+3)(x^2-3x+12)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3^+}-(x^2-3x+12)=30$$
$$f'_-(-3)=\lim_{x\to -3^-}\frac{|x^3+3x|-36}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -۳^-} \frac{-(x+۳)(x^۲ - ۳x + ۱۲)}{x+۳} = ۳۰$$

چون $f'_+(-۳) = f'_-(-۳)$ ، پس تابع f در نقطهٔ $x = -۳$ مشتق‌پذیر است.

.۲ $x = \frac{\pi}{۴}$ ، $\sin x \cos y = \frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \cos y = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{۴}$$

نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۴}\\ \frac{\pi}{۴}\end{matrix}\right.$ روی منحنی نمایش تابع قرار دارد.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x \cos y}{-\sin x \sin y} \Rightarrow m = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$$

$$y - \frac{\pi}{۴} = ۱(x - \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow y = x$$

(معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A)

.۳ $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + x + ۱}$;

$$f'(x) = \frac{x^۲ + ۲x}{(x^۲ + x + ۱)^۲}$$

وقتی $f'(x) = ۰$ ، داریم :

$x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ , x = -۲$ (نقاط بحرانی)

چون $x^۲ + x + ۱ > ۰$ ، بنابراین، $f'(x)$ همواره تعریف شده است.

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f'(x)		+	۰	−	۰	+	
f(x)	۱	↗	۳ Max نسبی	↘	۰ Min نسبی	↗	۱

.۴ $f'(x) = ۲ax + b , f'(۱) = ۰$

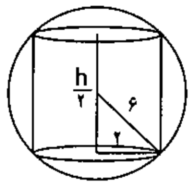
$$\Rightarrow ۲a + b = ۰$$

$f(۱) = ۷ \Rightarrow a + b + c = ۷$

$f(۲) = -۲ \Rightarrow ۴a + ۲b + c = -۲$

$$\begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ a + b + c = ۷ \\ ۴a + ۲b + c = -۲ \end{cases} \Rightarrow a = -۹ , b = ۱۸ , c = -۲$$

.۵



معادلهٔ اولیه: $S = ۲\pi rh$

معادلهٔ ثانویه: $\left(\frac{h}{۲}\right)^۲ + r^۲ = ۳۶ \Rightarrow h^۲ + ۴r^۲ = ۱۴۴$

$$\Rightarrow ۲r = \sqrt{۱۴۴ - h^۲}$$

اکنون در معادلهٔ اوّلیه قرار می‌دهیم :

$۲r = \sqrt{۱۴۴ - h^۲}$ ، در این صورت معادلهٔ اوّلیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم : $S = \pi h \sqrt{۱۴۴ - h^۲}$

اگر S بیشترین مقدار را بگیرد، آن‌گاه $S^۲ = \pi^۲ h^۲ (۱۴۴ - h^۲)$ نیز بیشترین مقدار را خواهد گرفت، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(h) = \pi^۲(۱۴۴h^۲ - h^۴)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$f'(h) = \pi^۲(۲۸۸h - ۴h^۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\pi^۲ h(۷۲ - h^۲) = ۰ \Rightarrow h = ۰ , h = ۶\sqrt{۲} , h = -۶\sqrt{۲}$$

h	$-\infty$		$-۶\sqrt{۲}$		۰		$۶\sqrt{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	۰	−	
f		↗		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در نقاط $h = ۶\sqrt{۲}$ و $h = -۶\sqrt{۲}$ دارای ماکزیمم نسبی است ؛ اما چون $h > ۰$ (ارتفاع استوانه)، بنابراین $h = ۶\sqrt{۲}$.

.۶ $y = \frac{۲x^۲ + ۱}{x^۲ + ۲x}$

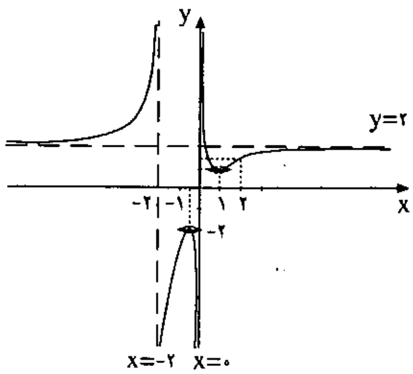
مجانب افقی $\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y = ۲ \end{cases}$

مجانبهای قائم $\begin{cases} y \to \pm\infty \\ x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ , x = -۲ \end{cases}$

$$y' = \frac{۴x(x^۲ + ۲x) - (۲x + ۲)(۲x^۲ + ۱)}{(x^۲ + ۲x)^۲}$$

$$= \frac{۴x^۲ - ۲x - ۲}{(x^۲ + ۲x)^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۱ , x = -\frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۱}{۲}$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+	‖	+	۰	−	‖	−	۰	+		+	
y	۲	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-۲ Max	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۱ Min	↗	$\frac{۹}{۸}$	↗	۲

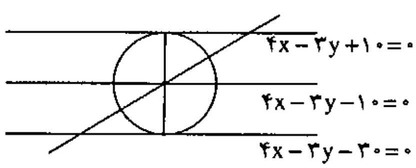


.۷ چون دو خط مماس، بر دایره موازی هستند، بنابراین فاصلهٔ دو خط موازی، برابر طول قطر دایره است :

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۳۰ - ۱۰|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = ۸$$

$\Rightarrow r = \frac{d}{۲} = ۴$ (شعاع دایره)

مرکز این دایره، روی خطی قرار دارد که موازی با دو خط مماس بر دایره است و فاصلهٔ مرکز دایره تا دو خط برابر است. از طرف دیگر، مرکز دایره روی قطر دایره واقع است، بنابراین داریم :



$$\begin{cases} ۴x - ۳y - ۱۰ = ۰ \\ x + ۳y - ۱۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۲ \end{cases}$$

اکنون معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $V\left|\begin{matrix}\alpha = ۴\\ \beta = ۲\end{matrix}\right.$ و شعاع $r = ۴$ به‌صورت زیر است :

$$(x - ۴)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱۶$$

.۸

$$\begin{cases} ۳x + ۴y = ۷ \\ ۳x - ۴y = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱ \end{cases}$$

$\Rightarrow V\begin{vmatrix}\alpha=۱\\ \beta=۱\end{vmatrix}$ مرکز هذلولی ; $F\begin{vmatrix}۶\\ ۱\end{vmatrix}$

$y_F=y_V=۱\Rightarrow FF'\parallel x'x\Rightarrow F\begin{vmatrix}\alpha+c=۶\\ \beta=۱\end{vmatrix}$

$\Rightarrow ۱+c=۶\Rightarrow \boxed{c=۵}$

شیب مجانبها $m=\pm\frac{b}{a}\Rightarrow \pm\frac{b}{a}=\frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow b^۲=\frac{۹}{۱۶}a^۲$

$$\begin{cases}b^۲=\frac{۹}{۱۶}a^۲\\ a^۲+b^۲=c^۲\quad\Rightarrow a^۲+\frac{۹}{۱۶}a^۲=۲۵\\ c=۵\end{cases}$$

$\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow \boxed{a=۴}\Rightarrow\boxed{b=۳}$

$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱$

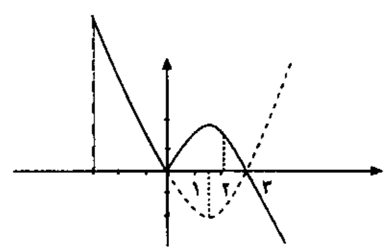
$\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۱۶}-\frac{(y-۱)^۲}{۹}=۱$

۹. $y=x^۲-۳x\ ;y'=۰\Rightarrow ۲x-۳=۰;$

$x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow A\begin{vmatrix}\frac{۳}{۲}\\ -\frac{۹}{۴}\end{vmatrix}$ نقطهٔ اکسترمم

$y=۰\Rightarrow x^۲-۳x=۰\ ;\ x=۰\ ,\ x=۳$

$x^۲-۳x=۰\Rightarrow x=۰,۳$



x		۰		۳	
$x^۲-۳x$	+	۰	−	۰	+

$\int_{-۳}^{۲}\left|x^۲-۳x\right|dx=\int_{-۳}^{۰}(x^۲-۳x)dx+\int_{۰}^{۲}-(x^۲-۳x)dx$

$=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲\Big|_{-۳}^{۰}+(-\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲)\Big|_{۰}^{۲}$

$=۰-\left(\frac{۱}{۳}(-۳)^۳-\frac{۳}{۲}(-۳)^۲\right)+\left(-\frac{۱}{۳}(۲)^۳+\frac{۳}{۲}(۲)^۲\right)-۰$

$=\frac{۱۵۵}{۶}$

۱۰. الف)

$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{۱+\cos x}dx$

$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۳\sin x-(۳\sin x-۴\sin^۳x)}{۱+\cos x}dx$

$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۴\sin^۳x(۱-\cos x)}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}$

$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۴\sin^۳x(۱-\cos x)}{\sin^۲x}dx$

$=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin x dx-۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin x\cos x dx$

$=-۴\cos x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-۲\sin^۲x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=-۴-۲=-۶$

ب)

$\begin{cases}u=x+۲;x=u-۲\\ du=dx\end{cases};\begin{cases}x=۶\Rightarrow u=۸\\ x=-۲\Rightarrow u=۰\end{cases}$

$\int_{-۲}^{۶}x^۲\sqrt[۳]{x+۲}dx=\int_{۰}^{۸}(u-۲)^۲u^{\frac{۱}{۳}}du$

$=\int_{۰}^{۸}(u^{\frac{۷}{۳}}-۲u^{\frac{۴}{۳}}-۴u^{\frac{۱}{۳}})du$

$=\frac{۳u^{\frac{۱۰}{۳}}}{۱۰}-\frac{۶u^{\frac{۷}{۳}}}{۷}-۳u^{\frac{۴}{۳}}\Big|_{۰}^{۸}$

$=\frac{۳}{۱۰}(\sqrt[۳]{۸})^{۱۰}-\frac{۶}{۷}(\sqrt[۳]{۸})^{۷}-۳(\sqrt[۳]{۸})^{۴}$

$=\frac{۳\times ۲^{۱۰}}{۱۰}-\frac{۶\times ۲^{۷}}{۷}-۳\times ۲^{۴}$

۱۱. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{x-۱}}$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{x-۱}}\times\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۱+x}-\sqrt{x-۱}}$

$=\int\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{x-۱}}{۲}dx$

$=\frac{۱}{۲}\int\sqrt{۱+x}dx-\frac{۱}{۲}\int\sqrt{x-۱}dx$

$\begin{cases}u=۱+x\\ du=dx\end{cases};\begin{cases}v=x-۱\\ dv=dx\end{cases}$

$I=\frac{۱}{۲}\int u^{\frac{۱}{۲}}du-\frac{۱}{۲}\int v^{\frac{۱}{۲}}dv$

$=\frac{۱}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۳}v^{\frac{۳}{۲}}+c$

$=\frac{۱}{۳}(۱+x)\sqrt{۱+x}-\frac{۱}{۳}(x-۱)\sqrt{x-۱}+c$

۱۲.

$V=\pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{\cos^۲x}dx=\pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}(۱+\tan^۲x)dx$

$=\pi\tan x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$

ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی

● **میرشهرام صدر**

۱. الف)

$n=۱:۱\times ۲=\frac{۱(۱+۱)(۱+۲)}{۳}\Rightarrow ۲=۲$

فرض استقراء $n=k:۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots+k(k+۱)=\frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}$

حکم استقراء $n=k+۱:۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots+k(k+۱)+(k+۱)(k+۲)=\frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۲}$

دو طرف فرض را با $(k+۱)(k+۲)$ جمع می‌کنیم:

$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots+k(k+۱)+(k+۱)(k+۲)=\frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}+(k+۱)(k+۲)$

$=\frac{k(k+۱)(k+۲)+۳(k+۱)(k+۲)}{۳}$

$=\frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۳}$

ب)

$۱۰^n-۱=۹t\quad(t\in z)$

$n=۱:\ ۱۰^۱-۱=۹t\Rightarrow ۹=۹t\quad(t\in z)$

فرض استقرا $n=k:\ ۱۰^k-۱=۹t_۱\Rightarrow(t_۱\in z)$

حکم استقرا $n=k+۱: ۱۰^{k+۱}-۱=۹t_۲$

$\Rightarrow (t_۲ \in z)$

دو طرف فرض را در ۱۰ ضرب می‌کنیم :

$۱۰(۱۰^k-۱)=۱۰\times ۹t_۱$

$۱۰^{k+۱}-۱۰=۱۰\times ۹t_۱$

$۱۰^{k+۱}-۱=۱۰\times ۹t+۹$

$\Rightarrow ۱۰^{k+۱}-۱=۹\underbrace{(۱۰t_۱+۱)}_{t_۲\in z}$

$\Rightarrow ۱۰^{k+۱}-۱=۹t_۲$

۲. فرض کنیم $۳+\sqrt{۵}$ عددی گنگ نباشد، بنابراین عددی گویاست ؛ یعنی عدد گویایی مانند a موجود است ؛ به‌طوری که داریم :

$a=۳+\sqrt{۵}$

$a^۲=(۳+\sqrt{۵})^۲$

$a^۲=۹+۵+۶\sqrt{۵} \Rightarrow \underbrace{۶\sqrt{۵}}_{\in Q'}=\underbrace{a^۲-۱۴}_{\in Q}$ (۱)

سمت راست برابر (۱) عددی گویا و سمت چپ آن عددی گنگ است و این، غیرممکن می‌باشد ؛ بنابراین $۳+\sqrt{۵}$ عددی گنگ است.

۳.

$a_n=n^۲-۲۲n+۱۲۰=(n-۱۰)(n-۱۲)<۰$

$(n-۱۰)(n-۱۲)=۰ \Rightarrow n=۱۰, n=۱۲, n\in N$

n	$-\infty$	۱۰		۱۲	$+\infty$
a_n	+		−		+

عبارت a_n به‌ازای هر n طبیعی با شرط $۱۰<n<۱۲$، عددی منفی است. بنابراین، a_n فقط به‌ازای $n=۱۱$ منفی است ؛ یعنی جملهٔ یازدهم دنبالهٔ منفی است.

۴. توپ در برخورد اوّل با سطح زمین ۱ متر، در برخورد دوم $\frac{۱}{۲}$ متر، در برخورد سوم $\frac{۱}{۴}$ متر، ... و در برخورد nام $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ متر بالا می‌آید، بنابراین :

$S=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+...$

$=۱+\frac{۱}{۲}\underbrace{(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...)}_{S}$

$\Rightarrow S=۱+\frac{۱}{۲}S; S-\frac{۱}{۲}S=۱; S=۲$

۵. $S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(۲a+۱۰d)=۱۱۰$

$\Rightarrow a+۵d=۱۰$

$S_۷=\frac{۷}{۲}(۲a+۶d)=۱۴ \Rightarrow a+۳d=۲$

$\begin{cases} a+۵d=۱۰ \\ a+۳d=۲ \end{cases} \Rightarrow d=۴$

۶. $\begin{cases} S_۴=\dfrac{a(q^۴-۱)}{(q-۱)}=۱۵ \\ S_۸=\dfrac{a(q^۸-۱)}{(q-۱)}=۲۲۵ \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{S_۸}{S_۴}=\frac{q^۸-۱}{q^۴-۱}=۱۷$

$\Rightarrow q^۸-۱=۱۷(q^۴-۱) \Rightarrow q^۸-۱۷q^۴+۱۶=۰$

$\Rightarrow (q^۴-۱)(q^۴-۱۶)=۰$

$q\neq \pm ۱ \Rightarrow q=\pm ۲$

۷. $F_۶=۸, F_۵=۵:\ S_۶=۲F_۶+F_۵-۱$

$=۲(۸)+۵-۱=۲۰$

$S=۲۰=۴\times ۵$

مجموع شش جملهٔ اوّل دنباله فیبوناتچی، بر عدد اوّل ۵ بخش‌پذیر است.

۸. $x^۲-۳x-\log_۲^{۱۰}=۰,$

$x'+x''=-(-۳)=۳; \log_۲^a+\log_۲^b=۳$

$\log_۳^{ab}=۳ \Rightarrow ab=۳^۳=۲۷$

$\frac{ab}{\log_۳^a+\log_۳^b}=\frac{۲۷}{۳}=۹$

۹. الف)

$x=۱۰۰۰-۱۰p \Rightarrow p=\frac{۱۰۰۰-x}{۱۰}$

معادلهٔ درآمد : $R(x)=x\times p=x\left(\frac{۱۰۰۰-x}{۱۰}\right)$

$=-\frac{۱}{۱۰}x^۲+۱۰۰x$

ب) ماکزیمم $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱۰۰}{\frac{۲}{۱۰}}=۵۰۰$

ج) $x=۵۰۰$

$\Rightarrow R(۵۰۰)=۵۰۰\left(\frac{۱۰۰۰-۵۰۰}{۱۰}\right)=۲۵۰۰۰$

د)

سود = درآمد − هزینه $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

$P(x)=۱۰۰x-\frac{۱}{۱۰}x^۲-(۵۰۰۰+۲x)$

$\Rightarrow P(x)=\frac{-۱}{۱۰}x^۲+۹۸x-۵۰۰۰$

ماکزیمم $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۹۸}{\frac{-۲}{۱۰}}=۴۹۰$

۱۰. احتمال این که یک نفر مرد باشد :

$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۳۰}{۱}}=\frac{۱}{۳}$

احتمال این که یک نفر چشم قهوه‌ای باشد :

$P(B)=\frac{\binom{۱۵}{۱}}{\binom{۳۰}{۱}}=\frac{۱}{۲}$

احتمال این که مرد چشم قهوه‌ای باشد :

$P(A\cap B)=\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۳۰}{۱}}=\frac{۱}{۶}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳}$

۱۱.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$۰/۶=۰/۴+۰/۳-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$

۱۲.

$x=۱, (k^۵x^۳+۴)^۵=۲۴۳$

$\Rightarrow (k^۵+۴)^۵=۲۴۳=۳^۵$

$\Rightarrow k^۵+۴=۳ \Rightarrow k^۵=-۱ \Rightarrow k=-۱$

حلّ مسأله‌های ریاضیات گسستهٔ پیش دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

۱. طبق فرض، برای هر $a\in V$، داریم $\deg(a)\geq ۳$، حال اگر فرض کنیم $V=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$، در این صورت :

$$\left.\begin{array}{l} deg(a_1)\geq 3 \\ deg(a_2)\geq 3 \\ \vdots \\ deg(a_n)\geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} deg(a_i)\geq 3n$$

$$\Rightarrow 2|E|\geq 3n \Rightarrow 38 \geq 3n$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{38}{3} \cong 12/6$$

بنابراین حداکثر مقدار $|V|$ برابر ۱۲ است.

۲. از آن‌جایی که K_p گرافی کامل است، تمام رئوس آن به هم مربوط بوده و اگر M، ماتریس آن باشد، یک ماتریس متقارن و $p\times p$ است که به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی آن که همگی صفر هستند، بقیهٔ درایه‌ها ۱ می‌باشند. حال اگر بخواهیم درایهٔ روی قطر اصلی M^2 را مشخص کنیم، در حالت کلّی، باید سطر اام M را در ستون اام خودش ضرب کنیم، که البته در سطر اام، $(p-1)$ تا عدد ۱ و نیز روی ستون اام، $(p-1)$ تا عدد ۱ وجود دارد که نظیر به نظیر این (یک‌ها) در هم ضرب و فقط صفر روی سطر اام در صفر، روی ستون اام نیز در هم ضرب می‌شوند، که حاصل جمع $(p-1)$ تا عدد ۱ برابر است با $(p-1)$. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳. طبق فرض داریم، $a = bq + r$ و $a = 18r$ و $r = b-1$، پس:

$$18r = bq + (b-1) \Rightarrow 18(b-1) = bq + b - 1$$

$$\Rightarrow 17b - bq = 17 \Rightarrow b(17-q) = 1\times 17$$

چون ۱۷ عددی اوّل و تجزیهٔ آن منحصر به فرد است و بدیهی (به شکل $17 = 1\times 17$)، پس در سمت چپ تساوی، باید یکی از عاملها ۱ و دیگری ۱۷ باشد. حال اگر $17 - q = 17$، پس باید $q = 0$ که با توجه به فرض ایجاب می‌کند، $a = r$ که خلاف $a = 18r$ است، بنابراین $b = 17$ و $17 - q = 1$ یا $q = 16$.

$$r = b-1 \Rightarrow r = 17-1 = 16,$$
$$a = 18r = 18\times 16 = 288$$

۴. طبق فرض داریم $(a^m, b^n) = 1$ پس طبق قضیه، باید اعدادی صحیح چون r و s موجود باشند: به قسمی که:

$$ra^m + sb^n = 1 \Rightarrow \underbrace{(ra^{m-1})}_{r_1}a + \underbrace{(sb^{n-1})}_{s_1}b = 1$$

$$\Rightarrow r_1 a + s_1 b = 1 \Rightarrow (a,b) = 1$$

۵. اثبات به استقرا

$$p(1): 2^2 + 6 - 1 = 9 = 9\times 1 \Rightarrow p(1) \equiv T$$

$$p(K) \equiv T \Rightarrow 2^{2K} + 6K - 1 = 9t$$

فرض استقرا

$$p(K+1): 2^{2K+2} + 6K + 6 - 1 = 9t'$$

حکم استقرا

دو طرف فرض استقرا را در (2^2) ضرب می‌کنیم تا عدد توان‌دار در حکم ظاهر شود:

$$2^{2k+2} + 24k - 4 = 36t$$
$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 + 18k - 9 = 36t$$
$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 = 36t - 18k + 9$$
$$= 9\underbrace{(4t - 2k + 1)}_{t'}$$
$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 = 9t'$$

۶. می‌خواهیم ثابت کنیم $3^{15n+2}\times 2^{2n+2}\times 20^{2n} + 3 \overset{13}{\equiv} 0$، برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$3^3 = 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^3)^{5n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{15n} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 3^{15n+2} \overset{13}{\equiv} 1\times 3^2 = 9 \quad ①$$

$$2^{2n+2}\times 20^{2n} = 2^{2n}\times 2^2\times 20^{2n}$$
$$= (40)^{2n}\times 4,$$

$$40 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (40)^{2n} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (40)^{2n}\times 4 \overset{13}{\equiv} 4 \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow 3^{15n+2}\times 2^{2n+2}\times 20^{2n} + 3 \overset{13}{\equiv} 9\times 4 + 3 \overset{13}{\equiv} 0$$

۷. مجموعه‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

$A_1 = \{$ اعداد ۵ رقمی که رقم ۱ ندارند $\}$

$A_2 = \{$ اعداد ۵ رقمی که رقم ۵ ندارند $\}$

حال اگر بخواهیم تعداد اعداد ۵ رقمی که در آنها ارقام ۱ و ۵ حداقل یک بار به‌کار رفته باشند، را بیابیم، می‌بایست مقدار $|\overline{A_1 \cup A_2}|$ را یابیم، که داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2|$$

$\boxed{9}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}$

همهٔ اعداد ۵ رقمی $|S| = 9\times 10^4 \Rightarrow$

$\boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}\ \boxed{9}$

(اعداد ۵ رقمی فاقد ۱) $\Rightarrow 8\times 9^4 = |A_1|$

و به همین ترتیب $|A_2| = 8\times 9^4$

$\boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{8} \Rightarrow 7\times 8^4$

$= |A_1 \cap A_2|$

(اعداد ۵ رقمی که فاقد ۱ و ۵ هستند.)

$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = (9\times 10^4) - \left[8\times 9^4 + 8\times 9^4 - 7\times 8^4\right]$$

۸. برای محاسبهٔ (ROR) از قضیه استفاده می‌کنیم: یعنی از رابطهٔ $M(ROR) = [M(R)]^{(2)}$

$$R = \{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\}$$

$$\Rightarrow M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(M(R))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(ROR)$$

$$\Rightarrow ROR = \{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\} = R$$

۹. برای حلّ این مسأله، از فرمول احتمال کلّ استفاده می‌کنیم و طبق فرض داریم:

پیشامد این‌که ساعت معیوب باشد $= A$

$\Rightarrow P(A) = ?$

پیشامد این‌که ساعت از کارخانهٔ اوّل باشد $= B_1$

$\Rightarrow P(B_1) = 0/47$

پیشامد این‌که ساعت از کارخانهٔ دوم باشد $= B_2$

$\Rightarrow P(B_2) = 0/26$

پیشامد این‌که ساعت از کارخانهٔ سوّم باشد $= B_3$

$\Rightarrow P(B_3) = 0/27$

$P(A/B_1) = 0/08$, $P(A/B_2) = 0/06$,

$P(A/B_3) = 0/05$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)\times P(A/B_i)$$

$$= (0/47\times 0/08) + (0/26\times 0/06)$$
$$+ (0/27\times 0/05)$$

۱۰. برای حلّ این مسأله، از فرمول توزیع دو

جمله‌ای استفاده می‌کنیم و داریم:

$k=۳$ و $n=۵$ (تعداد تکرار آزمایش)

$P(A_۱)=\frac{۱}{۲۴}$

(احتمال این‌که در ۱ بار پرتاب، دو سکه H و تاس ۶ بیاید.)

$$P(A)=\binom{n}{k}\times\left[P(A_۱)\right]^k\times\left[۱-P(A_۱)\right]^{n-k}$$

$$\Rightarrow P(A)=\binom{۵}{۳}\times\left(\frac{۱}{۲۴}\right)^۳\times\left(\frac{۲۳}{۲۴}\right)^۲$$

$$\Rightarrow P(A)=۱۰\times\frac{(۲۳)^۲}{(۲۴)^۵}$$

.۱۱

x_i	۰	۱	۲	۳
$P(X=x_i)$	$\frac{\binom{۴}{۴}}{\binom{۷}{۴}}$	$\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۴}}$	$\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۴}}$	$\frac{\binom{۳}{۳}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۴}}$

(منظور از $x_i=۰$ یعنی در ۴ برداشت، هیچ لامپی معیوب نباشد یا هر ۴ لامپ سالم باشند و $x_i=۱$ یعنی حالتی که در ۴ لامپ برداشته شده، ۱ لامپ معیوب و سه لامپ سالم باشند و ...)

حلّ مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال۲

● احمد قندهاری

۱. بدون این‌که به اثبات لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم $x_۱<x_۲$، تابع به معادلهٔ $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ در بازهٔ $[x_۱,x_۲]$ پیوسته و در بازهٔ $(x_۱,x_۲)$ مشتق‌پذیر است، در نتیجه بنا به قضیهٔ مقدار میانگین (C)ای در بازهٔ $(x_۱,x_۲)$ هست که

یا

$$f'(c)=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

$$f(x_۲)-f(x_۱)=f'(c)(x_۲-x_۱)$$

چون $f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$، پس $f'(c)=\frac{۱}{۱+c^۲}$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\,x_۲-\mathrm{Arctan}\,x_۱=\frac{۱}{۱+c^۲}(x_۲-x_۱)$$

چون $۰<\frac{۱}{۱+c^۲}<۱$، پس:

$$\frac{۱}{۱+c^۲}|x_۲-x_۱|<|x_۲-x_۱|$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\,x_۲-\mathrm{Arctan}\,x_۱<x_۲-x_۱$$

پس $\Rightarrow |\mathrm{Arctan}\,x_۲-\mathrm{Arctan}\,x_۱|<|x_۲-x_۱|$

.۲

$$y=\sqrt[۳]{۱-x^۲}\Rightarrow y'=\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۲}}$$

$$y''=-\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۲}+\frac{۴x^۲}{۳\sqrt[۳]{۱-x^۲}}}{\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۴}}$$

$$=-\frac{۲}{۳}\times\frac{\frac{۳(۱-x^۲)+۴x^۲}{۳\sqrt[۳]{۱-x^۲}}}{\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۴}}$$

$$y''=-\frac{۲}{۳}\times\frac{۳+x^۲}{۳\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۵}}$$

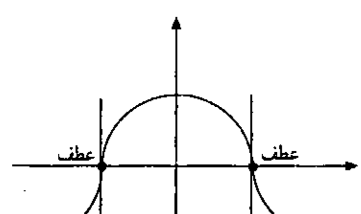
$$=-\frac{۲}{۳}\times\frac{۳+x^۲}{۳(۱-x^۲)\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۲}}$$

$$y''=\frac{۲}{۹}\times\frac{۳+x^۲}{(x^۲-۱)\sqrt[۳]{(۱-x^۲)^۲}}$$

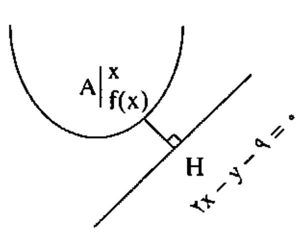
بجز عبارت $(x^۲-۱)$ بقیهٔ عوامل در y'' مثبتند:

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۱		$+۱$		$+\infty$
y''		+		−		+	
انحنای y		∪	عطف	∩	عطف	∪	



۳. روش اوّل: فاصلهٔ AH را پیدا کرده، سپس می‌نیمم می‌کنیم. اگر $A\Big|^{x_۱}_{y_۱}$ و معادله خط به صورت $ax+by+c=۰$ باشد، داریم:



$$AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{|۲x-f(x)-۹|}{\sqrt{۴+۱}}$$

$$=\frac{|۲x-x^۲+۲x-۹|}{\sqrt{۵}}=\frac{|-x^۲+۴x-۴-۵|}{\sqrt{۵}}$$

اگر $x=۲$، آن‌گاه AH می‌نیمم است.

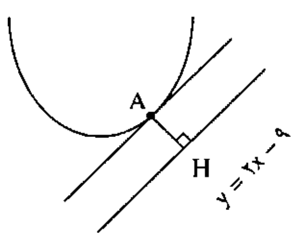
$$AH=\frac{|-(x-۲)^۲-۵|}{\sqrt{۵}}$$

به کمک مشتق از عبارت $|-x^۲+۴x-۹|$ نیز می‌توان می‌نیمم آن را پیدا کرد؛ به این ترتیب که: $-۲x+۴=۰$، پس: $x=۲$ و مقدار می‌نیمم برابر است با:

$$\mathrm{Min}(AH)=\frac{|-۵|}{\sqrt{۵}}=\boxed{\sqrt{۵}}$$

$\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\y=۰\end{cases}\Rightarrow$ نقطهٔ مورد نظر

روش دوم: خطی موازی خط به معادلهٔ $y=۲x-۹$ به منحنی تابع مماس می‌کنیم، مختصات نقطه A به‌دست می‌آید. سپس فاصلهٔ AH را که می‌نیمم فاصله است، به‌دست می‌آید.



$\Rightarrow y'=۲x-۲=۲$ شیب خط مماس

$$\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\Rightarrow A\Big|^{۲}_{۰}$$

$$AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴-۰-۹|}{\sqrt{۴+۱}}$$

$$=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\boxed{\sqrt{۵}}$$

.۴

$$y=\frac{۳x^۲-۱}{x^۳}$$

مجانب قائم $y\to\pm\infty\Rightarrow x^۳\to۰\Rightarrow\boxed{x=۰}$

مجانب افقی $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

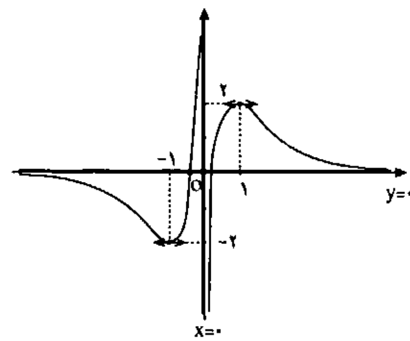
$$y' = \frac{6x^4 - 3x^2(3x^2-1)}{x^6}$$

$$= \frac{3x^2(1-x^2)}{x^6} = \frac{3(1-x^2)}{x^4} = 0$$

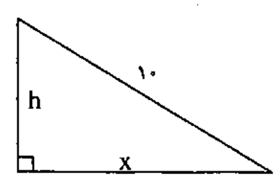
$$\Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$		$-$	
y	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	2	↘	0



.۵



$$x = 8$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}$$

$$h^2 = 100 - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$$

$$h' = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\Delta h \cong dh = h'.\Delta x = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}.\Delta x$$

$$= \frac{-8}{\sqrt{100-64}} \times \frac{1}{2} = \frac{-8}{6} \times \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$$ متر

.۶

$$\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$$

$$x_1 = \frac{b}{n},\ x_2 = 2(\frac{b}{n}),\ \dots\ x_i = i(\frac{b}{n}),\ \dots\ x_n = n(\frac{b}{n})$$

در تابع به معادلهٔ $y = x^3$، $y' = 3x^2 \geq 0$، پس تابع صعودی اکید است. به کمک بالاریمان ثابت می‌کنیم:

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

$$u_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\frac{ib}{n})\frac{b}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3 b^3}{n^3} \times \frac{b}{n} = \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow u_n(f) = \frac{b^4}{n^4} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^4}{n^4} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b^4}{n^4} \times \frac{n^4}{4} = \frac{b^4}{4}$$

.۷

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x - \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow H_1 = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{5x^4} = \frac{0}{0}$$

$$H_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{20x^3} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow H_4 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{60x^2} = \frac{0}{0}$$

$$H_5 = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{120x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{120x} = -\frac{1}{120}$$

۸. به روش جزء به جزء

$$\int xe^{2x}dx$$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^{2x}dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

داریم:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

توجه: $\int u'e^u dx = e^u + c$.

۹. توجه : داریم، اگر f تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{5 + \text{Arcsin}\,x}{4+9x^2}dx = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{5dx}{4+9x^2} + \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\text{Arcsin}\,x}{4+9x^2}dx$$

امّا تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{\text{Arcsin}\,x}{4+9x^2}$ تابعی فرد است، پس

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\text{Arcsin}\,x}{4+9x^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{5}{4+9x^2}dx$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{1+\frac{9}{4}x^2} \quad \begin{cases} u = \frac{3}{2}x \\ u' = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\frac{3}{2}dx}{1+\frac{9}{4}x^2} = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} \frac{u'dx}{1+u^2}$$

$$= (\frac{5}{6}\text{Arctan}\,u)_{-1}^{1} + c$$

$$= \frac{5}{6}(\text{Arctan}1 + \text{Arctan}1) = \frac{5}{6}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{5\pi}{12}$$

.۱۰

$$S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} ydx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx\right|$$

$$=\left|\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۴}}۲\cos(x+\frac{\pi}{۴})dx\right|=\left|+۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})\Big|_{\cdot}^{\frac{\pi}{۴}}\right|$$

$$=\left|۲\sin\frac{\pi}{۲}-۲\sin\frac{\pi}{۴}\right|=\left|۲-\sqrt{۲}\right|=۲-\sqrt{۲}$$

حل مسأله‌های حسابان ۲

● احمد قندهاری

۱. تابع f را در نقطهٔ $x_\cdot$ وقتی مشتق‌پذیر گویند که $\lim_{x\to x_\cdot}\frac{f(x)-f(x_\cdot)}{x-x_\cdot}$ برابر یک عدد معلوم و مشخص شود. حال حلّ مسأله:

$$|x^۲-۴x+۳|=|x-۳|\times|x-۱|$$

$$\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to۳}\frac{|x-۳|.|x-۱|\sqrt{|x+۱|}}{x-۳}$$

الف) $x\to۳^+\Rightarrow\lim_{x\to۳^+}\frac{(x-۳)|x-۱|\sqrt{|x+۱|}}{x-۳}$

$=۲\sqrt{۴}=۴=f'_+(۳)$ مشتق راست

ب) $x\to۳^-\Rightarrow\lim_{x\to۳^-}\frac{-(x-۳)|x-۱|\sqrt{|x+۱|}}{x-۳}$

$=-۲\sqrt{۴}=-۴=f'_-(۳)$ مشتق چپ

پس این تابع در $x_\cdot=۳$ مشتق‌پذیر نیست. اگر زاویهٔ بین دو نیم مماس α باشد، داریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|=\left|\frac{۴+۴}{۱-۱۶}\right|=\left|-\frac{۸}{۱۵}\right|$$

$$\Rightarrow\alpha=\text{Arctan}\frac{۸}{۱۵}$$

۲. تناوب اصلی تابع را T فرض می‌کنیم. باید $f(x+T)=f(x)$

$$f(x+T)=n(x+T)-\lfloor n(x+T)\rfloor$$

$$=nx+nT-\lfloor nx+nT\rfloor$$

برای آن که $f(x+T)$ برابر $f(x)$ شود، باید nT عدد صحیح باشد تا پس از خروج از جزء صحیح با nT بیرونی حذف شود؛ پس $nT=k\in Z$ و کوچکترین عدد صحیح $k=۱$، پس $nT=۱$، در

نتیجه: $\boxed{T=\frac{۱}{n}}$

۳. $y=\frac{\cos x}{۲\cos x+۱}\ ,\ \cdot\le x\le۲\pi$

مجانب قائم: $y\to\pm\infty\Rightarrow۲\cos x+۱=\cdot$

$$\Rightarrow\cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\boxed{x=\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ \frac{۴\pi}{۳}}$$

$$y'=\frac{-\sin x(۲\cos x+۱)+۲\sin x\cos x}{V^۲}$$

$$=\frac{-\sin x}{V^۲}=\cdot\Rightarrow\sin x=\cdot\Rightarrow x=k\pi$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\cdot,\pi,۲\pi}$$

$x=\cdot$ یا $۲\pi\Rightarrow y=\frac{\cos\cdot}{۲\cos\cdot+۱}=\frac{۱}{۳}$

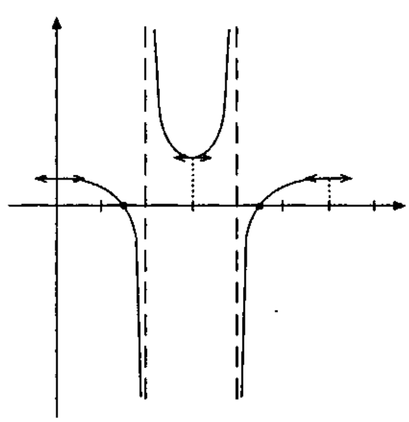
$$x=\pi\Rightarrow y=\frac{-۱}{-۲+۱}=۱$$

$$y=\cdot\Rightarrow\cos x=\cdot\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}}$$

x	y
$\frac{۲\pi}{۳}$	$\pm\infty$
$\frac{۴\pi}{۳}$	$\pm\infty$
$\cdot$	$\frac{۱}{۳}$
π	۱
۲π	$\frac{۱}{۳}$
$\frac{\pi}{۲}$	$\cdot$
$\frac{۳\pi}{۲}$	$\cdot$

x	$\cdot$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y'	$\cdot$ −	−	‖ −	$\cdot$ +	‖ +	+	$\cdot$
y	$\frac{۱}{۳}$ ↘	$\cdot$ ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	۱ ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	$\cdot$ ↗	$\frac{۱}{۳}$

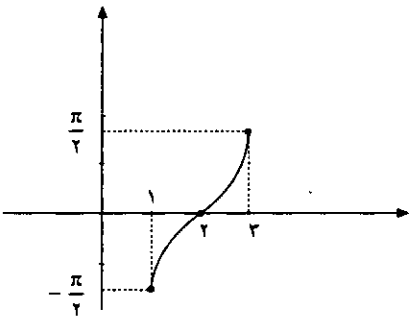


۴. $y=\text{Arcsin}(x-۲)$

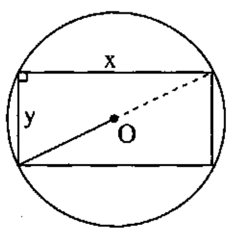
$$-۱\le x-۲\le۱\Rightarrow۱\le x\le۳\Rightarrow D_{\text{تابع}}=[۱,۳]$$

$$y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-(x-۲)^۲}}>\cdot$$

x	۱		۲		۳
y'		+		+	
y	$-\frac{\pi}{۲}$	↗	$\cdot$	↗	$\frac{\pi}{۲}$



۵. مساحت مستطیل را S می‌نامیم.



$$x^۲+y^۲=۱۶\quad x,y>\cdot$$

$$S=x.y=x\sqrt{۱۶-x^۲}$$

$$S'=\sqrt{۱۶-x^۲}+\frac{-x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}$$

$$S'=\frac{۱۶-x^۲-x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=\frac{۱۶-۲x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=\cdot$$

$$\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=۲\sqrt{۲}$$

$$Max(S)=۲\sqrt{۲}\sqrt{۱۶-۸}=۲\sqrt{۲}(۲\sqrt{۲})=۸$$

۶. $\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲-۴)>-۱$

$$\Rightarrow\cdot<x^۲-۴<(\frac{۱}{۵})^{-۱}$$

توجه: هرگاه مبنای لگاریتم یعنی a بین صفر و یک باشد، در تابع نامساویها، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\Rightarrow\cdot<x^۲-۴<۵\Rightarrow۴<x^۲<۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲ < x < ۳ \\ \text{یا} \\ -۳ < x < -۲ \end{cases}$$

۷. شعاع دایره را R می‌نامیم، مختصات مرکز $O'\begin{vmatrix} R \\ -R \end{vmatrix}$ خواهد شد. معادلهٔ دایره که در ربع چهارم بر محور مماس است:

$$(x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲$$

$$A\begin{vmatrix} ۱ \\ -۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} (۱-R)^۲+(-۲+R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow ۱+R^۲-۲R+۴+R^۲-۴R=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} R=۱ \\ R=۵ \end{cases}$$

معادله‌های دایره‌ها:

$$R=۱ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۱$$

$$R=۵ \Rightarrow (x-۵)^۲+(y+۵)^۲=۲۵$$

۸. O' مرکز هذلولی وسط FF' است

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{O'}=\dfrac{x_F+x_{F'}}{۲}=\dfrac{۱+۱}{۲}=۱ \\ y_{O'}=\dfrac{y_F+y_{F'}}{۲}=\dfrac{۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}}{۲}=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow O'\begin{vmatrix} ۱=h \\ ۰=k \end{vmatrix}$$

$$FF'=۲c=|y_F-y_{F'}|=|۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}|$$

$$=۴\sqrt{۳} \Rightarrow \boxed{c=۲\sqrt{۳}}$$

$$\frac{c}{a}=\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{a}=\sqrt{۳} \Rightarrow \boxed{a=۲}$$

$$c^۲=a^۲+b^۲ \Rightarrow ۱۲=۴+b^۲ \Rightarrow \boxed{b^۲=۸}$$

چون $x_F=x_{F'}$ ، پس محور کانونی، موازی محور عرضها و هذلولی نوع چهارم است.

$$\frac{(y-k)^۲}{a^۲}-\frac{(x-h)^۲}{b^۲}=۱$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(y-۰)^۲}{۴}-\frac{(x-۱)^۲}{۸}=۱}$$

۹.

$$A=\int_{-۳}^{۳}\frac{dx}{۹+x^۲}=\frac{۱}{۹}\int_{-۳}^{۳}\frac{dx}{۱+\frac{x^۲}{۹}}$$

$$u=\frac{x}{۳} \Rightarrow u'=\frac{۱}{۳}\begin{cases} \text{اگر } x=-۳ \Rightarrow u=-۱ \\ \text{اگر } x=۳ \Rightarrow u=۱ \end{cases}$$

$$=\frac{۱}{۹}\int_{-۱}^{۱}\frac{۳\times\frac{۱}{۳}dx}{۱+u^۲}=\frac{۱}{۳}\int_{-۱}^{۱}\frac{u'dx}{۱+u^۲}$$

$$=\frac{۱}{۳}(\text{Arctan}\,u)_{-۱}^{۱}=\frac{۱}{۳}(\text{Arctan}\,۱)-(\text{Arctan}(-۱))$$

$$\equiv \frac{۱}{۳}(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\frac{\pi}{۶}$$

۱۰.

$$\int_۰^۴\lfloor x+۴\rfloor dx=\int_۰^۴\lfloor x\rfloor dx+\int_۰^۴ ۴dx$$

$$=\int_۰^۱ ۰dx+\int_۱^۲ ۱dx+\int_۲^۳ ۲dx+\int_۳^۴ ۳dx+(۴x)_۰^۴$$

$$=(x)_۱^۲+(۲x)_۲^۳+(۳x)_۳^۴+(۴x)_۰^۴$$

$$=(۲-۱)+(۶-۴)+(۱۲-۹)+۱۶=۲۲$$

پاسخ کلیدی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● هندسه ۱

۱. (۴)	۲. (۲)	۳. (۲)	۴. (۴)
۵. (۱)	۶. (۳)	۷. (۲)	۸. (۴)
۹. (۱)	۱۰. (۲)		

● ریاضیات گسسته

۱۱. (۳)	۱۲. (۲)	۱۳. (۴)	۱۴. (۲)
۱۵. (۴)	۱۶. (۲)	۱۷. (۴)	۱۸. (۳)
۱۹. (۳)	۲۰. (۴)	۲۱. (۱)	۲۲. (۳)
۲۳. (۲)	۲۴. (۳)		

● جبر و احتمال

۲۵. (۳)	۲۶. (۱)	۲۷. (۴)	۲۸. (۱)
۲۹. (۳)	۳۰. (۴)	۳۱. (۳)	۳۲. (۳)
۳۳. (۲)	۳۴. (۲)	۳۵. (۲)	۳۶. (۴)

● حسابان ۱

۳۷. (۲)	۳۸. (۴)	۳۹. (۳)	۴۰. (۱)
۴۱. (۳)	۴۲. (۴)	۴۳. (۴)	۴۴. (۱)
۴۵. (۴)	۴۶. (۱)	۴۷. (۴)	۴۸. (۲)
۴۹. (۳)	۵۰. (۳)	۵۱. (۴)	۵۲. (۲)
۵۳. (۳)	۵۴. (۴)	۵۵. (۲)	۵۶. (۴)

● حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۵۷. (۴)	۵۸. (۳)	۵۹. (۳)	۶۰. (۲)
۶۱. (۳)	۶۲. (۴)	۶۳. (۳	۶۴. (۲)
۶۵. (۴)	۶۶. (۳)	۶۷. (۱)	۶۸. (۱)
۶۹. (۲)	۷۰. (۴)	۷۱. (۱)	۷۲. (۳)
۷۳. (۳)	۷۴. (۱)	۷۵. (۲)	۷۶. (۱)

● ریاضی عمومی ۱

۷۷. (۲)	۷۸. (۳)	۷۹. (۱)	۸۰. (۱)
۸۱. (۴)	۸۲. (۳)	۸۳. (۱)	۸۴. (۱)
۸۵. (۴)	۸۶. (۳)	۸۷. (۲)	

● هندسه تحلیلی

۸۸. (۴)	۸۹. (۳)	۹۰. (۱)	۹۱. (۱)
۹۲. (۲)	۹۳. (۴)	۹۴. (۱)	۹۵. (۲)
۹۶. (۴)	۹۷. (۳)		

● ریاضی ۱

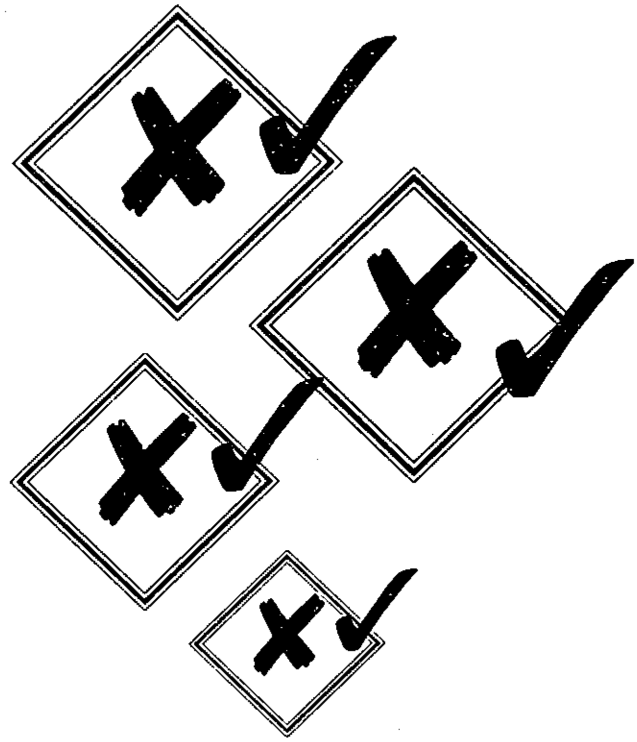
۹۸. (۲)	۹۹. (۳)	۱۰۰. (۴)	۱۰۱. (۳)
۱۰۲. (۴)	۱۰۳. (۴)	۱۰۴. (۳)	۱۰۵. (۳)
۱۰۶. (۴)	۱۰۷. (۲)		

● ریاضی ۲

۱۰۸. (۳)	۱۰۹. (۱)	۱۱۰. (۳)	۱۱۱. (۲)
۱۱۲. (۴)	۱۱۳. (۲)	۱۱۴. (۲)	۱۱۵. (۱)
۱۱۶. (۴)	۱۱۷. (۴)	۱۱۸. (۳)	۱۱۹. (۲)
۱۲۰. (۳)			

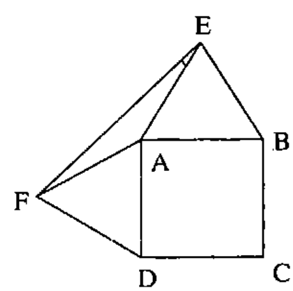
سؤالات چهار گزینه‌ای

احمد قندهاری
محمدهاشم رستمی
حمیدرضا امیری
میرشهرام صدر
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی



هندسهٔ ۱

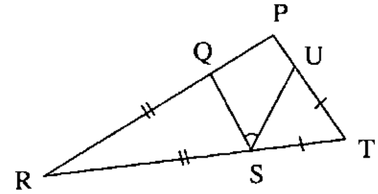
۱. در شکل داده شده چهارضلعی ABCD مربع و مثلثهای ABE و ADF متساوی‌الاضلاعند. متمم زاویهٔ AEF چند درجه است؟



۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۷۵

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ PRT ($\hat{P}=90^\circ$) ضلعهای مشخص شده با علامتهای یکسان، متساویند ؛ اندازهٔ زاویهٔ QSU چند درجه است؟

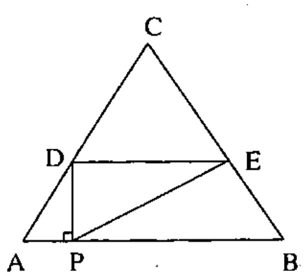
۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵



۳. قطرهای یک چهارضلعی محدّب بر هم عمودند. اندازهٔ مساحت این چهارضلعی برابر است با :

۱) حاصل‌ضرب دو قطر
۲) نصف حاصل‌ضرب دو قطر
۳) دو برابر حاصل‌ضرب دو قطر
۴) چهار برابر حاصل‌ضرب دو قطر

۴. در شکل، ABC مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲۰cm و AD = ۸cm و DP⊥AB است. اندازهٔ پاره‌خط PE چه‌قدر است؟



۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۵. اگر نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه a^2+3 و نسبت محیطهای این دو مثلث $a+1$ باشد، a برابر است با :

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

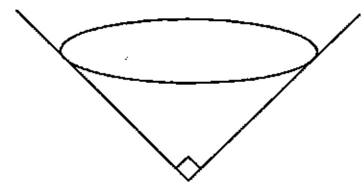
۶. اگر اندازهٔ قطر مکعبی $\sqrt{2}$ برابر شود، حجم آن چند برابر می‌شود؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۷. قاعدهٔ منشور مایلی، مربعی به ضلع ۸cm، طول یال جانبی آن ۱۲cm و زاویهٔ یال با صفحهٔ قاعده برابر ۶۰ درجه است، اندازهٔ حجم این منشور چه قدر است؟

۱) $۶۴\sqrt{۳}$ ۲) $۳۸۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۹۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲۸\sqrt{۳}$

۸. به اندازهٔ ۷۲π متر مکعب آب در گودالی مخروطی شکل که زاویهٔ رأس آن ۹۰ درجه است، ریخته‌ایم. ارتفاع آب چند متر است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹. سطح جانبی یک کره $۳۶\pi cm^۲$ است، حجم نصف این کره، چند سانتی‌متر مکعب است؟

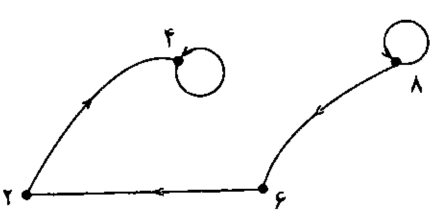
۱) ۱۸π ۲) ۱۸ ۳) ۳۶π ۴) ۳۶

۱۰. ارتفاع هرم مربع القاعدهٔ منتظمی برابر ۱۲cm و اندازهٔ یال آن ۱۳cm است. اندازهٔ مساحت قاعدهٔ این هرم، چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

❖ ریاضیات گسسته

۱۱. گراف جهت‌دار رابطهٔ R روی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ در زیر رسم شده است، رابطهٔ R کدام است؟



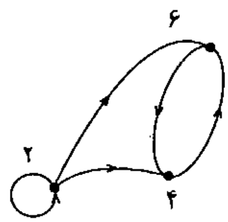
۱) $R = \{(۲,۴),(۶,۲),(۸,۶),(۸,۸)\}$

۲) $R = \{(۲,۴),(۲,۶),(۴,۴),(۸,۶),(۸,۸)\}$

۳) $R = \{(۸,۶),(۲,۴),(۶,۲),(۴,۴),(۸,۸)\}$

۴) $R = \{(۸,۶),(۸,۸),(۶,۲),(۴,۲),(۴,۴)\}$

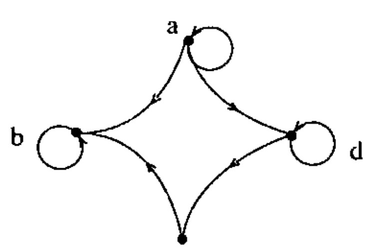
۱۲. اگر $A = \{۲,۴,۶\}$ و R رابطه‌ای روی A با گراف زیر باشد، ماتریس این گراف کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۳. گراف جهت‌دار رابطهٔ R در زیر رسم شده است، کدام گزینه درست است؟



۱) R انعکاسی است.

۲) R متقارن است.

۳) R فقط پاد متقارن و ترایایی است.

۴) R فقط پاد متقارن است.

۱۴. معادلهٔ $x+y+z+t=۷$ چند جواب صحیح مثبت دارد؟

۱) $\binom{۱۰}{۳}$ ۲) $\binom{۶}{۳}$

۳) $\binom{۷}{۴}$ ۴) $\binom{۱۱}{۴}$

۱۵. عبارت حاصل از بسط $(a+b+c+d)^{۹}$ چند جمله دارد؟

۱) $\binom{۹}{۳}$ ۲) $\binom{۱۰}{۴}$

۳) $\binom{۸}{۳}$ ۴) $\binom{۱۲}{۳}$

۱۶. n مهره داریم و آنها را به تصادف در m ظرف $u_{۱}, u_{۲}, \dots, u_m$ قرار می‌دهیم. احتمال آن که در ظرف $u_{۲}$، k مهره قرار گرفته باشد، چه‌قدر است؟ $(k<n)$

۱) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-k)^{n-k}}{n^m}$ ۲) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-۱)^{n-k}}{n}$

۳) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-۱)^{n-k}}{n^m}$ ۴) $\dfrac{\binom{n}{k}(m-k)^{n-k}}{m^k}$

۱۷. اگر $P(B)=\frac{۱}{۳}$ ، $P(\frac{A}{B})=\frac{۱}{۴}$ و $P(\frac{B}{A})=\frac{۲}{۵}$ ، در این صورت، $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$

۳) $\frac{۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

۱۸. در کیسهٔ A ، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه و در کیسهٔ B، ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یکی از این دو کیسه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم. اگر مهرهٔ انتخاب شده سیاه باشد، احتمال این که این مهره متعلّق به کیسهٔ B باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۹. یک سکّه طوری ساخته شده است که احتمال T آمدن آن برابر $\frac{۲}{۳}$ است. اگر این سکّه را ۵ بار پرتاب کنیم، احتمال آن که دقیقاً ۴ بار H بیاید، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳^{۴}}$ ۲) $\frac{۲^{۴}}{۳^{۴}}$

۳) $\frac{۱۰}{۳^{۴}}$ ۴) $\frac{۴}{۳^{۴}}$

۲۰. اگر G یک گراف باشد که درجهٔ همهٔ رئوس آن ۴ است و $۳|V|=|E|+۸$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) $|E|=۱۴\ ,\ |V|=۷$

۲) $|E|=۱۰\ ,\ |V|=۶$

۳) $|E|=۱۸\ ,\ |V|=۸$

۴) $|E|=۱۶\ ,\ |V|=۸$

۲۱. اگر گراف G دارای ۱۴ رأس و ۲۲ یال باشد، چه تعداد از یال‌ها را باید حذف کنیم تا گراف به درخت تبدیل شود؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۲۲. اگر m عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[(۲^{۵},۳^{m}),(۳^{m},۶^{m})\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۳^{m} ۴) ۶^{m}

۲۳. باقیماندهٔ تقسیم $(۵^{۱۲۰}-۷)$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۶- ۴) ۶

۲۴. معادلهٔ $mx+m^{۲}y=k$ در Z، دارای جواب است، کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $m|k$ ۲) $(m,k)=|m|$

۳) $\left[m^{۴},k^{۴}\right]=k$ ۴) $(m^{۲},k^{۲})=k^{۲}$

❖ جبر و احتمال

۲۵. ۵ نقطهٔ متمایز از محیط دایرهٔ مثلثاتی مفروضند، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) حداقل دو نقطه دارای نسبتهای مثلثاتی برابر هستند.

۲) حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه، تانژانتهای برابر خواهند داشت.

۳) حداقل دو نقطه دارای نسبتهای مثلثاتی هم علامت هستند.

۴) هیچ دو نقطه‌ای سینوسهای برابر ندارند.

۲۶. اگر $U=\{1,2,3,\dots,k\}$ مجموعهٔ مرجع $(k>10)$ و $A=\{3,4,\dots,k-3\}$ و $B=\{1,2,\dots,k-6\}$ ، در این صورت مجموعهٔ $(A-B)$ کدام است؟

۱) $\{(k-5),(k-4),(k-3)\}$

۲) $\{1,2,\dots,k-6\}$

۳) $\{3,4,\dots,k-6\}$

۴) $\{1,2,(k-5),(k-4),(k-3)\}$

۲۷. اگر $A=\{x-y,3\}$ و $B=\{3x-2,1\}$ و $A\times B=B\times A$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $x=\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{5}{3}$ ‏ ۲) $x=-\frac{2}{3}\ ,\ y=-\frac{5}{3}$

۳) $x=\frac{2}{3}\ ,\ y=-\frac{5}{3}$ ‏ ۴) $x=\frac{5}{3}\ ,\ y=\frac{2}{3}$

۲۸. شرط لازم و کافی برای آن که $[a]=[b]$ کدام است؟ (رابطهٔ R هم‌ارزی است.)

۱) $(a,b)\in R^{-1}$ ‏ ۲) $(b,a)\notin R^{-1}$

۳) $a\in R\ ,\ b\in R$ ‏ ۴) $a\not R b$

۲۹. رابطهٔ R روی $\mathbb{R}$ به صورت $(x,y)R(z,k)\Leftrightarrow x+k=y+z$ تعریف شده است ؛ نمودار دسته‌های هم‌ارزی این رابطه کدام است؟

۱) خطوط موازی نیمساز ناحیهٔ دوم

۲) خطوط عمود بر محور yها

۳) خطوط موازی نیمساز ناحیهٔ اوّل

۴) خطوط عمود بر محور xها

۳۰. عدد $(49)^{101}+4^{100}$ به کدام رقم ختم می‌شود؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۵

۳۱. باقیماندهٔ تقسیم $(1!+2!+3!+\dots+20!)$ بر ۲۴ کدام است؟

۱) صفر ‏ ۲) ۲۳ ‏ ۳) ۹ ‏ ۴) ۴

۳۲. می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۵ دونده، یک تیم چهار نفره انتخاب کنیم. احتمال آن که در این تیم حداقل یک فوتبالیست به طور حتم حضور داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{80}{93}$ ‏ ۲) $\frac{80}{91}$ ‏ ۳) $\frac{205}{210}$ ‏ ۴) $\frac{205}{220}$

۳۳. یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال آن که عدد کوچکتر از ۴ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{21}$ ‏ ۲) $\frac{5}{12}$ ‏ ۳) $\frac{1}{12}$ ‏ ۴) $\frac{5}{21}$

۳۴. دو قطعه چوب ۱متری و ۲متری داریم، چوب بزرگتر را تصادفی به دو قسمت ارّه می‌کنیم، احتمال آن که این سه قطعه چوب، تشکیل یک مثلث بدهند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ‏ ۲) $\frac{3}{2}$ ‏ ۳) $\frac{2}{3}$ ‏ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۵. اگر A و B دو پیشامد باشند، $P(A-B)+P(B)$ کدام است؟

۱) $P(A)$ ‏ ۲) $P(A\cup B)$

۳) $P(B)$ ‏ ۴) $P(A\cap B)$

۳۶. احتمال آن که در تیراندازی، دو شخص A و B به هدف بزنند، بترتیب $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{3}$ است، اگر A و B با هم شلیک کنند، احتمال آن که لااقل یکی به هدف نزند، کدام است؟

۱) $\frac{2}{15}$ ‏ ۲) $\frac{4}{15}$ ‏ ۳) $\frac{11}{15}$ ‏ ۴) $\frac{13}{15}$

حسابان ۱

۳۷. دامنهٔ تعریف تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $[0,5]$ ‏ ۲) $[1,5]$

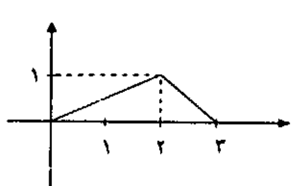
۳) $[-1,5]$ ‏ ۴) $[1,4]$

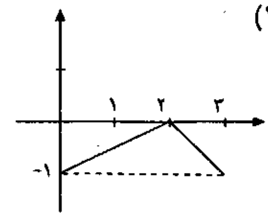
۳۸. برد تابع به معادلهٔ $f(x)=\lfloor \tan x+\cot x\rfloor$ کدام است؟

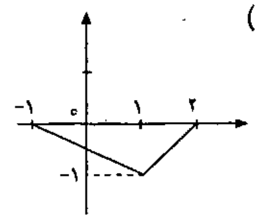
۱) $\mathbb{R}$ ‏ ۲) Z

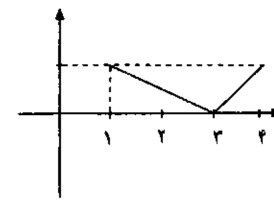
۳) $(\mathbb{R}-Z)$ ‏ ۴) $Z-\{\pm1,0\}$

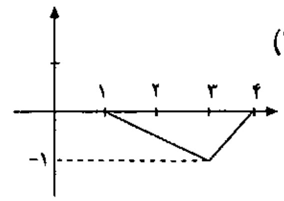
۳۹. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن‌گاه نمودار تابع به معادلهٔ $g(x)=1-f(x-1)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۴۰. کدام‌یک از تابعهای به معادله‌های زیر، هم فرد است و هم زوج؟

۱) $f(x)=\left\lfloor \frac{x^2}{x^2+1} \right\rfloor$ ۲) $g(x)=ax^n$ ، $n\in\mathbb{N}$

۳) $h(x)=\tan x+\cot x$ ۴) $t(x)=x^2-x$

۴۱. سهمی به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{2}x^2+\sqrt{m^2+1}\ x-\sqrt{6}$ به ازای چه مقدارهای m، منحنی سهمی محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟

۱) $m\geq 2$ ۲) $\sqrt{2}<m<\sqrt{3}$

۳) همهٔ مقادیر m ۴) هیچ مقدار m

۴۲. اگر $f(x)=x^3-3x$ ، آن‌گاه باقیماندهٔ تقسیم $f(2x-1)$ بر $(2x-1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) صفر

۴۳. معادلهٔ تابع معکوس تابع به معادلهٔ $f(x)=x^3-3x^2+3x$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=1-\sqrt[3]{x+1}$ ۲) $f^{-1}(x)=-1+\sqrt[3]{x-1}$

۳) $f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x+1}$ ۴) $f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x-1}$

۴۴. تابع به معادلهٔ $f(x)=(\lfloor x\rfloor-2)(\lfloor x\rfloor-1)$ در $x_0=2$:

۱) حدّ دارد. ۲) فقط حدّ راست دارد.

۳) فقط حدّ چپ دارد. ۴) نه حدّراست داردنه حدّچپ.

۴۵. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\lfloor x+\sin x\rfloor}{\lfloor 5\sin x\rfloor}$ برابر است با :

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۶. $\lim\limits_{x\to\infty}\left\lfloor \frac{4x^2-5}{x^2+1}\right\rfloor$ برابر است با :

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۵−

۴۷. معادلهٔ نمودار تابع معکوس تابع به معادلهٔ $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{2x+1}{x-2}$ ۲) $y=\frac{2x+1}{x+2}$

۳) $y=\frac{x-2}{2x-1}$ ۴) $y=\frac{2x-1}{x-2}$

۴۸. اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و داشته باشیم $h(x)=f(\frac{x}{4})$ ، آن‌گاه معادلهٔ تابع معکوس تابع h کدام است؟

۱) $2f^{-1}(x)$ ۲) $4f^{-1}(x)$

۳) $\frac{f^{-1}(x)}{2}$ ۴) $\frac{f^{-1}(x)}{4}$

۴۹. در تابع به معادلهٔ $f(x)=3x+2$ ، اگر $x\to 1$ ، آن‌گاه $f(x)\to 5$ ، اگر $|f(x)-5|<\frac{1}{100}$ ، آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $\frac{199}{200}<x<\frac{201}{200}$ ۲) $\frac{99}{100}<x<\frac{101}{100}$

۳) $\frac{299}{300}<x<\frac{301}{300}$ ۴) $1<x<5$

۵۰. در تابع به معادلهٔ $f(x)=4x+1$ ، اگر $\frac{49}{10}<f(x)<\frac{51}{10}$ ، آن‌گاه x به سمت چه عددی میل می‌کند؟

۱) $x\to -1$ ۲) $x\to\frac{1}{2}$

۳) $x \to 1$ ۴) $x \to -\frac{1}{2}$

۵۱. معادلهٔ مجانب افقی تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{2x-1}$ ، $x \geq 0$ کدام است؟

۱) $y = 2$ ۲) $y = 0$

۳) $y = 1$ ۴) $y = \frac{1}{2}$

۵۲. اگر منحنی به معادلهٔ $f(x) = \frac{ax^2+4x-1}{bx+10}$ دارای مجانب افقی به معادلهٔ $y = 1$ باشد، $(a+b)$ برابر است با :

۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۵۳. منحنی به معادلهٔ $y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-2}$ چه مجانبهایی دارد؟

۱) یک قائم و یک افقی ۲) یک قائم و دو افقی

۳) دو افقی ۴) فقط یک قائم

۵۴. منحنی به معادلهٔ $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$، چند مجانب قائم دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) هیچ

۵۵. منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ چه مجانبهایی دارد؟

۱) یک قائم ۲) دو قائم

۳) دو قائم و یک افقی ۴) یک افقی و یک قائم

۵۶. تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{-2x^2+11x-9}$ در کدام یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

۱) $(-\infty, 1) \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$ ۲) $[-1, 1]$

۳) $[-1, \frac{9}{2}]$ ۴) $[2, \frac{9}{2}]$

❖ حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

۵۷. کدام یک از گزاره‌های زیر، ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی است؟

۱) برای هر عدد حقیقی x و y که مثبت باشند عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx > y$.

۲) برای هر عدد حقیقی x و عدد حقیقی $y > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx > y$.

۳) برای هر عدد حقیقی y و عدد حقیقی $x > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx < y$.

۴) برای هر عدد حقیقی y و عدد حقیقی $x > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که : $nx > y$.

۵۸. اگر $a < x < b$ و a و b حقیقی و $a < b$ ، آن‌گاه داریم :

۱) $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{a-b}{2}$ ۲) $\left|x - \frac{a-b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$

۳) $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$ ۴) $\left|x - \frac{a-b}{2}\right| < \frac{a-b}{2}$

۵۹. دنباله‌های : الف : $\{\sqrt{n}\}$ ، ب : $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ ، ج : $\left\{\frac{n^2+10}{n^2-1}\right\}$ و د : $\{n^2-2n\}$ ، کدام همگرا و کدام واگراست.

۱) الف و ج واگرا و ب و د همگراست.

۲) الف و ج همگرا و ب و ج واگراست.

۳) الف و د واگرا و ب و ج همگراست.

۴) الف و ب همگرا و ج و د واگراست.

۶۰. در دنبالهٔ $\left\{\frac{4n+1}{2n-5}\right\}$ برای کدام مقادیر n رابطهٔ $2/001 > \frac{4n+1}{2n-5} > 1/999$ برقرار است؟

۱) $n \geq 5502$ ۲) $n \geq 5503$

۳) $n \geq 5501$ ۴) $n \geq 5500$

۶۱. دنبالهٔ $\left\{\frac{\cos n + 2n^2 - 1}{n^2+1}\right\}$

۱) واگراست. ۲) به عدد (۱) همگراست.

۳) به عدد (۲) همگراست. ۴) به عدد (۱ −) همگراست.

۶۲. دنبالهٔ مثبت $\{a_n\}$: $a_1=\sqrt{۶}$ و $a_{n+1}=\sqrt{۶+a_n}$ به کدام یک از اعداد زیر همگراست؟

۱) به ۶ ۲) به $\sqrt{۶}$

۳) به ۲ – ۴) به ۳

۶۳. اگر $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right)$، آن‌گاه :

۱) سری به صفر همگراست. ۲) سری به (۱) همگراست.

۳) سری به $\frac{1}{2}$ همگراست. ۴) سری واگراست.

۶۴. اگر $S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{k+1}$، آن‌گاه :

۱) سری به صفر همگراست. ۲) سری به $\log 2$ همگراست.

۳) سری به $\log\frac{1}{2}$ همگراست. ۴) سری واگراست.

۶۵. اگر حدّ تابع f در نقطهٔ a برابر L باشد، کدام درست است؟

۱) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ x\ge a\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

۲) $\forall\delta>0\exists\varepsilon>0:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

۳) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ 0<|x-a|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-L|<\delta$

۴) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

۶۶. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ در نقاط $x_1=3$ و $x_2=-3$

۱) حدّ دارد.

۲) در x_1 حدّ دارد ؛ ولی در x_2 حدّ ندارد.

۳) در x_1 حدّ چپ و در x_2 حدّ راست دارد.

۴) در x_1 حدّ راست و در x_2 حدّ چپ دارد.

۶۷. دو دنبالهٔ : الف : $\left\{\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\}$ و ب : $\left\{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ مفروضند، کدام درست است؟

۱) دنبالهٔ الف حدّ دارد ؛ ولی دنبالهٔ ب حدّ ندارد.

۲) دنبالهٔ الف حدّ ندارد ؛ ولی دنبالهٔ ب حدّ دارد.

۳) دنبالهٔ الف و دنبالهٔ ب، هر دو حدّ دارند.

۴) دنبالهٔ الف و دنبالهٔ ب، هر دو حدّ ندارند.

۶۸. تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{|x|}-4 & , x>0\\ b-1 & , x=0\\ \left[x-\frac{1}{2}\right] & , x<0\end{cases}$ در $x_0=0$ پیوسته است ؛ $(a+b)$ برابر است با :

۱) ۳ ۲) ۳ –

۳) ۲ ۴) ۲ –

۶۹. تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-4\right) & , x\notin Z\\ 0 & , x\in Z\end{cases}$ مفروض است. این تابع در چند نقطه به طولهای عدد صحیح پیوسته است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه

۳) سه نقطه ۴) بی‌شمار نقطه

۷۰. اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد، آن‌گاه کدام همواره درست است؟

۱) تابع f^{-1} در بازه $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید است.

۲) تابع f^{-1} در بازه $[b,a]$ پیوسته و صعودی است.

۳) تابع f^{-1} در بازه $[a,b]$ پیوسته و نزولی اکید است.

۴) تابع f^{-1} در بازه $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید است.

۷۱. معادله‌های مجانبهای مایل تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$ کدام است؟

۱) $y=\pm x$ ۲) $y=\pm(x-1)$

۳) $y=\pm\frac{x}{2}$ ۴) $y=\pm x\sqrt{2}$

۷۲. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}$ در نقطهٔ $x_0=0$:

۱) مشتق‌پذیر است.

۲) مشتق راست و چپ دارد ؛ ولی مساوی نیستند.

۳) نه مشتق راست دارد نه مشتق چپ.

۴) فقط مشتق راست دارد.

۷۳. اگر $f(x) = \tan^2 x$ ، آن‌گاه

$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-2h\right)}{2h}$ برابر است با :

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۷۴. تابع به معادلهٔ $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \ x \geq 2 \\ ax^2 + b & , \ x < 2 \end{cases}$ در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، $(a-b)$ برابر است با :

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۷−
۴) ۸−

۷۵. متحرکی روی مسیر به معادلهٔ $y = \sqrt{x^2 - 4}$ به گونه‌ای حرکت می‌کند که آهنگ افزایش مؤلفهٔ x ، ۵ متر در ثانیه است. در $x = 3$ مؤلفهٔ y با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۱) $2\sqrt{5}$
۲) $3\sqrt{5}$
۳) $4\sqrt{5}$
۴) $5\sqrt{5}$

۷۶. اگر شعاع یک دایره با سرعت ۲ متر در ثانیه افزایش یابد، مساحت سطح آن، هنگامی که شعاع ۱۰ سانتیمتر است، با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ $\pi = 3/14$

۱) ۱۲۵/۶
۲) ۱۱۵/۶
۳) ۱۰۵/۶
۴) ۹۵/۶

❖ ریاضی عمومی ۱

۷۷. اگر ضریب تغییرات داده‌های آماری x_1 ، x_2 ، ... ، x_n برابر ۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌های آماری $2x_1$ ، $2x_2$ ، ... ، $2x_n$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{4}$

۷۸. اگر از داده‌های آماری، ۵ واحد کم کنیم، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) از دامنهٔ تغییرات ۵ واحد کم می‌شود.

۲) به دامنهٔ تغییرات ۵ واحد اضافه می‌شود.

۳) دامنهٔ تغییرات تغییری نمی‌کند.

۴) به دامنهٔ تغییرات ۲/۵ واحد اضافه می‌شود.

۷۹. از ظرفی که شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است، ده مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آن که هر دو مهره سیاه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{6}{72}$
۲) $\left(\frac{3}{9}\right)^2$
۳) $\frac{11}{64}$
۴) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$

۸۰. به ازای کدام مقدار a، جدول زیر یک توزیع احتمال است؟

x	−۱	۰	۱	۲
P(x)	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{8}$	$\frac{a}{8}$

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) ۱
۴) $\frac{1}{2}$

۸۱. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد، تا این که دستگاه $\begin{cases} ax - 2y = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ دارای جوابهای غیرصفر باشد؟

۱) $2b - ab = 0$
۲) $ab - 2a = 0$
۳) $a^2 = 2b$
۴) $a^2 = -2b$

۸۲. اگر $y = 2^{2x-1}$ ، آن‌گاه ضابطهٔ معکوس این تابع کدام است؟

۱) $y = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}$
۲) $y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}$
۳) $y = \frac{1}{2}\log_2^x + \frac{1}{2}$
۴) $y = \frac{1}{2}\log_2^x - \frac{1}{2}$

۸۳. اگر $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ ، مقدار x کدام است؟

۱) $x = 0$
۲) $x = 1$
۳) $x = -1$
۴) $x = e$

۸۴. اگر ماتریس $c=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & (a+b) \\ ۰ & a+۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس سطری پلکانی تحویل یافته باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $-a=b=۱$
۲) $a=-b=۱$
۳) $a=b=۱$
۴) $a=b=-۱$

۸۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۵+۵x|$ را در نظر می‌گیریم، کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است.
۲) نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-۵$ زاویه‌دار است.
۳) تابع در نقطهٔ $x=-۵$ مشتق‌پذیر است.
۴) نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۰$ زاویه‌دار است.

۸۶. مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=e^{\cos(x-y)}+e^{\cos(y-x)}+۱=۰$ کدام است؟

۱) $f'=\frac{e^{\cos(x-y)}}{e^{\cos(x+y)}}$
۲) $f'=\frac{۲^{\cos(x-y)}}{e^{\cos(x+y)}}$
۳) $f'=۱$
۴) $f'=-۱$

۸۷. اگر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x+۳}{x^۲+mx+۴}$ دارای یک مجانب قائم باشد، m کدام است؟

۱) $m=۰$
۲) $m=\pm۴$
۳) $m=\pm۸$
۴) $m=\pm۶$

❖ هندسهٔ تحلیلی پیش دانشگاهی

۸۸. به ازای چه مقداری از a، فاصلهٔ دونقطهٔ $A=(a+۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳+a)$ و $B=(۱\ ,\ ۳\ ,\ -۱+a)$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است؟

۱) -۳
۲) $+۳$
۳) $+۹$ و -۹
۴) $+۳$ و -۳

۸۹. اگر بردارهای $a=(۳,۲P+۵,۱)$ و $b=(m-۱,m+P-۱,m+n)$ برابر باشند، $m+n+P$ چه قدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۹۰. اگر $a=۲i+j+۳k$ و $b=-i+۲j-k$ باشد، $a.(a+۲b)$ کدام است؟

۱) $+۸$
۲) -۸
۳) $+۶$
۴) -۶

۹۱. قرینهٔ بردار $a=(۱,-۲,۰)$ نسبت به بردار $b=(۳,۱,۲)$ کدام بردار است؟

۱) $\left(\frac{-۱}{۷},\frac{۱۶}{۷},\frac{۴}{۷}\right)$
۲) $\left(\frac{-۱}{۷},\frac{۱۶}{۷},\frac{-۴}{۷}\right)$
۳) $\left(\frac{۱}{۷},\frac{۱۶}{۷},\frac{۴}{۷}\right)$
۴) $\left(\frac{-۱}{۷},\frac{-۱۶}{۷},\frac{-۴}{۷}\right)$

۹۲. اندازهٔ جبری تصویر بردار $(۲a)\times(۳b)$ روی محور Zها کدام است؟ در صورتی که $a=۳i-j-k$ و $b=۲i+۳j+k$ باشد.

۱) ۵۵
۲) ۶۶
۳) ۴۴
۴) ۷۷

۹۳. معادله‌های متقارن خطی که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند و از نقطه‌ای به طول ۳ و عرض ۴ واقع بر صفحهٔ $z=۵$ می‌گذرد، به کدام صورت است؟

۱) $x-۲=\frac{y}{۴}=\frac{z}{-۵}$
۲) $x-۲=\frac{y}{-۴}=\frac{z}{۵}$
۳) $x+۲=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۵}$
۴) $x-۲=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۵}$

۹۴. اگر نقطهٔ $A=(x,y,۱)$ روی خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۵,۷)$ و $(۰,۳,۲)$ باشد، $x+y$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵}$
۲) $\frac{۹}{۵}$
۳) $\frac{۷}{۵}$
۴) ۱

۹۵. معادلهٔ صفحهٔ گذرنده بر نقطهٔ $M=(۲,۴,-۱)$ و عمود برخط $D:\begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=۱-۳t \\ z=t \end{cases}$ کدام است؟

۱) $2x+3y+z+9=0$ ۲) $2x-3y+z+9=0$

۳) $-2x-3y+z+9=0$ ۴) $2x-3y+z-9=0$

۹۶. به‌ازای کدام مقدار m، فاصلهٔ نقطهٔ $A=(2m+1, m-2, m)$ از صفحهٔ $2x-y+2z=4$ برابر ۴ است؟

۱) $\frac{-16}{5}, \frac{-8}{5}$ ۲) $\frac{16}{5}, \frac{-8}{5}$

۳) $\frac{16}{5}, \frac{8}{5}$ ۴) $\frac{-16}{5}, \frac{8}{5}$

۹۷. زاویهٔ بین خط $D: x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2}$ و صفحهٔ $P: 2x-4y+3z-5=0$ کدام است؟

۱) $90°$ ۲) $45°$

۳) $0°$ ۴) $120°$

❖ ریاضی ۱

۹۸. اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A'\cap B)\cup(A-\varnothing)$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$

۳) B ۴) $\varnothing$

۹۹. مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$، کدام است؟

۱) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$

۲) $\{\varnothing,\{\varnothing\},A\}$

۳) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},A\}$

۴) $\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\},\{A\}\}$

۱۰۰. حاصل $(ab)^{m-n}\div(a^m.b^n.a^n.b^m)$، کدام است؟

۱) $(ab)^{2m}$ ۲) $(ab)^{2n}$

۳) $(ab)^{-2m}$ ۴) $(ab)^{-2n}$

۱۰۱. مجموع صورت و مخرج کسر متعارفی مولد کسر اعشاری $0/3\overline{27}$ کدام است؟

۱) ۷۷ ۲) ۷۵

۳) ۷۳ ۴) ۷۱

۱۰۲. حاصل عبارت $(2xyz)(\frac{-2}{3}xy^2z^3)(-3x^2y)$، کدام است؟

۱) $2x^4y^4z^4$ ۲) $-4x^4y^4z^4$

۳) $(4x^2y^2z^2)^2$ ۴) $(2x^2y^2z^2)^2$

۱۰۳. باقیماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)=x^2-8x+15$ بر $x-3$، کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) 2 ۴) صفر

۱۰۴. حاصل عبارت $\frac{x^5+x+1}{x^3-x^2+1}$، کدام است؟

۱) x^2-x+1 ۲) x^2+x-1

۳) x^2+x+1 ۴) x^2+1

۱۰۵. تجزیهٔ عبارت $A=y^2+2y-x^2+1$، کدام است؟

۱) $(x+y)(x-y+1)$

۲) $(y+x-1)(x-y-1)$

۳) $(x+y+1)(y-x+1)$

۴) $(y-x)(y-x+1)$

۱۰۶. حاصل عبارت $A=\frac{x^2-3x+2}{4x-8}\times\frac{12}{3x^2-3}$، کدام است؟ $(x\notin\{1,2\})$

۱) 1 ۲) $\frac{2}{x+1}$

۳) $\frac{1}{x-1}$ ۴) $\frac{1}{x+1}$

۱۰۷. اگر $x+y=xy=-2$، حاصل عبارت $B=\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $-\frac{5}{3}$

۳) -3 ۴) -5

❖ ریاضی ۲

۱۰۸. نقطهٔ $A(4m-1, 2m-1)$ مفروض است، به ازای چه مقدار m نقطهٔ A روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار می‌گیرد؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۹. اگر $A(2n-1, 2)$ و $B(2, 2n)$، به ازای کدام مقدار n طول پاره‌خط $AB=5$ است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ یا ۳ ۲) ۱ یا $\frac{1}{2}$

۳) ۱- یا ۳ ۴) $\frac{1}{2}$ یا ۱-

۱۱۰. نقاط $A(-2,7)$ و $B(1,3)$ دو سر قطر مربعی هستند، اندازهٔ مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{25\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{25}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۱۱. اگر دو خط به معادله‌های $ax-y=1$ و $bx-y+1=0$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر هم عمود باشند؛ مقدار میانگین a و b کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۲. معادله‌های دو قطر مربعی به صورت $2x+y+1=0$ و $2y-x-1=0$ است؛ فاصلهٔ مرکز مربع از خط $x+y-2=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

۳) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ۴) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$

۱۱۳. دستگاه معادله‌های خطی $\begin{cases}2x+my=6\\ mx+2y=5\end{cases}$، به ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

۱) $m=\pm 1$ ۲) $m=\pm 2$

۳) $m=\pm 3$ ۴) $m=\pm 4$

۱۱۴. اگر $x=2-\sqrt{5}$، حاصل عبارت $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2}-\sqrt{20}$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{5}$ ۲) -2

۳) $\sqrt{5}$ ۴) صفر

۱۱۵. اگر $x^2+x=1$، حاصل x^5 کدام است؟

۱) $5x-3$ ۲) $5x+3$

۳) $-5x+3$ ۴) $-5x-3$

۱۱۶. حاصل $\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt[8]{(\sqrt{3}-2)^4}}$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۱۷. حاصل $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۸. معادلهٔ $4x=\frac{8x}{2x+2}+\frac{4x}{x-1}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) یک ۲) دو

۳) سه ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد

۱۱۹. عبارت $\sqrt{x(x+2)-(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف می‌شود؟

۱) $x\leq 2$ ۲) $x\geq -2$

۳) $x\leq 0$ ۴) $x\geq -3$

۱۲۰. اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ باشند، مقدار عبارت $k=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ کدام است؟

۱) $k=1$ ۲) $k=2$

۳) $k=3$ ۴) $k=4$

پاسخها در صفحهٔ ۷۶



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱ :

هر دو کشتی در یک ساعت حرکت و توقف می‌کنند. مسأله به تقارن مربوط است و موقعیت کشتیها با همین داده‌ها می‌تواند درست برعکس باشد. بنابراین نقطه‌ای که اولین محل ملاقات در حالت اول است، در حالت دوم ، دومین نقطهٔ ملاقات محسوب می‌شود. در این صورت این نقطه ۷ کیلومتر از یک شهر و ۹ کیلومتر از شهر دیگر فاصله دارد.

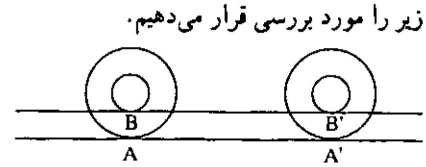
پس فاصلهٔ بین دو شهر ۱۶=۹+۷ کیلومتر است.

پاسخ ۲ :

شعاع فیلم بر چرخ کندتر $۱\frac{۱}{۲}$ شعاع فیلم تا این زمان نمایش داده شده است. زمانهای نمایش متناسب با مسافتهای فیلم است و مساحتها متناسب با مربعهای شعاعها.

دقیقه $۱۲ = \frac{۱۶}{۳} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲} =$ زمان باقیمانده

خیلی ساده بود؟ در این صورت، چرخ گردندهٔ زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



A نقطه‌ای واقع بر لبهٔ چرخ و B نقطه‌ای واقع بر میلهٔ آن است. هنگامی که چرخ، یک دور کامل می‌زند، A در A′ قرار می‌گیرد. فاصلهٔ افقی طی شده، آشکارا برابر محیط چرخ است. اما، میله نیز یک دور کامل زده است. فاصلهٔ طی شده برابر محیط میله است. نتیجه : میله به بزرگی چرخ است!

این پارادوکس، توسط گالیله در کتاب وی با نام *مکالمه دربارهٔ دو علم جدید*، در قرن هفدهم مطرح شده است. آیا می‌توانید آن را توضیح دهید؟

پاسخ ۳ :

شش مرحله‌ای را که مهرداد انجام داده است، در جدول زیر می‌توان دید.

پیمانهٔ ۷۰ سانتی‌لیتری	پیمانهٔ ۴۰ سانتی لیتری	بطری دوم	بطری اوّل
۰	۰	۱۰۰	۱۰۰
۰	۴۰	۶۰	۱۰۰
۶۰	۴۰	۰	۱۰۰
۷۰	۲۰	۰	۹۰
۷۰	۰	۴۰	۹۰
۳۰	۴۰	۴۰	۹۰
۳۰	۳۰	۴۰	۱۰۰

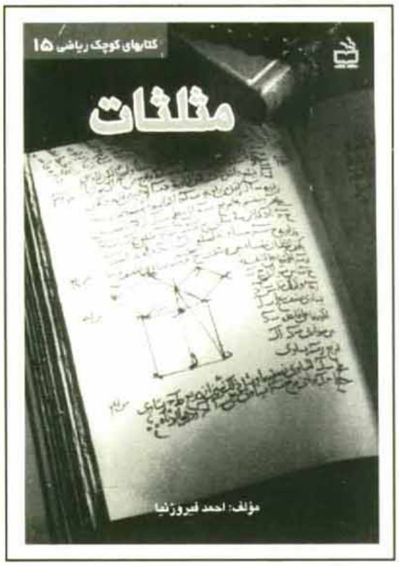
پاسخ ۴ :

دریافتی مهرداد را برای هر شش ماه در مورد هر یک از دو شرکت محاسبه می‌کنیم :

مدت \ دریافتی	مجموع دریافتی از شرکت به ریال	مجموع دریافتی از شرکت دوم به ریال
شش ماه اول	۱۸۰۰۰ ریال	۱۸۰۰۰
شش ماه دوم	۱۸۰۰۰+۲۰۰۰۰=۳۸۰۰۰	۱۸۰۰۰+۱۸۰۰۰=۳۶۰۰۰
شش ماه سوم	۳۸۰۰۰+۲۲۰۰۰=۶۰۰۰۰	۳۶۰۰۰+۲۲۰۰۰=۵۸۰۰۰
شش ماه چهارم	۶۰۰۰۰+۲۴۰۰۰=۸۴۰۰۰	۵۸۰۰۰+۲۲۰۰=۸۰۰۰۰
شش ماه پنجم	۸۴۰۰۰+۲۶۰۰۰=۱۱۰۰۰۰	۸۰۰۰۰+۲۶۰۰۰=۱۰۶۰۰۰

به طوریکه دیده می‌شود حقوق پرداختی توسط شرکت دوم در پایان هر شش ماه، همواره کمتر از حقوق پرداختی به وسیله شرکت اوّل است.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



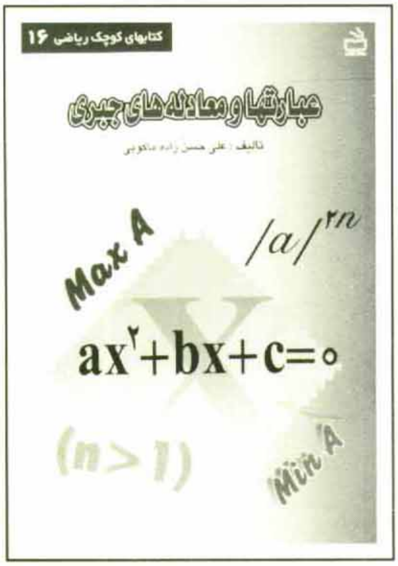
جدید

مثلثات

مؤلف: احمد فیروزنیا

۲۱۲ صفحه / تک رنگ / چاپ اوّل / ۶۰۰۰ ریال

کتاب مثلثات، پانزدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. با توجه به هدف تهیه و تدوین کتابهای کمک درسی و نظر به نیاز آن دسته از دانش‌آموزانی که از راهنماییها و توضیحهای معلم بی‌بهره‌اند، در این کتاب کوشش شده است که مطلبها به نحوی تدوین شود که جنبهٔ خودآموز داشته باشد و منطبق با سرفصلهای درسی نظام جدید آموزش متوسطه باشد. مطالعه این کتاب را به دانش‌آموزان، دبیران، دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضیات، توصیه می کنیم.



جدید

عبارتها و معادله‌های جبری

مؤلف: علی حسن‌زاده ماکویی

۱۲۸ صفحه / تک رنگ / چاپ اوّل / ۳۵۰۰ ریال

کتاب عبارتها و معادله‌های جبری، شانزدهمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. این کتاب حاوی مطالبی در زمینهٔ عبارتهای جبری، اتحادهای مهم، تجزیه چندجمله‌ایها و معادله‌های جبری است، که این موضوعها جزء مفاهیم اساسی حساب و جبر محسوب می‌شوند. در هر قسمت، مسائل متعددی با راهنمای حلّ آنها آمده است. همچنین در انتهای کتاب، سؤالهای چهارگزینه‌ای با حلّ تشریحی آمده است که مطالعهٔ این گونه سؤالها، موجب بازنگری و ترکیب یافته‌های دانش‌آموزان می گردد. مطالعهٔ این کتاب را به دانش‌آموزان، دبیران، دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضیات توصیه می کنیم.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند:

۱ ـ ورودی به نظریه اعداد/ حمید رضا امیری ـ مازیار رامین راد ۲ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی
۳ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن/ محمّد عابدی ۴ ـ بردارها / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی
۵ ـ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر ۶ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۷ـ آمار و مدل‌سازی / دکتر عین‌ا... پاشا ۸ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری

☆ جلد اول دائرةالمعارف هندسه بصورت دومجلّدجدید (جلداوّل وجلددوّم) زیرچاپ است

بنوموسی

محمد و احمد و حسن پسران موسی بن شاکر
ریاضیدانان و منجمان مسلمانِ ایرانی (سدهٔ سوّم)

بنوموسی شهرت سه برادر است به نامهای محمد و احمد و حسن پسران موسی بن شاکر. این سه برادر در اصل اهل خراسان و از علمای معروف ریاضیات و نجوم و مکانیک در سدهٔ سوّم هجری بودند و در بغداد به سر می‌بردند و بزرگترین آنها ابوجعفر محمدبن موسی در ربیع‌الاول سال ۲۵۹ درگذشت.

ابن الندیم در *الفهرست* نوشته است که آنان برای به دست آوردن علوم باستانی به آخرین مرحله در سعی و کوشش رفته و از بذل مال و تشویق دریغی نداشتند و در این راه به هرگونه سختی، تن دردادند و برای دستیابی به علوم، اشخاص را به روم فرستادند و از گوشه و کنار مترجمان را با دادن عطایا و بخششهای گزاف به دور خود جمع کرده و عجایب حکمت را ظاهر کردند و بیشتر در هندسه و مکانیک (الحیل و الحرکات) و موسیقی و نجوم مهارت داشتند.

به هرحال محمد و احمد و حسن در جوانی با دانشمندان حوزهٔ علمی بغداد مأنوس شدند و در علم، ترقی کردند و ثروت خود را صرف گردآوری نسخه‌های خطی کتابهای یونانی و ترجمهٔ آنها به زبان عربی کردند. و به علاوه مترجمان عالیمقامی چون اسحاق بن حنین و ثابت بن قره را در استخدام داشتند و با واداشتن آنان به ترجمهٔ متون علمی یونانی و نیز به وسیلهٔ تحقیقات بدیع و پرافتخار خود، زمینه را برای شکفتگی علوم در سده‌های سوّم و چهارم آماده ساختند. نظر به این‌که این سه برادر در کارهای علمی همکاری داشته‌اند تشخیص بیشتر آثار شخصی هریک از آنان میسّر نیست. با وجود این بعضی از آثار آنان به نام یکی از سه برادر نامیده شده است.

اهمیت کارهای نجومی بنوموسی و شهرت آنان در بین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی از این رو پیداست که بیرونی در چند موضع از آثار خود از آنان نام برده و از صحّت رصدهایی که انجام داده‌اند گفت‌وگو کرده و مهارت و استادی آنان را در عمل رصد ستوده است. از جمله در کتاب *آثارالباقیه* نوشته است: «ما به گفتهٔ بطلمیوس ... و قول خالدبن عبدالملک مروردی ... و قول بنوموسی بن شاکر و غیر ایشان نظر کردیم و دیدیم که از تمام این گفته‌ها در این باب، رأی بنوموسی بن شاکر بهتر و برتر است؛ زیرا ایشان در ادراک حقیقت بذل کوشش کردند و در زمان خود به مهارت و استادی در عمل رصد منفرد بودند و علمای فن به چیره‌دستی آنان و درستی رصدشان گواهی می‌دهند.»

آثار ریاضی موجود بنوموسی

۱ـ *معرفة مساحة الاشکال البسیطة و الکریة*

کتاب *مساحة الاشکال* بنوموسی علاوه بر شهرتی که در کشورهای اسلامی داشته در سده‌های میانه نیز در اروپا شناخته شده بوده است. جرارد کرمونی آن را در سدهٔ دوازدهم میلادی به زبان لاتینی ترجمه کرد.

۲ـ *کتاب الحیل (=مکانیک)*

این نخستین کتابی است که در دورهٔ اسلامی دربارهٔ مکانیک نوشته شده و نسخه‌های خطی آن در استانبول و در واتیکان و قسمتهایی از آن در واتیکان و برلین موجود است.

۳ـ *تحریر مخروطات ابلونیوس*

آثار ریاضی مفقود بنوموسی

علاوه بر آنچه گذشت ابن الندیم و قفطی فهرست چند کتاب دیگر از تألیفات بنوموسی را آورده‌اند که از آن جمله است دو کتاب ریاضی زیر که هر دو مفقود شده است:

۱ـ *کتاب الشکل المدوّر المستطیل*

این کتاب تألیف حسن بن موسی بوده است.

مقصود از شکل مدور مستطیل همان بیضی است.

۲ـ *کتاب شکل الهندسی الذی بین جالینوس امره*

این کتاب تألیف احمدبن موسی بوده است. در عنوان این کتاب ظاهراً اسم «جالینوس» تحریف شدهٔ اسم «منالاوس» است.

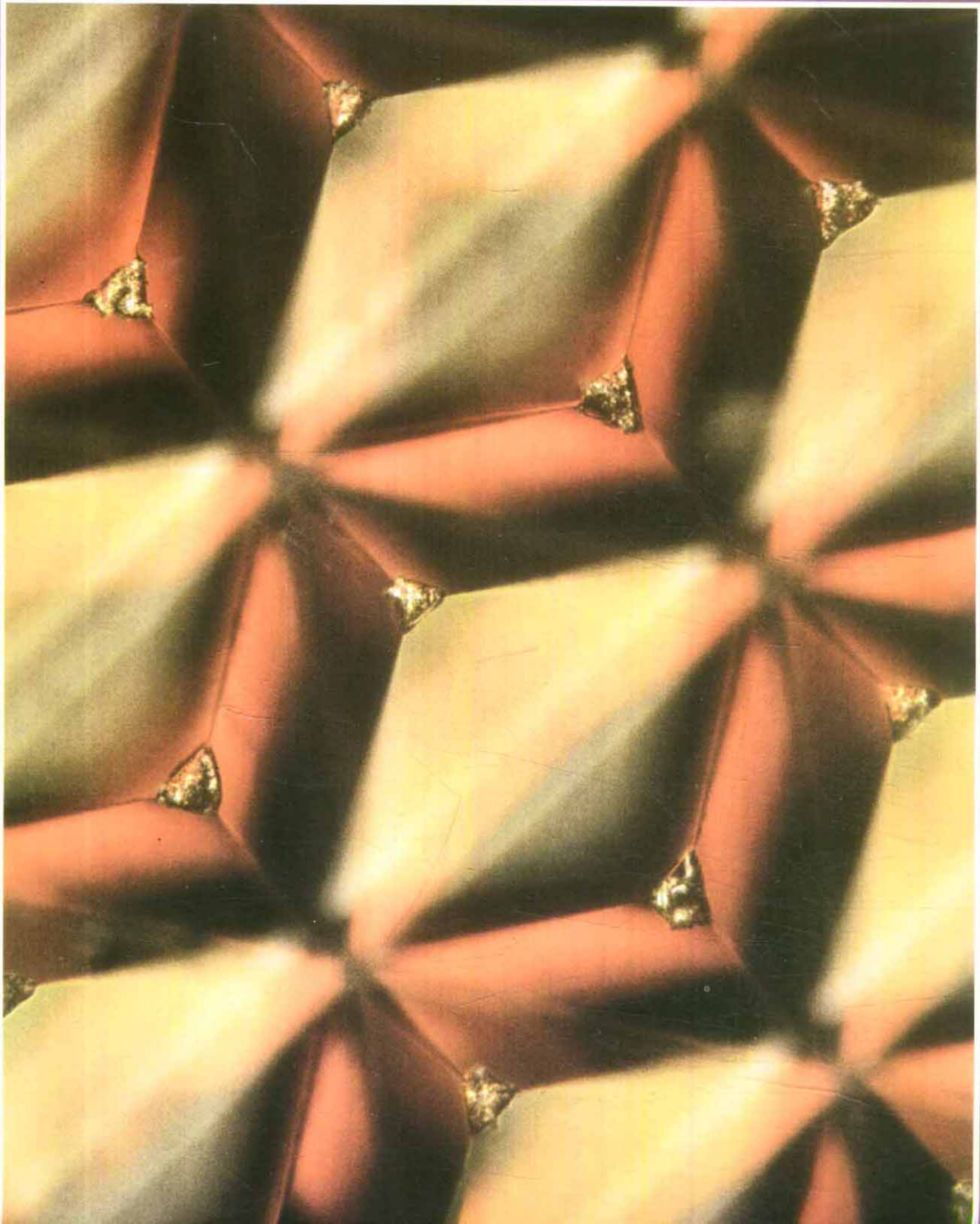
مجلهٔ ریاضی

برهان

۲۸

برای دانش آموزان دبیرستان

سال هشتم، شمارهٔ چهارم، بهار ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❑ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ میرشهرام صدر
❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❑ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❑ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح گرافیک: امیر بابایی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ **سال هشتم، بهار ۱۳۷۸، شمارهٔ چهارم.**

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
■ مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
■ مقاله‌های مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

حرف اوّل

یکی از افتخارات ما شیعیان، این است که در عصر غیبت امام عصر (عج) زندگی می‌کنیم، امام هُمامی که غیبتش بر اثر خواست و حکمت خدا، تاکنون ادامه داشته است و پیروان و منتظران راستین ایشان، همواره امید به سپری شدن این دوران داشته و دارند.

شاید یکی از مواردی که در ظاهر، دوران ما را از زمان حیات دیگر پیشوایان معصوم (سلام ا... علیهما) جدا می‌کند همین مسألهٔ غیبت است که در آن زمان، نمونه و الگویی برای افراد جامعه در بین آنها زندگی می‌کرده و در این دوران حضور فیزیکی و قابل لمس برای همگان وجود ندارد؛ امّا از زمان غیبت امام، تاکنون همواره شاگردان واقعی و شیعیان راستین مکتب سرخ علوی در هر دوره‌ای در بین امّت زیسته‌اند و نشان داده‌اند که سیرهٔ ائمه(ع) همواره زنده و پابرجاست. از جمله شاگردان باکفایت که سیرهٔ وی از سرچشمهٔ زلال ولایت آبیاری شده و بحق، آینهٔ تمام نمای یک مسلمان واقعی بوده، وجود مقدس حضرت امام خمینی (ره) است.

زندگی، افکار و به طور کلّی سیرهٔ ایشان نمایانگر این مطلب است که با وجود غیبت امام عصر (عج) و فاصلهٔ زمانی با ائمه اطهار (ع) مانع و حائلی برای الگو قرار دادنِ ایشان نبوده و نیست.

امسال بنا بر فرمودهٔ مقام معظم رهبری، سال امام خمینی (ره) نامگذاری شده است تا به تجزیه و تحلیل ابعاد وجودی و زندگی اجتماعی، سیاسی امام راحل پرداخته شود؛ این بدان جهت است که برای عزیزانی که بر اثر غفلت یا به خاطر آن که سنّ آنها اجازه نمی‌داده، امام به عنوان الگویی از یک شیعهٔ اهل بیت (ع) معرفی شود تا همگان بدانند که حتی در زمان غیبت امام عصر (عج) نیز می‌توان امام‌گونه زندگی کرد.

سراسر زندگی پرافتخار و تأثیرگذار امام، مملو از خاطرات پندآموز و سازنده است که امیدوارم با بهره جویی از تمام زوایا و ابعاد زندگی این بزرگوار بتوانیم همچون ایشان پیرو واقعی مکتب اهل بیت (ع) باشیم. ان شاءا...

والسلام ـ سردبیر



دنبالهٔ مقالهٔ دربارهٔ تاریخ ریاضیات

پس از این مقدمه‌ها، می‌خواهم به جنبه‌هایی توجه کنم که اهمیت تاریخ ریاضیات از دیدگاه دانش امروز روشن شود. در ضمن، ادّعا نمی‌کنم، توانسته‌ام بهترین جنبه‌ها و نمونه‌ها را انتخاب کنم.

روشن است که دانش زمان ما بی‌اندازه گسترش یافته است. در وضع کنونی، نه‌تنها یک نفر این توانایی را ندارد که به همهٔ جنبه‌های مختلف و ممکن ولو یک رشته از دانش بپردازد؛ بلکه از دنبال کردن همهٔ پژوهشها در زمینهٔ کار خود هم، ناتوان است. آن‌گونه که کسانی مثل لئوناردوداوینچی، لئونارد اولر و لومونوسوف، بر دانش زمان خود مسلط بودند، برای زمان ما بکلی ناممکن است. کافی است بگوییم، هر سال بیش از ۴۰۰۰۰ مقاله دربارهٔ شیمی، بیش از ۳۰۰۰۰ مقاله دربارهٔ فیزیک و نزدیک به ۱۰۰۰۰ مقاله دربارهٔ ریاضیات در سراسر جهان منتشر می‌شود [به یاد داشته باشیم، این آمار مربوط به سال ۱۹۶۳ که گنه‌دنکو این مقاله را نوشته است، می‌شود]؛ تازه آنچه از موضوعهای علمی باید دنبال شود، به این‌جا ختم نمی‌شود؛ زیرا فیزیک و شیمی، از بسیاری جهتها به صنعت و ریاضیات مربوطند و ریاضیات هم به صنعت، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و دیگر دانشها مربوط می‌شود. جامعهٔ بشری راه بیرون رفتن از این وضع را در این دیده است که دانشمندان به شاخه‌های تخصصی (و تا اندازه‌ای محدود) از دانش بپردازند. وجود ویژه‌کاری برای دانشمندان و پژوهشگران، اثر فوق‌العاده‌ای داشته است و یکی از دلیلهای غیرمستقیم تکامل برق‌آسا و توفانی دانش در ۱۰۰-۱۵۰ سال اخیر بوده است. بی‌تردید، بدون این محدودیت متخصص، نمی‌توان سرعت تکامل دانش را در زمان ما حفظ کرد. ولی این متخصص، در عین حال، یک خطر جدّی را در خود پنهان دارد. امکان بررسی علمی دربارهٔ همهٔ دانشها، به‌عنوان یک مجموعهٔ واحد، از بین می‌رود، دید دقیق علمی نقصان می‌پذیرد و بستگیهایی که بین قانونهای دانشهای گوناگون وجود دارد، در پردهٔ ابهام می‌ماند. تاریخ دانش، تا حدّ زیادی می‌تواند و باید این محدودیت را از بین ببرد و از ناهمواری تکامل دانشها، جلوگیری کند.

بی‌فایده نیست، مفهوم تاریخ ریاضیات را، از جهت دیگری هم روشن کنیم. تاریخ دانش، بویژه می‌تواند، درک محدود و کوته‌نظرانهٔ نسبت به ریاضیات را از بین ببرد. ریاضیدان نباید ریاضیات را تنها به‌عنوان مجموعهٔ ساده‌ای از قضیه‌ها و تعریفهای جداگانه، بلکه باید به‌صورت دستگاه به هم پیوسته‌ای از معرفت علمی ببیند. توجه به این امر، برای آینده دانش، مهم است که

از تاریخ بیاموزیم (۲)

● پرویز شهریاری



مفهومهای ریاضی از کجا گرفته شده است، چه کمکی می‌تواند به دانشهای دیگر بکند، توانایی ریاضیات در چیست، به چه مناسبت دانشی که با فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد و صنعت بستگی مستقیم ندارد، می‌تواند بخوبی و به اندازهٔ کافی آنها را تشریح کند و حرکت تکاملی این پدیده‌ها را در جریان زمان، به‌طور قانع‌کننده و از قبل پیش‌بینی کند؟ شک نیست که طرح این مسأله‌ها در زمان ما، اهمیت فلسفی بی‌اندازه‌ای دارد.

اگر به دنیای ماشینی معاصر نظری بیندازیم، متوجه می‌شویم یک محصول تازه هم وجود ندارد که بتواند بدون محاسبه‌های مقدماتی در تولید وارد شود. می‌دانیم نظریهٔ ریاضی پرواز که در اثر تلاشهای بسیاری از دانشمندان و پیش از همه، ژوکوسکی پدید آمد، تا چه اندازه در تکامل هواپیما تأثیر داشت. پرتاب ماهواره‌ها، نتیجهٔ کوشش دانشمندان زیادی بود، ولی بدون محاسبه‌هایی که بر مبنای ریاضیات امروزی قرار دارد، تصور انجام آن هم، ناممکن بود. سرانجام، از خود کار کردن تولید یاد می‌کنیم که در زمان ما، به‌صورت رشته‌ای از صنعت درآمده است. برای این‌که به‌عنوان نمونه، صنعت تصفیه و پالایش نفت خودکار شود، باید قبل از همه، جریان کاتالیز کردن و آلکیلی کردن را به زبان ریاضی درآورد. اکنون دیگر ریاضیات، نه تنها به‌عنوان وسیلهٔ لازم برای پژوهش، بلکه در ضمن به‌عنوان عامل اساسی پیشرفت کارهای عملی شناخته شده است، و حالا می‌توان دوباره پرسید: چه نیرویی در ریاضیات است که آن را برای روشن کردن روندها و پدیده‌های طبیعت و سیر صنعت توانا می‌سازد؟

به این پرسش، پاسخهای زیادی داده شده است؛ ولی بیشتر آنها قانع‌کننده نیست. برای مثال، به دو نمونه از این‌گونه پاسخها اشاره می‌کنیم.

در یکی از مقاله‌های گروه ریاضیدانان فرانسوی، که بخشی از کارهای خود را به‌نام مستعار «نیکل بورباکی» منتشر می‌کنند، این‌طور داوری شده است: «...روشن نشده است و شاید هرگز روشن نشود و همچون معمّایی حل نشدنی باقی بماند که چرا از نتیجه‌گیریهای ریاضیات می‌توان در عمل استفاده کرد؟»

ریاضیدان مشهور دیگر فرانسوی «پی‌یر بوترو»، کاربُردی بودن ریاضیات را، تنها یک تصادف می‌داند. به‌نظر او «...اگر ریاضیات به تقریب در همهٔ حالتها، با تجربه و آزمایش سازگار است، مربوط به ویژگیهای درونی ریاضیات نیست؛ بلکه تنها ناشی از اوضاع و احوال بیرونی آن است. معلوم است که دانش ساده‌ای مثل ریاضیات، می‌تواند نمودهای طبیعی را تفسیر کند و این تصادف خوبی است که تضادّ و تعارض را پدید نمی‌آورد».

خود این نتیجه‌گیری، که امکان کاربرد ریاضیات در عمل تصادفی است، نمی‌تواند تصادفی باشد. این طرز تفکر، نتیجهٔ منطقی استنباط متداولی است که دربارهٔ پدید آمدن مفهومهای ریاضی و دربارهٔ تکامل قانونها و اصلهای آن وجود دارد. بنابراین استنباط، مفهومهای ریاضی به‌وسیلهٔ عقل انسانی و به‌طور آزاد و در ذهن پدید آمده‌اند، یا بهتر است بگوییم، آفریده شده‌اند ؛ از این مفهومها و ویژگیهای آنها، مفهومهای تازهٔ ریاضی طرح می‌شود و دانشمندان، بدون این‌که تحت تأثیر عامل یا عاملهای بیرونی باشند، با ارادهٔ آزاد خود، آنها را شرح می‌دهند.

تاریخ ریاضیات می‌تواند این نظریه‌های نادرست را درهم بشکند. تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که مفهومهای ریاضی در چه دورهٔ طولانی و پرنشیب و فرازی شکل گرفته است و چگونه نتیجه‌گیریهای مبهم و وابسته، تحت تأثیر نیازهای زندگی و عمل، در آغاز به مفهومهای محدود ناقص و سپس، به‌دلیل نیازهای پیچیدهٔ فعالیتهای تولیدی، جنگ و دانش و هنر، تکامل بعدی خود را به‌دست آورده است. این گونه سیر مفهومهای ریاضی، در زمان ما هم قطع نشده است و تحت تأثیر نیازهای جامعه، در همهٔ جنبه‌های آن، ادامه دارد. بنابراین، به این نتیجه می‌رسیم که تاریخ ریاضیات می‌تواند به قوام گرفتن نظریهٔ درست فلسفی دربارهٔ ریاضیات، به روشن شدن بستگی آن با مسأله‌های مربوط به پدیده‌های طبیعی و به موقعیت آن در مجموعهٔ دانش بشری، به‌طور جدّی یاری کند.

در این‌جا می‌خواهم از نمونه‌هایی یاد کنم که چگونه در طول زمان، اندیشهٔ آدمی پخته می‌شود و سپس به‌صورت راهنمایی در ریاضیات درمی‌آید. امروز کشف اندیشهٔ مربوط به دستگاه مختصات را از آن رنه‌دکارت، ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی می‌دانند. این ادّعا در همهٔ کتابهای مربوط به هندسهٔ تحلیلی تکرار شده است. دربارهٔ اهمیت این مفهوم هم، برای آنالیز ریاضی، نظریهٔ تابعها، مکانیک و همهٔ دانشهای تجربی و صنعت، هیچ تردیدی نیست.

اگر تاریخ دانش را بدرستی بررسی کنیم، متوجه می‌شویم اندیشهٔ دستگاه مختصاتی، تاریخی بمراتب غنی‌تر از این دارد و باید آن را در طول سده‌ها و در ژرفای تاریخ جست‌وجو کرد. می‌دانیم نقاشان دورهٔ رنسانس، به‌صورتی گسترده از شبکه‌های مستطیلی برای شبیه‌سازی استفاده می‌کردند. از این گذشته، در سدهٔ دوم پیش از میلاد هم، در نوشته‌های خود برای تعیین مکان جغرافیایی، از طول و عرض استفاده می‌کرد. آیا لازم است گفته شود که به‌کار بردن طول و عرض، چیزی جز استفاده از دستگاه مختصات در روی سطح زمین نیست. به این ترتیب، نزدیک به دو هزار سال پیش از دکارت، نه‌تنها دستگاه مختصات داده شده بود ؛ بلکه از آن در جغرافیا و اخترشناسی هم استفاده می‌کردند. از این گذشته، به‌نظر می‌رسد استادکاران معمار مصری، هنرمندان گمنام دوران سلطنت میانه، خیلی پیش از بطلمیوس، از اندیشهٔ مختصات قائم استفاده می‌کرده‌اند. در یکی از مقبره‌های قدیمی مصر، محلی باقی مانده است که کارهای مربوط به دیوارهای آن ناتمام است. روی دیوارها، دستگاه محورهای عمود بر هم دیده می‌شود که صفحهٔ دیوار را به مربعهایی تقسیم می‌کند. همچنین شکلی وجود دارد که به‌وسیلهٔ شبکهٔ مختصات، به بخشهایی تقسیم شده است. استادکار، برای این‌که شکل را روی دیوار رسم کند، با استفاده از اندیشهٔ دستگاه مختصات قائم، نقطه‌های آن را در شبکه نشانه گذاشته است. همین نمونه نشان می‌دهد که آگاهی از تاریخ دانش، می‌تواند به بشر یاری رساند تا نیروی خود را صرف کشف آنچه بارها کشف شده است، نکند.

درسال ۱۹۵۱، به مناسبت صد و پنجاهمین سال تولد ریاضیدان مشهور، م. اوستروگرادسکی، سندهای شخصی او را بررسی کردند. بین انبوه نوشته‌ها، دو تکّه کاغذ پیدا شد که به خط خود اوستروگرادسکی بود. بررسی دقیق نوشته‌ها نشان داد که اوستروگرادسکی چند روز پیش از مرگ خود، توانسته بود دو آلگوریتم بسیار جالب برای شناخت عددهای گنگ کشف کند. در آنها از رشته‌های خاصی استفاده شده بود که بسرعت همگرا (متقارب) می‌شدند. نظریهٔ کلی این آلگوریتمها در این یادداشتها نیامده بود ؛ در آنها، اصل اندیشه و روش استفاده از آن برای محاسبهٔ لگاریتم عدد ۱۷ طرح‌ریزی شده بود. ا. یا. رمز، در یکی از مقاله‌های خود، که به بررسی آلگوریتمهای اوستروگرادسکی اختصاص داشت، روشن کرد که آلگوریتمهای اوستروگرادسکی،





از برخی جهتها، از نظر سرعت همگرایی، بر الگوریتمهای دیگر و از جمله الگوریتم کسرهای مسلسل، برتری دارد.

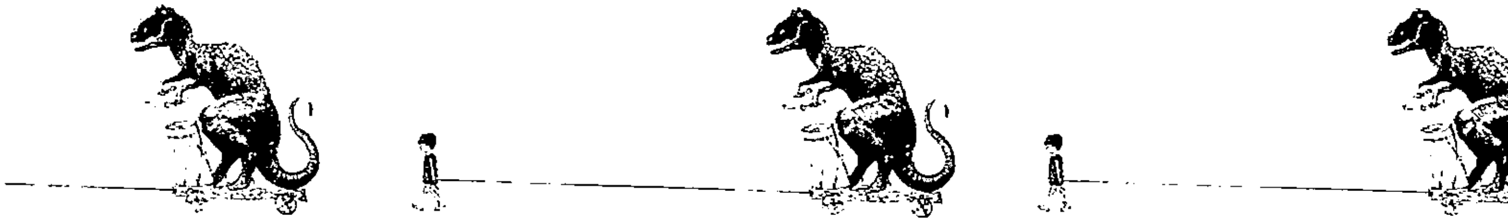
بی‌تردید، بررسی دقیق دانش گذشته، می‌تواند باز هم موجب کشف اندیشه‌هایی بشود که بر همعصران ما پوشیده است. به‌دلیل پیشرفت تند فنّ محاسبهٔ تازه، دوباره بحث آنالیز ترکیبی که در سدهٔ هجدهم روی آن خیلی کار شده است، اهمیت زیادی پیدا کرده است. به‌نظر می‌رسد که به این مناسبت، لازم است نظری به این جنبه از پژوهشهای ریاضی بیندازیم و دوباره به بررسی نتیجه‌گیریهای آن دوره در این‌باره، بپردازیم. باید اطمینان داشت که بررسی میراث علمی دانشمندان گذشته، از نظر موضوعهایی که برای دانش امروز جالب است، می‌تواند منجر به کشفهای مهمی شود.

اکنون که برخی از ملاحظه‌های مربوط به اهمیت تاریخ ریاضیات را، از دید ریاضیات امروزی از نظر درک موضوعهای کلی و راه تکامل آن با دید فلسفی، بیان کردم، می‌خواهم به برخی نکته‌های مربوط به آموزش بپردازم.

معلم باید بداند که با چه تلاشهایی مفهومهای ریاضی به‌وجود آمده است. چگونه در مرحله‌های نخستین، نمایشهای مادی و ملموس لازم بود و چگونه استدلال منطقی و بی‌نقص انتزاعی، راه خود را باز کرد و به‌صورت عادت درآمد. تاریخ ریاضیات می‌تواند دشواریهایی را که جامعهٔ انسانی ضمن تکامل خود، به آنها برخورد کرده است، تا اندازهٔ زیادی روشن کند. تاریخ ریاضیات وسیلهٔ نیرومندی در دست معلم است که به یاری آن می‌تواند ریاضیات دبیرستانی را به درسی جالب و دوست‌داشتنی تبدیل کند؛ به‌نحوی که دیگر، دانش‌آموزان به درسهای ریاضی، نه به‌عنوان کاری سنگین، بلکه به‌عنوان موضوعی دلنشین و زیبا نگاه کنند، که در ضمن می‌تواند در برخورد با دشواریهای زندگی، یار و مددکار آنان باشد.

بی‌تردید، باید تاریخ ریاضیات، موجب تغییر جدّی در مضمون ریاضیات دبیرستانی و هم در تنظیم برنامهٔ آن بشود. دورهٔ ریاضیات باید خود را با نیازهای زندگی امروزی سازگار کند؛ نه این‌که به اندیشه‌هایی بچسبد که برای پایان سدهٔ هجدهم یا میانه‌های سدهٔ نوزدهم سودمند بوده است. گاه وقت و نیروی زیادی در این راه به هدر می‌رود که روشهای مصنوعی حلّ گروهی از مسأله‌های خاص را بیاموزند؛ به این انگیزه که تصور دانش‌آموز گسترش یابد یا ویژگیهای روانی و ذهنی او پرورش داده شود. درواقع، همهٔ اینها به این دلیل است که اسیر سنّتهای گذشته هستیم. به یاد بیاورید در سالهای نخست آموزش چه‌وقت زیادی برای حلّ مسأله‌های مختلف و انتزاعی حساب و گروه‌بندی آنها صرف می‌شود. پسران و دختران ده، یازده ساله باید راه‌حلّ نمونه‌های پیچیده و مصنوعی مسأله‌ها را به‌خاطر بسپارند؛ تنها به این دلیل که نباید از مقدمه‌های سادهٔ جبر استفاده کنند. و بعد، وقتی پس از یکی، دو سال، دانش‌آموز با جبر آشنا می‌شود و می‌بیند که می‌توان همین مسأله‌ها را بسادگی و بدون دشواریهای معمّایی حل کرد، به‌طور طبیعی این پرسش برایش مطرح می‌شود که: به چه مناسبت در سالهای پیش، این همه عذاب می‌کشیدیم؟ چرا زودتر ما را با روش حلّ معادلهٔ یک‌مجهولی درجهٔ اول آشنا نکردند؟ در آن صورت، چه‌قدر آموزش ریاضیات برای ما جالبتر و ساده‌تر می‌شد! موقعیتی بکلی بی‌معنا و غیرعادی است که آن را می‌توان تنها به این نمونه مقایسه کرد.

در یک مزرعه، تراکتورهای عالی و جدید موجود است. سوخت به اندازهٔ کافی ذخیره شده است. کسانی هم که بتوانند از این تراکتورها استفاده کنند، وجود دارد. ولی شورای مزرعه، شخم زدن با تراکتور را مجاز نمی‌داند؛ زیرا دهقانان باید پیش از کار با امکانهای تازه، با شیوهٔ کار انسانهای نخستین آشنا شوند و مدتها با روش آنها زمین را شخم کنند. زمانی بود که زمینها با گاوآهن هم شخم نمی‌شد و با کلنگ و بیل زمین را می‌کندند. پس اکنون هم اجازه بدهید دهقانان یکی، دو سالی از این وسیلهٔ آزمایش شدهٔ کهن استفاده کنند و تنها بعد از این دوره، به گاوآهن روی آورند. البته شما در کشتزارها به چنین دستورهایی برنمی‌خورید؛ ولی در میان مربّیان و برنامه‌نویسان، آدمهایی که این‌گونه دستورها را می‌دهند، فراوانند. اینها هنوز هم، برای آموزش ریاضی عقیده دارند باید اول و برای مدتی از کلنگ یا چوب نوک‌تیز استفاده کرد! مثل این است که در گذشته، هرگز تلاشی برای ساده‌تر کردن روش حلّ مسأله‌های قدیمی نشده است. تاریخ ریاضیات که دربارهٔ



گذشته صحبت می کند، می تواند الهام‌بخش اندیشه های تازه‌ای دربارهٔ آموزش بهتر و درست‌تر جوانان زمان ما باشد؛ آموزشی که با نیازهای زمان ما و مجموعهٔ دانش و صنعت امروزی، بستگی نزدیک داشته باشد.

باید این نکته را به یاد داشت که تکامل دانش و پیشرفتهای صنعتی، همیشه با بهتر شدن آموزش بستگی داشته است. بسیاری از دانشمندان گذشته، دیدگاه های خود را دربارهٔ تنظیم سیر آموزش و ویژگیهای آن در مرحله های مختلف، برای ما باقی گذاشته‌اند. بویژه دیدگاه های م.و. اوستروگرادسکی، ریاضیدان و مربّی مشهور نیمهٔ نخست سدهٔ نوزدهم، اهمیت خاصی دارد. در این‌جا تکّه‌ای از رسالهٔ «اندیشه هایی دربارهٔ آموزش» را که اوستروگرادسکی به کمک آ.بلوم، مربّی فرانسوی درسال ۱۸۶۰، به زبان فرانسوی نشر داده است، می‌آوریم:

«برای آموزش جوانان، هنوز از همان روشهایی استفاده می‌شود که سقراط و افلاطون، حقیقتهای عالی اخلاقی را برای شیفتگان منطق و فلسفه، و برای علاقه‌مندان به سخنوری و علم کلام بیان می کردند.

چه کسی نمی‌داند که از پنجاه دانش‌آموز، دست‌کم چهل نفر برای همیشه، از بحثهای انتزاعی گریزان و از دنبال کردن آنها ناامید می‌شوند؛ بحثهایی که بدون روشن کردن مفهوم واقعی آنها به یاری نمونه‌های مربوط به زندگی عملی، در همان آغاز کار تدریس، در برابر دانش‌آموزان گذاشته می‌شود.

معلمان رشته های علمی، پذیرفته‌اند که به‌طورکلی، تدریس به یاری میزها و صندلیها، خیلی بهتر و سریعتر از آموزش به یاری «اندیشیدن» و «تلاش ذهنی» به نتیجه می‌رسد. درواقع، در درسهای حساب، جبر و هندسه، هرگز سودمندی آنها برای زندگی گوشزد نمی‌شود، هرگز از تاریخ دانش سخنی به میان نمی‌آید، نظریه‌های علمی سنگین و تعریفهای خشک و نامفهوم، پشت سر هم تکرار و تدریس می‌شود؛ ولی هیچ نتیجه‌ای جز این ندارد که دانش‌آموز را از دانش بیزار کند و تعداد علاقه‌مندان به دانش را روز به روز کمتر کند.

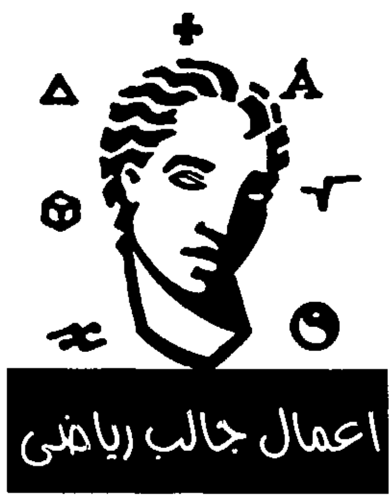
به‌نظر می‌رسد، هنوز هم کاهنان مصر قدیمند که دانش رازگونه و دست‌نیافتنی را در اختیار دارند...

باید ذهن و علاقهٔ دانش‌آموز را جلب کرد؛ این یکی از اساسی‌ترین مسأله‌های آموزشی است. نمی‌گوییم که باید تسلیم ذوق دانش‌آموز شد؛ بلکه می‌گوییم که باید شوق او را برانگیخت.»

یکی از راه‌های جدّی برای حلّ مسأله‌ای که اوستروگرادسکی طرح کرده، توجه به تاریخ دانش، گفت‌وگو دربارهٔ نمایندگان دانش و بستگی ریاضیات با عمل و زندگی است؛ بستگی که در تمامی دوران موجودیت انسان، هرگز قطع نشده است.

ادامهٔ این مقاله در شمارهٔ بعد

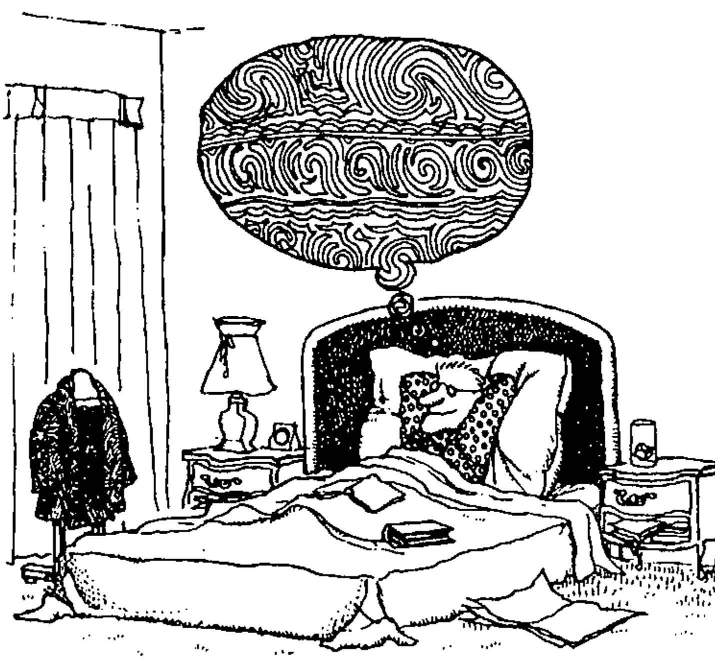
ادامهٔ این مقاله در شمارهٔ بعد



به این دو عمل ریاضی توجه کنید که توجه به آنها خالی از تعجب نیست.

$$۲۷۲+۱۶=(۲+۷)\times۲\times۱۶$$

$$\sqrt{۳۲۴}=۳\times(۲+۴)$$



نگاشتهای خطی

ترکیب نگاشتهای خطی و

ماتریس ترکیب دو نگاشت خطی

(قسمت سوّم)

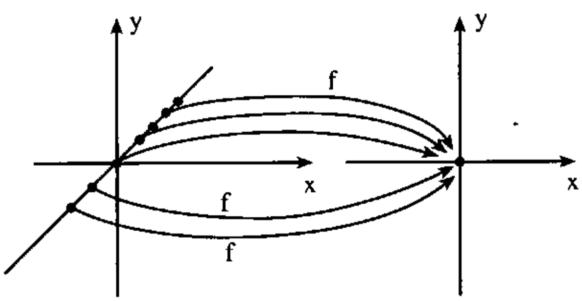
● حمیدرضا امیری

هسته[1] نگاشتهای خطی

نگاشت خطی f به صورت

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f(x,y)=(x-y\ ,\ 2x-2y)$

تعریف شده است. واضح است که $f(0,0)=(0,0)$ ، $f(1,1)=(0,0)$ و... و $f(x,x)=(0,0)$ یعنی در واقع اگر در زوج مرتّب $(x\,,y)$ ، $y=x$ باشد، همواره آن زوج روی $(0\,,0)$ تصویر می‌شود. به عبارت دیگر، هر نقطه روی خط به معادلهٔ $y=x$ روی $(0\,,0)$ تصویر می‌شود، مطابق شکل زیر :



حال دو سؤال مطرح می‌شود :

I) اگر نگاشت $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ مفروض باشد، f چه نقاطی از $\mathbb{R}^m$ را به صفر فضای $\mathbb{R}^n$ می‌برد؟

II) آیا ممکن است نگاشت خطی f هیچ عضوی از $\mathbb{R}^m$ را به بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ تصویر نکند؟

جواب سؤال (II) براحتی به‌دست آمده و منفی است ؛ زیرا اگر f یک نگاشت خطی باشد، قبلاً ثابت کردیم که $f(\bar{o})=o$ ، لذا همواره لااقل بردار صفر $\mathbb{R}^m$ ، به بردار صفر $\mathbb{R}^n$ بُرده خواهد شد.

امّا پیش از بررسی سؤال (I) به معرفی زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f می‌پردازیم که در واقع مورد نظر سؤال (I) است :

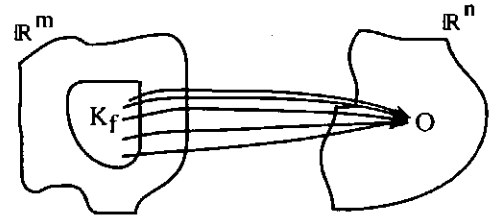
تعریف هستهٔ یک نگاشت خطی

اگر $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، به تمام اعضایی از $\mathbb{R}^m$ که توسط f روی صفر فضای $\mathbb{R}^n$ نگاشته می‌شوند، هستهٔ نگاشت خطی f گفته می‌شود. این مجموعه از اعضای $\mathbb{R}^m$ (دامنهٔ f) را با k_f نمایش داده و داریم :

$$k_f=\{x\in\mathbb{R}^m \,|\, f(x)=\bar{o}\}$$

توجه دارید که همواره $k_f \subseteq \mathbb{R}^m$ ، پس هسته همیشه جزء

دامنهٔ یک نگاشت خطی است.



تذکر: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ که $۱ \le n \le ۳$، همواره نقطه یا مجموعه‌ای از نقاط متناهی یا نامتناهی و ناپیوسته، دارای بُعد صفر بوده و خط دارای بُعد ۱ و صفحه دارای بُعد ۲ و فضای $\mathbb{R}^۳$، سه بُعدی است.

حال با توجه به تعریف هسته و تذکر فوق، می‌خواهیم هستهٔ نگاشتها و بُعد آنها را شناسایی کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱: فرض کنیم $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(۰,y)$ یک نگاشت خطی باشد، می‌خواهیم هسته و بُعد آن را معین کنیم.

$$k_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, f(x,y)=(۰,۰)\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, (۰,y)=(۰,۰)\right\}$$
$$\Rightarrow k_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, y=۰\right\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هستهٔ این نگاشت خط $y=۰$ یا محور xهاست و بُعد این خط ۱ است.

مثال ۲: نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(۲x,y-۳x)$ مفروض است، هسته و بُعد هسته را بیابید.

$$k_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, f(x,y)=(۰,۰)\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, (۲x,y-۳x)=(۰,۰)\right\}$$
$$\Rightarrow k_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, x=y=۰\right\}$$
$$\Rightarrow k_f=\{(۰,۰)\}$$

و بُعد هسته، برابر صفر است.

مثال ۳: نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(x-y,۲x-۲y)$ مفروض است، هستهٔ f و بُعد هستهٔ f را مشخص کنید.

$$k_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, f(x,y)=(۰,۰)\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, (x-y\ ,\ ۲x-۲y)=(۰,۰)\right\}$$
$$\Rightarrow k_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \,\middle|\, x-y=۰\right\}$$

بنابراین، هستهٔ f، نیمساز ربع اوّل و سوّم، یعنی خط به معادلهٔ $y=x$ بوده و بُعد آن یک است.

مثال ۴: نگاشت $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(۰,۰)$ مفروض است، هستهٔ f و بُعد هستهٔ f را مشخص کنید.

با توجه به ضابطهٔ نگاشت f، واضح است که f به‌طور ثابت همهٔ $\mathbb{R}^۲$ را روی $(۰,۰)$ می‌نگارد، لذا $k_f=\mathbb{R}^۲$ و بُعد هسته، برابر ۲ است.

مثال ۵: نگاشت $f:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x-y,۲y+z)$ مفروض است، هستهٔ f و بُعد هستهٔ f را مشخص کنید.

$$k_f=\left\{(x,y,z) \,\middle|\, f(x,y,z)=(۰,۰)\right\}$$
$$=\left\{(x,y,z) \,\middle|\, (x-y,۲y+z)=(۰,۰)\right\}$$
$$\Rightarrow k_f=\left\{(x,y,z) \,\middle|\, x-y=۰,۲y+z=۰\right\}$$

دستگاه دو معادله و سه مجهولی $\begin{cases}x-y=۰\\ ۲y+z=۰\end{cases}$ همواره دارای بی‌شمار جواب غیر صفر نیز هست. در واقع، جواب دستگاه، محل تلاقی دو صفحه است که یک خط گذرنده از مبدأ می‌باشد.

$$۲\begin{cases}x-y=۰ & ① \\ ۲y+z=۰\end{cases} \Rightarrow ۲x=-z \ ②$$

از طرفی طبق① ، $y=x$ ، پس با توجه به② $y=\frac{-z}{۲}$ ، پس داریم:

$$k_f=\left\{(x,y,z) \,\middle|\, x=y=\frac{-z}{۲}\right\}$$

یعنی k_f خطی است در $\mathbb{R}^۳$ که بُعد آن ۱ است.

مثال ۶: نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(x,y+x,۰)$ مفروض است، هسته و بُعد هستهٔ نگاشت f را مشخص کنید.

$k_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y+x, 0) = (0,0,0)\}$

$\Rightarrow k_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y = 0\} = \{(0,0)\}$

پس بُعد هستهٔ f صفر است.

مثال ۷: نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $f(x,y) = (0,y,2y)$ مفروض است، هسته و بُعد هسته را مشخص کنید.

$k_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (0,y,2y) = (0,0,0)\}$

$\Rightarrow k_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$

بنابراین هستهٔ f، محور xها بوده که بُعد آن یک می‌باشد.

مثال ۸: نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = (0,z)$ مفروض است، هستهٔ f و بُعد هستهٔ f را مشخص کنید.

$k_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = (0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (0,z) = (0,0)\}$

$\Rightarrow k_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$

بنابراین هستهٔ f عبارت است از صفحهٔ xoy $(z=0)$ که بُعد آن ۲ است.

مثال ۹: نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = 0$ مفروض است، هسته و بُعد هستهٔ f را مشخص کنید.

از آن‌جا که نگاشت خطی f به‌صورت ثابت، همهٔ اعضای $\mathbb{R}^3$ را به صفر تبدیل می‌کند، پس $k_f = \mathbb{R}^3$ و بُعد آن ۳ می‌باشد.

$k_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 = 0\} = \mathbb{R}^3$

تست: هستهٔ نگاشت $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = (x,0,0)$ کدام است؟

۱) محور xها　　۲) صفحهٔ xoz

۳) صفحهٔ yoz　　۴) صفحهٔ xoy

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$k_f = \{(x,y,z) | f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) | (x,0,0) = (0,0,0)\}$

$\Rightarrow k_f = \{(x,y,z) | x = 0\}$

و مجموعهٔ نقاطی از فضای سه بُعدی که طول آنها صفر است، صفحهٔ yoz را تشکیل می‌دهند.

تست: هستهٔ نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = (x,z,0)$ کدام است؟

۱) محور zها　　۲) محور xها

۳) محور yها　　۴) صفحهٔ xoz

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$k_f = \{(x,y,z) | f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) | (x,z,0) = (0,0,0)\}$

$\Rightarrow k_f = \{(x,y,z) | x = z = 0\}$

و مجموعهٔ نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ که طول و ارتفاع آنها صفر است، محور عرضها یا yها می‌باشد.

یک ویژگی مهم برای هستهٔ نگاشتهای خطی

از آن‌جا که در نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$، همواره $k_f \subseteq \mathbb{R}^m$، این سؤال پیش می‌آید که آیا هستهٔ f که زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}^m$ است، زیر فضای برداری $\mathbb{R}^m$ نیز هست یا خیر؟ جواب مثبت است که به‌صورت قضیهٔ زیر بیان و اثبات خواهد شد :

قضیه: اگر $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی باشد، همواره هستهٔ f زیر فضای برداری $\mathbb{R}^m$ است.

اثبات: فرض کنیم k_f هستهٔ نگاشت خطی f باشد، برای اثبات زیر فضای برداری بودن k_f، باید ثابت کنیم مجموعهٔ k_f نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

$k_f = \{x \in \mathbb{R}^m | f(x) = \bar{0} \in \mathbb{R}^m\}$

فرض کنیم: $x,y \in k_f \Rightarrow f(x) = f(y) = \bar{0}$

$f(x+y) \xlongequal{\text{f خطی است}} f(x)+f(y) = \bar{0}+\bar{0} = \bar{0}$

$\Rightarrow f(x+y) = \bar{0} \Rightarrow x+y \in k_f$

فرض کنیم: $r \in \mathbb{R}, x \in k_f \Rightarrow f(x) = \bar{0}$

$f(rx) \xlongequal{\text{f خطی است}} rf(x) = r\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow f(rx) = \bar{0} \Rightarrow rx \in k_f$

کاربُرد هستهٔ یک نگاشت خطی در تشخیص یک‌به‌یک بودن

قضیهٔ زیر، ملاکی بسیار مهم برای تشخیص یک‌به‌یک بودن نگاشتهای خطی بوده و همواره در حلّ مسائل و پاسخ‌گویی به پرسشهای چندگزینه‌ای، می‌توان از آن بخوبی بهره برد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که نگاشت خطی f، یک‌به‌یک باشد، آن است که هستهٔ f فقط شامل بردار صفر باشد یا $k_f = \{\bar{o}\}$.

اثبات: ابتدا فرض کنیم $k_f = \{\bar{o}\}$، ثابت می‌کنیم f یک‌به‌یک است.

فرض کنیم $x_1, x_2 \in D_f \ , \ f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \bar{o}$$

$$\underset{\text{f خطی است}}{\Rightarrow} f(x_1 - x_2) = \bar{o} \underset{\text{تعریف هسته}}{\Rightarrow} x_1 - x_2 \in k_f = \{\bar{o}\}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \bar{o} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{f یک‌به‌یک است}$$

حال فرض کنیم f یک‌به‌یک باشد، ثابت می‌کنیم $k_f = \{\bar{o}\}$.

قبلاً دیدیم که $k_f \neq \varnothing$ و همواره $\bar{o} \in k_f$، حال اگر $k_f \neq \{\bar{o}\}$ (فرض خلف) و مثلاً $x \neq ۰$ و $x \in k_f$، پس طبق تعریف هسته داریم $f(x) = \bar{o}$ و چون $f(\bar{o}) = \bar{o}$، پس f یک‌به‌یک نیست که با فرض تناقض دارد؛ بنابراین $k_f = \{\bar{o}\}$.

مثال: نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $f(x,y) = (x, y+x, x-2y)$ مفروض است، آیا این نگاشت یک‌به‌یک است؟

برای تعیین یک‌به‌یکی، کافی است هستهٔ f را بیابیم و از قضیهٔ فوق کمک بگیریم:

$$k_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = (۰,۰,۰)\}$$
$$= \{(x,y) | (x, x+y, x-2y) = (۰,۰,۰)\}$$
$$= \{(x,y) | x = ۰ \ , \ x+y = ۰ \ , \ x-2y = ۰\}$$
$$= \{(x,y) | x = y = ۰\} = \{(۰,۰)\}$$

بنابراین، f یک‌به‌یک است.

مثال: آیا نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y,z) = (x, x+z)$ یک‌به‌یک است؟ هستهٔ f را معین می‌کنیم:

$$k_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = (۰,۰)\}$$
$$= \{(x,y,z) | (x, x+z) = (۰,۰)\}$$
$$= \{(x,y,z) | x = ۰ \ , \ x+z = ۰\}$$
$$\Rightarrow k_f = \{(x,y,z) | x = z = ۰ \ , \ y \in \mathbb{R}\} = \text{محور yها}$$

و چون $k_f \neq \{۰,۰,۰\}$، پس نگاشت f یک‌به‌یک نیست. به عنوان مثال:

$$f(۰,۲,۰) = (۰,۰) \ \text{و} \ (۰,۲,۰) \neq (۰,۸,۰)$$
$$f(۰,۸,۰) = (۰,۰)$$

تست: اگر $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی یک‌به‌یک باشد و داشته باشیم: $k_f = \{(a+b, 2a-b+1)\}$، در این صورت، حاصل $(a^2 + b - 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{-۵}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا f یک‌به‌یک است، پس طبق قضیه باید $k_f = \{(۰,۰)\}$؛ بنابراین،

$$(a+b \ , \ 2a-b+1) = (۰,۰) \Rightarrow \begin{cases} a+b = ۰ \\ 2a-b+1 = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3} \ , \ b = \frac{1}{3} \Rightarrow a^2 + b - 1 = -\frac{5}{9}$$

تست: کدام یک از نگاشتهای زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$، $f(x,y) = (۰,۰)$ ۲) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$، $f(x,y) = (x+y, y, ۰)$

۳) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، $f(x,y,z) = (x,y)$. ۴) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$، $f(x,y,z) = (x+y, z, 2z)$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

در گزینهٔ (۱)، داریم $k_f = \mathbb{R}^2$ و در گزینهٔ (۳) داریم $k_f = \{(x,y,z) | x = y = ۰ \ , \ z \in \mathbb{R}\}$، که همان محور zهاست و در گزینهٔ (۴) داریم $k_f = \{(x,y,z) | x+y = ۰ \ , \ z = ۰\}$، که همان خط $x+y=۰$ است؛ ولی در گزینهٔ (۲) داریم $k_f = \{(x,y) | x = y = ۰\}$، یعنی $k_f = \{(۰,۰)\}$، پس f یک‌به‌یک است.

یادداشتها: ______________

1) kernel



تاریخچهٔ مجله های ریاضی ایران(۲۷)

همچنان در شمارهٔ اوّل مجموعهٔ مقاله‌ها و مسائل ریاضی در گشت‌و گذاریم و در این گذر، به یکی از قسمتهای جالب آن تحت عنوان **مصاحبه با استاد پرویز شهریاری** رسیده‌ایم و سرآن داریم که آن را به‌طور کامل، برای شما بازگو کنیم، و اینک، متن کامل این مصاحبه :

● جناب استاد شهریاری، لطفاً ضمن معرفی کامل خودتان، از خانه و خانواده‌تان برایمان بگویید.

در دوم آذر ۱۳۰۵ در شهر کرمان و در خانواده‌ای با سنتهای دهقانی و زرتشتی به‌دنیا آمدم. دورهٔ دوسالهٔ دانشسرای مقدماتی را پس از پایان نه‌سال نخستین تحصیل، در همان کرمان گذراندم. در شهریور ۱۳۲۳، همراه با زنده‌یاد **کاظم مدنی**، برای ادامهٔ تحصیل، به‌تهران آمدم.

زنده‌یاد کاظم مدنی شاگرد اوّل و من شاگرد دوم آن دوره از دانشسرای مقدماتی بودیم و بنابر تصمیم گردانندگان وقت آموزش‌و پرورش، به کسانی که رتبه‌های اوّل و دوم دانشسرای مقدماتی را کسب کرده بودند، امکان ادامهٔ تحصیل، همراه کمک خرجی از طرف دولت داده شده بود. برای تکمیل درسهای دبیرستانی، سه‌کلاس (ریاضی، تجربی و ادبی) در محل دانشکدهٔ ادبیات و دانشسرای عالی ـ که در نزدیکی میدان بهارستان بود ـ به نام کلاسهای مقدماتی تشکیل داده بودند و من، سرانجام، کلاس مقدماتی ریاضی را تمام کردم. دبیران ما استاد دانشگاه بودند و من بویژه، از استاد ارجمند، **دکتر فاطمی** (استاد مکانیک) و خانم **دکتر اهم** (استاد فیزیک)، چه از نظر روش تدریس و چه از نظر روحیهٔ انسانی آنها، خاطره‌های بسیار زیبایی دارم.

در مهرماه ۱۳۲۴ در رشتهٔ ریاضیات دانشکدهٔ علوم ثبت نام کردم ؛ ولی دورهٔ سه‌سالهٔ لیسانس را، به جای سه سال، در هشت سال گذراندم و در خرداد ۱۳۳۲ تمام کردم. علت عقب افتادن کار تحصیل من، دو چیز بود : دشواریهای مالی و خانوادگی، و اجبارهای اجتماعی که مرا از دانشگاه و کلاس دور نگه می‌داشت.

● از چه زمانی به معلمی پرداختید و در چه دبیرستانها یا دانشگاه‌هایی تدریس کرده‌اید؟

از سال تحصیلی ۱۳۲۱ ـ ۱۳۲۰، که نهمین سال تحصیلم را می‌گذراندم، تا امروز، با دانش‌آموزان رابطه دارم و باید اعتراف کنم که از کلاسها و دانش‌آموزان خود، و از بحث و گفت‌وگو با آنان بسیار چیزها آموخته‌ام. تدریس، جریانی دوطرفه است و معلم، اگر به کار خود عشق داشته باشد، هم یاد می‌دهد و هم یاد می‌گیرد.

در تهران، تدریس را در دبستان «رشدیه» و کلاسهای پنجم و ششم ابتدایی آغاز کردم و در بسیاری از کلاسهای شبانه درس

داده‌ام. در دبیرستانهای خوارزمی، مرجان، فیروزبهرام، اندیشه و... سالهای زیادی معلم بوده‌ام. چند سال در دانشکدهٔ فنی دانشگاه‌های تهران و تربیت معلم (دانشسرای عالی آن زمان)، روزانه و شبانه، و در مدرسهٔ عالی علوم اراک، اغلب درسهای ریاضی و گاه فلسفه و تاریخ علم را تدریس کرده‌ام.

● از آثار و نوشته‌هایتان برایمان بگویید.

نخستین کتابی که از من چاپ شد، ترجمهٔ کتاب «تاریخ حساب» تألیف «رنه تاتون» در مجموعهٔ «چه می دانم؟» و به وسیلهٔ انتشارات «امیرکبیر» بود [سال ۱۳۳۰ شمسی] ؛ ولی کار اصلی تألیف را، به توصیهٔ زنده‌یاد **رمضانی**، صاحب انتشارات «خاور» و با نوشتن یک دورهٔ هفت جلدی کتابهای ریاضی سه سال اوّل دبیرستان آغاز کردم (البته، پیش از آن و در سال ۱۳۲۷، رسالهٔ کوچک «جنبش مزدک و مزدکیان» را منتشر کرده بودم). زنده‌یاد رمضانی، از گرانی کتابهای درسی و سوءاستفادهٔ برخی سودجویان، به سختی ناراحت بود و ازمن خواست، بدون توقّع، یک دوره کتاب ریاضی تهیه کنم و در اختیار او بگذارم، تا بتواند با ارزانترین قیمت، در اختیار دانش‌آموزان بگذارد. این دورهٔ هفت جلدی (دو جلد حساب، دو جلد جبر و سه جلد هندسه) در فاصلهٔ سالهای ۱۳۳۵ تا ۱۳۳۷، به بهای هر جلد ده ریال، منتشر شد و در زمان خود، مورد استقبال قرار گرفت.

اجازه بدهید از سیاههٔ نوشته‌ها و ترجمه‌های خود صرف‌نظر کنم ؛ چرا که برای خوانندهٔ شما، ملال‌آور خواهد بود و تنها به نکته‌ای اشاره کنم. تا پیش از سال ۱۳۴۰، برای یک دانش‌آموز علاقه‌مند به ریاضیات، بجز کتابهای درسی، منبع زیادی برای کارِ خارج از کلاس وجود نداشت. نخستین کتابهایی که در این باره چاپ شد، در همین سالها بود. ابتدا با همکاری زنده‌یاد **باقر امامی**، دو کتاب را آمادهٔ انتشار کردیم ؛ «مسائل جبر و راهنمای حلّ آنها» و «مسائل مثلثات و راهنمای حل آنها» بعدها و براساس تجربهٔ طولانی معلمی، دو کتاب «روشهای جبر» و «روشهای مثلثات» را نوشتم (که دومی با همکاری آقای **احمد فیروزنیا** بود) و در آنها، به جنبه‌هایی از ریاضیات مقدماتی پرداختم که یا در برنامه‌های رسمی دبیرستانی وجود نداشت و یا به صورتی گذرا مطرح شده بود. به تدریج، این دو کتاب و کتابهای بعدی من، چنان جای خود را دربین دانش‌آموزان بازکرد و بحثهای مربوط به آنها چنان همگانی شد که به نحوی جزو کار رسمی هر دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی قرار گرفت و مسأله‌ها و روشهای مطرح شده در این کتابها، به بسیاری از کتابهای تقلیدی دیگر (و البته، بدون ذکر منبع) راه یافت، و هنوز هم، با وجود تغییر کیفی و کمّی برنامه‌های درسی، کتابهای بالینی هر دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی به حساب می‌آیند.

به خاطره‌ای اشاره کنم. در سالهای ۴۰، که یکی از کتابهای من در چاپخانه «بانک بازرگانی» حروفچینی و چاپ می‌شد، ضمن تصحیح نمونه‌ها، یکی از همکارانم که در یکی از دبیرستانهای معروف تهران تدریس می کرد، از من راه‌حلّ مسأله‌ای را پرسید که در این کتاب مطرح شده بود و گفت : «هیچ راه حلی به نظر من نمی‌رسد.» مسأله این بود : ثابت کنید که در مجموع :

$$S=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k\ (n\in\mathbb{N})$$

به عبارتی از درجهٔ $(k+1)$ نسبت به n می‌رسیم که، در آن، ضریب n^{k+1} برابر $\frac{1}{k+1}$ و ضریب n^k برابر $\frac{1}{2}$ است.

راه حلّ مسأله را برای او توضیح دادم. پس فردای آن روز، یکی از نزدیکان من، که شاگرد این همکارم بود، پیش من آمد و راه حل همین مسأله را خواست. معلوم شد که این مسأله یکی از پرسشهای امتحانی آنها بوده است. از روش کار همکارم، اندکی دلگیر شدم ؛ چرا مسأله‌ای را که خود او نتوانسته بود حل کند، برای حل، به دانش‌آموزان خود پیشنهاد کرده بود؟ آن هم به عنوان یک مسألهٔ امتحانی. امتحان زمان محدودی دارد و به‌هرحال، برای دانش‌آموز، با دلهره و هیجان همراه است. بندرت می‌توان دانش‌آموزی را یافت که بتواند روحیهٔ آفرینندگی خود را در جلسهٔ امتحان حفظ کند. امتحان به معنای «آزمایش آموخته‌ها» است، نه وسیله‌ای برای طرح ناشناخته‌ها!

● از خاطرات دوران کودکی و نوجوانیتان برایمان تعریف کنید.

دوره‌های کودکی، نوجوانی و جوانی هرکسی پر از خاطره است. در این دوره‌ها، همه چیز برای آدم تازگی دارد و هر حادثه‌ای

و هر مطلبی کنجکاوی را برمی‌انگیزد. علاوه بر آن، همه‌چیز پاک و سالم جلوه می‌کند. دنیای کودکی و نوجوانی، دنیای زلال و بی‌آلایش پاکیها و راستیهاست، با آلودگی، دروغ و ریا میانه‌ای ندارد و ... چه‌قدر زیباست! ... و همهٔ تلاش آدمی، در سراسر طول تاریخ خود، در این سمت است تا خود را به جایی برساند که، همیشه، همه‌جا و در همهٔ صحنه‌ها، سلامت نفس دوران کودکی را، به تمامی طول زندگی گسترش دهد و ناپاکیها و تقلّبها را از چهرهٔ انسان و انسانیت بزداید ... و همهٔ ما، با همان خاطره‌های بی‌آلایش دوره‌های نخستین زندگی زنده‌ایم.

سال دوم دبستان را می‌گذراندم. فاصلهٔ خانه تا مدرسه، نزدیک به سه کیلومتر و شاید بیشتر بود. مسیر ما از کنار خندقهایی می‌گذشت که از زمان حملهٔ «آغامحمدخان قاجار» باقی مانده بود؛ کوره راهی که سمت دیگر آن، با بیابانی بی‌انتها به کویر می‌پیوست. ناهار را با خود به مدرسه می‌بردیم؛ دستمالی که حاوی دو تکه نان بیات بود. یک روز، کنار «جاده» یک کولی نشسته بود و با دستگاه کوچک خرّاطی، تفنگ چوبی (که خیلی ساده و ابتدایی بود) درست می‌کرد. همشاگردی‌ام، یکی از آنها را خرید یک ریال. من هم دلم می‌خواست یکی از تفنگها را داشته باشم؛ ولی پول نداشتم. مرد کولی گفت: «اگر ده روز ناهارت را به من بدهی، روز دهم یک تفنگ به تو می‌دهم و ...» من گره دستمال را باز کردم و تکه‌های نان را به او دادم.

ـ «این که فقط نان است. اگر این جوری است، باید بیست‌روز بدهی.»

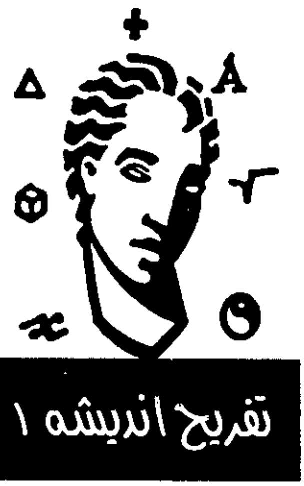
قبول کردم. هرروز ناهار خود را به او می‌دادم. درست نوزده روز و ... روز بیستم، با امید و آرزو، و احتمالاً با سرعتی بیشتر، حرکت کردم. با خود گفتم: «امروز صاحب یک تفنگ می‌شوم. به بیست روز گرسنگی می‌ارزد.» ولی کولی آن‌جا نبود، نه آن روز و نه روزهای بعد. هنوز هر وقت به کرمان می‌روم و از آن نقطه (که دیگر مملوّ از ساختمان و آپارتمان است) می‌گذرم، چشمانم به دنبال کولی آشنا می‌گردد. هنوز باور نمی‌کنم که او، دروغ گفته باشد ... حتماً پیشآمدی نامنتظره او را از وفای به عهد بازداشته بود ...

به مناسبت خاطره‌های دوران کودکی، باید از نخستین معلم خود یاد کنم؛ «عارف بزرگی» که متأسفانه نام او را فراموش کرده‌ام. پیرمردی بود نابینا و بی‌سواد. از زندگی او و از سرنوشتش چیزی نمی‌دانم. سالی یک بار به دیدن ما می‌آمد و همیشه در نزدیکیهای غروب یک روز بهاری، با نوای دلنشین نی، خبر از آمدن خود می‌داد. من و بچه‌های دیگر محلّه، به استقبال او می‌دویدیم و همه آرام و ساکت او را همراهی می‌کردیم. حتی از شیطانترین بچه‌ها هم صدایی درنمی‌آمد. گویی با آهنگ نی خود، با ما حرف می‌زد. زنها و مردهایی که در خانه‌ها بودند، جلو درمی‌ایستادند. برخی به پشت بام می‌رفتند؛ ولی همه تنها گوش می‌دادند. قدی بلند و شانه‌هایی پهن داشت. موهای سر برهنه و سبیلش کاملاً سفید بود؛ ولی موهای صورتش را پاک کرده بود، کفش و لباسش کهنه، ولی به غایت پاکیزه و مرتّب بود ... بدون راهنما و عصا، آرام ولی محکم راه می‌رفت. سر پیچ هر کوچه، بموقع می‌پیچید و راست به طرف خانه ما می‌آمد و روی سکوی در خانه می‌نشست. با همهٔ اصراری که می‌شد، هرگز به درون خانه پا نمی‌گذاشت. مدتی به نی‌زدن خود ادامه می‌داد و بعد برای ما «قصه» می‌گفت. حرفهایش عجیب بود؛ از رنجهای زمانه و ستم ظالمان، از عرق ریختن دهقانان بی‌زمین و از شلاق ارباب و مباشر ... و از امید به آینده و زندگی انسانی. هنوز حرفهای او در گوشم زنگ می‌زند و هنوز، این نخستین درسهای زندگی، به من نیرو و امید می‌دهد، و باید اعتراف کنم که تأثیری عمیق بر زندگی و شیوهٔ زندگی آیندهٔ من باقی گذاشت. ما، در خانه چیزی نداشتیم و در محلهٔ ما، هیچ کس چیزی در خانه نداشت؛ ولی به هرحال، شام نی‌زن، محبوب محله، فراهم می‌شد. همان‌جا، روی سکوی در خانه و ... بعد، دوباره نی را به لبان خود نزدیک می‌کرد و با صدای نی خداحافظی می‌کرد و می‌رفت ... تا یک سال دیگر ... و سالی رسید که دیگر نیامد؛ نه آن سال و نه سالهای بعد ... من معلمان بسیاری داشته‌ام و از همهٔ آنها، چیزها آموخته‌ام؛ ولی هنوز هم این نی‌زن عارف را معلم خود می‌دانم.

● و از دوران جوانی‌تان

از سال سوّم دبستان تا پایان دورهٔ اوّل دبیرستان، در دبیرستان ایرانشهر کرمان بودم و در همهٔ این سالها، بجز سال پنجم دبستان،

معلم ادبیات ما، مرد عاشق و علاقه‌مندی بود به نام **باقر امامی**. می‌گویم عاشق و علاقه‌مند ؛ زیرا با تمامی وجود، تلاش می‌کرد آنچه می‌داند، به ما بیاموزد. در مکتبخانه درس خوانده بود. شاید، نتوان او را از بزرگان فرهنگ دانست، ولی با شوریدگی فوق‌العاده‌ای، برای ما حرف می‌زد. از همه‌جا و همه‌چیز ؛ از فلسفه، از هنر، از موسیقی و حتی به قول خودش، از «علم حیل» (مکانیک). سالهای زیادی از عمر او گذشته بود. با عصا راه می‌رفت و یک چشم او بکلی نابینا بود ؛ ولی وقتی به شوق می‌آمد چالاکتر از جوانان می‌نمود و ... اگر احساس می‌کرد کسی به خود مشغول است و به سخن او گوش نمی‌دهد، خشم سراپای وجودش را فرامی‌گرفت و با عصا به طرف او حمله می‌کرد ... شاید در زمینهٔ ادبیات، فلسفه و دانش، چیز زیادی به من نیاموخته باشد و این، البته گناه او نبود ... هرچه می‌دانست و هرچه به او آموخته بودند بازگو می‌کرد ؛ ولی شوق عشق او به یاددادن، خیلی چیزها به من یاد داد. از همان روزهایی که روی نیمکت دبستانی، خیره و گاه شگفت‌زده از این همه گذشت و شوریدگی، سرکلاس درس او نشسته بودم، یادگرفتم که، یا نباید وظیفه و مسؤولیتی را بپذیرم و یا باید با تمام وجودم، به آن بپردازم. امامی زندگی فقیرانه‌ای داشت و با ماهیانهٔ بسیار ناچیزی معلمی می‌کرد ؛ اما شیدای کار خود بود و من، هروقت سرکلاس می‌روم، هروقت با دانش‌آموزان روبه‌رو می‌شوم، به یاد آن زنده‌یاد می‌افتم و امیدوارم که، دست کم اندکی از عشق و شیدایی او را در وظیفه سنگین معلمی، کسب کرده باشم.



سرگرمی هندسی

مستطیلی داریم با ابعاد ۱۳×۵

مساحت مستطیل ۶۵ مترمربع است. ۱۳×۵ = **۶۵**

حال مستطیل را به دو مثلث مساوی و دو ذوزنقه مساوی تقسیم می‌کنیم.

مساحت هر مثلث $۳\times\frac{۸}{۲}=۱۲$

مساحت دو مثلث ۱۲×۲ = **۲۴**

مساحت هر ذوزنقه $(۳+۵)\times\frac{۵}{۲}=۲۰$

۲۰×۲ = **۴۰**

متر مربع ۶۴ = ۴۰ + ۲۴

یک متر مربع کم آوردیم، چرا؟

از صمد پور اسدا... جواب در صفحهٔ ۸۸

تفکر الگوریتمی، هنر برنامه‌نویسی



● نوشتهٔ عبدالحسین مصحفی

پا به پای گسترده‌تر شدن کاربردهای کامپیوتر، گرایش به ورزیدگی در کار کردن با آن نیز افزونتر شده است. دراین باره سروکار هم با سخت‌افزار است وهم با نرم‌افزار. شناخت سخت‌افزار، بیشتر جنبهٔ حرفه‌ای دارد و به سادگی برگزار می‌شود. در زمینهٔ نرم‌افزار نیز برنامه‌نویسی مسأله‌هایی که جنبهٔ استاندارد داشته باشند، دشواری ویژه‌ای را درپی نخواهد داشت ؛ کافی است که قالب برنامهٔ مربوط به هر مسأله شناخته شود و به کار رود. برای برنامه‌نویسی مسأله‌هایی از گونه‌های دیگر، ازجمله بسیاری از مسأله‌های ریاضی، تفکری ویژه لازم است که *تفکر الگوریتمی* یا هنر *برنامه‌نویسی* نامیده می‌شود. دانش‌آموزانی که در مسابقه‌ها و در المپیادهای کامپیوتری می‌درخشند، از چنین تفکری برخوردارند و در چنین هنری ورزیدگی دارند. دانش‌آموزان و کسانی دیگر هم دستیابی به روشهایی را خواهانند که پیشرفت و ورزیده شدن آنها را در برنامه نویسی درپی‌داشته باشد. امید است که این نوشتار برای اینان کارساز باشد.

برای نوشتن برنامهٔ مربوط به راه‌حل یک مسأله، نخستین گام، پی‌بردن به الگوریتمی است که باید به‌کار برد. الگوریتم، که تحریف شدهٔ *الخوارزمی* است، و امروزه به معنی ویژهٔ «راه‌حل کامپیوتری» زبانزد شده، همان اصطلاح «قاعده (روش)» است که در متنهای ریاضی به‌کار می‌رفته و به‌کار می‌رود. اما الگوریتم حل ریاضی یک مسأله با الگوریتم حل کامپیوتری آن تفاوتهایی دارد. ابزارهایی که دراین دو الگوریتم به‌کار می‌روند با یگدیگر متفاوتند . این بدان معنی نیست که در راه‌حل کامپیوتری باید راه‌حل ریاضی را نادیده گرفت، بلکه نخست باید راه حل ریاضی را به دست آورد و آنگاه با به‌کار بردن ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری، آن راه‌حل ریاضی را به‌صورت الگوریتمی کامپیوتری درآورد. الگوریتم حل مسأله که معلوم شود نوشتن آن به یکی از زبانهای برنامه‌نویسی کاری به نسبت ساده خواهد بود، به پاکنویس کردن یک انشای طرح‌ریزی شده می‌ماند.

هنر برنامه نویسی درآن است که متناسب با مسألهٔ موردنظر، کاراترین ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری گزیده شوند و کوتاهترین و زیباترین الگوریتم فراهم آید. ازاین رو برای ورزیده شدن در هنر برنامه نویسی، شناسایی ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری و پی‌بردن به چگونگی کارکرد آنها نخستین گام است. گامهای بعدی، تمرین هرچه بیشتر و به‌دست آوردن الگوریتمهای مربوط به حل مسأله‌هایی ازگونه‌های متفاوت است.

ابزارها و ساختارهای نرم‌افزاری

متغیّرها: دربرنامه‌نویسی، متغیّرها، همانند متغیّرهای جبری، برای کلیت دادن به دستورها و قاعده‌ها به‌کار می‌روند. اما در

کامپیوتر هرگونه محاسبه و پردازش روی مقدارهای معلوم انجام می‌گیرد. اگر در جبر می‌توان عملهایی را روی خود متغیرها انجام داد، مثلاً حاصل عبارت $(1+2x)^2$ را برحسب x به‌دست آورد، در کامپیوتر حاصل این عبارت،تنها آنگاه به‌دست می‌آید که معلوم شده باشد چه مقدار عددی باید جانشینx شود و حاصل عمل هم یک مقدار عددی خواهد بود.

هر متغیر با یک نام نموده می‌شود. این نام می‌تواند یک حرف، ترکیبی بی‌معنی یا با معنی از یک یا چند حرف و عدد باشد.

چنان‌که نامهایی از گونهٔ A، SUM، DICE، X1 و COUNT را می‌توان برای متغیرها برگزید. به‌هنگام اجرای برنامه، کامپیوتر با هر متغیر که روبرو شود جایی (خانه‌ای) از حافظهٔ خود را برای آن متغیر درنظر می‌گیرد و هرگونه پردازش روی آن متغیر را روی مقدار موجود درآن جای انجام می‌دهد. مقدار یک متغیر اگر معلوم نشده باشد، کامپیوتر آن را صفر می‌گیرد.

متغیرهای زیروندار: همان‌گونه که در ریاضیات متغیر زیروندار، مثلاً x_n برای نشان دادن مجموعه مقدارهایی به‌کار می‌رود که همهٔ این مقدارها با نام x شناسایی و با زیروندهای ۱، ۲، ۳، ...، n، ... از یکدیگر تمیز داده می‌شوند، در الگوریتمها و برنامه‌نویسیها نیز می‌توان مجموعه مقدارهایی را با یک متغیر زیروندار نشان داد و به‌کار برد. اما در اینجا زیروند، که عدد صحیح نامنفی است، درکنار متغیر و داخل پرانتز یا کروشه نوشته می‌شود. چنان‌که متغیّر X(I) یا X[I] به معنی متغیّر با نام X و با زیروند I است درحالی که X1 نشانهٔ یک متغیر ساده است. متغیّرهای با دو زیروند، با سه زیروند و با زیروندهای بیشتر را می‌توان به‌کار برد.

آرایه: مقدارهایی (عددی یا غیرعددی) که چنان مرتب شده باشند که بتوان آنها را شماره‌گذاری کرد و به هریک از آنها از روی شماره‌اش پی‌برد، مجموعه‌ای منظم را تشکیل می‌دهند که آن را *آرایه*، هریک از آن مقدارها را یک *درایهٔ (عضو)* آن آرایه، و تعداد درایه‌ها را *اندازهٔ* آن آرایه می‌نامند. هر آرایه با یک نام و با اندازه‌اش شناخته می‌شود و هر درایهٔ آن را می‌توان با یک متغیر زیروندار نشان داد. این متغیر همان نام آرایه و زیروند آن شمارهٔ ترتیب درایه است. در بیشتر زبانهای برنامه‌نویسی، شماره‌گذاری درایه‌های آرایه از صفر آغاز می‌شود. بنابر آن‌که متغیّر نمایانگر درایه‌های آرایه، یک زیروند، دو زیروند، ...، یا n زیروند داشته باشد، آرایه را یک بعدی، دو بعدی، ...، یا *n* بعدی می‌نامند. آرایهٔ یک بعدی یک دنباله وآرایهٔ دوبعدی یک جدول یا یک ماتریس خواهد بود. دنبالهٔ رقمهای عدد نویسی دهدهی آرایه‌ای یک بعدی می‌سازند که اگر نام آن را D بگذاریم هر درایه‌اش (= هررقم) با D(I) نموده می‌شود که I یکی از شماره‌های از ۰ تا ۹ است. جدول ضرب دهدهی آرایه‌ای دو بعدی است که با انتخاب مثلاً MUL برای نام آن، هر درایه‌اش با MUL(I,J) نموده می‌شود که I شمارهٔ سطر و J شمارهٔ ستون است، چنان‌که MUL(۷,۳) نمایانگر ۳ × ۷ و برابر با ۲۱ است.

در هریک از زبانهای برنامه‌نویسی، دستوری ویژه برای معرفی آرایه وجود دارد. آرایه‌ای یک بعدی از عددهای صحیح که A نام و ۵۰ اندازهٔ آن باشد، در زبان BASIC به صورت

```
DIM A(50)
```

در زبان PASCAL به صورت

```
TYPE A = ARRAY[0 .. 50] OF INTEGER;
```

و در زبان C به صورت

```
int a [50]
```

معرفی می‌شود.

همانند متغیرهای ساده، برای هر آرایه نیز کامپیوتر خانه‌هایی به تعداد درایه‌های آن را در حافظهٔ خود ذخیره می‌کند. هرکدام از این خانه‌ها با متغیّر زیروندار، نظیر هریک از درایه‌های آرایه نشان می‌شوند و مقدار آغازی هرکدام صفر خواهد بود.

گمارش و جایگزین کردن: یک مقدار یا حاصل عددی یک عبارت جبری را می‌توان به یک متغیر نسبت داد (درآن گمارد) یا اینکه آن را به‌جای مقدار قبلی آن متغیر قرار داد (آن‌را جایگزین مقدار قبلی متغیر کرد) دراین مورد فرق نمی‌کند که متغیّر ساده یا زیروندار باشد. در بیشتر زبانهای برنامه‌نویسی همان نشانهٔ «=» و در زبان پاسکال نشانهٔ «= :» را برای هریک از دوعمل گمارش و جایگزینی به‌کار می‌برند؛ نام متغیر در سمت چپ نشانه و مقدار ثابت یا عبارتی که حاصل آن باید در آن متغیر جایگزین شود در سمت راست نشانه نوشته می‌شود. دستور گمارش و جایگزینی در زبان بیسیک پیشتر با LET آغاز می‌شد و امروزه می‌توان از به‌کار بردن آن خودداری کرد. هریک از دو دستور

LET PI=3.14 یا PI=3.14

از زبان بیسیک و دستور

```
PI:=3.14
```

از زبان پاسکال، به معنی گماشتن عدد ۳/۱۴ در متغیر به نام PI است.

در دستور جایگزینی ممکن است که عبارت طرف راست نشانه همان متغیّر سمت چپ را نیز دربرداشته باشد. دراین صورت، حاصل عبارت طرف راست، برحسب آخرین مقدار آن متغیر حساب می‌شود و آنچه به‌دست آید، مقدار جدید آن متغیر می‌شود. چنان‌که اگر F(A,X , SUM) عبارتی جبری برحسب متغیرهای A، X و SUM باشد، دستور

A=F(A.X.SUM)

به این معنی است که:

(مقدارSUMو مقدارXو مقدار قبلی A)F= مقدار جدید A

مثال ۱: در برنامه‌ای به زبان بیسیک، هرگاه سه مرحلهٔ گمارشها و جایگزینی‌های زیر یکی پس از دیگری انجام گیرند:

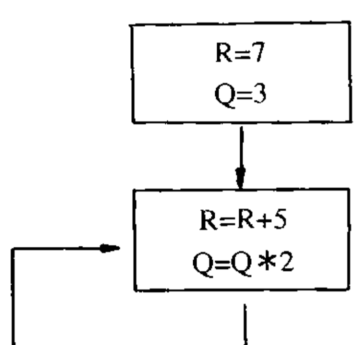
(۱): I=10 , J=17 , A(I,J)= -20

(۲): I=I+1 , J=J+1 , A(I,J)=A(I-1,J-1)+7

(۳): I=5 , J=J-4 , A(I,J)=2*(I+J)

در مرحلهٔ (۱)، مقدار I برابر ۱۰، مقدار J برابر ۱۷ و مقدار درایهٔ (۱۷و۱۰)A از آرایهٔ A برابر ۲۰- می‌شود. در مرحلهٔ (۲)، مقدار I برابر با ۱۱=۱+۱۰، مقدار J برابر با ۱۸=۱+۱۷ و مقدار (۱۸ و ۱۱) A برابر با ۱۳-=۷+۲۰- می‌شود. در مرحلهٔ (۳)، مقدار I برابر با ۵، مقدار J برابر ۱۴=۴-۱۸و مقدار (۱۴و۵)A برابر با ۳۸=(۱۴+۵)×۲ می‌شود. (نشانهٔ * به‌جای عملگر ضرب به‌کار می‌رود.)

مثال ۲: بنابر نمودار شکل (۱)، مقدار R در آغاز برابر ۷ و مقدار Q در آغاز برابر ۳ است. پس از آن رابطه‌های جایگزینی R=R+5 و Q=Q*2 پشت سرهم تکرار می‌شوند که در هر بار تکرار آنها مقدار R افزایشی به اندازهٔ ۵ خواهد داشت و مقدار Q دوبرابر می‌شود.



(شکل ۱)

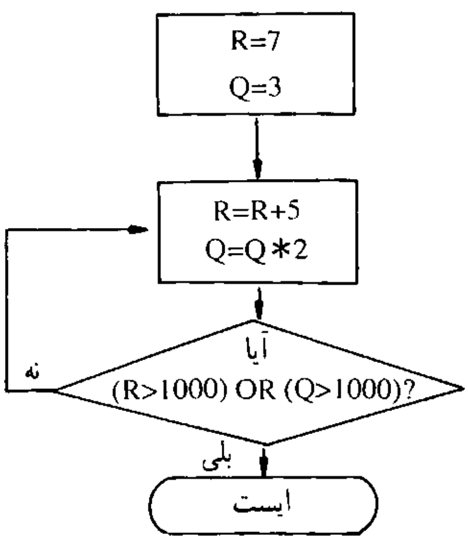
بنابراین فرآیند، دو دنبالهٔ بی‌پایان زیر پدید می‌آیند:

۷,۱۲,۱۷,۲۲,...

۳,۶,۱۲,۲۴,...

که اولی تصاعد حسابی و دومی تصاعد هندسی است.

گزینش: بنابر نمودار شکل (۱) تکرار دو عمل جایگزینی بدون وقفه ادامه خواهد داشت. امّا در عمل چنین امکانی وجود ندارد و لازم است که در مرحله‌ای از تکرار عملها جلوگیری شود. دراین مرحله، شرطی گنجانیده می‌شود که بنابر آن‌که برقرار باشد یا نباشد. عمل تکرار یا متوقف می‌شود یا باز دنبال می‌شود. چنین شرطی یک مرحلهٔ گزینش را بر سر راه قرار می‌دهد که باید از دو یا چند امکان تنها یکی از آنها برگزیده شود. برای مثال، اگر توقف عمل تکرار در نمودار شکل (۱) موکول به آن باشد که دست کم یکی از دو مقدار R یا Q از ۱۰۰۰ تجاوز کند، دراین صورت نمودار شکل (۲) را خواهیم داشت:



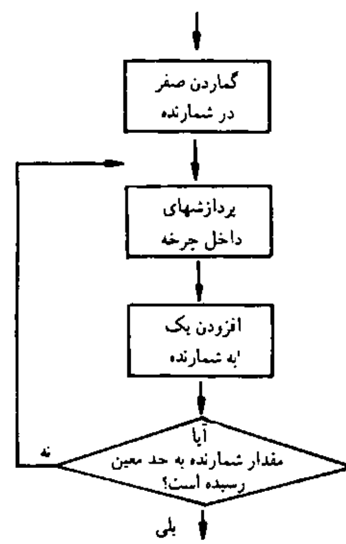
(شکل ۲)

بنابراین نمودار، پس از مرحلهٔ جایگزینی یک مرحلهٔ گزینش (= یک دوراهی) وجود دارد؛ هرگاه شرط بیشتر شدن یکی از دو مقدار R یاQ از ۱۰۰۰ برقرار شده باشد، عمل پایان می‌یابد، وگرنه بازهم عملهای جایگزینی تکرار می‌شوند.

در بیشتر الگوریتمها، دست‌کم یک مرحلهٔ گزینش وجود دارد که در آن مسیر گردش کار دو یا چند شاخه می‌شود و بنابرآنچه مورد نظر باشد، یکی از مسیرها گزیده می‌شود.

چرخه (=حلقه): در بیشتر الگوریتمها لازم می‌شود که یک عمل یا مجموعه‌ای از چند عمل یا به تعداد معیّن یا تا برقراری

شرطی معین تکرار شود. چنین فرآیندی را چرخهٔ عملیاتی (=حلقهٔ عملیاتی) و بیشتر فقط چرخه یا حلقه می‌نامند. چرخه‌ها از مهمترین ساختارهای نرم‌افزاری‌اند و یک ابزار توانمند الگوریتمها به شمار می‌آیند. هر چرخه یک مرحلهٔ گزینش دارد که درآن یک شرط بررسی می‌شود و بنابرآن، یا گردش کار چرخه پایان می‌یابد یا باز تکرار می‌شود. این شرط ممکن است یک گزاره (ساده یا مرکب) باشد. مانند شرط شکل (۲) که ترکیب فصلی دو گزاره است، و ممکن است که شرط توقف چرخه یک شمارنده باشد. دراین حالت، یک متغیر به نام شمارنده انتخاب و پیش از آغاز کار چرخه مقدار آن صفر (یا یک، بنابر آن‌که مرحلهٔ گزینش در آغاز یا در پایان چرخه باشد) می‌شود و با هر بار تکرار چرخه، یک بار عدد یک به شمارنده افزوده می‌شود. در مرحلهٔ گزینش بررسی می‌شود که آیا مقدار شمارنده به‌حد موردنظر رسیده است یا نه. ساختار کلی یک چرخهٔ شمارشی مطابق با نمودار شکل (۳) است :



(شکل ۳)

در هر یک از زبانهای برنامه‌نویسی، دستور عملهایی ویژهٔ هریک از دو گونه چرخه وجود دارد. چنان‌که در زبان بیسیک دستور عملهای FOR - NEXT را برای چرخهٔ شمارشی و دستورعملهای WHILE -WEND را برای چرخهٔ شرطی می‌توان به‌کار برد. بدون به‌کار بردن این دستورعملهای ویژه، می‌توان الگوریتم شکل (۳) را به زبان بیسیک برگرداند.

ساختار الگوریتم

هر الگوریتم یک برنامهٔ کامپیوتری معمولاً از سه بخش اصلی تشکیل می‌شود که هرکدام از این بخشها ممکن است، بخشهای کوچکتری را دربرداشته باشد. در نخستین بخش از الگوریتم، چگونگی دسترسی به داده‌هایی که باید به‌کار روند مشخص می‌شود و متغیرهای ساده یا زیرونداری که باید داده‌ها را درخود نگهدارند انتخاب و معرفی می‌شوند. این بخش از الگوریتم که به زبان بیسیک برگردانده شود، ساختاری بسیار ساده دارد. دومین بخش اصلی الگوریتم، که معمولاً چند بخش فرعی را دربر دارد، از ابزارها و ساختارهایی نرم‌افزاری تشکیل می‌شود که برای پردازشهای لازم روی داده‌ها به‌کار می‌روند. دراین پردازشها گاه لازم می‌شود متغیرهایی کمکی نیز به‌کار روند ؛ وقتی روی متغیری عمل جایگزینی انجام گیرد مقدار قبلی آن متغیر از دسترس خارج می‌شود، حال اگر بنا باشد روی مقدار قبلی بازهم پردازشی انجام گیرد از متغیر کمکی برای نگهداری آن مقدار استفاده می‌شود. در سومین بخش اصلی الگوریتم، چگونگی در دسترس گذاشتن پاسخ یا پاسخهای خواسته شده معلوم می‌شود.

الگوریتم پیش از نموده شدن، در ذهن، طرح‌ریزی و ساختار هر یک از بخشها و ترتیب به‌کار رفتن آنها مشخص می‌شود. پس‌از نموده شدن الگوریتم هم باید مقدارهایی معلوم روی آن آزمایش شوند و درستی الگوریتم بررسی گردد.

یک الگوریتم خوب، آن است که برنامهٔ نظیر آن برای بارشدن روی کامپیوتر جایی هرچه کمتر لازم داشته باشد و برای اجرای آن زمانی هرچه کوتاهتر صرف شود. برای این کار، باید تعداد متغیرهای به‌کار رفته در آن و هم تعداد عملهای پردازشی آن، هرچه ممکن است کمتر باشند. نه تنها هرچرخهٔ به‌کار رفته در الگوریتم، بلکه خود الگوریتم نیز باید در مرحله‌ای پایان یابد.

مسألهٔ نمونه

می‌خواهیم الگوریتم برنامه‌ای را طرح کنیم که بنابرآن برنامه، هر بار که یک عدد حقیقی (درحالت کلی به صورت ممیزدار و با تعداد محدودی از رقمها) به‌کامپیوتر داده شود معلوم کند هر یک از رقمهای دهگانه چند بار به‌صورت با معنی در آن عدد به‌کار رفته است (صفرهای واقع در سمت چپ عدد صحیح و صفرهای واقع در سمت راست کسر دهدهی رقمهای با معنی به‌شمار نمی‌آیند).

متغیر N را انتخاب می‌کنیم تا عددی را که هربار به‌کامپیوتر داده می‌شود، در خود نگه‌دارد. الگوریتم باید هربار برای هریک

از این عددها تکرار شود و برای باز ایستاندن این چرخهٔ تکرار، عدد صفر را به‌کار می‌بریم؛ هرگاه عدد صفر به کامپیوتر داده شود، روی آن پردازشی انجام نگیرد و الگوریتم پایان یابد.

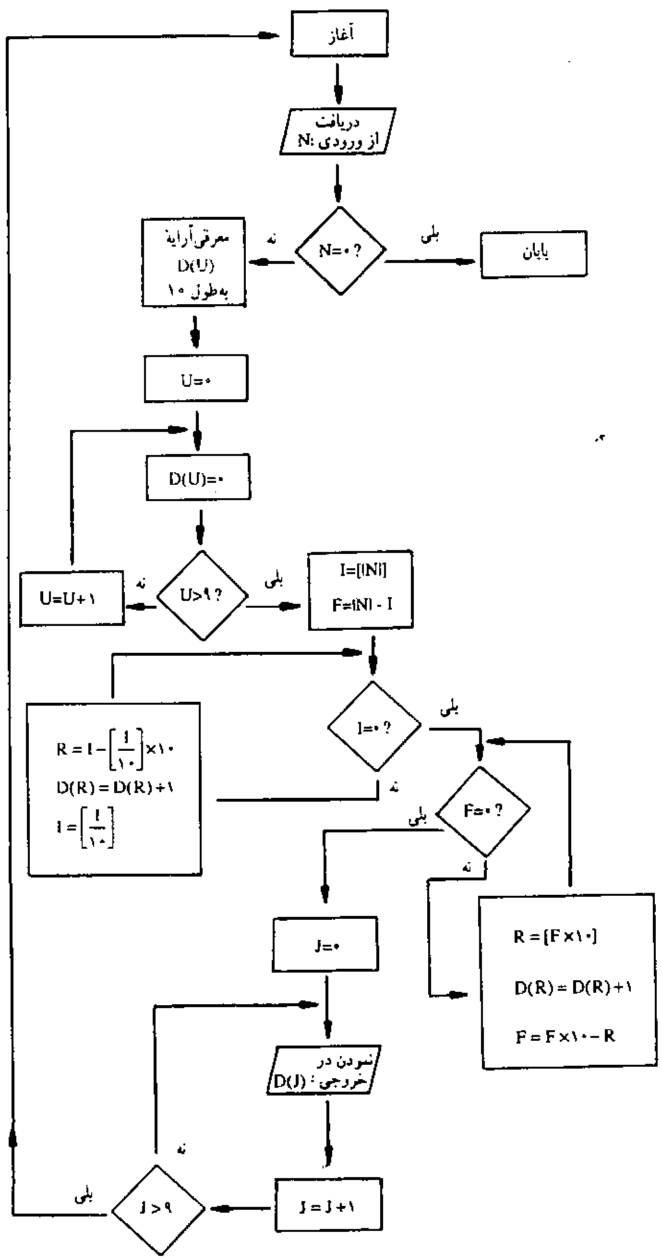
برای شمارش هریک از رقمهای به‌کاررفته، باید ده متغیّر را به‌عنوان شمارنده به‌کار ببریم. این ده شمارنده را با متغیّر زیرونددار D(U) نشان می‌دهیم که U یکی از عددهای از ۰ تا ۹ خواهد بود. این متغیّر زیرونددار به صورت آرایهٔ با نام D و به‌اندازهٔ ۱۰ معرفی می‌شود و مقدار آغازی هریک از درایه‌های آن صفر می‌گردد. شمارش رقمها به این ترتیب انجام می‌گیرد که با هر بار به دست آمدن یکی از آنها، یک بار عدد یک به مقدار درایهٔ با زیروند برابر با آن رقم افزوده می‌شود. مثلاً هر بار که رقم ۷ به‌دست آید، یک به مقدار D(۷) افزوده می‌شود.

برای به‌دست آوردن رقمها، در مرحلهٔ نخست، قدر مطلق جزء صحیح عدد را در متغیّری به نام I و قدر مطلق جزء کسری را در متغیّری به نام F می‌گماریم که ممکن است مقدار یکی از اینها صفر باشد. جزء صحیح را از راه به‌کار بردن تابع جزءصحیح، که در زبان بیسیک با INT(X) نموده می‌شود، و جزءکسری را از کم‌کردن جزء صحیح از خود عدد به‌دست می‌آوریم. تابع جزء صحیح همان است که در ریاضیات با [x] نشان داده می‌شود و کوچکترین عدد صحیح نابزرگتر از عدد مفروض است. از آن‌رو که اگر عدد منفی باشد علامت منفی در نوع رقمهای عدد تأثیری ندارد، قدر مطلق عدد مفروض را درنظر می‌گیریم.

پس از جدا کردن جزءهای صحیح و کسری عدد از هم، جزءصحیح را که بر ۱۰ تقسیم کنیم، خارج قسمت به‌دست آمده را باز بر ۱۰ تقسیم کنیم، و این فرآیند را تا زمانی تکرار کنیم که خارج قسمت صفر به‌دست آید، باقیمانده‌های تقسیمها رقمهای جزء صحیح عدد (به‌ترتیب از راست به چپ) خواهند بود. همچنین اگر جزء کسری عدد را در ۱۰ ضرب کنیم و جزءکسری حاصل ضرب را باز در ۱۰ ضرب کنیم و این فرآیند را تا زمانی تکرار کنیم که حاصل‌ضرب با جزء کسری برابر با صفر به‌دست آید، جزءهای صحیح حاصل ضربها رقمهای جزءکسری عدد مفروض (به ترتیب از چپ به راست) خواهند بود. هربار که یک تقسیم بر ۱۰ انجام گیرد، خارج قسمت به جای مقسوم در I جایگزین می‌شود، همچنین پس از هربار عمل ضرب، جزءکسری حاصل ضرب جایگزین مقدار قبلی F می‌شود. به‌این ترتیب هردوگونه پردازش همواره روی دو متغیر I و F انجام می‌گیرد.

پردازشهای مربوط به، به‌دست آوردن و شمارش رقمها که پایان یابند، مقدار واقع در هر درایه از آرایهٔ D برابر با تعداد رقمهای برابر با زیروند آن درایه است. این مقدارها با یک چرخهٔ شمارشی در خروجی دستگاه نموده می‌شوند.

الگوریتم بیان شده، مطابق با نمودار گردش‌کار شکل (۴) و برنامهٔ آن به زبان بیسیک می‌تواند به گونه‌ای باشد که در صفحهٔ پس از آن درج می‌شود.



(شکل ۴)

برنامهٔ به زبان بیسیک الگوریتم نمودار شکل (۴) می‌تواند چنین باشد :

```
10  INPUT N
20  IF N=0 THEN 200
30  DIM D (10)
40  FOR U=0 TO 9
50  D(U)=0 : NEXT U
60  I=INT (ABS(N)) : F=ABS(N)-I
70  IF I=0 THEN 110
80  R=I-INT (I/10)* 10
90  D(R)=D(R)+1
100  I=INT(I/10) :GOTO 70
110  IF F=0 THEN 150
120  R=INT (F*10)
130  D(R)=D(R)+1
140  F=F*10-R : GOTO 110
150  PRINT "Each of the digits has been used in number as follow:"
160 FOR J=0 TO 9
170 PRINT "The digit" ; J,D(J) "times"
180 NEXT J
190 GOTO 10
200 END
```

برای مثال می‌توانید عدد ۸۹۰۸۷/۳۵۹ را به جای N درنظر بگیرید و آن را روی برنامه آزمایش کنید که خروجی چنین باید باشد : ۱ بار رقم ۰، ۰ بار رقم ۱، ۰ بار رقم ۲، ۱بار رقم ۳، ۰ بار رقم ۴، ۱ بار رقم ۵، ۰ بار رقم ۶، ۱ بار رقم ۷، ۲ بار رقم ۸، ۲ بار رقم ۹.

مسأله‌هایی برای تمرین

الگوریتم حلّ کامپیوتری هر یک از مسأله‌های زیر را طرح کنید و آن را یا با نمودار نشان دهید یا به یکی از زبانهای برنامه‌نویسی بنویسید :

۱ ـ دنبالهٔ عددی $[I_n]$ به گونهٔ زیر تعریف شده است :

$I_1 = ۱$ و $I_n = n + ۲I_{n-۱}$

جمله‌های این دنباله و شمارهٔ ترتیب آنها تا آنگاه به‌دست آیند که آخرین جمله از ۱۰۰۰ بزرگتر نباشد.

۲ ـ کسری متعارفی ساده نشدنی و کوچکتر از یک به دهدهی دوره‌ای ساده تبدیل شده است. عدد A برابر با بخشی (ابتدا ازممیز) این کسر دوره‌ای است که دست کم یک دورهٔ گردش را دربر دارد و عدد طبیعی N برابر با تعداد رقمهای دورهٔ گردش است. دو عدد A و N داده می‌شوند. صورت و مخرج کسر متعارفی مفروض را به‌دست آورید.

۳ ـ درمسألهٔ دانه‌های گندم «صفحهٔ شطرنج» جواب برابر با «$۲^{۶۴} - ۱$» است. به فرض آنکه هرعدد صحیح بزرگتر از $۶۵۵۳۶ = ۲^{۱۶}$ در کامپیوتر به‌صورت نمایی نموده شود که بنابرآن، تعدادی از رقمهای غیرصفر عدد به صفر تبدیل می‌شوند. چه الگوریتمی را باید به‌کار برد تا بنابر آن، تعداد دانه‌های گندم مسألهٔ صفحهٔ شطرنج با همهٔ رقمهای اصلی خود در خروجی کامپیوتر نموده شود؟



تحقیقی درباره نقش تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی

● میرشهرام صدر



مقدمه

آموزش ریاضیات، فقط برای کاربرد آن در دیگر علوم و در زندگی، یا برای بالا بردن توان فکری نیست. ریاضیات، به علت داشتن تاریخ طولانی، انبوه متراکمی از دانسته‌ها را پدید آورده است، که بخش مهمی از فرهنگ بشری را تشکیل می‌دهد. بنابراین اگر آموزش را به عنوان ابزار حفظ و انتقال و بالا رفتن سطح فرهنگ تعریف کنیم، یکی از وظیفه‌های معلمان ریاضی این است که گنجینهٔ عظیم تاریخ ریاضیات را از طریق مدارس به نسل آینده انتقال دهند.

در آموزش ریاضیات کنونی، اغلب معلمان ریاضی همواره می‌کوشند، تا دانش‌آموزان درک درستی از مفاهیم ریاضی داشته باشند، سپس تکنیکها و روشهای حل مسأله را ارائه می‌دهند و در مرحلهٔ آخر، کاربردهایی از درس مورد نظر را برای دانش‌آموزان بیان می‌کنند و در ارائهٔ این مطالب از روشهای مختلف آموزش استفاده می‌کنند. معلم ریاضی با دانستن تاریخ ریاضیات براساس فعالیّت دانش‌آموز، می‌تواند طوری تدریس کند که دانش‌آموز در فرایند حلّ مسأله یا اثبات یک قضیه قرار گیرد. با این روش کاری می‌کنیم که دانش‌آموز، مراحل مختلف حل مسأله را خودش انجام دهد.

این کار باعث می‌شود که دانش‌آموز تا اندازه‌ای در جریان حلّ مسأله و تاریخچهٔ کشف یک قضیه قرار گیرد و به جای تکرار لفظی قضایا، علم را پیش خود بازآفرینی کند، تا این که به نتیجهٔ مطلوب برسد.

وقتی به تاریخ می‌نگریم، ملاحظه می‌کنیم که در زمان سقراط نیز مسألهٔ آموزش و پرورش و تئوری یادگیری مورد مطالعه بوده است. سقراط در روش خود موسوم به روش «مامایی» بیان می‌کند که آموزش باید طوری باشد که دانش‌آموز (به معنی اعم آن) مفاهیم را بزایاند و به نظر او معلم در این تولد، نقش «ماما» را دارد. همچنین ژان ژاک روسو اعتقاد خود را به آموزش بر محور دانش‌آموز بیان می‌کند، همچنین وی تأکید می‌کند که دانش‌آموز باید علم را پیش خود بازآفرینی کند، او می‌گوید دانش‌آموز باید علوم را کشف کند.

ژاک آدمار در کتاب روانشناسی ابداع در ریاضیات از قول هانری پوانکاره می‌نویسد:

«من بیان خواهم کرد که حلّ فلان قضیه تحت بهمان شرایط اتفاق افتاد؛ این قضیه یک نام غیره مصطلح دارد که برای بسیاری کسان بیگانه است، اما این موضوع اهمیتی ندارد، آنچه برای روانشناس ریاضی جالب است، نه خود قضیه بلکه اوضاع و احوالی است که به ابداع منجر می‌شود.»

جیمز کلارک ماکسول معتقد است، خیلی مفید خواهد بود، اگر شاگردان در هر مبحثی، نوشته‌های دست اوّلِ مربوط به آن مبحث را بخوانند، زیرا علوم همیشه در همان صورتی که تولد یافته‌اند، بهتر جذب می‌شوند.

بنابراین، برای رسیدن به هدفهای ظریفی که در بالا پیشنهاد شده است، یعنی «افزایش درک ریاضی»، باید تاریخ ریاضیات را به عنوان یک ابزار در دست معلم برای دادن بینش به دانش‌آموزان و برانگیختن علاقهٔ آنها در نظر گرفت. اگر با کاوشی در تاریخ ریاضیات بتوانیم دانش‌آموز را در اوضاع و احوالی که منجر به کشف یک قضیه یا فرایند حلّ یک مسأله قرار دهیم، در این صورت تدریس را به طور جذابتر انجام داده‌ایم و دانش‌آموز با فکر خود «مانند یک ریاضیدان» شروع به اکتشاف می‌کند. در نتیجه دانش‌آموز با این عمل مفاهیم را کمتر فراموش خواهد کرد و چه بسا با این فرایند، دانش‌آموز بتواند مطالبی را با فکر خود بزایاند، که برای ما تازگی داشته باشد، زیرا ریاضیات در حقیقت آفرینش آزادانهٔ ذهن بدون هیچ محدودیتی بجز ماهیت خود ذهن است.

بنابراین، آشنایی با تاریخ ریاضیات، تسلط معلمان ریاضی را بر مباحث درسی کاملتر می‌کند و به آنها امکان می‌دهد تا موضوع تدریس خود را عمیقتر و با احساس قویتری درک و تدریس کنند.

اکنون نقش تاریخ ریاضیات را در آموزشِ ریاضی به پنج مورد زیر تقسیم می‌کنیم، سپس درباره هر کدام شرح می‌دهیم:

۱ــ تاریخچه مختصری از موضوع درسی می‌تواند در دانش‌آموز ایجاد انگیزه و کلاس درس را زنده‌تر و جذابتر کند.

۲ــ تقویت هدف پرورشی آموزش ریاضی که همان اعتقاد به خود و اتکای به نفس در دانش‌آموز است.

۳ــ معرفی ریاضیدانان ایران به عنوان الگو و حفظ و انتقال فرهنگ ریاضی کشورمان به نسل آینده.

۴ــ پاسخگویی به بعضی از پرسشهای دانش‌آموزان که به اطلاعات دقیق تاریخ ریاضی نیازمند است.

۵ــ مطّلع ساختن دانش‌آموزان از بی‌توجهی یا کم‌توجهی که غربیان نسبت به ریاضیدانان شرق بخصوص ایران در آثارشان موجود است.

شرح ۱. وقتی معلم در هنگام تدریسِ یک موضوع درسی، گوشه‌ای از تاریخ ریاضی در رابطه با موضوع درسی را بیان می‌کند، چون این گونه مطالب برای دانش‌آموزان تازگی دارد، بنابراین آنها به طور دقیق به این مطالب گوش می‌دهند و آمادگی کامل برای خود درس را پیدا می‌کنند. یعنی یکی از راه‌های آماده کردن دانش‌آموزان در کلاس درس، گریزهایی است که معلم به تاریخ ریاضی می‌زند. بنابراین آگاهی از روند پیدایش مفهومها و مباحث هر رشتهٔ علمی از جمله ریاضیات، موضوع درسی را برای فراگیرندهٔ آن ملموس‌تر و جذابتر می‌کند و این امر، یادگیری مطالب ریاضی را سریعتر و آسانتر می‌کند. همچنین با این کار دانش‌آموزان به درک علت پیدایش مفهومها و موضوعهای ریاضی دست پیدا می‌کنند و این امر باعث ایجاد انگیزه برای آموختن یک موضوع درسی در دانش‌آموزان می‌گردد. در زیر به ارائهٔ چند تاریخچه از مفاهیم ریاضی می‌پردازیم:

نمونه الف. وقتی موضوع لگاریتم را تدریس می‌کنیم، اگر وقت کلاس و میزان اطلاعات دانش‌آموزان این اجازه را به ما ندهد که تاریخچهٔ پیدایش لگاریتم را مطرح کنیم، دست کم باید نامی از جان نپر و کارهای شگفت‌انگیز او برده شود، به عنوان مثال؛ شگفت‌آور نیست که نبوغ و قدرت تجسّم *نپر* بعضی‌ها را بر آن داشت تا وی را از لحاظ فکری نامتعادل پندارند و برخی دیگر او را به عنوان رواج دهندهٔ سِحر و جادو تلقی کنند، همچنین

داستانهای نپر را دربارهٔ خروس سیاه زغالی ... و کبوترهای مزاحم همسایه‌اش ... بازگو کنیم.

نمونهٔ ب. وقتی موضوع احتمال را تدریس می‌کنیم، معمولاً تاریخچهٔ علم احتمال را براساس بازیهای شانسی معرفی می‌کنیم، در این صورت درس برای دانش‌آموزان جذابتر شده و درمی‌یابند که ریاضیات در زندگی روزمرهٔ آنها کاربرد دارد. در این باره می‌توان گفت: بازیهایی که متکی بر شانس است، از زمانهای بسیار قدیم رایج بوده است. در حفاریهای باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازیهای شانسی مشاهده شده است که می‌توان از مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهای از ۱ تا ۶ نقش شده است، نام برد. امروزه در مواردی که براحتی نتوان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می‌شود؛ مثلاً برای شروع بازی از پرتاب سکّه استفاده می‌کنند یا برای قبول یا رد یک موضوع از قرعه استفاده می‌کنند. در گذشته نیز خانواده‌هایی که همسرشان را به روش سنتی انتخاب می‌کردند، در حقیقت براساس شانس انتخابِ همسر کرده‌اند. و در روزگار کنونی کسانی که قادر به تصمیم‌گیری نیستند، به فال‌گیری و پیشگویی روی می‌آورند و از این طریق بر شانس تکیه می‌ورزند.

نخستین مسأله‌های مربوط به نظریه احتمال در سدهٔ شانزدهم میلادی پدید آمد و مسأله‌ای که انگیزه‌ای برای تولّد احتمال شد، مربوط به دمره نامی از دوستان پاسکال بود: «قرار بود مبلغی پول بین دو نفر با انجام یک بازی شرطی تاس تقسیم گردد». این مسأله را پاسکال حل کرد، سپس حلّ خود را به فِرما نشان داد و فِرما به یاری آنالیز ترکیبی این مسأله را حل کرد، سپس اگر کمی دربارهٔ تاریخ زندگی فِرما صحبت کنیم، دانش‌آموزان درمی‌یابند که بعضی از ریاضیدانان بزرگ شغل دیگری داشته‌اند و برای اوقات فراغت و سرگرمی، ریاضی می‌خواندند.

«پیر فِرما، فرزند یک تاجر پوست؛ درس حقوق خواند و در آغاز به عنوان وکیل مدافع به کار پرداخت، ولی بعد مشاور مجلس شد که تا پایان زندگی خود آن را حفظ کرد. شغل فِرما هیچ ربطی به ریاضیات نداشت و این از جملهٔ شگفتیهاست که وی از همهٔ وقت آزاد خود برای بررسیهای ریاضی استفاده می‌کرد.»

نمونهٔ ج. در این مقاله گفته شد که اگر دانش‌آموز را در مراحل مختلف حلّ یک مسأله، مانند یک ریاضیدان قرار دهیم، در این صورت درس جذابتر و باعث ایجاد انگیزه خواهد شد. در زیر به یک نمونه از این مسائل می‌پردازیم:

غیاث‌الدین جمشید کاشانی وقتی می‌خواست $\sin 1^\circ$ را حساب کند، به طریق زیر عمل کرد:

مثال. ابتدا با داشتن $\sin 30^\circ$ و $\sin 45^\circ$ توانست $\sin 15^\circ$ را محاسبه کند، سپس از روی ده ضلعی منتظم $\sin 18^\circ$ را محاسبه کرد و به کمک $\sin 15^\circ$ و $\sin 18^\circ$ چون $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ توانست $\sin 3^\circ$ را محاسبه کند، سپس $\sin 3^\circ$ را بر حسب $\sin 1^\circ$ به صورت زیر نوشت:

$$\sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ$$

با فرض این که $x = \sin 1^\circ$ خواهیم داشت:

$$4x^3 - 3x + \sin 3^\circ = 0$$

چون هر معادلهٔ درجه سوّمی را می‌توان به معادله ناقص تبدیل کرد، کاشانی جواب این معادله را با هر تقریب دلخواهی به دست آورد. بنابراین وقتی فرمولهای مثلثات را می‌گوییم، با گفتن مختصری تاریخچه، در دانش‌آموز ایجاد انگیزه کرده‌ایم و چه بسا دانش‌آموز با تکیه بر ضمیر ناخودآگاهش بتواند حدسهایی بزند و آنها را ثابت کند که برای جامعهٔ ریاضی تازگی داشته باشد.

نمونه د. بعد از این که توانستیم در دانش‌آموز ایجاد انگیزه کنیم، باید او را هدایت کنیم، که وقت خود را برای حلّ مسائلی نگذارد که امتناع آنها قبلاً ثابت شده است. به عنوان مثال، ما هنوز با دانش‌آموزان یا افرادی روبه‌رو هستیم که دربارهٔ تثلیث زاویه به کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار، تربیع دایره و تضعیف مکعب، وقت صرف می‌کنند؛ در حالی که عدم اثبات این گونه مسائل قبلاً ثابت شده است. بنابراین اگر معلم سر کلاس با اطلاع از تاریخ ریاضیات، این صحبتها را بازگو کند، دیگر کسی بی‌دلیل وقت خود را تلف نمی‌کند.

ولی کار بر روی مسائلی که امتناع آنها ثابت نشده است، و می‌دانیم که بالاخره به طریقی باید راه حلّی برای آنها کشف کرد، مانند قضیهٔ آخر یا بزرگ فِرما، دارای ویژگی مهمّی به صورت زیر است:

> «ریاضیدانان و حتی غیر ریاضیدانانی بر روی این گونه مسائل کار کرده‌اند و بعضی از آنها ادعا می‌کردند که توانسته‌اند این مسائل را ثابت کنند، نکتهٔ مهم این است که ریاضیدانان برای این که بتوانند این مسائل را اثبات کنند، روشهای جدیدی را پیدا کرده‌اند و هم‌اکنون این مسائل چه حل شده باشند، یا نباشند، چیزی که باقی مانده و ارزشمند است، روشها و دیدگاه‌های مختلف ریاضی است.»

شرح ۲. اغلب دانش‌آموزان تصور می‌کنند مطالبی را که می‌خوانند، از ابتدا به همین شکل حاضر و آماده بوده است و کسی آنها را پیدا نکرده، یا این گونه مطالب به کمک کار تردستی و شعبده‌بازی به دست آمده‌اند. در حالی که اگر مطالبی راجع به تاریخ ریاضی گفته شود، دانش‌آموزان می‌فهمند که این مطالب چه مراحلی را گذرانده‌اند و در ابتدای کار خیلی دقیق نبوده و بتدریج در طول سالها و شاید قرنها به وسیلهٔ ریاضیدانان به شکل امروزی درآمده است.

به همین مناسبت دانش‌آموز اعتماد به نفس می‌یابد. اگر در جایی بی‌دقتی یا اشتباهی داشته باشد، متوجه می‌گردد که ریاضیدانها نیز در ابتدای کار چنین بوده‌اند و حتی بعضی از آنها از نظر دیگران افرادی کند ذهن به نظر می‌آمدند. در زیر به ارائهٔ این گونه مطالب می‌پردازیم :

نمونه الف. دکارت عددهای منفی را دروغین می‌نامید، و از به کار بردن آنها پرهیز می‌کرد و گاوس با آن عظمت علمی که از او می‌شناسیم، از بی‌نهایت هراس داشت. این مطالب نشان می‌دهد که ریاضیات از طریق همین تعمیمها و تجریدها رشد کرد.

نمونه ب. زمانی که بویویی و لباچفسکی در قرن ۱۹ هندسه نااقلیدسی را ابداع کردند، خود متوجه نبودند که با ابداع هندسه نااقلیدسی، انقلابی در ریاضیات کرده‌اند و مطمئناً هرگز تصور نمی‌کردند که صد سال بعد از این کار، فیزیکدانان در فرمول‌بندی نظریهٔ نسبیت، هندسه نااقلیدسی را درست همان ابزاری می‌یابند که برای ساده‌سازی نظریهٔ اینشتین نیاز دارند. در حقیقت ابداع‌کنندگان مفاهیم و دستگاه‌های ریاضی، غالباً کاربردهای این مفاهیم و دستگاه‌ها را پیش‌بینی نمی‌کردند و چنین کاربردهایی، سالها بعد به روشهای پیش‌بینی نشده‌ای یافت می‌شوند.

نمونه ج. در کتاب مشهور «مقدمات» اقلیدسی، اصلی وجود دارد که می‌گوید : «هر کل، از جزء خود بزرگتر است». این «اصل» چنان بدیهی به نظر می‌رسید که کسی کمترین تردیدی درباره درستی آن نداشت. ولی امروزه می‌دانیم، که این اصل، تنها دربارهٔ مجموعه‌های با پایان، درست است، زیرا اگر فرض کنیم $A=[1,2]$ و $B=(1,2)$ می‌دانیم که $B\subsetneq A$، در حالی که $L_A=L_B$.

نمونه د. دربارهٔ نحوهٔ پیدایش مشتق و هندسه دیفرانسیل می‌توان گفت :

مفهومهای اصلی آنالیز ریاضی برای نیوتن بازتابی از مفهومهای مکانیک بود، حتی ساده‌ترین شکلهای هندسی، یعنی خط، زاویه و جسم، به وسیله نیوتن، همچون جابه‌جایی مکانیکی در نظر گرفته می‌شد و لایب نیتس از درون هندسه به مفهوم مشتق و دیفرانسیل رسید. در ضمن، بسیاری از اصطلاح‌هایی که لایب نیتس در نوشته‌های خود به کار برده است، چنان خوب انتخاب شده بودند که تا امروز در ریاضیات باقی مانده است، از جمله می‌توان اصطلاح‌های تابع، مختصات، منحنی جبری و نمادهایی مانند $\int$ و y' و dy را نام برد.

با آن که نیوتن کوشیده بود نظریهٔ حد را با دقّت بیان کند، باز هم کمبودهایی در آن دیده می‌شد. از این گذشته در استفادهٔ نیوتن از مقدارهای بی‌نهایت کوچک هم، ناروشنی‌هایی به چشم می‌خورد. همچنین لایب نیتس و هواداران معاصر وی، تعریفی از کمیتهای بی‌نهایت کوچک ارائه نداده‌اند. به این ترتیب، خلاقّیت آنالیز ریاضی به صورت ابزار نیرومندی برای مطالعهٔ پدیده‌ها در دست انسان بود، بدون این که خود آنالیز ریاضی بدرستی در پایه‌های خود سازمان یافته و ساختاری منطقی داشته باشد.

بعدها، یاکوب برنولی و فرانسوا هوپیتال ادامه دهندگان کار نیوتن و لایب نیتس شدند و هوپیتال در سال ۱۶۹۶ کتاب «آنالیز بی‌نهایت کوچکها» را منتشر کرد که باید آن را نخستین کتاب منظم درسی در زمینهٔ دیفرانسیل و انتگرال دانست. بالاخره کوشی (۱۷۸۹ـ۱۸۵۷) ریاضیدان فرانسوی با تعریف کمیتهای بی‌نهایت کوچک، توانست پایه‌های آنالیز ریاضی را مستحکم کند.

شرح ۳. معرفی ریاضیدانان ایرانی و کارهایی که آنها انجام داده‌اند، باعث می‌گردد که دانش‌آموزان الگوهایی درست در جهت فعالیّت درسی انتخاب کنند. وقتی دانش‌آموزان بفهمند که اساس حساب، جبر و مثلثات، در ایران بنیاد نهاده شده است و ریاضیدانهای ایرانی، حتی مثلثات کروی را هم تجزیه و تحلیل کرده بودند، در این صورت نسبت به خودشان و کشورشان در مقابل غربیان احساس ضعف نمی‌کنند.

اگر به بناهای باستانی و سنتی سراسر ایران با دقت بنگریم ؛ در این صورت در همگی آنها، مفاهیم و شکلهای هندسی را ملاحظه می‌کنیم که تجلّی‌بخش معماری ایرانی است. بنابراین این نوع بناهای ریاضی‌وار و همچنین نوع زندگی (معشیتی، اعتقادی) و نوع کار علمی کردن و ... ریاضیدانان ایرانی بخشی از فرهنگ ما را تشکیل می‌دهد، که معلم ریاضی می‌تواند آن را در کلاس درس به نسل آینده منتقل کند.

شرح ٤. گاهی در کلاس درس، سؤالاتی برای دانش‌آموزان

پیش می‌آید که معلم برای پاسخ به آنها باید اطلاعات دقیق تاریخ ریاضی داشته باشد. در زیر به چند نمونه می‌پردازیم :

نمونه الف. واژهٔ سینوس در حقیقت تغییر شکل یافتهٔ واژه لاتینی است که ترجمه واژهٔ عربی «**جیب**» است که ریاضیدانان مسلمان اشتباهاً به جای واژه هندی «**جیا**» به معنی «**نصف وتر**» به کار می‌بردند.

نمونه ب. دربارهٔ عدد e می‌توان گفت : اوّلین کسی که به اهمیّت این عدد پی بُرد و آن را وارد ریاضیات کرد، اولر بود، همچنین او نماد e را برای عدد اولر ...۲/۴۸۸۳ که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید، به کار برد :

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

وقتی در جهان هستی، پدیده‌های متنوع و بسیاری وجود دارد که مدل تغییرات آنها متضمن عدد e می‌باشد، به اهمیّت عدد e بیشتر پی می‌بریم (مانند مدل تغییرات رشد و زوال) و بی‌سبب نیست که لگاریتم در پایهٔ e را لگاریتم طبیعی می‌نامند. و اوّلین کسی که لگاریتم در پایهٔ e را به کار برد، جان نپر بود و در حلّ بعضی از مسائل ریاضی، مانند مشتق تابع با ضابطهٔ $y = a^x$ یکباره در مراحل حلّ مسأله، سروکلهٔ Lnx پیدا می‌شود.

البته لازم به تذکر است، که تاریخچهٔ این نوع مطالب در ریاضی، باید توسط سازمانهای دولتی و انتشاراتی و محققان از لابه‌لای تاریخ ریاضی بیرون آورده شود، تا در اختیار معلم قرار گیرد.

شرح ۵. کتابهای تاریخ ریاضی که تاکنون توسط غربیان نوشته شده است، به ریاضیدانان شرق بخصوص ایران، بی‌توجهی یا کم‌توجهی کرده‌اند ؛ اگر هم نامی از این ریاضیدانها برده‌اند، از آنها ریاضیدّان عرب و یا مثلاً ریاضیدانان دربار اُلغ بیگ (نوهٔ تیمور) نام برده‌اند، چون ریاضیدانان ایران در گذشته آثارشان را به زبان علمِ آن روز، یعنی عربی می‌نوشتند و این دلیلی بر عرب بودن آنها نیست، همانطور که از اسامی ریاضیدانان ایرانی، مانند کاشانی، کرجی، خوارزمی و ابوالوفای بوزجانی (تربت جام) معلوم است همهٔ آنها ایرانی بوده‌اند و عرب نیستند. در این زمینه باید توجه داشت که ما ضد عرب نیستیم، بلکه می‌خواهیم هر کسی را در جای حقیقی خودش قرار دهیم و به اهمیت ریاضیدانان ایرانی پی ببریم. از طرفی تا حدود قرن ۱۶، ریاضیدانان غرب آثارشان را به زبان علم آن روز غرب، یعنی لاتین می‌نوشتند، اما در کتابهای تاریخ ریاضی همهٔ آنها منسوب به کشور خودشان شده‌اند.

توصیه‌ها

توصیه‌هایی به جامعهٔ ریاضی دانشگاهی و مسئولان برنامه‌ریزی نیازهای علمی و انسانی :

الف. برای هر یک از کتابهای درسی، یک کتاب منطبق با فصلهای آن، برای تاریخچهٔ لغات و تاریخ ریاضیات تألیف کنند، تا معلمان با دستی پُر از تاریخ ریاضی وارد کلاس شوند و دانش‌آموزان را از این مطالب آگاه سازند.

ب. در این قسمت، یک توصیه همراه با یک گله دارم : هم‌اکنون در کشور ما حتّی یک نفر هم نیست که تحصیلات دانشگاهی وی در ارتباط با تاریخ علم ریاضی باشد و این به آن جهت است که تا به حال در ایران چنین رشته‌ای در دانشگاه نداشته‌ایم و در حال حاضر، اگر کسی تمایل داشته باشد که در چنین رشته‌ای متخصص شود، جایگاهی برای او نداریم، بنابراین اکنون که در آستانهٔ سال جهانی ۲۰۰۰ و به احترام برگزاری اوّلین سمینار تاریخ ریاضی در دانشگاه هرمزگان و به پاس قدردانی از برگزارکنندگان سه کنفرانس آموزش ریاضی در کشور و از همه مهمتر به خاطر نیاز شدید ایران به این مهم، جایی برای این رشته در دانشگاه باز کنید، و از اساتید درس دو واحدی تاریخ ریاضیات، بخصوص در دانشگاه‌های تربیت معلم می‌خواهم که این درس را بیشتر از سابق جدی بگیرند (مانند جبر یا آنالیز)، زیرا هم‌اکنون این دو واحد درسی نیز در بیشتر دانشکده‌های ریاضی، مظلوم واقع شده‌است.

ان‌شاءا...

فهرست منابع

۱ـ آشنایی با تاریخ ریاضیات جلد اوّل و دوم ـ هاورد و. ایوز / ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

۲ـ ریاضیدانان نامی ـ اریک تمپل بل / ترجمهٔ حسن صفاری

۳ـ گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی ـ جی.ال.برگرن / ترجمهٔ دکتر وحیدی اصل و دکتر علیرضا جمالی

۴ـ ریاضیات مدرسه در دههٔ ۱۹۹۰ ـ برایان ویلسون / ترجمهٔ ناهید ملکی

۵ـ روان‌شناسی ابداع در ریاضیات ـ ژاک آدمار / ترجمهٔ عباس مخبر

۶ـ ریاضیات محاسبه‌ای / تألیف پرویز شهریاری

۷ـ تاریخچهٔ احتمال ـ مجلهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۸ / نوشتهٔ دکتر عینا... پاشا

کاربرد ریاضی در علوم و شگفتیهای زمین

● شادی دلکش رودسری

در این شماره، به پیوست مقالهٔ شمارهٔ قبل، سعی می‌شود تا شما عزیزان را با کاربرد سریها در رسوب‌شناسی (یکی از رشته‌های تخصصی زمین‌شناسی) و اهمیت آن در آنالیز اندازهٔ ذرّات و محاسبهٔ پارامترهای آماری برای شناسایی کلّی ویژگیهای منطقهٔ مورد بررسی، آشنا کنیم.

آنالیز اندازهٔ دانه‌ها

آنالیز توزیع دانه‌های رسوبی، برای مقایسهٔ نمونه‌های مختلف با یکدیگر از اهمیت خاصی برخوردار است ؛ زیرا به این وسیله می‌توان به ویژگیهای مختلف رسوبات و فرآیندهایی که منجر به تشکیل آنها می‌شوند، پی برد. همان‌طور که می‌دانید، ذرّات رسوبی، بیشتر به وسیلهٔ آب و هوا منتقل می‌شوند و با کاهش شدّت جریان، بتدریج، ذرّات در اندازه‌های مختلف از یکدیگر جدا شده و رسوب می‌کنند. اگر رسوب از چندین منشأ متفاوت، سرچشمه گرفته باشد، ذرّات آن در اندازه‌های مختلف دیده می‌شوند. مخلوطی از ذرّات رسوبی در اندازه‌های متفاوت را تجمّع (Population) می‌گویند که ممکن است این اندازه‌ها، از گراول تا رس تغییر کند.

برای درک بهتر توزیع دانه‌ها در رسوبات و ارزشیابی یک سری نمونه که توسط فرآیندهای مختلفی پراکنده شده‌اند، پس از تعیین اندازهٔ آنها و ترسیم منحنیهای مربوطه و مقایسهٔ آنها با یکدیگر، برای شناسایی این که کدام یک دارای جورشدگی بهتری از دیگری است، یا این که ذرّات دانه‌ریز، در نمونه فراوانتر است یا ذرّات دانه درشت، یک سری پارامترهای آماری از قبیل : میانگین، کج‌شدگی، کشیدگی و انحراف معیار را محاسبه می‌نماییم. اندازه‌گیری پارامترهای آماری، ممکن است به روش ترسیمی از روی منحنیها، یا به روش لحظه‌ای انجام شود.

در شمارهٔ قبل، یکی از انواع منحنیهای مربوط به اندازهٔ ذرّات رسوبی، به نام منحنی تجمّعی ترسیم گردید ؛ اما به دلیل تخصصی بودن و پیچیدگی روش ترسیم انواع منحنیها و چگونگی محاسبهٔ پارامترهای آماری به روش ترسیمی از روی منحنیها، از توضیح این روش خودداری می‌شود و تنها به شرح پارامترهای آماری به طریق روش لحظه‌ای اکتفا می‌کنیم. برای آگاهی و آشنایی هرچه بیشتر شما عزیزان با علم زمین‌شناسی، قبل از شرح اندازه‌گیری به روش لحظه‌ای، توضیح مختصری در مورد هریک از پارامترهای آماری ارائه می‌شود :

۱ـ میانگین: عبارت است از حدّ متوسط اندازهٔ ذرّات در رسوب، که آن را با علامت MZ (در روش ترسیمی) و $X\phi$ (در روش لحظه‌ای) نمایش می‌دهند.

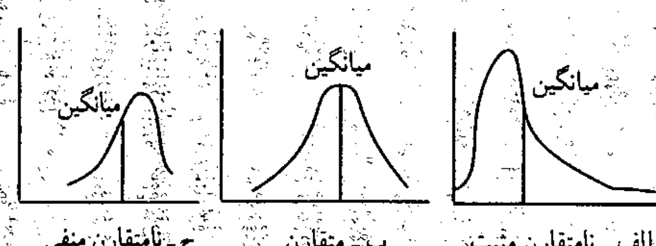
۲ـ انحراف معیار (Standard Deviation): انحراف معیار، میزان جورشدگی ذرات را مشخص می‌کند، که با علامت $\sigma\phi$ نمایش داده می‌شود.

۲ . ۱ـ جورشدگی یا یکنواختی *(Sorting)*: عبارت است از این که، ذرات تشکیل دهندهٔ رسوب یا سنگ، تا چه اندازه به یکدیگر نزدیک باشند؛ همه ذرات دانه ریز باشند یا دانه درشت و یا ترکیبی از آن دو.

طبقه‌بندی زیر، برای تعیین جورشدگی ذرات براساس مقدار انحراف معیار در یک سری رسوب، توسط «فولک» (۱۹۷۴ م) ارائه شده است:

جورشدگی بسیار خوب	$S\phi < ۰/۳۵$ (فی)
جورشدگی خوب	$۰/۳۵ < S\phi < ۰/۵$
جورشدگی خوب متوسط	$۰/۵ < S\phi < ۰/۷۱$
جورشدگی متوسط	$۰/۷۱ < S\phi < ۱$
جورشدگی بد	$۱ < S\phi < ۲$
جورشدگی بسیار بد	$۲ < S\phi < ۴$
جورشدگی بی‌نهایت بد	$S\phi > ۴$

۳ـ کج‌شدگی یا نامتقارن بودن منحنی (Skewness): کج‌شدگی عبارت از نامتقارن یا نامتجانس بودن منحنی توزیع ذرات که به‌وسیلهٔ دنبالهٔ منحنی توزیع، مشخص و با علامت $SK\phi$ نشان داده می‌شود. در منحنیهای متقارن، مقدار کج‌شدگی صفر است؛ ولی در منحنیهایی که دنبالهٔ آنها به طرف راست یا به طرف رسوبات دانه‌ریزتر متمایل باشد، مثبت، و اگر دنبالهٔ منحنی به طرف چپ یا رسوبات دانه درشت‌تر باشد، منفی است. (شکل ۱ـ الف، ب و ج).



الف ـ نامتقارن مثبت ب ـ متقارن ج ـ نامتقارن منفی

شکل ۱ـ منحنیهای فراوانی متقارن و نامتقارن (مثبت و منفی)

از آن‌جا که کج‌شدگی در ارتباط با اندازهٔ ذرات تشکیل دهندهٔ رسوب یا سنگ است، از آن برای تعبیر و تفسیر محیط رسوبی و فرآیندهایی که باعث حمل و نقل شده‌اند، استفاده می‌شود. فولک (۱۹۷۴ م) مقیاسی را برای کج‌شدگی به شرح ذیل ارائه داده است:

کج‌شدگی زیاد به سمت ذرات دانه ریز	$+۰/۳ < SK\phi < +۱$
کج‌شدگی به سمت ذرات دانه ریز	$+۰/۱ < SK\phi < +۰/۳$
کج‌شدگی صفر = تقریباً متقارن	$-۰/۱ < SK\phi < +۰/۱$
کج‌شدگی به سمت ذرات دانه درشت	$-۰/۳ < SK\phi < -۰/۱$
کج‌شدگی زیاد به سمت ذرات دانه درشت	$-۱ < SK\phi < -۰/۳$

۴ـ کشیدگی (Kurtosis): عبارت است از اندازه‌گیری نوک تیزی یا کشیدگی منحنی توزیع ذرات که با علامت $K\phi$ نشان داده می‌شود. فولک (۱۹۸۴ م) مقیاسی برای طبقه‌بندی کشیدگی منحنیها به شرح زیر ارائه کرده است:

بسیار پهن	$K\phi < ۰/۶۷$
پهن	$۰/۶۷ < K\phi < ۰/۹$
متوسط	$۰/۹ < K\phi < ۱/۱۱$
کشیده	$۱/۱۱ < K\phi < ۱/۵$
بسیار کشیده	$۱/۵ < K\phi < ۳$
بی‌نهایت کشیده	$K\phi > ۳$

اندازه‌گیری به روش لحظه‌ای (method of moment)

برای محاسبهٔ پارامترهای آماری که برای آنالیز اندازهٔ دانه‌ها به‌کار می‌رود، از فرمولهای زیر استفاده می‌شود (مک بوزاید، ۱۹۷۱ م):

$$\text{میانگین} = \overline{X}\phi = \frac{\sum fm}{n}$$

$$\text{انحراف معیار} = \sigma\phi = \sqrt{\frac{\sum f(m-\overline{X}\phi)^2}{100}}$$

$$\text{کج‌شدگی} = SK\phi = \frac{\sum f(m-\overline{X}\phi)^3}{100\sigma\phi^3}$$

$$\text{کشیدگی} = K\phi = \frac{\sum f(m-\overline{X}\phi)^4}{100\sigma\phi^4}$$

f : درصد وزن دانه‌ها. m : نقطهٔ وسط هر رده در مقیاس فی.

n : شمارش اعداد به‌دست آمده در هر نمونه، و زمانی که f به درصد است، برابر با ۱۰۰ می‌باشد.

همان‌طور که می‌دانید، مفهوم دیگری که با مفهوم دنباله ارتباط نزدیک دارد، سری می‌باشد. سری چیزی جز مجموع حاصل از

جمله‌های یک دنباله نیست ؛ یعنی جمله‌های یک سری، جمله‌های یک دنباله می‌باشند ؛ یعنی توابع حقیقیی که قلمرو آنها، اعداد صحیح غیرمنفی می‌باشند.

مجموع n جملهٔ دنبالهٔ $\{k_1, k_2, k_3, ..., k_n\}$ را به صورت $\sum_{i=1}^{n} k_i$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم مجموع k_i ها وقتی که i از ۱ تا n تغییر می‌کند. و نشانه‌گذاری سیگما یا نشانهٔ جمع‌بندی نامیده می‌شود.

سریها به طور کلی، به دو دستهٔ متناهی و نامتناهی تقسیم می‌شوند. سریهای متناهی، یعنی سریهایی با تعداد جمله‌های محدود و مشخص. به‌طور مثال، یکی از سریهای متناهی دنبالهٔ $\{a_n\}$، $a_n = \frac{1}{2^n}$ به صورت زیر است :

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

سریهای نامتناهی، یعنی سریهایی با تعداد جمله‌های نامتناهی و نامشخص. به‌طور مثال، سری نامتناهی دنبالهٔ $\{a_n\}$، $a_n = \frac{1}{2^n}$ به صورت زیر است :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

بحث دیگری که در مورد سریها مطرح می‌شود، همگرا و واگرا بودن آنها می‌باشد. به بیان ساده، اگر حدّ یک سری مشخص باشد، آن سری، همگرا نامیده می‌شود، در غیر این صورت، سری واگرا است.

مثال: آیا $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ همگراست؟

حل: این عبارت، سری هندسی با $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$، است.

به علاوه، چون جملهٔ اوّل آن $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ است، پس :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

چون سری فوق دارای حدّ برابر یک می‌باشد، پس سری همگرا است.

بحث سریها را می‌توان به عنوان مطالعهٔ دو دنباله در نظر گرفت ؛ دنبالهٔ اصلی که جمله‌هایش سری هستند و دنبالهٔ مجموعهای جزئی (S_n). به این معنا که، $\{a_n\}$ ما را به سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ می‌رساند، که این سری، به نوبهٔ خود، ما را به دنبالهٔ دوم $\{S_n\}$ می‌رساند که در آن :

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_{n-1} + a_n$$
$$\vdots$$

تعریف همگرایی را می‌توان برحسب همگرایی یک دنباله، به صورت زیر بیان کرد :

تعریف: سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرا است : اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن، $\{S_n\}$، که $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$، همگرا باشد، در غیر این صورت، $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ واگرا است.

بعضی از قضایای سریها

قضیهٔ ۱. اگر $a_i = a$ و a برای هر i ثابت باشد، $\sum_{i=1}^{n} a_i = na$.

قضیهٔ ۲. $\sum_{i=1}^{n}(k_i \pm g_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \pm \sum_{i=1}^{n} g_i$.

قضیهٔ ۳. اگر a ثابت باشد، $\sum_{i=1}^{n} ak_i = a\sum_{i=1}^{n} k_i$.

قضیهٔ ۴. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

قضیهٔ ۵. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

قضیهٔ ۶. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

با استفاده از فرمولهای ذکر شده و تعیین پارامترهای آماری مورد نظر، از آنالیز اندازهٔ دانه‌ها، می‌توان برای تشخیص رسوبات در محیطها و رخساره‌های مختلف استفاده کرد که این خود، اطلاعاتی در مورد فرآیندهای رسوبگذاری و نوع جریان در اختیار ما قرار خواهد داد. توزیع اندازهٔ دانه‌ها در رسوبات، به اختصاصات سنگ منشأ فرآیندهای هوازدگی، سایش و جورشدگی انتخابی آنها در هنگام حمل و نقل، بستگی دارد.

بررسی توزیع اندازهٔ ذرّات آواری در رسوبات، نشان داده است که یک رابطهٔ کلی بین پارامترهای آماری از قبیل: میانگین، جورشدگی و کج‌شدگی وجود دارد. مطالعات زیادی برای ارتباط دادن توزیع دانه‌ها ـ از نظر آماری ـ در رسوبات عهد حاضر با محیط رسوبی آنها انجام شده است که از آن جمله می‌توان مطالعات «فریدمن» (۱۹۶۱ و ۱۹۶۷) را نام برد؛ که نتایج به‌دست آمده توسط او، به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

رسوبات رودخانه‌ای، اغلب دارای جورشدگی بدتری نسبت به رسوبات ساحلی و کج‌شدگی مثبت می‌باشند. کج‌شدگی مثبت، به علت وجود مقادیر زیادی مواد معلّق از قبیل سیلت و رس، در رودخانه است که پس از رسوبگذاری، مقداری از این ذرّات در داخل رسوبات باقی مانده است. رودخانه‌هایی که مقادیر زیادی ذرّات دانه درشت را با خود حمل می‌کنند، ممکن است دارای کج‌شدگی منفی باشند.

رسوبات ساحلی دارای جورشدگی خوب و کج‌شدگی منفی هستند؛ زیرا در محیطهای ساحلی، به علت حرکت امواج، ذرّات دانه درشت‌تر، برجای مانده و کج‌شدگی منفی را تشکیل می‌دهند.
رسوبات تپّه‌های شنی، حاوی ذرّات ماسه‌ای ریزتر از رسوبات ساحلی هستند و کج‌شدگی آنها مثبت می‌باشد، که این مثبت بودن، در اثر حرکت ذرّات دانه ریز به وسیلهٔ باد و برجای ماندن ذرّات دانه درشتی است که باد قادر به حرکت آنها نبوده و به نام دانه‌های «باقیمانده» (lag) معروف می‌باشند. سپس دانه‌های درشت باقیمانده که تعداد آنها بسیار کم است و باد قادر به حرکت آنها نمی‌باشد، موجب می‌گردند تا فراوانی ذرّات ریزتر، بیشتر شده و کج‌شدگی مثبت تشکیل شود. بنابراین، کج‌شدگی مثبت رسوبات رودخانه‌ای و تپّه‌های شنی، از دو مکانیزم متفاوت تشکیل شده است که در رودخانه به علت وجود ذرّات دانه ریز بوده، ولی در تپّه‌های شنی، به علت وجود ذرّات دانه درشت باقیمانده است.

بنابراین، از اطلاعات ارائه شده در بالا، چنین استنباط می‌شود که توسط آنالیز اندازهٔ دانه‌ها، می‌توان به چگونگی حمل و نقل و شرایط رسوبگذاری در هنگام تشکیل، ویژگیهای مختلف رسوبات و محیطهای رسوبگذاری، فرآیندها و ویژگیهایی که منجر به تغییر محیط رسوبگذاری می‌شوند و در نهایت، وقایع و اتفاقاتی که از زمان تشکیل تا به حال، در منطقهٔ صورت گرفته، پی برد. مطلب مهمی که باید مورد توجه قرار گیرد، این است که تمام پارامترهای آماری محاسبه شده از آنالیز اندازهٔ دانه‌ها برای تعبیر و تفسیر رسوبات قدیمه، در صورتی حائز اهمیت است که اندازهٔ دانه‌ها در اثر عمل دیاژنز، تغییر نکرده باشد.

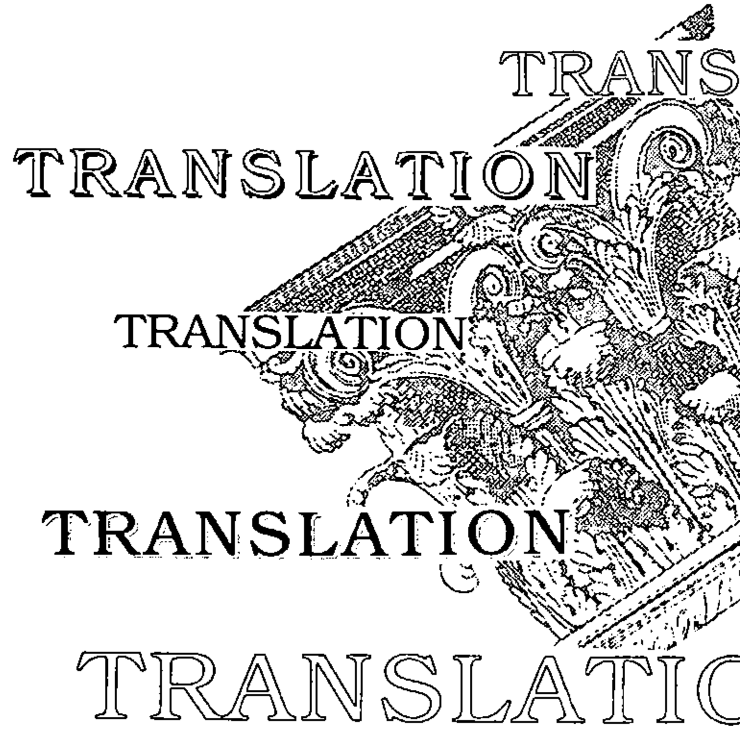


برخلاف آنچه عامهٔ مردم تصور می‌کنند، کلمه‌های محاسب و ریاضیدان مترادف نیستند و بسیار ممکن است که شخص ریاضیدان زبردستی باشد؛ اما برای یک عمل جمع صحیح، گرفتار زحمت شود ـ هانری پوانکاره از جملهٔ ریاضیدانانی بود که در فنّ محاسبه قدرتی ندارد ـ فقط در علم نجوم است که شخص باید هم ریاضیدان و هم محاسب زبردست باشد.

این مطلب برای تشویق منجّمانی گفته نشده است که محاسبه‌های طویل خود را تکالیف شاقی می‌دانند؛ بلکه منجّمانی دیگری هستند که این محاسبه‌ها را با شعف بسیار استقبال می‌کنند و تمام روز، با شور و حرارت، با اعداد پانزده رقمی عمل می‌کنند. منجّم فرانسوی هانری آندو آیر«H.Andoyen» (۱۹۲۹ـ۱۸۶۲) از جملهٔ این منجّمان محسوب می‌شود، اویلر نیز چنین استعدادی داشت و مسلماً گاوس هم از جملهٔ آنان بود.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفاری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲۳)



از کتاب: Multiple choice Tests in advanced mathematics

● حمیدرضا امیری

Test 8

تست ۸

Time allowed: $1\frac{1}{4}$ hours

وقت $1\frac{1}{4}$ ساعت

SECTION I

بخش ۱

Questions 1–20 **(Twenty questions)**

سؤالهای ۱ الی ۲۰ **(بیست سؤال)**

1. Given that $x \in \mathbb{R}$ and $2e^{2x} - 3e^{x} + 1 = 0$, then

A $x = 1$ or $\frac{1}{2}$ B $x = 0$ or $\ln 2$

C $x = 1$ or $-\ln 2$ D $x = 0$ or $-\ln 2$

E x cannot be found

۱. با فرض این که $x \in \mathbb{R}$ و $2e^{2x} - 3e^{x} + 1 = 0$، در این صورت،

۱) $x = 1$ یا $\frac{1}{2}$ ۲) $x = 0$ یا $\ln 2$

۳) $x = 1$ یا $-\ln 2$ ۴) $x = 0$ یا $-\ln 2$

۵) xای یافت نمی‌شود.

2. The gradients of the tangents from the origin to the circle

$$x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0,$$

are

A $\pm \frac{3}{4}$ B $\pm \frac{4}{3}$

C $\pm \frac{3}{5}$ D $\pm \frac{5}{3}$

E $\pm \frac{5}{4}$

۲. ضریب زاویهٔ (خطهای) مماس بر دایرهٔ $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\pm \frac{3}{4}$ ۲) $\pm \frac{4}{3}$

۳) $\pm \frac{3}{5}$ ۴) $\pm \frac{5}{3}$

۵) $\pm \frac{5}{4}$

3. Given that $x \in \mathbb{R}$, which one of the following is *not* an even function of x?

A $f : x \mapsto |3x|$ B $f : x \mapsto \sin^2 x$

C $f : x \mapsto \cos x$ D $f : x \mapsto x^2 - 1$

E $f : x \mapsto (x - 1)^2$

۳. با فرض این که $x \in \mathbb{R}$، کدام یک از تابعهای زیر تابعی زوج نمی‌باشد؟

۱) $f: x \to |3x|$ ۲) $f: x \to \sin^2 x$

۳) $f: x \to \cos x$ ۴) $f: x \to x^2 - 1$

۵) $f: x \to (x-1)^2$

4. $\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{1/2}} dx =$

A $\frac{1}{3} \ln (x^3 + 1)^{1/2}$ + constant

B $\frac{2}{3} \ln (x^3 + 1)^{1/2}$ + constant

C $\frac{2}{3} (x^3 + 1)^{1/2}$ + constant

D $\frac{1}{6} (x^3 + 1)^{1/2}$ + constant

E $\frac{1}{3} (x^3 + 1)^{1/2}$ + constant

۴. حاصل $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3} \ln(x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c$ ۲) $\frac{2}{3} \ln(x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c$

۳) $\frac{2}{3} \ln(x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c$ ۴) $\frac{1}{6} \ln(x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c$

۵) $\frac{1}{3} \ln(x^3+1)^{\frac{1}{2}} + c$

5. The complete set of values of x for which

$$(x + 3)(x^2 - 9) > 0,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x > 3\}$ C $\{x : -3 < x < 3\}$

B $\{x : x > -3\}$ E $\{x : x < -3\}$

D $\{x : x < -3\} \cup \{x : x > 3\}$

۵. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(x+3)(x^2-9) > 0$ کدام است؟ $(x \in \mathbb{R})$

۱) $\{x : x > 3\}$ ۲) $\{x : x > -3\}$

۳) $\{x : -3 < x < 3\}$

۴) $\{x : x < -3\} \cup \{x : x > 3\}$

۵) $\{x : x < -3\}$

6. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x + 2}{y + 2} = 0$$

is, P being an arbitrary constant,

A $x^2 - y^2 + 4x - 4y = P$

B $x^2 - y^2 + 2x - 2y = P$

C $y + 2 = \frac{P}{x + 2}$

D $x^2 + y^2 + 2x + 2y = P$

E $x^2 + y^2 + 4x + 4y = P$

۶. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} + \frac{x+2}{y+2} = 0$ کدام است؟

۱) $x^2 - y^2 + 4x - 4y = P$

۲) $x^2 - y^2 + 2x - 2y = P$

۳) $y + 2 = \frac{P}{x+2}$

۴) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = P$

۵) $x^2 + y^2 + 4x + 4y = P$

7. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(4x + 3)(2x + 5)}{(x + 3)(x + 5)}$

A = 15 B = 8

C = 1 D = 0

E does not exist

۷. حاصل $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(۴x+۳)(۲x+۵)}{(x+۳)(x+۵)}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۸

۳) ۱ ۴) ۰

۵) وجود ندارد.

8. Given that $x = t^2$, $y = t$, then
$\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

A 0 B $-\dfrac{1}{2t^2}$

C $\dfrac{1}{4t^2}$ D $-\dfrac{1}{4t^3}$

E $-\dfrac{1}{t}$

۸. با فرض این که $x = t^۲$ و $y = t$، حاصل $\dfrac{d^۲y}{dx^۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\dfrac{۱}{۲t^۲}$

۳) $\dfrac{۱}{۴t^۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴t^۳}$

۵) $-\dfrac{۱}{t}$

9. All solutions of the equation
$$\tan x = -\sqrt{3}$$
are obtained by taking all integer values of n in

A $n\pi - \pi/3$ B $2n\pi \pm \pi/3$

C $n\pi + (-1)^{n+1}\pi/3$ D $n\pi - \pi/6$

E $n\pi + \pi/6$

۹. با قرار دادن هر مقدار صحیح به جای n، با کدام عبارت می‌توانیم همهٔ جوابهای معادلهٔ $tgx = -\sqrt{۳}$ را به‌دست آوریم؟

۱) $n\pi - \dfrac{\pi}{۳}$ ۲) $۲n\pi \pm \dfrac{\pi}{۳}$

۳) $n\pi + (-۱)^{n+۱}\dfrac{\pi}{۳}$ ۴) $n\pi - \dfrac{\pi}{۶}$

۵) $n\pi + \dfrac{\pi}{۶}$

10. The number of 4 letter code words which can be made using the letters P, Q, R, S, if repetitions are allowed, is

A 16 B 24

C 64 D 128

E 256

۱۰. تعداد کدهای پستی ۴ حرفی که با حروف P، Q، R و S می‌توان ساخت که تکرار مجاز باشد، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴

۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۵) ۲۵۶

11. Given that $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$ and the points O, P, Q are not collinear, which one of the following points, whose position vectors are given, is not collinear with P and Q?

A $\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}$ B $3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$

C $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ D $\frac{1}{3}\mathbf{p} + \frac{2}{3}\mathbf{q}$

E $2\mathbf{p} - \mathbf{q}$

۱۱. با فرض این که $\overrightarrow{OP} = p$ و $\overrightarrow{OQ} = q$ و نقاط P، Q و R بر یک امتداد نباشند، کدام یک از نقاط زیر که بردار مکان در نظر گرفته شده‌اند، با P و Q بر یک امتداد نیستند؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}p + \dfrac{۱}{۲}q$ ۲) $۳p - ۲q$

۳) $p - q$ ۴) $\dfrac{۱}{۳}p + \dfrac{۲}{۳}q$

۵) $۲p - q$

12. The gradient of the normal to the curve $y = e^{-\cos x}$ at the point where $x = \pi/3$ is

A $\frac{\sqrt{3}}{2e^{1/2}}$ B $-\frac{2e^{1/2}}{\sqrt{3}}$

C $\frac{1}{2e^{(\sqrt{3})/2}}$ D $\frac{2e^{1/2}}{\sqrt{3}}$

E $-e^{-1/2}$

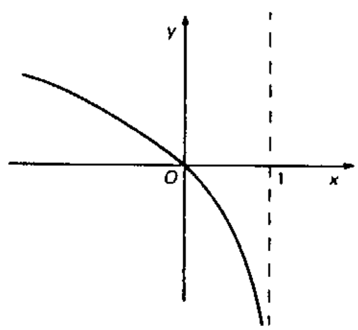
۱۲. ضریب زاویهٔ نرمال منحنی (به معادلهٔ $y = e^{-\cos x}$) در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲e^{\frac{۱}{۲}}}$ ۲) $-\frac{۲e^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{۱}{۲e^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}}$ ۴) $\frac{۲e^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۳}}$

۵) $-e^{-\frac{۱}{۲}}$

13.



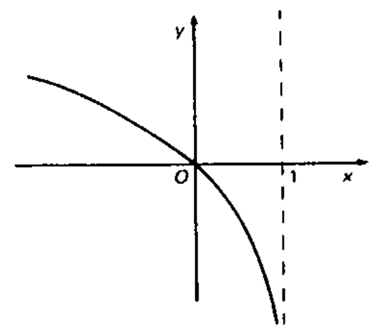
The graph could be a sketch of the curve

A $y = \frac{1}{x-1}$ B $y = \frac{1}{1-x}$

C $y = \ln(1-x)$ D $y = \ln(x-1)$

E $y = \ln(1-x^2)$

۱۳.



نمودار (مفروض) ترسیمی از کدام منحنی می‌تواند باشد؟

۱) $y = \frac{۱}{x-۱}$ ۲) $y = \frac{۱}{۱-x}$

۳) $y = \ln(۱-x)$ ۴) $y = \ln(x-۱)$

۵) $y = \ln(۱-x^۲)$

14. Given that
$$f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
where $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ and are constants, and $f(-3/2) = 0$, which one of the following must be a factor of $f(x)$?

A $x - \frac{3}{2}$ B $2 - 3x$

C $3 - 2x$ D $2x + 3$

E $3x + 2$

۱۴. با فرض این که $f(x) \equiv ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ و $a, b, c, d \in Z$ ثابتهایی باشند، و $f(-\frac{۳}{۲}) = ۰$، کدام یک (از عبارتهای زیر) می‌تواند یک عامل برای $f(x)$ باشد؟

۱) $(x - \frac{۳}{۲})$ ۲) $(۲ - ۳x)$

۳) $(۳ - ۲x)$ ۴) $(۲x + ۳)$

۵) $(۳x + ۲)$

15. An equation of the tangent to the circle
$$x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$$
at the origin is

A $2x - 3y = 0$ B $3x + 2y = 0$

C $2x + 3y = 0$ D $3x - 2y = 0$

E none of the above

۱۵. معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۳x = ۰$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲x - ۳y = ۰$ ۲) $۳x + ۲y = ۰$

۳) $۲x + ۳y = ۰$ ۴) $۳x - ۲y = ۰$

۵) هیچ کدام از گزینه‌های قبل (از موارد بالا)

16. Given that $0 < \theta < \pi/2$, then the argument of $\dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$ is

A $-\theta$ B θ

C $\pi - 2\theta$ D 2θ

E -2θ

۱۶. با فرض این که $\circ < \theta < ۲\pi$، آرگومان $\dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$ کدام است؟

۱) $-\theta$ ۲) θ

۳) $\pi - ۲\theta$ ۴) ۲θ

۵) -۲θ

17. The roots of the equation
$$2x^2 + 6x + 7 = 0$$
are α and β. Then
$|\alpha - \beta| =$

A $\sqrt{5}$ B $2\sqrt{5}$

C $4\sqrt{5}$ D $\sqrt{(5/2)}$

E $1/(2\sqrt{5})$

۱۷. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۶x + ۷ = \circ$ باشند، حاصل $|\alpha - \beta|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$

۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

۵) $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}$

18. The sum of all the positive even numbers less than 100 is

A 5000 B 4900 C 2550

D 2500 E 2450

۱۸. حاصل جمع همهٔ اعداد زوج و مثبت کوچکتر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۵۰۰۰ ۲) ۴۹۰۰

۳) ۲۵۵۰ ۴) ۲۵۰۰

۵) ۲۴۵۰

19. The number of solutions, which lie in the range $0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$, of the equation
$$\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$$
is

A 2 B 3 C 4

D 5 E more than 5

۱۹. تعداد جوابهای معادلهٔ $\cos^۲\theta - ۳\cos\theta + ۲ = \circ$ که در محدودهٔ $\circ \leq \theta \leq ۴\pi$ قرار دارند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴

۴) ۵ ۵) بیشتر از ۵

20. Given the following two statements,
(1) $(x - 2)(3 - x) < 0$, (2) $x > 3$,
where $x \in \mathbb{R}$, which one of the following statements is always true?

A (1) $\Rightarrow$ (2) but (2) $\not\Rightarrow$ (1)

B (2) $\Rightarrow$ (1) but (1) $\not\Rightarrow$ (2)

C (1) $\Leftrightarrow$ (2)

D (1) $\not\Rightarrow$ (2) and (2) $\not\Rightarrow$ (1)

E None of the above

۲۰. دو نامعادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم،

(۱) $(x - ۲)(۳ - x) < \circ$

$(x \in \mathbb{R})$

(۲) $x > ۳$

کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

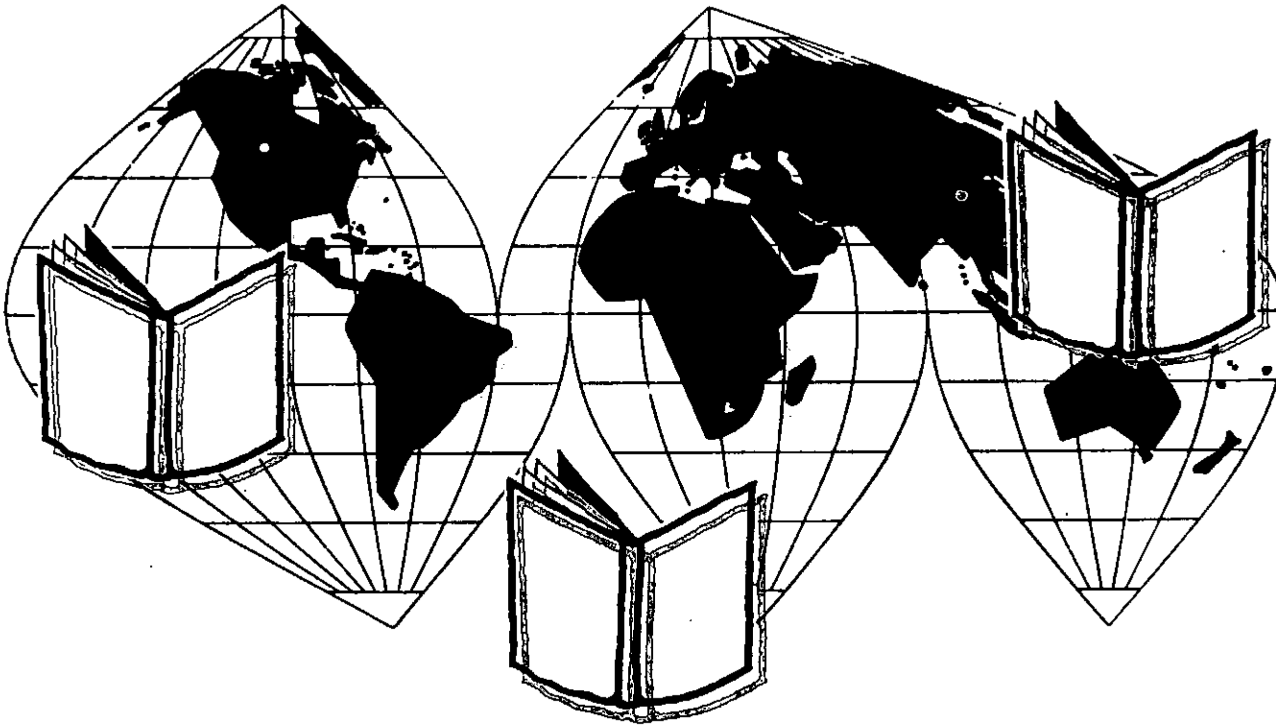
۱) (۱) $\Rightarrow$ (۲) ولی (۲) $\not\Rightarrow$ (۱)

۲) (۲) $\Rightarrow$ (۱) ولی (۱) $\not\Rightarrow$ (۲)

۳) (۱) $\Leftrightarrow$ (۲)

۴) (۱) $\not\Rightarrow$ (۲) و (۲) $\not\Rightarrow$ (۱)

۵) هیچ‌یک از موارد قبل (بالا)



مقاله‌های کوتاه از مجلّه‌های ریاضی معتبر جهان (۲۵)

تحقیق در هندسه مثلث به کمک کامپیوتر

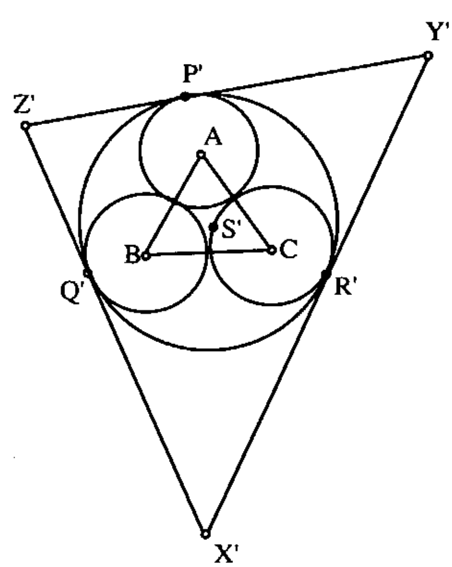
(قسمت سوّم)

از: Adrian Oldknow

The mathematical gazette
Volume 79 Number 485 July 1995

● ترجمه: غلامرضا یاسی پور

تا این مرحله، با دایرهٔ درونی سُدی سروکار داشته‌ایم. البته در این مورد، انتظار مجموعه‌ای از نتایج ساده و مشابه متناظری را برای دایرهٔ برونی سُدی (شکل ۸)، S'، مرکز آن، نقاط تماس P'، Q'، R'، رأسهای مماس x'، y'، z'، o'، مرکز پرسپکتیو و شعاع t' داریم، و در این انتظار، نیز ناامید نمی‌شویم!



شکل ۸

$$X' = (۱, ۱-۲e, ۱-۲f) = I - ۲D$$

$$P' = (۱-۲d, ۱-e, ۱-f)$$

و غیره

$$S' = (۱-d, ۱-e, ۱-f) = I - G$$

$$O' = (۱-۲d, ۱-۲e, ۱-f) = I - ۲G$$

$$۱/t' = ۲/r - ۱/a' - ۱/b' - ۱/c' \qquad (۸)$$

بنابراین، بسادگی ملاحظه می‌شود که **خط سُدی** «Soddy line» SS' شامل چهار نقطهٔ دیگر I، G، O، O' است که در آن، هریک از آنها مرکز پرسپکتیو جفتهای مربوطه از مثلثهای (DEF,xyz) ، (ABC , DEF)، (ABC , xyz) و (ABC,x′y′z′) است. اما برای مطرح شدن۶ مثلث داریم ـ ۳ مثلث مماس ABC ، xyz ، x′y′z′ و ۳ مثلث تماس DEF، PQR و P′Q′R′ ـ و بنابراین، برای بررسی، ۱۵ جفت موجودند.

چند دقیقه‌ای استفاده از نرم‌افزار هندسی مورد بحث، چهار نقطهٔ دیگر K ، K' ، M و M' را بر خط سدی آشکار می‌کند،

که همان‌طور که در جدول زیر نشان داده‌ایم، مراکز پرسپکتیوند :

	DEF	PQR	XYZ	P'Q'R'	X'Y'Z'
ABC	G	S	O	S'	O'
DEF		O	I	O'	I
PQR			K	I	M
XYZ				M'	I
P'Q'R'					K'

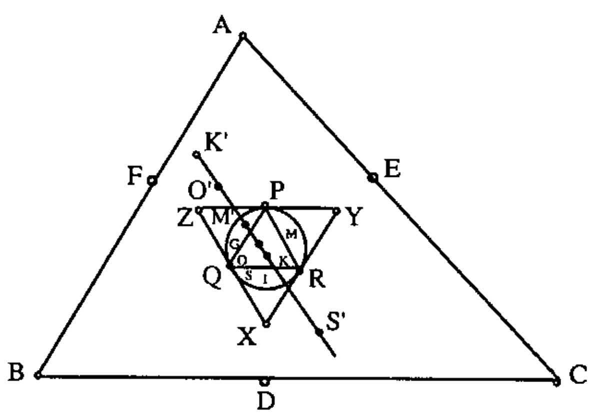
در این‌جا

$K = ۱ + ۴/۳G, \quad K' = I - ۴/۳G, \quad M = I + ۴G$
$M' = I - ۴G$

و بنابراین نقاط S'ISKOMGM'O'K' با پارامترهای $-۴/۳ , -۲ , -۴ , \infty , ۴ , ۲ , ۴/۳ , ۱ , ۰ , -۱$ در امتداد خط سدی (شکل ۹) که معادلهٔ

$$(f-e)x+(d-f)y+(e-d)z=۰$$

را داراست، مرتبط‌اند.



شکل ۲

با این اطلاعات، ترسیمهای ساده‌ای برای دایرهٔ برونی سدی داریم. خط IP را رسم می‌کنیم تا بار دیگر دایرهٔ سدی O_A را در P' قطع کند و غیره. در این صورت S' تقاطع P'A ، Q'B و R'C است. مماس در P' بر P'A عمود است و امتداد IE را در Y' قطع می‌کند و غیره.

اگر I ، G ، S ، S' را با سه‌خطیهای دقیق $\underline{I}$ ، $\underline{G}$ ، $\underline{S}$ ، $\underline{S}'$ نمایش دهیم، روابط زیر را خواهیم داشت :

$$\underline{S} = (h/(h+r))\underline{I} + (r/(h+r))\underline{G}$$

$$\underline{S}' = (h/(h-r))\underline{I} - (r/(h-r))\underline{G}$$

که h آن در (۷)تعریف شده است و اکنون می‌توان ملاحظه کرد که S خط IG را به‌طور درونی به نسبت r:h تقسیم می‌کند ؛ درحالی که S' خط IG را به طور برونی، به همین نسبت تقسیم می‌نماید. گفته می‌شود که چهار نقطهٔ S'ISG تشکیل دستهٔ همساز «harmonic range» می‌دهند و محقق است که خط سدی، با داشتن آنها غنی است!

با استفاده از استدلالی مشابه فوق، به جای سه خطیهای تبدیل‌شونده به دقیقها، بسادگی می‌توان نشان داد که چهار نقطهٔ K، L ، M و N ، که به ازای آنها رابطهٔ

$$L = K + \lambda M \ , \ N = K - \lambda M$$

بین اختیارهایشان موجود است، نیز در دستهٔ همسازند. بنابراین S' ، I ، S و G را می‌توان به صورت I − G ، I ، I+G و S نوشت و دستهٔ مورد بحث آشکار است.

ممکن است خواننده مایل باشد این مطلب را نشان دهد که I ، S ، O ، G و I ، X ، D ، X' نیز چنین دسته‌های همسازی هستند.

با تحقیقی جامع بین ده نقطه‌ای که تاکنون برخط سدی شناسایی کرده‌ایم، ۲۲ دستهٔ همساز به دست آورده‌ام. در این موارد، از محاسبه‌های نسبتاً ظریفی استفاده می‌کنند که توسط I ، S ، K و O توضیح داده شده‌اند. داریم :

$$K = I + ۴/۳G \ , \ S = I + G \ , \ O = I + ۲G$$

بنابراین :
$$S = ۳/۴K + ۱/۴I$$

و
$$O = ۳/۲K - ۱/۲I$$

و از آن‌جا که با انتخابها سروکار داریم، موارد

$$S = K + ۱/۳I$$

و
$$O = K - ۱/۳I$$

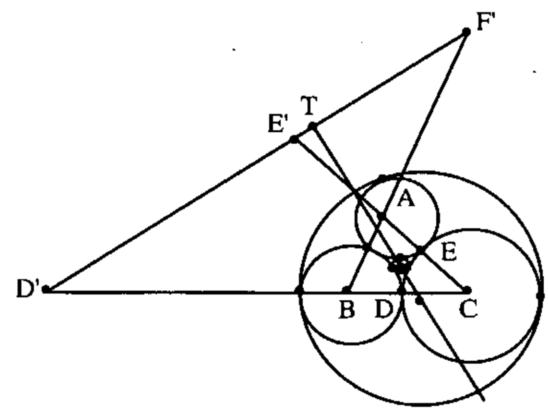
را داریم و دستهٔ موردنظر به صورت

$$I \ , \ K+۱/۳I \ , \ K \ , \ K-۱/۳I$$

مشخص می‌شود.

قضیهٔ دزارگ «Desargues» بر این است که دو مثلث مثل ABC و DEF ، که مرکز پرسپکتیوی در نقطهٔ زرگون G دارند، دارای محور پرسپکتیو «axis of Perspective» نیز هستند. دو ضلع متناظر BC و EF از این دو مثلث در نقطهٔ D' ی واقع بر BC

تلاقی می‌کنند و نقاط مشابه E' ، F' نیز موجودند. این سه نقطه جدید، یعنی D' ، E' و F' ، در محور پرسپکتیو مربوط به دو مثلث مربوطه، همخط‌اند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

انتخابهای سه‌خطی این نقاط نیز بسیار ساده‌اند :

$$D'(\circ, e, -f)\ ,\ E'(-d, \circ, f)\ ,\ F'(d, -e, \circ)$$

با به‌خاطر آوردن این مطلب که B، C و D انتخابهای سه خطی (۰، ۱، ۰)، (۱، ۰، ۰) ، (۰، e ، f) را دارند، آن‌گاه :

$$D = eB + fC\ ,\ D' = eB - fC$$

و بنابراین D' ، B، D و C، در دستهٔ همسازند و غیره.

می‌توانیم محور $D'E'F'$ را **خط ژرگون** «Gergonne line» بنامیم. معادله این خط عبارت است از :

$$xef + yfd + zde = \circ$$

در واقع ضلعهای BC، EF، QR ، YZ، $Q'R'$ و $Y'Z'$ از D' می‌گذرند و بنابراین، هریک از ۱۵ جفت مثلثی که مراکز پرسپکتیوشان برخط سدی مربوط واقع‌اند، خط ژرگون را به عنوان محور پرسپکتیو دارد. **سامرویل** «Somnerille» [8] شرط زیر را، برای این‌که خطهای $px + qy + rz = \circ$ و $p'x + q'y + r'z = \circ$ برهم عمود باشند، به دست داده است :

$$pp' + qq' + rr' = (qr' + rq')\cos A$$
$$+ (rp' + pr')\cos B + (pq' + qp')\cos C$$

استفاده از فرمول کسینوسها و یورش سختی با **درایو**، نشان می‌دهد که خطهای سُدی و ژرگون متعامدند. آنها در نقطهٔ $T = I - KG$ تلاقی می‌کنند که در آن

$$K = 1/3(1/d + 1/e + 1/f)$$

قبلاً تذکر دادیم که به بسیاری از نقاط و خطوط مثلث، اسم تخصیص داده‌ایم. اعتقاد ندارم که خط سُدی معروف باشد ؛ اما امیدوارم نشان داده باشم که باید چنین باشد. این را نیز نمی‌دانم که خط ژرگون پیش از این، از این طریق خاص شناخته شده باشد ؛ اما خواننده‌ای که تصویرهایی از چندضلعیهای کامل را در کتابهای هندسهٔ تصویری ملاحظه کرده باشد، می‌تواند

F' و E' و D' و C و B و A

را به جا آورد.

مشخص شده است که خطوط سُدی و اویلر در نقطهٔ جالب Lی ، به نام نقطهٔ **لانگ‌چمپ** «de longchamps point» تلاقی می‌کنند ؛ چنانکه نقطهٔ وسط L و محل تلاقی ارتفاعات h «orthocentre» مرکز دایرهٔ محیطی مثلث یا O است. در این مورد، نمی‌توان یک چنین نتیجهٔ جالبی دربارهٔ رأس سوم V از مثلث قائم‌الزاویهٔ اویلر، سُدی، ژرگون TVL به دست آورد! ممکن است خواننده مایل باشد این مطلب را بررسی کند که، در صورتی که ABC متساوی‌الساقین باشد، چه اتفاقی برای نقاط و خطوط مورد بحث می‌افتد، و در صورتی که به مثلث متساوی‌الاضلاع تغییر شکل دهد، چه اتفاقی به‌طور خودبه‌خود، در این‌باره رخ می‌دهد.

اکنون موضوع کوچک ۱۰ نقطه O ، O' ، K ، K' ، M ، M'، D' ، E' ، F' و T را داریم، و در صورتی که قبلاً مطرح نشده باشد، مایلم T را به عنوان نقطهٔ **فلچر** «Fletcher point»، D' ، E' و F' را به عنوان نقاط **نابز** «Nobbs points»، M، M' را به عنوان نقاط **گریفیث** «Griffiths points» و K ، K' را به عنوان نقاط درونی و برونی **ریگ‌بای** «Rigby» پیشنهاد و انجام کارهای باقیمانده را که کم هم نیستند، به‌خواننده واگذار کنم.



نابرابریها

میانگینها و نابرابریهای مربوط به آنها

(قسمت چهارم)

● میرشهرام صدر

در شماره‌های قبل با تعریف و خواص و قضایای نابرابریها آشنا شدیم، اکنون مطالب دیگری را دربارهٔ میانگینها و نابرابریهای مربوط به آنها، مطرح می‌کنیم.

۱ـ میانگین حسابی: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند، عدد $\frac{a+b}{2}$ را میانگین حسابی دو عدد a و b گوییم.

۲ ـ میانگین هندسی: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، عدد $\sqrt{ab}$ را میانگین هندسی دو عدد a و b گوییم.

قضیهٔ ۱۴: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b، ثابت کنید که، واسطهٔ حسابی، از میانگین هندسی کوچکتر نیست ؛ یعنی :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم :

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

به دو طرف نابرابری اخیر، $2ab$ را می‌افزاییم :

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \quad a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a>0,\ b>0)$$

یا $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

نابرابری کوشی۱

فرض کنیم n عدد حقیقی مثبت به صورت $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ داشته باشیم، نابرابری زیر که در واقع تعمیمی از قضیهٔ ۱۳ (در مقاله شماره قبل) است، به نام نابرابری «کوشی» معروف است :



$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

مسألهٔ ۱: برای هر عدد حقیقی $x>0$، ثابت کنید: $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

حل:

روش اوّل: چون $x>0$، با توجه به قضیهٔ ۱۳ داریم:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$$

حالت برابری، وقتی اتفاق می‌افتد که، $x=\frac{1}{x}$ یعنی $x=1$.

روش دوم:

$$(x-1)^2\geq 0 \Rightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq 2x$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $x>0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\geq\frac{2x}{x}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$$

مسألهٔ ۲: برای هر عدد حقیقی $x<0$ ثابت کنید:

$$x+\frac{1}{x}\leq -2$$

حل:
$$(x+1)^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1\geq -2x$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $x<0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\leq\frac{-2x}{x}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\leq -2$$

نتیجه: با توجه به مسأله‌های ۱ و ۲، می‌توان نوشت: $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$.

مثال: ثابت کنید که برای هر $x\in\mathbb{R}$، نابرابری $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$ همواره برقرار است.

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2\Rightarrow\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$$

مثال: ثابت کنید که برای هر دو عدد حقیقی $a>1$ و $b>1$، داریم $\log_b^a+\log_a^b\geq 2$.

حل: می‌دانیم که $\log_a^b=\frac{1}{\log_b^a}$، بنابراین:

$$\log_b^a+\log_a^b=\log_b^a+\frac{1}{\log_b^a}\geq 2\sqrt{\log_b^a\times\frac{1}{\log_b^a}}=2$$

$$\Rightarrow \log_b^a+\log_a^b\geq 2$$

مثال: بیشترین مقدار کسر $A=\frac{x}{1+x^2}$ را برای هر عدد حقیقی $x>0$ بیابید.

چون $x\neq 0$، با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر x، داریم:

$$A=\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}+x}$$

اما برای هر $x>0$؛ $x+\frac{1}{x}\geq 2$، در نتیجه $\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\leq\frac{1}{2}$، پس $A\leq\frac{1}{2}$، بنابراین بیشترین مقدار کسر A، برابر است با $\frac{1}{2}$.

۳ـ میانگین توافقی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی ناصفر باشند، عدد $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ را میانگین توافقی دو عدد a و b گوییم.



قضیهٔ ۱۵: ثابت کنید که برای دو عدد حقیقی مثبت a و b، میانگین هندسی از واسطهٔ توافقی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b، طبق قضیهٔ ۱۳ داریم:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$$

دو طرف نابرابری اخیر را بر $ab>0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{ab} \ge \frac{2\sqrt{ab}}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

مسألهٔ ۳: فرض کنیم که a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$

حل: برای دو عدد حقیقی مثبت b و a، طبق قضیه‌های ۱۴ و ۱۳، داریم:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$$

۴ ـ میانگین مربعی

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند، عدد $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ را میانگین مربعی دو عدد a و b گوییم.

قضیهٔ ۱۶: ثابت کنید که برای دو عدد حقیقی مثبت a و b، میانگین مربعی از میانگین حسابی کوچکتر نیست؛ یعنی:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$$

برهان: برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(a-b)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-\frac{2ab}{4} \ge 0$$

اگر به دو طرف نابرابری اخیر $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$ را بیفزاییم:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \ge \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{2ab}{4} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$$

نتیجه: با مقایسهٔ قضیه‌های ۱۳، ۱۴، ۱۵ برای دو عدد حقیقی مثبت b و a داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

قضیهٔ ۱۷ (نامساوی برنولی): اگر $x+1 \ge 0$ و $0<\alpha<1$، در این صورت داریم: $(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$

و اگر $\alpha<0$ یا $\alpha>1$، در این صورت: $(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$، علامت تساوی در هر دو حالت به‌ازای $x=0$ برقرار است (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

مسألهٔ ۴: اگر $-1<\alpha<0$ و $n \in N$، ثابت کنید:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

حل: $-1<\alpha<0 \Rightarrow 0<\alpha+1<1$

طبق نامساوی برنولی رابطه‌های زیر را داریم:

$$(1+\frac{1}{n})^{\alpha+1} < 1+(\alpha+1)\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} < 1+\frac{\alpha+1}{n}$$

$$(1-\frac{1}{n})^{\alpha+1} < 1-(\alpha+1)\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} < 1-\frac{\alpha+1}{n}$$

اگر دو طرف نابرابریهای بالا را در $n^{\alpha+1}$ ضرب کنیم، داریم:

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1}+(\alpha+1)n^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha \quad (1)$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1}-(\alpha+1)n^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} > n^\alpha \quad (2)$$

با توجه به نابرابریهای (۱) و (۲) داریم :

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

نابرابری کوشی ۲

فرض کنیم a، b، c و d عددهای حقیقی دلخواهی باشند، ثابت کنید :

$$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

و برابری وقتی برقرار است که $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

برهان: برای عددهای حقیقی a، b، c و d داریم :

$$(ad-bc)^2\ge 0\Rightarrow a^2d^2+b^2c^2-2abcd\ge 0$$

با اضافه کردن $a^2c^2+b^2d^2$ به دو طرف نابرابری اخیر، داریم :

$$a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2\ge a^2c^2+b^2d^2+2abcd$$

با دسته‌بندی جمله‌های دو طرف نابرابری، خواهیم داشت :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$$

با توجه به نابرابری $(ad-bc)^2\ge 0$ حالت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که، $ad-bc=0$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

نتیجه: فرض کنیم $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ عددهای حقیقی دلخواهی باشند. تعمیم نابرابری کوشی ۲ به صورت زیر است :

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$$
$$\times(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

نتیجهٔ فوق را با استفاده از نماد زیگما می‌توان به صورت $(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$ نوشت.

یک راه حلّ هندسی زیبا برای اثبات این نابرابری وجود دارد، که در این‌جا ارائه می‌شود :

با توجه به هندسهٔ بردارها و تعریف ضرب نقطه‌ای دو بردار، می‌دانیم :

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$$

که دراین رابطه $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ طولهای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند و $0\le\alpha\le\pi$ زاویهٔ بین دو بردار است. اکنون در یک فضای n بعدی، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دارای مختصات $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ و $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ هستند، با توجه به تعریف دیگر ضرب نقطه‌ای بردارها داریم :

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

و قضیهٔ مربوط به طول بردارها می‌گوید :

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\quad|\vec{b}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}\le 1\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

دو نابرابری هم‌ارز

دو نابرابری را هم‌ارز گوییم، در صورتی که هر یک، با استفاده از خاصیتها و قضیه‌های نابرابری و اعمال جبری؛ دیگری را نتیجه دهد. به‌عنوان مثال، برای اثبات نابرابری کوشی ۲ می‌توان به صورت زیر عمل کرد :

$$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ \text{(نابرابری کوشی ۲)}$$

$$\Rightarrow a^2c^2+b^2d^2+2abcd\le a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

ازدو طرف نابرابری a^2c^2 و a^2d^2 را کم می‌کنیم :

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\ge 0\Rightarrow(ad-bc)^2\ge 0$$

چون نابرابری آخر، همواره درست است و با نابرابری حکم هم‌ارز است، پس نابرابری کوشی ۲ درست است. با توجه به نابرابری آخر، حالت تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که، $ad-bc=0$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

مثال: نابرابریهای زیر را ثابت کنید :

۱) $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

۲) $a^2+4b^2+3c^2+13\ge 2a+12b+6c$

۳) $a^2 - ab + b^2 \ge 0$

۴) $a^3 + 1 \ge a^2 + a \quad (a \ge -1)$

۵) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$

۶) $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2 \quad (a > 0,\ b > 0)$

۷) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

۸) $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3 \quad (a \ne b)$

حل:

۱) $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 \ge 2a + 2b + 2c$

$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \ge 0$

$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \ge 0$

چون نابرابری اخیر درست است و با نابرابری حکم هم‌ارز است، پس نابرابری حکم درست است. حالت تساوی، وقتی پیش می‌آید که، $a = b = c = 1$.

۲) $a^2 + 4b^2 + 3c^2 - 2a - 12b - 6c + 1 + 9 + 3 \ge 0$

$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) \ge 0$

$\Rightarrow (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 \ge 0$

چون نابرابری اخیر، هم‌ارز حکم و درست است، لذا حکم درست می‌باشد و حالت تساوی وقتی پیش می‌آید که، $c = 1$ و $b = \frac{3}{2}$ و $a = 1$.

۳) دو طرف نابرابری را در $(a+b)$ ضرب می‌کنیم و دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اوّل: $a + b \ge 0$، داریم:

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \ge 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \ge 0 \Rightarrow a^3 \ge -b^3$

چون فرض کردیم که $a + b \ge 0$ یا $a \ge -b$، بنابراین نابرابری آخر درست است؛ در نتیجه، نابرابری حکم درست می‌باشد.

حالت دوم: $a + b < 0$، داریم:

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \le 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \le 0 \Rightarrow a^3 \le -b^3$

چون فرض کردیم که $a + b < 0$ یا $a < -b$، بنابراین نابرابری آخر درست است، در نتیجه، نابرابری حکم درست است.

۴) $a^3 + 1 \ge a^2 + a \Rightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) \ge a(a+1)$

چون $a \ge -1$؛ پس $a + 1 \ge 0$، بنابراین دو طرف نابرابری اخیر را بر $(a+1)$ تقسیم می‌کنیم:

$a^2 - a + 1 \ge a \Rightarrow (a-1)^2 \ge 0$

چون نابرابری آخر هم‌ارز حکم و درست است، در نتیجه حکم درست می‌باشد. حالت تساوی در صورتی که $a = 1$؛ پیش می‌آید.

۵) دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ac$

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \ge 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \ge 0$

چون نابرابری آخر درست و هم‌ارز با حکم است، پس حکم درست می‌باشد.

۶) $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2 \Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \ge ab(a+b)$

چون $b > 0$ و $a > 0$، پس $a + b > 0$؛ با تقسیم دو طرف نابرابری آخر بر $a + b$ داریم:

$a^2 - ab + b^2 \ge ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Rightarrow (a-b)^2 \ge 0$

چون نابرابری آخر همیشه درست است، در نتیجه، حکم درست می‌باشد.

۷) دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$

$2a^2 + 2b^2 + 2 \ge 2ab + 2a + 2b$

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \ge 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \ge 0$

چون نابرابری آخر همواره درست است، در نتیجه، حکم درست می‌باشد.

۸) $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3 \quad (a \ne b)$

$\Rightarrow a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 > 0$

$\Rightarrow a^3(a-b) - b^3(a-b) > 0$

چون $a \ne b$ در نتیجه $a - b \ne 0$، با تقسیم دو طرف نابرابری آخر بر $a - b$، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اوّل: اگر $a - b > 0$، آن‌گاه $a^3 - b^3 > 0$ یا $a^3 > b^3$، که نابرابری اخیر با توجه به فرض درست است.

حالت دوم: اگر $a-b<0$، آن‌گاه $a^3-b^3<0$ یا $a^3<b^3$، که نابرابری اخیر با توجه به فرض، درست است.

مثال: ثابت کنید برای هر $a,b,c\in\mathbb{R}$ ؛ معادلهٔ زیر، همواره دارای دو ریشهٔ حقیقی است:

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$$

حل: در صورتی که معادلهٔ بالا را بر حسب x مرتّب کنیم؛ خواهیم داشت:

$$(a+b+c)x^2-2(ab+bc+ac)x+3abc=0$$

برای این که معادلهٔ درجه دوم، دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد، باید مبیّن معادلهٔ مثبت باشد؛ یعنی $\Delta>0$، بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\Delta=4(ab+bc+ac)^2-4(a+b+c)\times 3abc>0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ac)^2-3(a+b+c)abc>0$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2$$

$$-3a^2bc-3ab^2c-3abc^2>0$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2>0$$

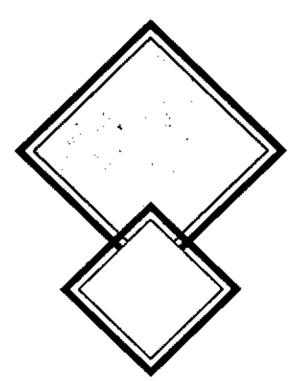
دو طرف نابرابری اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم؛ در نتیجه:

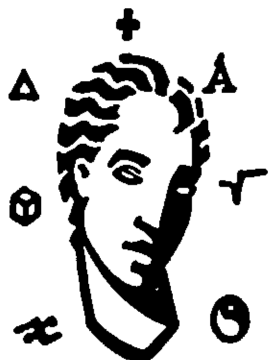
$$(a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2)+(a^2b^2-2ab^2c+b^2c^2)+$$

$$(a^2c^2-2abc^2+b^2c^2)>0$$

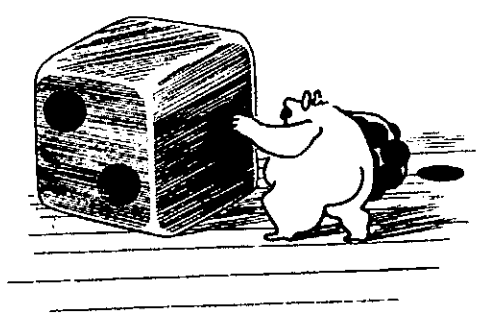
$$\Rightarrow (ab-ac)^2+(ab-bc)^2+(ac-bc)^2>0$$

چون نابرابری آخر درست و هم‌ارز با نابرابری (۱) است، پس نابرابری (۱) برقرار است.





تفریح اندیشه ۲



تعداد نقطه‌هایی که روی سطح یک مهرهٔ معمولی گذاشته می‌شوند اتفاقی نیست. این نقطه‌ها طوری گذاشته می‌شوند که مجموع نقطه‌هایی دو سطح مقابل برابر ۷ باشد؛ مثلاً ۶ در مقابل ۱ است، ۵ در مقابل ۲ و ۴ در مقابل ۳. اما می‌توان نقطه‌های روی شش وجه (سطح) یک مهره را به چندین صورت مختلف گذاشت.

آیا می‌توانید بگویید به چند صورت؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

در باغ تجربه‌ها



نشستی با استاد ارجمند و پیشکسوت آموزش ریاضی جناب آقای «محمّد صفایی یزدی» داشتیم. ایشان یکی از معلمان زحمتکش و با سابقهٔ ریاضیات هستند که ضمن تشکر از همکاری و مساعدتشان در پاسخ‌گویی به سؤالهای ما و آرزوی سلامتی برای ایشان، امید داریم که این مصاحبه بتواند تجارب مفیدی برای معلمان، دانش‌آموزان و خوانندگان عزیز، همراه داشته باشد.

ـ شرح حال:

ـ نام و نام‌خانوادگی : محمد صفایی یزدی/ تاریخ تولد : ۱۳۱۱/ محل تولد : یزد/ ازدواج در سال : ۱۳۳۶/ فرزندان و تحصیلات آنها : سه فرزند دختر با تحصیلات الف ـ لیسانس مامایی ب ـ پزشک ج ـ مهندس کامپیوتر

ـ سابقهٔ تدریس ریاضی:

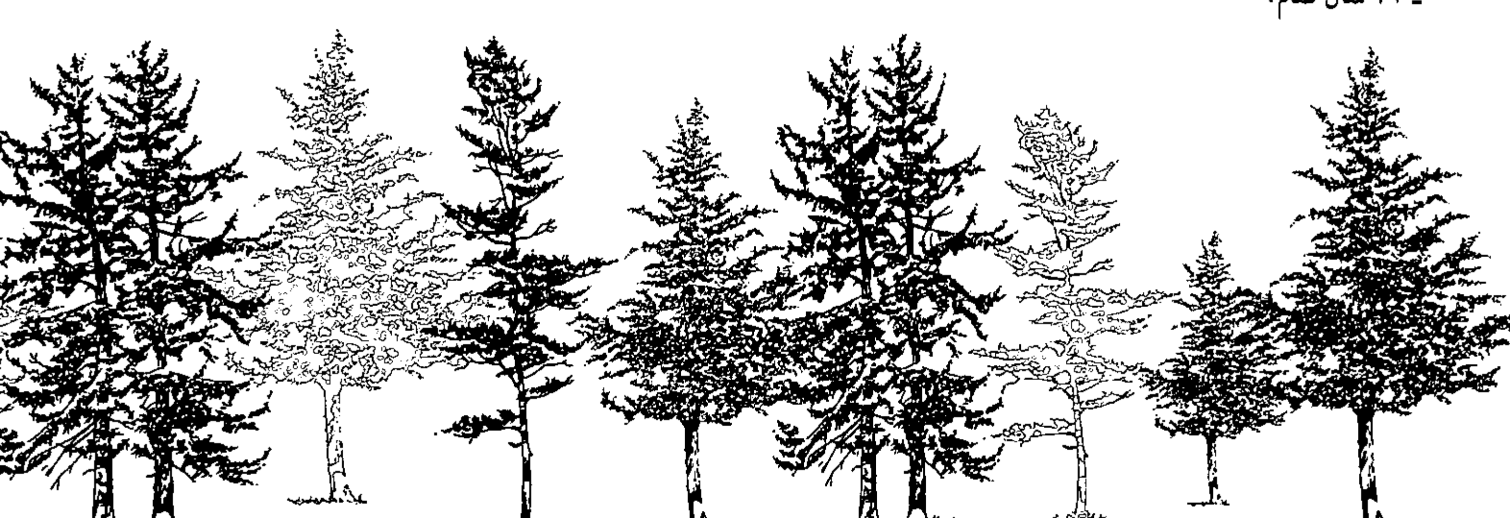
ـ ۴۷ سال تمام.

ـ دبیرستانها و دانشگاه‌های محل تدریس:

ـ چهارده سال در مدارس ورامین، دو سال در شهر ری (دبیرستان عظیمیه) و بقیه در دبیرستانهای مناطق مختلف تهران و ارائهٔ مقاله‌های ریاضی به کنفرانسهایی که در دانشگاه‌های شهید بهشتی، صنعتی‌شریف، کرمان و شیراز برگزار می‌شد.

ـ تألیفات و ترجمه‌ها (با شرح):

ـ در زمان جنگ تحمیلی هشت ساله، جزوه‌ها و مسائل مختلف از هندسه و مثلثات تهیه نموده و به دبیرستانهای مناطق تهران و شهرستانها ارسال نموده است؛ چون به موجب ابلاغ شمارهٔ $\frac{۱۸۴۰۳}{۶۰/۲/۱۲}$ از دانشگاه شهید بهشتی مأمور آموزش ریاضی به فرزندان جنگزدهٔ مستقر در پارک هتل تهران بودم و مرتّب این جزوه‌ها بین آنان توزیع شده است.



ـ خاطراتی را از کودکی، نوجوانی، جوانی و ... ذکر کنید:

ـ از پنج سالگی، از پدری عالم و دانشمندی کم‌نظیر یتیم شدم. فقط مادرم با زحماتی بسیار، من و خواهرانم را با کوشش طاقت‌فرسا اداره می‌کرد. بدین جهت در آن زمان، خاطرات تلخ به یادگار مانده، ولی از دوران دبیرستان، بخصوص پس از دانشسرا و در طول خدمت دبیری، به شرحی که خواهیم داد، خاطرات بسیار شیرین دارم که چند نمونهٔ آن را ذکر می‌کنم.

الف : یکی از روزهای «هفتهٔ معلم» بود که جناب آقای دکتر نجفی، وزیر محترم سابق آموزش و پرورش، ناگهان وارد کلاس هندسهٔ دانش‌آموزان سال سوّم ریاضی دبیرستان ۲۲ بهمن، منطقهٔ پنج تهران شدند. پس از دقّت بسیار و مشاهدهٔ کار دانش‌آموزان که بسیار آماده و قوی مسائل را حل می‌کردند، خطاب به بنده گفتند : «متأسّفانه هر سال آمار دبیران هندسه رو به کاهش است، حال شما چند سال سابقهٔ تدریس دارید؟»

عرض کردم ۳۹ سال (هشت سال قبل) ادامه دادند : «از خداوند می‌خواهم که با همین قدرت و عشق و علاقه بتوانید ۳۹ سال دیگر این چنین تدریس کنید.» سپس با خوشحالی تمام و اظهار لطف بسیار، خداحافظی نمودند (به نظر می‌رسد که به فضل خدا، دعای ایشان مستجاب خواهد شد و آرزو دارم تا آخرین دقایق زندگی‌ام، در کلاس و در حال تدریس به سر برم).

ب : در روز اختتامیهٔ بیست‌وهشتمین کنفرانس ریاضی کشور، در سالن بزرگ دانشگاه تبریز، ناگهان و بی‌خبر جناب آقای دکتر «عبدالحمید ریاضی» رئیس انجمن ریاضی کشور و ریاست دانشگاه صنعتی‌امیرکبیر، پس از ذکر مختصری از سابقهٔ کار و امتیازهای اینجانب، در حضور کلیهٔ شرکت‌کنندگان (قریب ۸۰۰ نفر) جایزه‌ای بسیار ارزنده مرحمت نمودند (با توجه به تصویرهای موجود).

ج : سوّمین خاطره، در عصر روز سه‌شنبه ۷۷/۶/۳ بود که اطلاع دادند که من از میان تمامی کارکنان آموزش و پرورش انتخاب شده‌ام و باید ساعت هشت صبح فردا، به محل برگزاری اجلاس سران کشورهای اسلامی بروم تا جایزهٔ خود را از دست ریاست محترم جمهوری دریافت کنم. همان‌گونه که در ساعت $۹\frac{۱}{۴}$ از سیمای جمهوری اسلامی پخش و مشاهده شد، شخص رئیس‌جمهور محترم، لوحی بسیار زیبا همراه با اظهار لطف و محبت بسیار مرحمت فرمودند.

ـ خاطراتی را از دوران دبستان ذکر نمایید.

ـ بسیار تلخ، لذا قابل ذکر نیست.

ـ خاطراتی را از دوران دبیرستان ذکر نمایید.

ـ خوشبختانه دبیرانی با علاقه و دلسوز داشتم و گاه بنده را مورد تشویق قرار می‌دادند ؛ از جمله آقایان دکتر احمد فیروزآبادی (استاد برجسته و معاون سابق دانشگاه صنعتی‌شریف) و میبدی‌تبار، خاتمی فیروزآبادی و... را می‌توان نام برد که تشویق این بزرگواران، بهترین خاطرات مرا تشکیل می‌دهد.

ـ خاطراتی را از دوران دانشگاه ذکر نمایید:

ـ در دانشگاه از اوّل تا پایان گرفتن لیسانس و دوره‌های بعد از آن، خاطرات زیادی دارم. فقط یکی را عرض می‌کنم. شاید این خود برای دبیران هندسه، علوم و ... قابل توجه باشد.

از سال ۱۳۳۳ تا پایان دوران دانشگاه، همه ساله در اردوهای دانشجویان شرکت داشتم. روزی با قطار تهران ـ گرگان به یکی از





شهرهای شمالی وارد و بلافاصله با اتوبوسهای آماده، هنگام شب وارد بابلسر شدیم. بنده که تا آن زمان دریا را ندیده بودم (فقط از کتاب جغرافیا مطالبی می‌دانستم) صبح زود، همراه جمعی از دانشجویان، از اردوگاه خارج شده و برای اولّین‌بار به ساحل دریا رفتم. با مشاهدهٔ دریا، تصوّرهای غلط قبلی‌ام را اصلاح کردم (به مصداق ضرب‌المثل معروف، شنیدن کی بود مانند دیدن) یعنی تا حدّ ممکن، باید مطالب را محسوستر و با استفاده از وسایل لازم بیان کرد.

ـ کدام‌یک از معلمان، بیشتر روی شما تأثیر گذاشته است و چرا؟

ـ اعمال و رفتار مرحوم «حسین فیروز» معاون محترم آن زمان دانشسرای تهران؛ زیرا به من اجازه داده بودند تا هر وقت هر مشکلی داشتم، به ایشان مراجعه کنم، که ایشان نیز با کمال دلسوزی و مهربانی پاسخگو بودند.

ـ روش تدریس کدام‌یک از معلمان خود را بیشتر می‌پسندیدید و چرا؟

ـ تدریس استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر «حسن صفاری» که یکی از ریاضیدانان بزرگ دنیا محسوب می‌شوند، بهتر می‌دانستم؛ زیرا اوّلاً، تسلط کامل بر ریاضیات داشتند (مؤلف تمام کتابهای ریاضی بودند) ثانیاً، همیشه در کلاس، رعایت تمام نکات یک معلم خوب را می‌کردند.

ـ کدام‌یک از دبیرستانها محل مناسبتری برای تدریس بودند و چرا؟

ـ دبیرستانهای مناطق محروم را مناسبتر می‌دانم؛ زیرا در آن‌جا شاگردانِ با علاقه و قدردان بیشترند و به‌طورکلی مؤمن‌تر و حق‌پذیرترند.

ـ از شاگردان بازیگوش خود، چه خاطراتی دارید و چگونه آنها را آرام می‌کردید؟

ـ همیشه آنان را مانند فرزندان خود می‌دانستم؛ چون بازیگوشی اقتضای سنّشان است، لذا کوششی برای آرام کردن آنان نمی‌کردم؛ مگر زمانی که مانع درس خواندن می‌شدند. در آن وقت، با کمال مهربانی و نصیحت پدرانه، آرامشان می‌کردم.

ـ از شاگردان باهوش خود چه خاطراتی دارید؟

روزی وارد کلاس سوّم ریاضی شدم که در جلسهٔ قبل، چند قضیه از هندسه گفته بودم. دانش‌آموز نسبتاً خوبی، اجازه خواست و گفت، من فلان قضیه را خوب نفهمیدم، آن‌را بار دیگر بگویید. بلافاصله شاگرد باهوشی به نام آقای «ایرج رفیعی» (که اکنون کارشناس ارشد مخابرات هستند) گفت من شکلهایی ساخته‌ام که قضیه‌های درس گذشته را کاملاً گویا و روشن می‌کند. پس از استفاده از آن اشکال، نه تنها آن قضیه، بلکه مسائل دیگر نیز بهتر



تفهیم شد، و تا آخر سال، همهٔ دانش‌آموزان این شیوهٔ ساخت و کاربرد وسایل کمک آموزشی را ادامه دادند.

ـ نام بعضی از شاگردان خود را که به مراتب بالای علمی رسیده‌اند، با ذکر مشخصات علمی‌شان بیاورید.

ـ خوشبختانه شاگردان بسیاری داشته‌ام و دارم که به درجات بالای علمی رسیده‌اند. حتّی فرزندان و بعضاً نوهٔ آنان نیز به مقامات علمی رسیده‌اند و پس از این هم خدا داند.

ـ وضع تدریس ریاضیات در قدیم چگونه بوده و آیا خودتان آن را می‌پسندیدید؟

ـ مشکلتر بوده ؛ زیرا امکانات کمتری وجود داشت ؛ بنابراین مورد پسند نبود.

ـ وضع تألیف کتابهای ریاضی قدیم چگونه بود؟

ـ چون بیشتر ترجمه‌ها از کتابهای ریاضی ممالک دیگر بود، دارای معایب و نواقصی چند بود ؛ ولی با زحمتهای آقایان صفاری، قربانی و دیگران، و با شناخت بیشتر، تألیفهایی انجام گردید که تا حدودی این معایب رفع شده بود.

ـ نام بعضی از مدرّسان و مؤلّفان مورد توجه خود را با ذکر دلیل بیاورید.

ـ آقایان صفاری، قربانی، با همّت و مدغم و ... مثلاً بنا به تشخیص اینجانب، جناب آقای حسن صفاری، بهترین مدرّس و مؤلّف بودند ؛ زیرا اوّلاً، با کمال حوصله و خوشرویی به پرسشها جواب می‌دادند. ثانیاً، از وقت خود، بهترین استفاده را می کردند، به‌طوری که همیشه ایشان را در حال مطالعه و تحقیق می‌دیدم. حتّی در راه منزلشان (از خیابان بهار) تا دانشسرای تهران (خیابان شهید مفتح) مشغول تحقیق و ترجمهٔ کتابهای مختلف بودند.

ـ وضع تدریس ریاضیات در حال حاضر چگونه است؟

ـ خوب است. نمونهٔ کامل آن، درخشندگی محصلان عزیزمان در دنیا و به‌دست آوردن مدالهای طلا و کسب امتیازهای بسیار خوب آنان است.

ـ وضع کتابهای درسی کنونی چگونه است؟

ـ دارای معایب و نواقصی است ؛ مثلاً در بیست‌وششمین کنفرانس ریاضی کشور (در کرمان) با حضور مؤلّفان محترم، به آن کتابها، انتقادهایی شد ؛ ولی در جواب، علّت آن‌را زمان کوتاه و ناکافی برای تألیف دانستند، که حاضران قانع نشدند.

ـ برای این که شاگردی در ریاضیات موفّق باشد، باید چه کارهایی انجام دهد؟

ـ باید اوّلاً در هر مقطع، مطالب گذشته را خوب بداند. ثانیاً در کلاس با توجه کامل به تدریس استادان خود گوش فرا دهد و با کمال دقّت و جرأت، مطالب ندانسته را بپرسد و خود با تفکر و اندیشه، آن‌را دنبال کند.

ـ یک کتاب درسی خوب، باید شامل چه محسناتی باشد؟

ـ اوّلاً، با چاپ خوب و خوانا، و بدون غلط تهیه شود، ثانیاً، همراه با تصویرهای گویا و بسیار آشکار باشد، مفاهیم خوب، مناسب و مطابق با نیاز ریاضی کشور داشته باشد و با استدلالی قوی تألیف شده باشد.

ـ آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می‌دانید و اگر لازمند، چه مشخصاتی باید داشته باشند؟

ـ اگر در مسیر هدایت دانش‌آموزان باشد، بلااشکال است و



اگر جنبهٔ حلّ‌المسائل داشته باشد، قدرت تفکر و اندیشه را از دانش‌آموزان می‌گیرد، لذا این چنین کتابهایی را لازم نمی‌دانم.

ـ یک ریاضیدان، بجز ریاضیات، باید از چه علومی آگاهی داشته باشد؟ مثلاً دانستن ادبیات برای ریاضیدان لازم است؟

ـ باید به سایر رشته‌های علوم، بخصوص به فیزیک آشنایی داشته باشد.

ـ خود شما بجز ریاضی، در چه مواردی تبحّر دارید؟

ـ به ادبیات فارسی و عربی و زبان فرانسه مختصر آشنایی دارم.

ـ اگر مواردی بجز موارد بالا یا توصیه‌هایی به نظرتان می‌رسد، توضیح بفرمایید.

ـ بهتر است عوامل مؤثّر در ایجاد علاقه و عشق به کارم و ادامهٔ آن تا ۴۷ سال را به‌طور رسمی ذکر کنم:

۱ـ مهمترین عامل دلگرمی، دانش‌آموزان بودند که همیشه آنان را مانند فرزندان و چشمهای خود می‌دانستم و با کمال مهربانی و خوشرویی، آمادهٔ جواب به سؤالهایشان بودم.

۲ـ هرگز احساس خستگی نمی‌کردم، از مهرماه ۱۳۳۰ (از ۱۸ سالگی) تاکنون به‌طور متوسط روزی دوازده ساعت، حتّی در روزهای جمعه و تعطیل تدریس نموده‌ام، که به‌طور استاندارد، برای یک نفر، یک قرن و نیم (۱۵۰ سال) کار محسوب می‌شود.

اکنون هم که از سال گذشته بازنشسته شده‌ام؛ یعنی با شروع چهل‌وهشتمین سال، به فضل خداوند متعال، رؤسای دبیرستانهای مناطق ۲، ۳ و ۵ آموزش و پرورش تهران، با نهایت اشتیاق، برنامهٔ کارم را تنظیم نموده‌اند؛ زیرا آنان، آشنایی کامل به توانایی و روحیهٔ این‌جانب دارند؛ چون بسیار دیده‌اند که چگونه در مدرسه‌های دولتی (بخصوص صبحهای روز جمعه) با ادغام دو یا سه کلاس (با بیش از صد نفر دانش‌آموز) بدون کوچکترین احساس خستگی در خود، برای آنان تدریس می‌کردم. پس نتیجه می‌گیریم که کار زیاد و مورد علاقه، خستگی نمی‌آورد؛ بلکه آن ناهنجاریهای روانی است که انسان را فرسوده می‌کند.

۳ـ به‌طوری که ذکر شد، عامل دیگر، تشویق مکرّر مسؤولان اداری و مقامات علمی کشور و مقامات عالی‌رتبهٔ مملکتی بوده است.

۴ـ آمادگی کامل برای تدریس، در صورت نیاز تهیه و همراه داشتن وسایل کمک‌آموزشی متناسب با درس آن جلسه و مطالعهٔ کافی در شب قبل (هر چند مسائلی بارها حل شده باشد).

۵ـ با حالت شادی و شادابی وارد کلاس شدن و این حالت را بدون عصبانیت تا پایان حفظ کردن.

۶ـ زودتر از شاگردان به کلاس رفتن و دیرتر از آنان خارج شدن، و هرگز غیبت و تأخیر نداشتن.

۷ـ عادت دادن دانش‌آموزان به مطالعه و استفادهٔ کامل از اوقات گرانبهایشان.

۸ـ در انضباط، مطالعه و تلاش مستمر، سرمشق آنان بودن.

۹ـ ذکر خاطراتی آموزنده برای تنوّع درس آنان.

۱۰ـ در پایان، خیلی کوتاه، درس اخلاق دادن.

با تشکر از جنابعالی که با حوصله، به سؤالهای ما جواب دادید و با آرزوی سلامتی و شادکامی در همهٔ موارد، بخصوص تدریس، که همواره عاشقانه به آن می‌پردازید.



از نامهٔ کوپرنیک به پاپ پل سوّم

اگر بر حسب اتفاق مردان خفیفی پیدا شوند که بدون هیچ گونه اطلاعات ریاضی بخواهند در هر موقع آن مقام مقدّس را وادار به دخالت در این موضوع کنند و به اتّکای کتاب مقدّس، کتاب مرا مورد تهمت قرار دهند، از همین حالا اعلام می‌دارم که ابداً به وجود ایشان اهمیت نمی‌دهم و قضاوت آنان را همچون خاک می‌پندارم ... فقط ریاضیدانان هستند که حقّ دخالت در حقایق ریاضی را دارند.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو

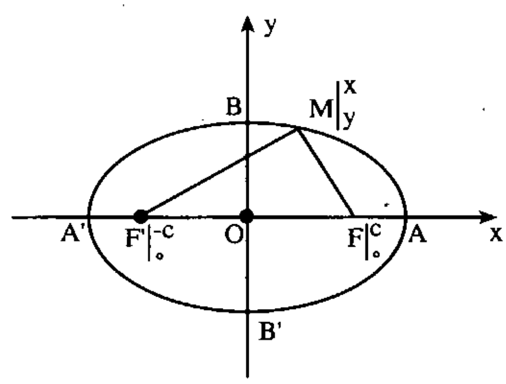
● محمد هاشم رستمی

مکان هندسی

(قسمت هفدهم)

مقطعهای مخروطی

معادلهٔ بیضی. بیضی به کانونهای F و ′F و عدد ثابت $2a$ را درنظر می‌گیریم. خط ′FF را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط ′FF را محور yها اختیار می‌کنیم. در این صورت، با توجه به این که $FF' = 2c$ است، $F(+c,0)$ و $F'(-c,0)$ خواهد بود. اگر $M(x,y)$ یک نقطه از این بیضی باشد، داریم :



$$M\Big|_{y}^{x} \text{ و } F\Big|_{0}^{+c} \text{ و } F'\Big|_{0}^{-c}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}\,;$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,;$$

$$MF + MF' = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \quad (1)$$

معادلهٔ (۱)، معادلهٔ بیضی مورد نظر است. برای گویا کردن این معادله چنین عمل می کنیم :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2$$

$$= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{cx}{a} \quad (2)$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx$$

$$\Rightarrow x^2+c^2-2cx+y^2 = a^2+\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

با توجه به این که $a > c$ است، فرض می‌کنیم $a^2 - c^2 = b^2$ باشد. دراین صورت، خواهیم داشت :

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

معادلهٔ (۳)، معادلهٔ بیضی مورد نظر است.

بعکس، ثابت می‌شود هر نقطهٔ $M(x,y)$ که مختصاتش در معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ صدق کند، به بیضی به کانونهای F و ′F (با فرض $FF' = 2c$) و عدد ثابت $2a$ تعلق دارد ؛ زیرا :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

از این رابطه، $|x| < a$ نتیجه می‌شود. امّا $b^2 = a^2 - c^2$ و $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ است. بنابراین داریم:

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{و} \quad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx} = \sqrt{(a - \frac{cx}{a})^2} = a - \frac{cx}{a}$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow MF' = \sqrt{a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx} = \sqrt{(a + \frac{cx}{a})^2} = a + \frac{cx}{a}$$

$$\Rightarrow MF' = a + \frac{cx}{a}$$

از آن‌جا:

$$MF + MF' = (a - \frac{cx}{a}) + (a + \frac{cx}{a}) = 2a$$

$$\Rightarrow MF + MF' = 2a$$

یعنی M روی بیضی است که کانونهای آن F و 'F و عدد ثابتش 2a است.

نکته. $MF = a - \frac{cx}{a}$ و $MF' = a + \frac{cx}{a}$ را اندازهٔ شعاع حاملهای نقطهٔ M می‌نامند.

محورهای تقارن و مرکز تقارن بیضی. بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در نظر می‌گیریم. با تبدیل y به y− ، این معادله تغییر نمی‌کند. بنابراین، محور xها، یعنی خط 'FF ، محور تقارن بیضی است که آن را محور کانونی بیضی نیز می‌نامند.

با تبدیل x به x− ، این معادله تغییر نمی‌کند. بنابراین، محور yها یعنی عمود منصّف پاره‌خط 'FF محور تقارن بیضی است که آن را محور ناکانونی بیضی نیز می‌نامند.

با تبدیل x به x− و y به y− معادلهٔ بالا تغییر نمی‌کند. بنابراین مبدأ مختصات یعنی محل برخورد دو محور تقارن آن، مرکز تقارن بیضی است که آن را به طور خلاصه مرکز بیضی نیز می‌نامند.

رأسهای بیضی. محور کانونی بیضی آن را در دو نقطهٔ $A(+a,0)$ و $A'(-a,0)$ و محور ناکانونی بیضی، آن را در دو نقطهٔ $B(0,+b)$ و $B'(0,-b)$ قطع می‌کند، که این چهار نقطه، رأسهای بیضی نامیده می‌شوند.

صورتهای دیگر معادلهٔ بیضی:

۱. اگرمرکز بیضی نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و محور کانونی آن موازی محور xها باشد، معادلهٔ بیضی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ است.

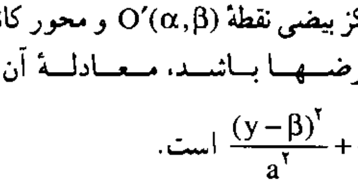
۲. اگر مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات و محور کانونی آن روی محور عرضها یعنی $F(0,c)$ و $F'(0,-c)$ باشد، معادلهٔ بیضی به صورت $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ است.

۳. اگر مرکز بیضی نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و محور کانونی آن موازی محور عرضها باشد، معادلهٔ آن به صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ است.

۴. اگر محورهای بیضی موازی محورهای مختصات نباشند، معادلهٔ بیضی به صورت کلی $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ است که در آن A و B هم علامت، ولی نابرابرند و $C \neq 0$ می‌باشد.

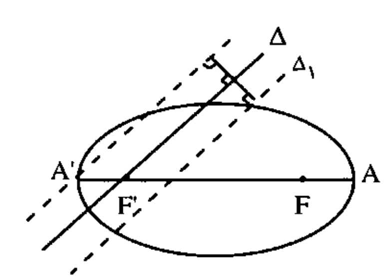
بررسی بیشتر ویژگیهای بیضی، در بحث مقطعهای مخروطی انجام خواهد شد.

مثال۱. بیضی (E) و خط Δ در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی این بیضی بیابید که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم l باشد.



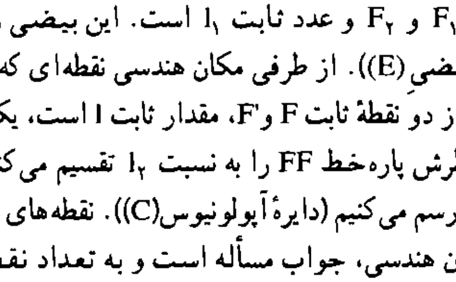
حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از خط راست Δ به فاصلهٔ معلوم l قرار دارد، دو خط Δ_1 و Δ_2 موازی خط Δ و به

فاصلهٔ l از این خط می‌باشد. این دو خط را رسم می‌کنیم، نقطه‌های برخورد Δ_1 و Δ_2 با بیضی (E) جوابهای مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله، دارای جواب است.



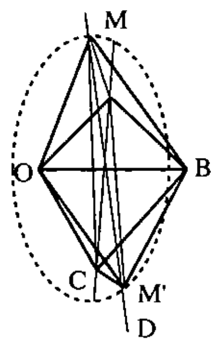
مثال ۲. سه نقطهٔ F_1 ، F_2 و F_3 در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ F_1 و F_2 برابر l_1 و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ F_2 و F_3 برابر l_2 باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F_1 و F_2، مقدار معلوم l_1 باشد، یک بیضی به کانونهای F_1 و F_2 و عدد ثابت l_1 است. این بیضی را رسم می‌کنیم (بیضیِ(E)). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F'، مقدار ثابت l است، یک دایره است که قطرش پاره‌خط FF را به نسبت l_2 تقسیم می‌کند. این دایره را نیز رسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس(C)). نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله دارای جواب است.



مثال۳. چهارضلعی ABCD در یک صفحه داده شده است. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و C برابر AB + BC و به یک فاصله از دو نقطهٔ B و D باشد.

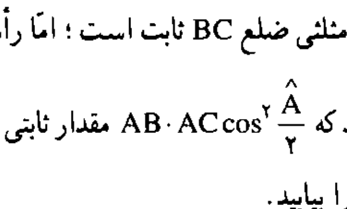
حل. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت AB + BC است، یک بیضی به کانونهای A و C و عدد ثابت AB + BC است که از نقطهٔ B نیز می‌گذرد. این بیضی را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که به یک فاصله از دو نقطهٔ B و D است، عمود منصّف پاره‌خط BD است. این مکان هندسی را نیز رسم می‌نماییم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله دارای جواب است.



مثال ۴. در مثلثی ضلع BC ثابت است ؛ امّا رأس A چنان تغییر مکان می‌دهد که $AB \cdot AC\cos^2\frac{\hat{A}}{2}$ مقدار ثابتی است. مکان هندسی رأس A را بیابید.

حل. مثلث ABC به ضلع ثابت BC = a را درنظر می‌گیریم و مقدار ثابت $AB \cdot AC\cos^2\frac{\hat{A}}{2}$ را برابر k اختیار می‌کنیم ؛ یعنی

$$bc\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = k \quad (1)$$



می‌دانیم که در هر مثلث ABC به ضلعهای BC = a ، AC = b و AB = c ، داریم :

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$bc \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = k \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 4k$$

$$\Rightarrow b+c = \sqrt{a^2+4k} = \text{مقدار ثابت}$$

$$\Rightarrow AB + AC = \sqrt{a^2+4k} = Cte$$

چون دو نقطهٔ B و C ثابت و $AB+AC$ مقدار ثابت $\sqrt{a^2+4k}$ است، بنابراین، مکان هندسی رأس A یک بیضی به کانونهای B و C و عدد ثابت $2a = \sqrt{a^2+4k}$ است.

مثال ۵. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ مختصات xoy را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(6,2)$ و $F'(-2,2)$ واقع دراین صفحه، برابر ۱۰ باشد.

حل. راه اول. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد. در این صورت داریم :

$$MF = \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}\ ,$$

$$MF' = \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$MF + MF' = 10 \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} = 10 - \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow (x-6)^2+(y-2)^2 = 100 + (x+2)^2 + (y-2)^2 - 20\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -16x - 68 = -20\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -4x - 17 = -5\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 289 + 136x = 25(x^2+y^2+4x-4y+8)$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 - 36x - 100y - 89 = 0 \quad (1)$$

معادلهٔ (۱)، معادلهٔ مکان هندسی موردنظر است که یک بیضی به کانونهای F و ′F و عدد ثابت ۱۰ است. این معادله را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$x^2 - 36x + 25y^2 - 100y - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x^2-4x) + 25(y^2-4y) - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9\left[(x-2)^2 - 4\right] + 25\left[(y-2)^2 - 4\right] - 89 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x-2)^2 + 25(y-2)^2 = 225$$

$$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad (2)$$

معادلهٔ (۲) را معادلهٔ استاده یا استاندارد یا کانونیک بیضی جواب مسأله می‌نامند.

راه دوم. با توجه به تعریف مکان هندسی جواب مسأله، یک بیضی است، که چون $y_F = y_{F'} = 2$ است، محور تقارن آن موازی محور xهاست و بنابراین معادلهٔ آن به صورت کلی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ است ؛ امّا :

$$C \text{ مرکز بیضی} \left| \begin{array}{l} \alpha = \frac{x_F + x_{F'}}{2} = \frac{6-2}{2} = 2 \\ \beta = \frac{y_F + y_{F'}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow CF = c = \sqrt{(6-2)^2 + (2-2)^2} = 4$$

و

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-16} = 3$$

از آن‌جا معادلهٔ بیضی به صورت زیر می‌باشد :

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

مثال ۶. معادلهٔ بیضیی را که $F(5,3)$ و $F'(-1,7)$ دو کانون آن، و عدد ثابتش برابر ۸ است، بنویسید.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. در این صورت داریم :

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.,\ F\left|\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.,\ F'\left|\begin{array}{l}-1\\7\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow MF = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$$

و

$$MF' = \sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}$$

$$MF + MF' = 8 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} +$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}=8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=8-\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=64+(x+1)^2+(y-7)^2-16\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow -12x+8y-80=-16\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow -3x+2y-20=-4\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow 9x^2+4y^2+400-12xy+120x-80y$$

$$=16x^2+32x+16+16y^2-224y+784$$

$$\Rightarrow 7x^2+12y^2+12xy-88x-144y+400=0$$

معادلهٔ به دست‌آمده، معادلهٔ بیضی موردنظر است که محورهای تقارن آن، ناموازی با محورهای مختصات می‌باشند.

نکته. اگر زاویهٔ $F'F$ با جهت مثبت محور xها را α بنامیم، با یک دَوَران محورهای مختصات به اندازهٔ زاویهٔ α، محورهای تقارن بیضی موازی محورهای مختصات جدید می‌گردد و معادلهٔ بیضی را می‌توان با استفاده از دستور $\frac{(X-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(Y-\beta)^2}{b^2}=1$ به‌دست آورد.

مثال ۷. نقطه‌ای روی خط $\Delta: x-2y=0$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(4,0)$ و $F'(0,2)$ برابر ۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $F(4,0)$ و $F'(0,2)$ برابر مقدار ثابت ۶ است، یک بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۶ است. معادلهٔ این بیضی را به‌دست می‌آوریم و نقطه یا نقطه‌های برخورد آن با خط Δ را تعیین می‌کنیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد،داریم :

$$M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix},\ F\begin{vmatrix}4\\0\end{vmatrix},\ F'\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix},\ MF+MF'=6$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=6$$

$$\Rightarrow x^2+16-8x+y^2$$

$$=36+x^2+y^2-4y+4-12\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -8x+4y-24=-12\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow -2x+y-6=-3\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2+y^2+36-4xy+24x-12y$$

$$=9x^2+9y^2-36y+36$$

معادلهٔ بیضی $\quad 5x^2+8y^2+4xy-24x-36y=0$

$$\begin{cases}5x^2+8y^2+4xy-24x-36y=0\\ x-2y=0\Rightarrow x=2y\end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(4y^2)+8y^2+4y(2y)-24(2y)-36y=0$$

$$36y^2-48y-36y=0\Rightarrow 36y^2-84y=0$$

$$\Rightarrow 12y(3y-7)=0\Rightarrow y=0,\ y=\frac{7}{3}$$

$$y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow O(0,0)$$

نقطه‌های جواب مسأله $\quad y=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\frac{14}{3}\Rightarrow M_1\left(\frac{14}{3},\frac{7}{3}\right)$

مثال ۸. دو نقطهٔ $A(3,2)$ و $B(-1,2)$ در دستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. نقطهٔ M از صفحهٔ این دستگاه مختصات را تعیین کنید که برای آن $MA+MB=6$ و $MA^2+MB^2=\frac{41}{2}$ باشد.

حل. نقطه یا نقطه‌های جواب مسأله، نقطه یا نقطه‌های برخورد بیضی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۶ و دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{41-AB^2}$ است. بنابراین، معادلهٔ این بیضی و دایره را به‌دست آورده، نقطه‌های برخورد آنها را (در صورت وجود) تعیین می‌کنیم.

چون $y_A=y_B=2$ است محور کانونی بیضی موازی محور xهاست. بنابراین داریم :

مرکز بیضی $\quad C\begin{vmatrix}\alpha=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-1}{2}=1\\[4pt] \beta=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+2}{2}=1\end{vmatrix}$

$$CA=c=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2}=2\ ,\ 2a=6\ ,\ a=3$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

معادلهٔ بیضی $\quad \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$

$AB = 2c = 4$ ، مرکز دایره $C\left|\begin{array}{l}\alpha = 1\\ \beta = 1\end{array}\right.$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{41}{2}\right) - 16} = \frac{1}{2}\times 5 = \frac{5}{2}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

معادلهٔ دایره $\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1\\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{25}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{\frac{25}{4} - (x-1)^2}{5} = 1$$

$$\Rightarrow 5(x-1)^2 + \frac{225}{4} - 9(x-1)^2 = 45$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow x - 1 = \pm\frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{45}{16} + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = \frac{55}{16} \Rightarrow y - 1 = \pm\frac{\sqrt{55}}{4}$$

$y = 1 \pm \frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow M_1\left(1+\frac{3\sqrt{5}}{4}\ ,\ 1+\frac{\sqrt{55}}{4}\right)$ و

$M_2\left(1+\frac{3\sqrt{5}}{4}\ ,\ 1-\frac{\sqrt{55}}{4}\right)$ و

$M_3\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{4}\ ,\ 1+\frac{\sqrt{55}}{4}\right)$ و

$M_4\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{4}\ ,\ 1-\frac{\sqrt{55}}{4}\right)$

مسأله چهار جواب دارد.



تفریح اندیشه ۳

مقدار x را پیدا کنید

x عددی است بین یک تا ۵۰ و اعمالی در جهت سهم روی عدد x انجام گردیده، سعی کنید با توجه به اعمال فوق عدد نامعلوم x را پیدا کنید.

x	:۴	+۱۷	×۹	
−۵۴				−۹۳
:۲		x = ?		:۲
−۷۲				×۵
	×۴	:۳	−۴۸	

از صمد پور اسدا...

جواب در صفحهٔ ۸۸

بررسی قضیه‌های مشتق و کاربردهای آنها

(قسمت دوم)

● محمد صادق عسگری



پس از بررسی و کاربردهای قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی در برهان ۲۷ نوبت به بررسی قضیهٔ رُول می‌رسد. که صورت آن به شکل زیر است.

قضیهٔ رُول

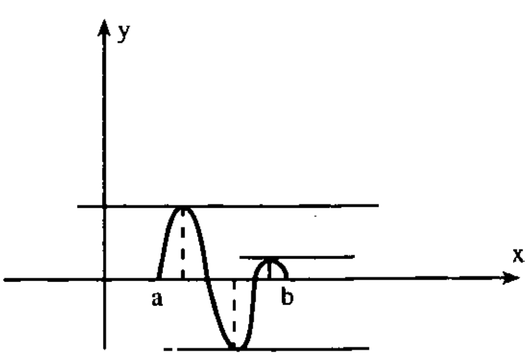
فرض کنیم تابع f بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر فاصلهٔ $]a,b[$ مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$، آن‌گاه وجود دارد $a<c<b$؛ به طوری که $f'(c)=0$.

اثبات

اگر f تابع ثابت باشد، آن‌گاه حکم قضیه برقرار است. بنابراین، فرض کنیم f تابع غیر ثابت باشد. بنا به فرض داریم $f(a)=f(b)=0$، در نتیجه، وجود دارد $a<x<b$؛ به طوری که $f(x)\neq 0$. همچنین f بر $[a,b]$ پیوسته است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم توابع پیوسته، f مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم خود را بر این فاصله اختیار می‌کند؛ چون f مقادیر مخالف صفر دارد. بنابراین، حداقل یکی از اکسترمم‌های نسبی این تابع در نقاط داخلی فاصلهٔ $[a,b]$ قرار می‌گیرد. فرض کنیم $a<c<b$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی f باشد. بنابر قضیهٔ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، داریم $f'(c)=0$.

تعبیر هندسی قضیه

اگر تابع f در شرایط قضیهٔ رُول صدق کند، آن‌گاه نقطه‌ای به طول $a<c<b$ وجود دارد؛ به طوری که خط مماس در این نقطه موازی محور طولهاست.



نتیجهٔ ۱

قضیهٔ رُول را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد :

«اگر تابع f بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر فاصلهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$، آنگاه وجود دارد $a<c<b$ ؛ به طوری که $f'(c)=0$.

اثبات

فرض کنیم $f(a)=f(b)=k$، در این صورت تابع $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-k$ را درنظر می‌گیریم. بنا به فرض، تابع g بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر فاصلهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است و داریم :

$$g(a)=f(a)-k=f(a)-f(a)=0$$
$$g(b)=f(b)-k=f(b)-f(b)=0$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ رُول، وجود دارد $a<c<b$ ؛ به طوری که $g'(c)=0$ ؛ چون $g'(x)=f'(x)$، پس $f'(c)=0$.

تذکر

اگر در صورت قضیهٔ رُول، فقط مشتق‌پذیر بودن تابع f قید می‌شد، پیوسته بودن این تابع را می‌توانستیم نتیجه بگیریم ؛ زیرا طبق قضیه، اگر تابعی در یک نقطه، مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.

نتیجهٔ ۲ (رابطهٔ بین قضیهٔ رُول و قضیهٔ بولتزانو)

اگر تابع f بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر فاصلهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم : (۱) $f(a)f(b)<0$، (۲) به ازای هر $a<x<b$، $f'(x)\neq 0$، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $]a,b[$ یک ریشهٔ منحصر بفرد دارد.

اثبات

از شرط $f(a)f(b)<0$ و قضیهٔ بولتزانو نتیجه می‌شود معادلهٔ $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصلهٔ $]a,b[$ دارد. ثابت می‌کنیم که این معادله فقط یک ریشه دارد (برهان خلف). فرض کنیم $a<c_1<c_2<b$ دو ریشه از معادلهٔ $f(x)=0$ باشند ؛ در نتیجه $f(c_1)=f(c_2)=0$. چون $[c_1,c_2]\subset[a,b]$، پس f بر فاصلهٔ $[c_1,c_2]$ پیوسته و مشتق پذیر است. طبق قضیهٔ رُول وجود دارد : $a<c_1<c<c_2<b$ ؛ به طوری که $f'(c)=0$. این نتیجه با شرط (۲) تناقض دارد. بنابراین، معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $]a,b[$ فقط یک ریشه دارد.

مثال ۱۴ : برای توابع زیر روی بازه‌های داده شده، شرایط قضیهٔ رُول را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقاطی را که در آنها مشتق صفر است، بیابید.

الف: $f(x)=\sin x+\cos x-1$ روی بازهٔ $[0,4\pi]$.

حل: شرایط پیوستگی و مشتق‌پذیری f بر فاصلهٔ $[0,4\pi]$، با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع سینوس و کسینوس روی این فاصله برقرار است و $f(0)=f(4\pi)=0$ بنابر قضیهٔ رُول وجود دارد $0<c<4\pi$ ؛ به طوری که $f'(c)=0$، برای پیداکردن نقاط c داریم :

$$f'(x)=\cos x-\sin x\Rightarrow f'(c)=\cos c-\sin c=0$$
$$\Rightarrow\cos c=\sin c\Rightarrow tgc=1\Rightarrow c=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\frac{11\pi}{4}$$

ب : $f(x)=x^3-6x^2+10x-5$ روی بازهٔ $[1,4]$.

حل: تابع f روی فاصلهٔ $[1,4]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f(1)=0$ و $f(4)=3$، در نتیجه $f(4)\neq f(1)$ ؛ یعنی تابع f روی بازهٔ $[1,4]$ در شرایط قضیهٔ رُول صدق نمی‌کند. در صورتی که با یک محاسبهٔ ساده، می‌توان وجود نقطه‌ای به طول $\frac{10}{3}$ در فاصلهٔ $[1,4]$ را نشان داد که $f'\left(\frac{10}{3}\right)=0$.

ج : $f(x)=x^3+3x+2$ روی بازهٔ $[0,1]$.

حل: تابع f روی فاصلهٔ $[0,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f(0)=2$ و $f(1)=6$، در نتیجه $f(1)\neq f(0)$ ؛ یعنی شرایط قضیهٔ رُول برای تابع f برقرار نیست. همچنین برای هر $0<x<1$، داریم $f'(x)=3x^2+3\neq 0$.

د : $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}$ روی بازهٔ $[-1,1]$.

تابع f در نقطه‌ای به طول $x=0$ از این بازه پیوسته است ؛ ولی مشتق‌پذیر نیست و $f(-1)=f(1)=2$ ؛ یعنی شرط مشتق‌پذیری قضیهٔ رُول برقرار نیست. همچنین برای هر $-1<x<1$، داریم $f'(x)=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\neq 0$.

توابع فوق در این مثال، اهمیت برقراری شرایط قضیهٔ رُول را نشان می‌دهند.

مثال ۱۵: ثابت کنید معادلهٔ $x^{5}+4x-1=0$ در بازهٔ $[-2,2]$ فقط یک ریشه دارد.

حل: قرار می‌دهیم $f(x)=x^{5}+4x-1$. تابع f روی بازهٔ $[-2,2]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و (۱) $f(-2)f(2)=-1599<0$

(۲) برای هر $-2<x<2$، داریم $f'(x)=5x^{4}+4\neq 0$. بنابراین، طبق نتیجهٔ (۲) معادله $x^{5}+4x-1=0$ فقط یک ریشه در فاصلهٔ $]-2,2[$ دارد.

مثال ۱۶: ثابت کنید معادلهٔ $x+e^{x}+2=0$، فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حل: قرار می‌دهیم $f(x)=x+e^{x}+2$. تابع f روی $\mathbb{R}$، پیوسته و مشتق‌پذیر است و به علاوه (۱) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(۲) برای هر x، $f'(x)=1+e^{x}\neq 0$، پس طبق نتیجهٔ (۲) معادلهٔ $x+e^{x}+2=0$ فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

مثال ۱۷: نشان دهید برای هر عدد $a>1$ عدد حقیقی یکتای b وجود دارد که $b=\sqrt[n]{a}$.

حل: تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)=x^{n}-a$ را روی بازهٔ $]1,+\infty[$ درنظر می‌گیریم؛ اوّلاً $f(1)=1-a<0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، ثانیاً برای هر $x>1$، داریم $f'(x)=nx^{n-1}\neq 0$. در نتیجه، طبق نتیجهٔ (۲)، معادلهٔ $x^{n}-a=0$ فقط یک ریشهٔ بزرگتر از یک دارد؛ یعنی عدد حقیقی و یکتای $b>1$ وجود دارد؛ به طوری که $b^{n}-a=0$ یا $b^{n}=a$، یعنی $b=\sqrt[n]{a}$.

مثال ۱۸: ثابت کنید معادلهٔ $\cos x-3x-x^{3}=0$ فقط یک ریشه در فاصلهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ دارد.

حل: تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)=\cos x-3x-x^{3}$ را روی بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ درنظر می‌گیریم؛ اوّلاً $f(0)=1>0$ و $f(\frac{\pi}{2})=-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi^{3}}{8}<0$، ثانیاً برای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$، داریم $f'(x)=-\sin x-3-3x^{2}<0$.

پس طبق نتیجهٔ (۲) معادلهٔ $\cos x-3x-x^{3}=0$، فقط یک ریشه در فاصلهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ دارد.

مثال ۱۹: فرض کنید: $0<a<b$ و f تابعی حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر بازهٔ $]a,b[$ باشد. اگر $f(a)=a$ و $f(b)=b$، آن‌گاه ثابت کنید نقطه‌ای به طول $a<c<b$ وجود دارد؛ به طوری که خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $\begin{vmatrix}c\\f(c)\end{vmatrix}$ از مبدأ مختصات می‌گذرد.

حل: تابع جدید $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ را درنظر می‌گیریم. این تابع بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$g(a)=\frac{f(a)}{a}=\frac{a}{a}=1 \quad , \quad g(b)=\frac{f(b)}{b}=\frac{b}{b}=1$$

یعنی تابع g روی بازهٔ $[a,b]$ در شرایط قضیهٔ رُول صدق می‌کند. در نتیجه، نقطه‌ای به طول $a<c<b$ هست؛ به طوری که $g'(c)=0$.

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^{2}}$$

$$\Rightarrow g'(c)=\frac{cf'(c)-f(c)}{c^{2}}=0$$

$$\Rightarrow cf'(c)-f(c)=0$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(c)}{c}$$ (ضریب زاویهٔ خط مماس)

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $\begin{vmatrix}c\\f(c)\end{vmatrix}$ را می‌نویسیم:

$$y-f(c)=f'(c)(x-c)$$

$$\Rightarrow y-f(c)=\frac{f(c)}{c}(x-c)$$

$$\Rightarrow y-f(c)=\frac{f(c)}{c}x-f(c)$$

$$\Rightarrow y=\frac{f(c)}{c}x$$

این خط مماس، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

مثال ۲۰: ثابت کنید هر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{2}+bx+c=0$ در صورت وجود، حداکثر دو ریشه دارد.

حل: فرض کنیم معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای سه ریشهٔ x_1 و x_2 و x_3 باشد. در نتیجه، برای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، داریم $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$. تابع f روی بازه‌های $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ در شرایط قضیهٔ رُول صدق می‌کند. بنابراین، نقاط $x_1<c_1<x_2$ و $x_2<c_2<x_3$ وجود دارند؛ به طوری که $f'(c_1)=0$ و $f'(c_2)=0$، یعنی c_1 و c_2 دو ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. این تناقض است؛ زیرا $f'(x)=2ax+b=0$ یک معادلهٔ درجهٔ اوّل است، که همواره یک ریشه دارد.

مثال ۲۱: ثابت کنید هر معادلهٔ درجه n، $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ با شرط $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{2}+a_0=0$ همواره یک ریشهٔ مثبت دارد.

حل: قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x$$

تابع f روی بازهٔ $[0,1]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f(0)=0$ و

$$f(1)=\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{2}+a_1=0$$

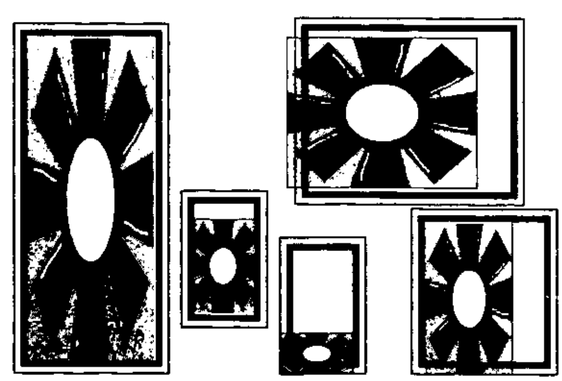
در نتیجه، طبق قضیهٔ رُول، وجود دارد $0<c<1$؛ به طوری که $f'(c)=0$.

$$f'(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$f'(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0=0$$

یعنی $0<c<1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$ می‌باشد.

- یکی از نتایج مهم قضیهٔ رُول، قضیهٔ مقدار میانگین است. در شمارهٔ بعد به بررسی کامل این قضیه می‌پردازیم و سپس طرز استفاده از قضیه را در حلّ مسائل، به کمک مثال، نشان می‌دهیم.





ابوالحسن ثابت‌بن قُرّه، از مردم حرّان، واقع در بین‌النهرین، حدود سال ۲۲۱ هجری تولد و به سال ۲۸۸ هجری وفات یافت. در جوانی در حرّان به شغل صرّافی اشتغال داشت. هنگامی که **محمدبن موسی‌بن شاکر** (یکی از سه برادر مشهور به بَنوموسی) از وقوف او بر زبانهای عربی و یونانی آگاه گردید، او را با خود به بغداد برد. وی تحت تعلیم و هدایت بنوموسی، به تحصیل ریاضیات، نجوم و طب ادامه داد و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان و مترجمان عصر خود گردید.

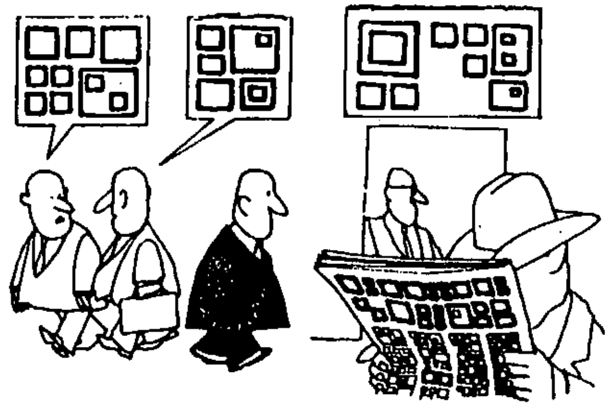
ثابت از نخستین کسانی است که در هیأت بطلمیوس دخالت کردند. وی برای آن که حرکت اقبال و ادبار اعتدالین را توجیه کند، فلک نهمی بر هشت فلک بطلمیوسی افزود. آثار ریاضی ثابت، نقش مهمی در پیشرفت ریاضیات دورهٔ اسلامی داشته است. نوشته‌های وی، راه را برای اکتشافهای بعدی مانند تعمیم مفهوم عدد صحیح به اعداد حقیقی مثبت، حساب و انتگرال، مثلثات کروی و جز اینها هموار کرد. طریقهٔ وی در تعیین مساحت سهمی و حجم سهمیوار، بسیار جالب است.

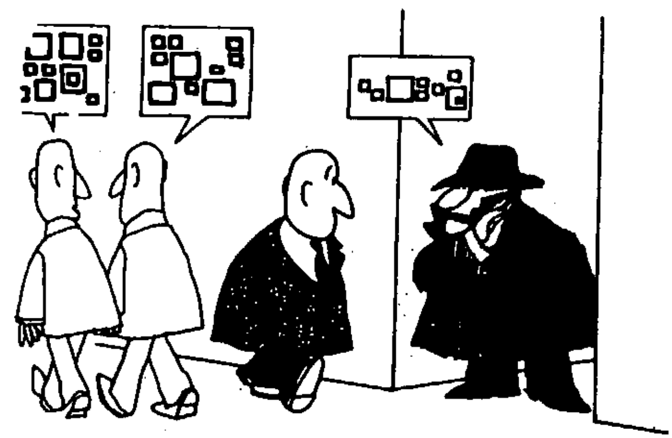
زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی ــ ابوالقاسم قربانی

مربعهای فوق جادویی

● ترجمه: مهناز پاک خصال

مرجع:
نشریهٔ SCIENTIFIC AMERICAN, Jan 1997





در اصطلاح، به مربعهایی که مجموع سطرهای آن با مجموع ستونها یا قطرها برابر باشد، مربعهای جادویی گفته می‌شود و در طی سالیان سال، به عنوان یکی از تفریحات ریاضی محسوب می‌شده است. طبق افسانه‌های چینی، ساده‌ترین مربعها به صورت زیر بوده است که امپراتور یو (Y Ü) در پشت یک لاک‌پشت در قرن ۲۳ پیش از میلاد حک کرده است:

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

در این مربع جادویی، مجموع اعداد، ۱۵ بوده و مربع از مرتبهٔ سوم می‌باشد. مربعهای با مرتبهٔ بالاتر نیز وجود دارد و حتی مکعب، هشت ضلعی، ده ضلعی و دایره‌های جادویی نیز وجود دارد.

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

ممکن است به نظر برسد که تاکنون تمام مسائل مربوط به ساخت یک چنین مربعهایی بیان شده است و دیگر مسألهٔ جدیدی وجود ندارد؛ ولی در جواب باید گفت که همین ده سال پیش، آقای «لی سالوز» (Lee Sallows) دیدگاه کاملاً جدیدی را دربارهٔ مربعهای جادویی کشف کرد. او متخصص بازی با حروف و متبحّر در تلفیق کلمات با ریاضیات تفریحی است.

آقای سالوز در کتاب «مسیر نورانی‌تر ریاضیات (چاپ انجمن ریاضی امریکا ۱۹۹۴)» دو مقاله نوشته است که از آنها در این‌جا استفاده می‌شود. دیدگاه جدید او کمی پیچیده است؛ برای مثال به جدول زیر توجه کنید:

۵	۲۲	۱۸
۲۸	۱۵	۲
۱۲	۸	۲۵

↔

five	twenty two	eighteen
twentyeight	fifteen	two
twelve	eight	twenty five

شکل ۱

اگر اعداد فوق به صورت رقم نوشته شود، مربع فوق، به یک مربع جادویی معمولی بدل می‌گردد، که مجموع آن ۴۵ است؛ ولی جالبتر آن است که اگر تعداد حروف (در زبان انگلیسی) اعداد فوق شمارش و نوشته شود نیز یک مربع جادویی حاصل می‌گردد که به صورت زیر است و مجموع اعداد آن، ۲۱ خواهد شد. اصطلاحاً به یک چنین مربعهایی، **مربعهای فوق جادویی** گفته می‌شود.

۸	۹	۴
۳	۷	۱۱
۱۰	۵	۶

آقای سالوز یک تئوری کلی برای این‌گونه مربعها ارائه کرده است. او تئوری خود را با تعریف «لوگوریتم x» (logorithm x) یعنی تعداد حروف یک عدد (که با حروف نوشته شده باشد) آغاز می‌کند. البته با کمی دقّت، می‌توان دریافت که در زبانهای مختلف، هر عدد دارای لوگوریتم خاصی است؛ ولی در این مقاله، تأکید بر زبان انگلیسی است (می‌توان در زبان فارسی نیز لوگوریتم‌های اعداد را یافت). باید دقّت داشت که این مفهوم، با لگاریتم اشتباه نشود.

سؤال بعدی نیز آن است که آیا می‌توان یک چنین مربع‌های دیگری نیز یافت؟ جواب مثبت است؛ مثلاً اگر جلوی هر یک از ارقام شکل ۱، عبارت one million قرار داده شود، مجموع سطرها یا ستونها، سه میلیون افزایش می‌یابد. هنگامی که هر عدد با لوگوریتم خود جایگزین می‌شود، مربع حاصل را مشتق لوگوریتم گویند. مجموع سطرها و ستونهای این مربع نیز به اندازهٔ سه برابر تعداد حروف موجود در عبارت one million افزایش خواهد یافت (۳۰ = ۱۰×۳). با توجه به این موضوع، می‌توان دریافت که در مربعهای ۳×۳ می‌توان بی‌نهایت از این سری مربعهای فوق جادویی یافت. آقای سالوز این مربعها را به عنوان «همسازهای» مربع اصلی معرفی می‌کند.

آیا تغییرات جالبتر دیگری نیز وجود دارد؟ در قرن نوزدهم، «ادوارد لوکاس» ریاضیدان فرانسوی، یک فرمول جالب برای مربع‌های ۳×۳ یافت که به صورت زیر است:

$a+c$	$a-b-c$	$a+b$
$a+b-c$	a	$a-b+c$
$a-b$	$a+b+c$	$a-c$

مجموع سطرها و ستونهای یک چنین مربعی، برابر 3a خواهد بود. این فرمول، برای تمامی مقادیر a، b و c و هر نوع مربع از مرتبهٔ ۳ برقرار می‌باشد. با دقّت در قطرهای مربعِ فوق، می‌توان دریافت که سه عدد، یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند؛ یعنی اعداد با اختلاف یکسان، در پشت سرهم قرار گرفته‌اند. بنابراین، یک استراتژی خوب برای یافتن مربعهای فوق جادویی، جست‌وجوی اعدادی است که به صورت سه تایی مرتّب بوده و یک سری حسابی را تشکیل می‌دهند.

البته بایَد این سه‌تایی‌ها را به نحوی قرار داد که مربع حاصله نیز دارای منطق مورد نظر باشد. به عنوان مثال، می‌توان عدد ۱۵ را در مرکز مربع قرار داد (چون از قبل می‌دانیم که حداقل یکی از این مربعها وجود دارد). با توجه به جدول لوگوریتم مربوطه، پنج دسته عدد سه‌تایی مناسب می‌توان یافت: (۲,۱۵,۲۸) و (۵,۱۵,۲۵) و (۸,۱۵,۲۲) و (۱۱,۱۵,۱۹) و (۱۲,۱۵,۱۸) که مجموع حروف انگلیسی آنها سه برابر مجموع حروف fifteen است. حال می‌توان دو دسته را انتخاب کرده و به صورت قطری آنها را قرار داد. مثلاً برای دو دستهٔ اوّل خواهیم داشت:

۲۵		۲
	۱۵	
۲۸		۵

با توجه به فرمول لوکاس، می‌دانیم که مجموع سطرها یا ستونها باید سه برابر ۱۵ باشد و بنابراین، جدول فوق به صورت زیر درمی‌آید:

۲۵	۱۸	۲
۸-	۱۵	۳۸
۲۸	۱۲	۵

مربع فوق به دو دلیل قابل قبول نیست، اوّل آن که عدد منفی قابل قبول نیست و دیگر این که حتّی اگر ۸- پذیرفته شود، باید آن را به صورت minus eight نوشت، که تعداد حروف (لوگوریتم) آن برابر ۱۰ است و اگر مشتق لوگوریتمی را ترتیب دهیم، خواهیم دید که جدول حاصله، جادویی نیست:

۱۰	۸	۳
۱۰	۷	۱۱
۱۱	۶	۴

حال می‌توان دسته‌های دیگر را نیز امتحان کرد تا جواب صحیح به دست آید (جواب در انتهای مقاله ذکر شده است).

آیا مربعهای دیگری وجود دارد که عدد وسط آن غیر از ۱۵ باشد. آقای سالوز برای یافتن مربعهای جادویی ۳×۳ یک برنامهٔ کامپیوتری نوشته است و مربعهای زیادی نیز یافته است. یک نمونهٔ دیگر از آنها نیز در زیر ذکر شده است :

۱۵	۷۲	۴۸
۷۸	۴۵	۱۲
۴۲	۱۸	۷۵

این بازی را برای زبانهای دیگری غیر از انگلیسی نیز می‌توان انجام داد. آقای سالوز برای اعداد تا ۱۰۰، مربعهای فوق جادویی را برای ۱۹ زبان یافته است.

در زبان فرانسه، برای اعداد تا ۲۰۰، فقط یک مربع فوق جادویی وجود دارد، ولی اگر اعداد تا ۳۰۰ افزایش یابند، می‌توان ۲۲۵ مربع دیگر نیز یافت، که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است :

۱۵	۲۰۶	۱۱۵
۲۱۲	۱۱۲	۱۲
۱۰۹	۱۸	۲۰۹

در زبان آلمانی، با استفاده از اعداد کمتر از ۱۰۰، حدود ۲۲۱ مربع فوق جادویی وجود دارد که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است. البته باید تعداد حروف «zig» و «und» را نیز در نظر گرفت.

۴۵	۶۲	۵۸
۶۸	۵۵	۴۲
۵۲	۴۸	۶۵

حال اگر رقم دهگان اعداد جدول فوق را در یک جدول، و رقم یکان را در جدول دیگری بنویسیم، خواهیم داشت :

۴	۶	۵
۶	۵	۴
۵	۴	۶

۵	۲	۸
۸	۵	۲
۲	۸	۵

به هر یک از این مربعها، «مربع لاتینی» گویند ؛ یعنی هر سه عدد، در سطرها و ستونهای مختلف وجود دارند و خود این موضوع نیز اندکی شگفت‌انگیز است. به علاوه، قطرها نیز شگفت‌آورند. از آن‌جایی که تعداد حروف هر یک از اعداد جدول ابتدایی، ۱۴ است، شگفتی نیز بیشتر می‌شود.

مربعهای بزرگتر چه وضعیتی دارند؟ برای این‌کار، می‌توان براحتی از مربعهای لاتینی متعامد، به خوبی استفاده کرد. برای مثال، در زبان انگلیسی، مربع چهارتایی زیر، فوق جادویی است :

۳۱	۲۳	۸	۱۵
۱۷	۵	۲۱	۳۴
۳۶	۳۸	۱۳	۰
۳	۱۱	۳۵	۲۸

آقای سالوز، از گروهی از این مربعها به عنوان «شبه طلا» یاد می‌کند ؛ چون دستیابی به آنها آسان است و معتقد است که برای طلای واقعی، باید زحمت بیشتری کشید که نمونهٔ آن نیز در ادامه ذکر شده است :

۳۶	۳۷	۴۸	۵۹
۴۹	۵۸	۲۷	۳۶
۵۷	۴۶	۳۹	۲۸
۳۸	۲۹	۵۶	۴۷

جواب سؤال داخل متن :

۸	۱۹	۱۸
۲۵	۱۵	۵
۱۲	۱۱	۲۲



معمّاهایی با ماهیّت ریاضی

(قسمت دوم)

(نظریهٔ گرافها)

● هوشنگ شرقی

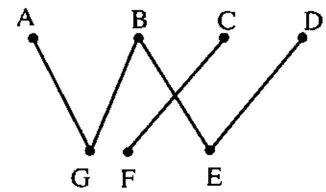
بحث معمّاهایی با ماهیت ریاضی را در شمارهٔ پیش، با اشاره به معمّاهایی که با اتکا به قضیهٔ استقرای ریاضی حل می‌شوند، آغاز کردیم. اینک و در این شماره، به معمّاهایی می‌پردازیم که ریشه در نظریهٔ «گرافها» دارند و به کمک قضیه‌های آن حل می‌شوند. فرض بر این است که خواننده با اصول این نظریه آشنایی دارد؛ اما برای اطلاع بیشتر، مطالعهٔ بخش اوّل از کتاب ریاضیات گسستهٔ دوره پیش دانشگاهی مفید می‌باشد. در ضمن، حلّ هر مسأله نیز به قضیهٔ خاص که برای حلّ معمّا از آن استفاده شده، اشاره کرده‌ایم. معمولاً در اکثر مسائلی که ارتباطهایی مطرح است، مانند دوستی، آشنایی، دست دادن، نامه نوشتن، مسابقه دادن و ...می‌توان یک الگوی گرافیکی برای حلّ مسأله ایجاد نمود. رؤوس گراف می‌توانند افراد، تیمها و ... بوده و یالهای گراف معرّف وجود ارتباط بین آنها (از نوع دوستی، دست دادن و ...) یا عدم وجود ارتباط باشد. هر یک از مثالهای زیر، می‌تواند نمونه‌ای از این نوع مسائل باشد. همچون قبل، توصیه می‌شود که پیش از دیدن راه حلّ مسأله، در مورد آن بخوبی فکر شود تا حدّاقل به‌طور شهودی، با ساختمان مسأله آشنایی به‌دست آید.

مثال ۱: سه نفر معلم و تعدادی دانش‌آموز دبیرستانی به یک اردوی تفریحی رفته‌اند و با خود یک دوربین عکاسی با یک حلقه فیلم ۳۶ تایی همراه می‌برند. در محل اردو، هر معلم از دانش‌آموزانی که شاگرد او بوده‌اند، عکس می‌گیرد و هر دانش‌آموز از معلمانی که استاد او نیستند، عکس می‌گیرد. (بدیهی است که دو معلم می‌توانند هر دو، استاد یک دانش‌آموز بوده باشند) و پس از پایان کار، تمام حلقهٔ فیلم دوربین تمام می‌شود. تعداد دانش‌آموزان چند نفر بوده است؟

****

حل: اگر مسأله را بخواهیم با تشکیل معادله، حل کنیم قدری دشوار است؛ زیرا هر دانش‌آموز می‌تواند از یک یا دو یا هر سه معلم عکس گرفته یا از هیچ‌کدام عکس نگرفته باشد و نیز هر معلم می‌تواند از هر تعداد دانش‌آموز عکس گرفته یا از هیچ‌کدام نگرفته باشد. لذا فرموله کردن مسأله مشکل است. اما یک مدل گرافیکی، حلّ مسأله را بسیار آسان می‌کند؛ خواننده‌ای که با نظریهٔ گراف آشنایی دارد، گراف دو پارچه را بخوبی می‌شناسد؛ یعنی گرافی که رؤوس آن در دو مجموعهٔ جدا از هم واقعند و رؤوس هر مجموعه، تنها با رؤوس مجموعهٔ دیگر ارتباط داشته و با رئوس مجموعهٔ خودش ارتباطی ندارد و رؤوس یالهای این گراف، از

یک مجموعه نمی‌باشند. مانند گراف زیر :



که مجموعهٔ یالهای آن به صورت

$$V = \{ AG ،BG ،CF ،DE ،BE \}$$

می‌باشند.

اینک مسأله را می‌توان یک گراف دو پارچه در نظر گرفت که در یک مجموعه، رؤوس معلمان و در مجموعهٔ دیگر، دانش‌آموزان قرار گرفته‌اند. دو رأس به هم وصل می‌شوند. اگر هر یک از دو طرف از دیگری عکس بگیرد (توجه کنید که لازم نیست گراف جهت‌دار فرض شود ؛ زیرا لزومی ندارد که دو طرف از هم عکس بگیرند و در واقع هرگز چنین نمی‌شود)، حال دیده می‌شود که هر معلم فقط از شاگردان خودش عکس می‌گیرد و هر شاگرد از معلمانی که استاد او نبوده‌اند، عکس می‌گیرد. پس هر دو رأس، متعلق به این دو مجموعه به صورت منحصر به فردی با یک و فقط یک یال به هم وصل می‌شود (اگر دانش‌آموز، شاگرد معلم باشد، یالی از طرف معلم به طرف شاگرد، و اگر نباشد، یالی از طرف شاگرد به طرف معلم رسم می‌شود و فقط یکی از این دو صورت ممکن است) و بنابراین، یک گراف دو پارچهٔ کامل به‌دست می‌آید که یک مجموعهٔ آن، شامل ۳ عضو (معلمان) و دیگری شامل x عضو (تعداد شاگردان) می‌شود و لذا تعداد کل یالهای این گراف، می‌شود ۳x ؛ اما هر یال متناظر با یک قطعه عکس است و تعداد کل عکسها ۳۶ تا می‌باشد. پس ۳x = ۳۶ و لذا x = ۱۲ ؛ یعنی ۱۲ نفر دانش‌آموز به اردو رفته‌اند.

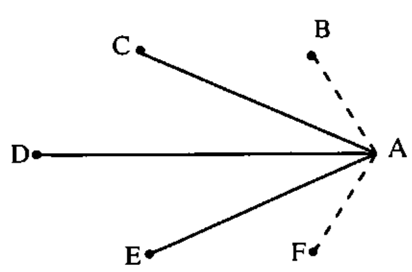
مثال ۲: ثابت کنید تعداد افرادی که در طول تاریخ بشر، با تعداد فردی از افراد دست داده‌اند، عددی زوج است.

حل: ممکن است مسأله به ظاهر مشکل بیاید ؛ اما با وقوف به نظریهٔ گرافها بسیار آسان می‌باشد. هریک از افراد بشر (از آغاز تاکنون) را رأس یک گراف در نظر بگیرید. انسانهایی که با هم (حدّاقل یک‌بار) دست داده‌اند، با یک یال به هم وصل کنید و در غیر این صورت، آنها را به هم وصل نکنید. درجهٔ هر رأس این گراف، تعداد افرادی است که آن فرد با آنها دست داده است. قضیه‌ای ابتدایی در نظریهٔ گرافها می‌گوید، تعداد رؤوس، با درجهٔ فرد در هر گراف، عددی زوج می‌باشد ؛ بنابراین، تعداد افرادی که با تعداد فردی از افراد دست داده‌اند، عددی زوج است!

مثال ۳: ثابت کنید : در هر جمع ۶ نفره از افراد، همیشه می‌توان سه نفر را یافت که یا هر سه با هم دو به دو آشنا و یا هر سه با هم دو به دو ناآشنا باشند.

****

حل: یک مدل گرافیکی مناسب برای حلّ مسألهٔ فوق، آن است که افراد را رؤوس یک گراف با شش رأس در نظر بگیریم. یال آشنایی را با یک رنگ و یال ناآشنایی را با رنگ دیگر درنظر بگیریم. (در شکل، یال آشنایی را توپُر و یال ناآشنایی را با خط چین نمایش داده‌ایم.) در این صورت، چون هر دو نفر دلخواه با هم یا آشنایند و یا ناآشنا، پس هر دو رأس این گراف، با یکی از این دو نوع یال (توپُر یا خط چین) به هم مربوط می‌شوند و یک گراف کامل به‌دست می‌آید. روشن است که برای یک رأس دلخواه (مانند A) پنج یال خروجی از دو نوع داریم ؛ بنابراین الزاماً حدّاقل سه تای آنها از یک نوع می‌باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم : حالت اوّل آن که، سه یال خروجی توپُر داشته باشیم (یعنی شخص A با سه نفر آشنا باشد). مطابق شکل، واضح است که دو رأس از سه رأس C، D و E یا حدّاقل با یک یال توپُر به هم مربوط می‌شوند که در این صورت، این یال با دو یال توپُر دیگر خارج شده از A، تشکیل یک مثلث با یالهای توپُر می‌دهند. (مثلاً مثلث ACE) یا این که هیچ‌کدام از آنها، با یال توپُر به هم وصل نمی‌شوند، که در این صورت، یک مثلث با یالهای خط‌چین تشکیل می‌شود (مثلث CDE) ؛ یعنی در هر حال، ما یا یک مثلث با سه یال توپُر و یا یک مثلث با سه یال خط چین خواهیم داشت، که معادل آن است که در هر حال، سه نفر یافت می‌شوند که دو به دو با هم آشنا باشند یا سه نفر پیدا می‌شوند که دو به دو با هم ناآشنا باشند. حالت دیگری که حدّاقل سه یال خط چین را از رأس A خارج می‌شوند، به طریق مشابه می‌توان بررسی کرد و به

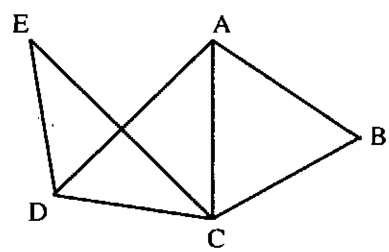


همین نتیجه رسید، که بررسی آن به عهدهٔ خواننده علاقه‌مند می‌باشد.

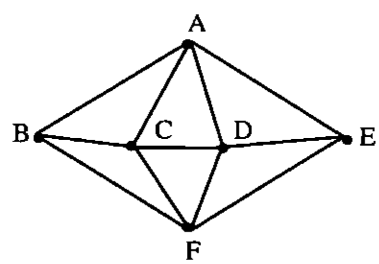
مثال ۴: اینک تعدادی دانش‌آموز را در نظر بگیرید که برای شرکت در اردو به جنگلی رفته‌اند و بین درختها پراکنده شده‌اند. به‌طوری که همه همدیگر را نمی‌بینند؛ ولی می‌دانیم که هر دو نفر دلخواه، یک نفر را به صورت مشترک می‌بینند. و روشن است که دیدن، یک رابطهٔ تقارنی است، ولی یک رابطهٔ تعدّی نمی‌باشد؛ یعنی اگر A، B را ببیند، B هم A را می‌بیند؛ ولی اگر A، B را و B، C را ببینند، الزاماً A، C را نمی‌بیند. بگویید عدهٔ دانش‌آموزان حداقل چند نفر می‌باشد؛ اگر بدانیم هیچ‌کس وجود ندارد که همه را ببیند؟

****

حل: این یک مسألهٔ خالص از گرافهاست، که بدون تجسّم گرافیکی، قابل حل نمی‌باشد. در واقع، به زبان گرافها مسأله ما به این مسألهٔ ساده تبدیل می‌شود؛ یعنی: یافتن یک گراف با n رأس که هر دو رأس آن، به یک رأس مشترک با دو یال مرتبط باشند و هیچ رأس آن، به تمام رؤوس مرتبط نباشد. بسادگی می‌توان فهمید که تا گراف مرتبهٔ ۵ چنین کاری مقدور نیست و مطابق شکل، ممکن است فردی پیدا شود که همهٔ افراد را ببیند (با حفظ شرط مسأله).



اما یک گراف با شش رأس می‌توان رسم نمود و بروشنی دید که اگر بخواهیم شرط مسأله حفظ شود، (وصل بودن هر دو رأس به یک رأس مشترک) هرگز نمی‌توان یک رأس را به تمام رؤوس وصل کرد:

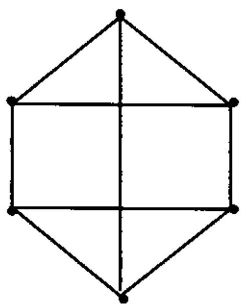


اگر عدهٔ افراد از شش هم بالاتر باشد، به همین ترتیب مسأله حل می‌شود؛ یعنی عدهٔ دانش‌آموزان باید حدّاقل شش نفر باشد.

مثال ۵: در یک کنفرانس خبری ۳۰ خبرنگار حاضرند و هر نفر درست از اخبار k نفر از گروه مطّلع است. حداقل k چه باشد تا این‌که بتوانیم بگوییم حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که از اخبار یکدیگر مطّلعند؟

****

حل: خواننده‌ای که با گراف k ـ منتظم آشنایی دارد، می‌داند که این مسأله نیز الگویی از آن گراف را دارد؛ یعنی گرافی که درجهٔ هر رأس آن k می‌باشد. مثلاً در شکل زیر، یک گراف مرتبهٔ ۶ و سه منتظم رسم شده است:



در مسألهٔ فوق، یک گراف از مرتبهٔ ۳۰ و k منتظم داریم. قضیه‌ای ابتدایی می‌گوید: در یک گراف با n رأس، حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ یال داریم (گراف کامل n رأسی یا $n-1$ منتظم).

و می‌دانیم تعداد یالهای گراف مسألهٔ ما $30k$ می‌باشد. اگر این تعداد از حداکثر تعداد یالهای گراف کامل با ۳۰ رأس یعنی $\frac{30(30-1)}{2}$ بیشتر باشد، شرط مسأله تحقق می‌یابد؛ یعنی حدّاقل یکی از یالها دو طرفه می‌شود و این، به معنای آن خواهد بود که دو خبرنگار از اخبار هم مطّلعند. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

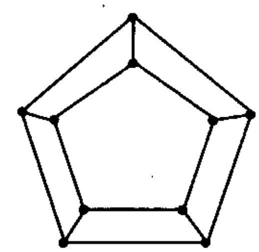
$$\frac{30\times 29}{2} < 30k \Rightarrow k > 14/5 \Rightarrow k = 15$$

یعنی حداقل k مساوی ۱۵ است.

مثال ۶: خطوط هوایی بین شهرهای یک کشور، طوری تنظیم شده است که هر شهر حداکثر با سه شهر ارتباط هوایی دارد. در ضمن، برای مسافرت از هر شهر به هر شهر دیگر، بیش از یک‌بار نیاز به تعویض هواپیما نیست. حداکثر تعداد شهرهای این کشور چه‌قدر است؟

****

حل: این مسأله، راه حل ساده‌ای دارد. در واقع از هر شهر مانند A، حدّاکثر ه سه شهر ارتباط وجود دارد و از هر کدام از آن سه شهر، به دو شهر (غیر از A) ارتباط وجود دارد. پس حداکثر تعداد شهرهای این کشور، می‌تواند ۲×۳+۳+۱ باشد (چرا؟) یعنی ۱۰ شهر؛ اما ارتباط این مسأله با نظریهٔ گراف، انطباق ویژه‌ای است که بین این مسأله و یک نوع خاص از گرافها، یعنی گراف «پترسن» وجود دارد. مطابق شکل، این ارتباط می‌تواند بین شهرها (که رؤوس گراف پترسن می‌باشند) با هم توسط یالهای گراف پترسن انجام شود و شرایط مسأله محفوظ باشد و گراف مطلوب ۱۰ رأس داشته باشد:



تمرینها

۱) سه خواهر با برادران خود، دور میزی نشسته‌اند و روی میز یک بشقاب شیرینی وجود دارد. هر خواهر به برادر بزرگتر و هر برادر به خواهر بزرگتر خود شیرینی می‌دهد و در آخر، بشقاب شیرینی که شامل ۱۲ شیرینی بوده است، خالی می‌شود. تعداد برادران چند نفر است؟

۲) ثابت کنید در یک جمع ۱۸ نفره، همیشه می‌توان چهار نفر را پیدا کرد که یا همه دو به دو با هم آشنا باشند و یا این‌که همه دوبه‌دو با هم ناآشنا باشند. و این تعمیمی است از مثال ۳. برای آشنایی کامل با این بحث و تعمیم کلی آن، به مجلهٔ آشنایی با ریاضیات جلد سی و چهارم، مقاله‌ای با عنوان «از اصل لانهٔ کبوتر تا نظریهٔ رامزی» از دکتر «شهریار شهریاری» مراجعه شود.

۳) سه روستای A، B و C را می‌خواهیم با سه جاده به سه بیمارستان D، E و F وصل کنیم. آیا ممکن است طوری این کار را انجام دهیم که هیچ کدام دو جاده یکدیگر را قطع نکنند؟ (راهنمایی: به مسأله گراف هامنی مراجعه نمایید.)

۴) پانزده نفر دانش‌آموز در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا ممکن است هر کدام از آنان، دقیقاً با ۷ نفر از دانش‌آموزان دیگر دوست باشند؟

۵) یک شرکت خصوصی، نیاز به یک مهندس الکترونیک، یک مهندس صنایع، سه نفر برنامه‌نویس کامپیوتر، دو نفر طراح سیستم و یک نفر حسابدار دارد. احمد حسابدار است و در ضمن، برنامه‌نویسی کامپیوتر هم می‌داند. حسین برنامه‌نویس کامپیوتر است و طراحی سیستم را هم می‌شناسد. رضا مهندس صنایع است و طراحی سیستم هم انجام می‌دهد. علی نیز برنامه‌نویس کامپیوتر و طراح سیستم است. محمد مهندس صنایع است و در ضمن، با حسابداری آشنایی دارد. و محسن مهندس الکترونیک می‌باشد و برنامه‌نویسی کامپیوتر هم می‌داند. آیا این شرکت می‌تواند ضمن برآورده کردن نیازهای شغلی خود، به همهٔ این افراد، شغلی واگذار کند؟ چگونه و به چند طریق؟

۶) ۲۵ تیم فوتبال برای کسب عنوان قهرمانی کشور، با هم مسابقه می‌دهند. دست کم چند بازی باید انجام دهند تا بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشند که بازی خود را انجام داده باشند؟

۷) n نقطه را به کمک پاره‌خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به هم وصل کرده‌ایم که از هر نقطه، بتوان از طریق این پاره‌خطها به بقیهٔ نقطه‌ها عبور کرد و در ضمن، دو نقطه‌ای پیدا نشوند که با دو مسیر به هم وصل شده باشند. ثابت کنید تعداد کل پاره‌خطهای راست برابر است با $n-1$.
(راهنمایی: از خواص گرافی به نام درخت استفاده کنید.)

۸) هفده نفر از طریق پست با هم مکاتبه می‌کنند، به‌طوری که هر شخص، با همهٔ افراد دیگر مکاتبه دارد. در نامه‌های آنان، تنها سه موضوع مختلف مورد بحث قرار می‌گیرد. هر زوج از مکاتبه‌کنندگان، تنها به یکی از موضوعها می‌پردازند. [illegible] کنید حدّاقل سه نفر وجود دارند که دربارهٔ موضوع واحدی به یکدیگر نامه می‌نویسند.
(راهنمایی: گرافی با هفده رأس را در نظر بگیرید که همهٔ یالهای آن، به سه رنگ مختلف می‌باشند؛ بنابراین، از یک رأس آن، حدّاقل شش یال به یک رنگ خارج شده است و ... .)

معرفی کتاب



◄ دیفرانسیل و انتگرال

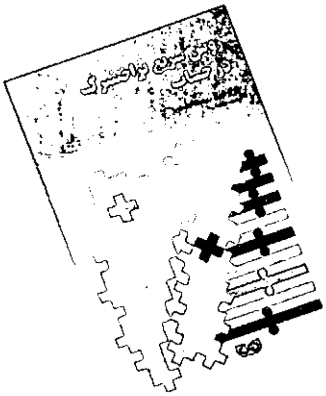
(مفهوم، تعریف و محاسبه)

مؤلف: سیّدمحمدرضا هاشمی‌موسوی

انتشارات دُرج

این کتاب، حاوی مفهوم، تعریف و محاسبهٔ دیفرانسیل و انتگرال توابع با بیانی ساده است که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس، تمرینهایی دوره‌ای برای احاطه و تسلّط کامل روی مطالب فراگرفته شده، طرح شده است.

در پایان، تستهای کنکورهای سراسری مربوط به مباحث دیفرانسیل و انتگرال، و همچنین آزمونهایی برای پوشش دادن به مطلب، همراه با پاسخ تشریحی آنها آورده شده است تا معلومات و مهارت کافی را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم کند.



◄ روش سریع تراختنبرگ درحساب

آن‌کاتلر، رودلف‌مک‌شین

ترجمهٔ محمد باقری

انتشارات فرهنگان

«یاکوف‌تراختنبرگ»، بنیانگذار مؤسسهٔ ریاضی در زوریخ (سوئیس) و ابداعگر روشی نو و شگفت‌انگیز در حساب، عمیقاً معتقد بود که همهٔ افراد با «استعدادهای چشمگیر برای محاسبه» به‌دنیا می‌آیند. او و بسیاری از مربّیان، براین‌باورند که اگر اکثر اشخاص، درکار با اعداد، دچار مشکل می‌شوند و علّت دشوار بودن، فهم حساب نیست؛ بلکه روش کهنه‌ای است که با آن، حساب را به آنان یاد داده‌اند.

مهمترین تأثیر روش تراختنبرگ، افزایش مهارت در انجام محاسبه‌هاست. این روش، شیوهٔ تازه‌ای است برای انجام سریع بنیادی‌ترین عملهای حساب، که در آن از جدول ضرب و عمل تقسیم خبری نیست و تنها مبتنی بر کلیدهایی است که باید

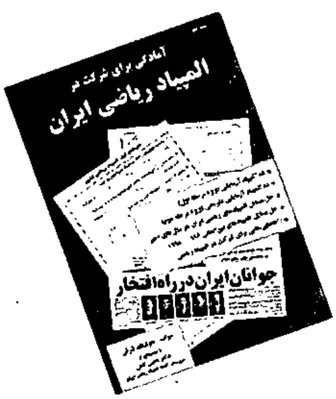
آنها را به‌خاطر سپرد. مزیّت این روش، در این است که دلبستگیهای تازه‌ای نسبت به ریاضیات در شخص برمی‌انگیزاند، در او اعتماد به‌نفس پدید می‌آورد و او را به فراگیریِ موضوعی علاقه‌مند می‌کند، که امروزه در مدرسه‌ها «درسی منفور» قلمداد می‌شود.
روش تراختنبرگ، اکنون پس از گذشت چندین دههٔ پربار و سرنوشت‌ساز در پهنهٔ ریاضیات و آموزش آن و تکامل ابزارهای محاسبه، بیش از هر چیز، یک مهارت جنبی و دانستنی سودمند است و در عین حال، به‌خاطر سرنوشت رنج‌بار و آموختنی پدیدآورندهٔ آن، دارای جنبهٔ انسانی گیرا محسوب می‌شود. به‌همین سبب، می‌تواند در کنار کتابهای درسی، دانش‌آموزان و آموزگاران را با جلوه‌های تازه‌ای از علم حساب آشنا کند. علاوه بر آنان، عدهٔ کثیری از دانشجویان پزشکی، معماران، مهندسان و ... دریافته‌اند که به کمک روشهای آسان تراختنبرگ، می‌توانند از عهدهٔ محاسبه‌های دشوار در امتحانها برآیند. امّا امروزه ریاضیّات در زندگیِ عادی نیز نقش حیاتیِ روزافزونی دارد، لذا این کتاب، برای کلیّهٔ افراد در تمامی سطوح، کتابی مناسب و کاربردی است.

◄ دایرة‌المعارف هندسه

تألیف: محمدهاشم رستمی

انتشارات مدرسه

دایرة‌المعارف هندسه، مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه است.
جلدهای سوّم، چهارم، پنجم، ششم و هفتم این دایرة‌المعارف، شامل رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطّحه است.
جلد سوّم، رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطّحه؛
جلد چهارم، رابطه‌های متری در دایره؛
جلد پنجم، رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛
جلد ششم، رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین و مثلث قائم‌الزاویه، مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث با زاویهٔ منفرجه) و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛
و جلد هفتم، رابطه‌های متری در چندضلعیهاست.
جلدهای سوم، چهارم، پنجم، ششم و هفتم زیر چاپ است.
در هریک از این مجلدها، تعریفها، قضیه‌ها و مسأله‌ها، با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده است و این نظم و ترتیب، در دیگر مجلدهای دایرة‌المعارف نیز رعایت شده است.
قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، هریک با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه و راه‌حلها، و شرح حال ارائه‌دهندهٔ آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند.



◄ آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران

مؤلف: هوشنگ شرقی

ناشر: علوم پایه

شرکت در رقابت‌های علمی از جمله المپیاد ریاضی در سالهای اخیر در کشور ما اهمیت بسزایی یافته است. کتاب حاضر به منظور پاسخگویی به نیاز جوانان علاقه‌مند رشتهٔ ریاضی و به‌منظور آشنایی با نوع سؤالات المپیاد ریاضی تدوین شده است. کتاب شامل شش فصل و دو ضمیمه می‌باشد. ده المپیاد آزمایشی با سؤالات پنج گزینه‌ای (ویژهٔ آزمون مرحلهٔ اول)، ده المپیاد آزمایشی تشریحی (ویژهٔ آزمون مرحلهٔ دوم)، حل مسائل المپیادهای ملّی و بین‌المللی سالهای اخیر از جمله موضوعات کتاب می‌باشد. همچنین اطلاعاتی از ترکیب اعضای تیمهای شرکت‌کنندهٔ کشورمان در المپیادهای بین‌المللی در ضمیمهٔ کتاب آمده است.

خم پروانه



● کریم احمدی دلیر

دانشگاه تربیت معلم تبریز - گروه ریاضی

زیبایی ذاتی برخی از خمهای مسطّح که اغلب مربوط به تقارن، برگها و آویزه‌ها، رفتار مجانبی یا حتی عدم تقارن آنهاست، بسیاری از ما را مجذوب و علاقه‌مند به ترسیم آنها می‌کند. خمهایی نظیر گلهای چند پر و نظیر آنها، ممکن است شور و شوق زیادی در شاگردان ایجاد نکنند؛ امّا ترسیم خمهای پیچیده‌تر به کمک یک رایانه، ضمن ایجاد علاقه، اغلب، شگفتیهایی همراه دارد. البته در پویایی مشاهده خمی که روی صفحهٔ رایانه ترسیم می‌شود، چیز خاصّی وجود دارد که کلّ روند را لذّت‌بخش‌تر می‌کند.

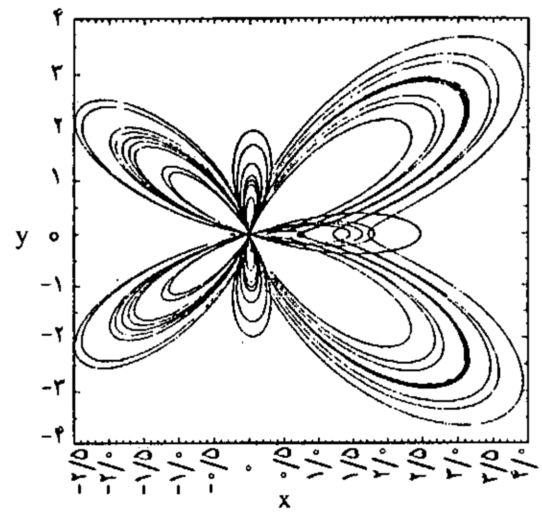
هدف این مقاله، اشاره به این نکته است که لذّت و سرگرمی قابل ملاحظه‌ای در طراحی خم وجود دارد که در عین حال، به‌طور همزمان می‌توان به هدفهای آموزشی مورد نظر دست یافت. طبق اصول آموزشی، پرسشهای مهم دربارهٔ جاگذاری حدود یک متغیر مستقل، طرح اندازهٔ گامها، اندازهٔ پنجرهٔ صفحهٔ مونیتور همگی قبل از «فشار تکمه Run» نیاز به آدرس‌دهی دارد. البته مشاهداتی در مورد اندازه، تناوب، تقارن، دامنه و نظیر آنها، رابطهٔ جدیدی را به دانش‌آموز القا می‌کند و آن به حداقل رساندن زمان اجرای برنامه است.

به‌علاوه، طراحی خمهایی که شکل آنها از قبل شناخته شده نیست، هیجانی در شخص ایجاد می‌کند. برای مثال، خمهای توصیف شده با معادله‌های قطبی $P = a + b\cos(n\theta)$ و $P^2 = a + b\cos(n\theta)$ بسیار جالبتر از معادله‌های قطبی توصیف‌شده با $P = a\cos(n\theta)$ هستند. شاگردان اغلب با رفتار آنها وقتی که $a < b$، $a > b$، $a = b$، n زوج است، n فرد است و غیره شگفت‌زده می‌شوند. سایر خمهای گلبرگی جالبی که تعداد گلبرگهای آنها را دانش‌آموزان می‌توانند حدس بزنند، عبارتند از: معادله‌های $P = (4\cos(n\theta) + \cos(m\theta)) / \cos(\theta)$ که در آن n و m اعداد صحیح فرد هستند. اگر یکی از دو عدد n یا m زوج باشد، خم دارای یک مجانب خواهد بود و ظاهر کاملاً متفاوتی خواهد داشت. برای مثال، خمهای سرگرم‌کننده به‌ازای $(n, m) \in \{(5,3), (3,5), (1,9), (3,2)\}$ حاصل می‌شوند.

شاید جالبترین و زیباترین همهٔ این خمها، خم پروانه‌ای با معادلهٔ

$$P = e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta) + \sin^{۵}(\frac{\theta}{۱۲})$$

باشد که در شکل (۱) نمایش داده شده است. جملهٔ آخر $\sin^{۵}(\frac{\theta}{۱۲})$ صرفاً جهت بالا بردن جذبه و زیبایی به آن افزوده شده است.



شکل ۱: خم پروانهٔ $P = e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta) + \sin^{۵}(\frac{\theta}{۱۲})$.

خم شبه پروانهٔ دیگری دارای معادلهٔ $P = e^{\cos(۲\theta)} - ۱/۵\cos(۴\theta)$ است که می‌توان با اضافه کردن جمله‌های دیگری نظیر بالا یا تعویض مقادیر ثابت، بر زیبایی آن افزود.

همچنین می‌توان مطالعه‌ای روی اندازهٔ گامها انجام داد که احتمالاً این کار، دانش‌آموزان یا دانشجویان را شیفتهٔ خود خواهد کرد. خم پروانه، حسّاسیت بالایی نسبت به اندازهٔ گامها دارد. معادلهٔ خم پروانهٔ

$$P(\theta) = e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta)$$

را درنظر بگیرید. این خم را در عامل سینوسی متغیّر سریعی مانند $\sin^{۴}(\lambda\theta)$ $(\lambda = ۹۹۹۹۹۹۹۹)$ ضرب می‌کنیم. توان چهارم، برای نامنفی و کوچک نگه داشتن عامل انتخاب شده است. مقدار λ به‌طور اختیاری انتخاب شده است و هر عدد دلخواه بزرگ، می‌تواند همان اثر را داشته باشد.

مجموعهٔ داده‌ها شامل نقاط (x_n, y_n) است که در آن:

$$P(\theta) = \left(e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta)\right)\sin^{۴}(\lambda\theta)$$

و

$$x_n = P(\theta_n)\sin(\theta_n) \quad , \quad y_n = P(\theta_n)\cos(\theta_n)$$

با قرار دادن $\theta_۰ = ۰$ و $\theta_n = \theta_{n-۱} + h$ حاصل می‌شوند (که در آن h اندازهٔ گامها را به‌ازای $۰ \le \theta \le ۲\pi$ نشان می‌دهد).

البته با تعویض سینوس و کسینوس در معادلهٔ x_n و y_n، پروانه ۹۰° نسبت به وضعیت عمودی دوران می‌کند. این مجموعهٔ داده‌ها، شامل تقریباً ۱۱۵۰۰ تا ۴۲۰۰۰ نقطه است.

طرحهای زیر با اندازهٔ گامهای:

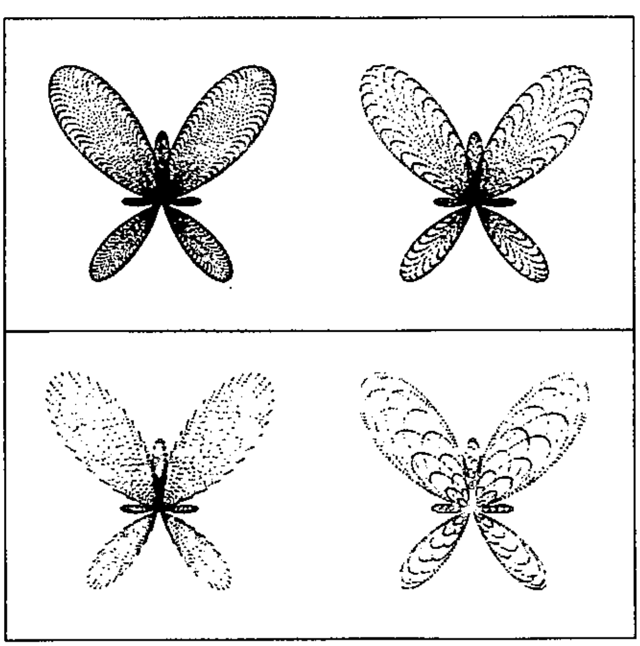
$$h_۱ = ۰/۰۰۰۱۵\ ,\ h_۲ = ۰/۰۰۰۳\ ,$$

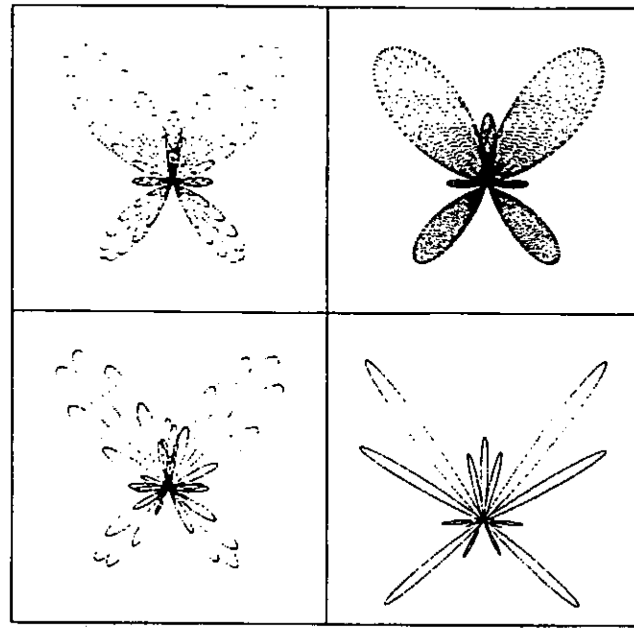
$$h_۳ = ۰/۰۰۰۵\ ,\ h_۴ = ۰/۰۰۰۵۵\ ,$$

$$h_۵ = ۰/۰۰۰۷\ ,\ h_۶ = ۰/۰۰۰۱۶۹\ ,$$

$$h_۷ = ۰/۰۰۰۷۱۱\ ,\ h_۸ = ۰/۰۰۰۷۱$$

حاصل می‌شوند. تماشای پویایی طراحی نقاط پی‌درپی تولیدشدهٔ (x_n, y_n) به خودی خود جالب است. احتمالاً دانش‌آموزان یا دانشجویان، از آزمودن معادله‌ها، مقادیر λ و اندازه‌های گامهای مختلف لذّت خواهند برد.





مراجع:

1. T.H. Fay and E.A. o'Neal, Counting the petals of rose carves, Math. and Computer Ed.,17 (1983) 24 - 29.
2. T.H. Fay, Asymptotes in polar coordinates, Math. and Computer Ed., 20 (1986) 19 - 31.
3. T.H. Fay, The butterfly curve, Am. Math. Monthly 96 (1989) 442 - 443.
4. T.H. Fay, A study in step size, Math. Magazine, 70 (1997) 116 - 117.





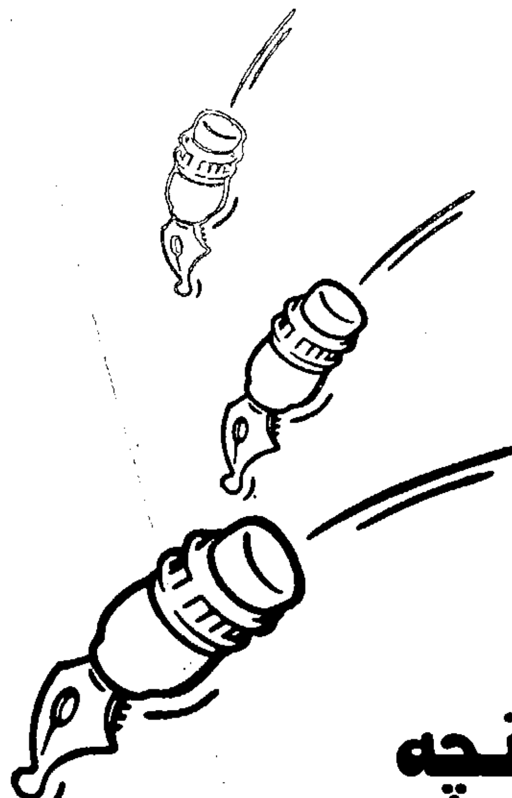
مهرداد هر روز پس از انجام کارش در ساعت مشخصی برای رفتن به حومه شهر سوار ترن می‌شود. در ایستگاه مقصد، خانمش با اتومبیل منتظر اوست تا با هم به منزل بروند.

یک روز مهرداد بدون اطلاع دادن به خانمش زودتر از هر روز دیگر سوار ترن می‌شود و پس از رسیدن به ایستگاه پیاده به طرف خانه‌اش به راه می‌افتد. بین راه خانمش را می‌بیند، ولی متأسفانه خانمش او را نمی‌بیند، و گرنه مهرداد می‌توانست ۲۰ دقیقه زودتر از همیشه به منزل برسد. مهرداد ۲۵ دقیقه دیگر به راه رفتن ادامه می‌دهد. در این لحظه خانمش که او را در ایستگاه نمی‌بیند فوراً برمی‌گردد و او را سوار می‌کند و با هم در همان وقت هر روز به خانه می‌رسند.

فرض می‌کنیم که خانم مهرداد در رفت و برگشت با سرعت ثابتی رانندگی کرده است و از زمانهای تلف شده مانند سوار شدن به قطار و سوار شدن به اتومبیل هم صرفنظر کنیم. در این صورت تعیین کنید مهرداد چند ساعت زودتر از هر روز سوار ترن شده است (یا ترنی که آن روز مهرداد سوار آن شده است، چند ساعت زودتر از ترنی که هر روز سوار می‌شده، حرکت کرده است).

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸



آنچه از دوست رسد ...

با عرض سلام، خدمت همهٔ دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

نامه‌ها و مقاله‌های پُرمحتوا و ارزشمند شما به دستمان رسید! خداوند بزرگ را بسیار شاکر و سپاسگزاریم که توفیق خدمت به شما عزیزان را به ما ارزانی داشته است. پیش از هر چیز، باید از راهنماییها و پیشنهادهای سازندهٔ شما عزیزان، به خاطر بالا بردن کیفیت مجلّه قدردانی و تشکر کنیم. هیأت تحریریهٔ مجلّه، با چاپ پرسشهای چهارگزینه موافقت کردند و از این پس، در هر شمارهٔ مجلّه، می‌توانید علاوه بر بخش مسائل برای حل، شاهد بخشی با نام پرسشهای چهارگزینه‌ای باشید که این پرسشها، کلیهٔ کتابهای ریاضی دبیرستان و دوره پیش‌دانشگاهی را پوشش می‌دهد.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجلّهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: فرزاد زمانی‌نژاد (تهران)، علیرضا محقق (تهران)، حسین عرب عامری (شاهرود)، محسن شجاعی‌پور (کازرون)، ابوذر بازیاری (کازرون)، بابک عقیلی (گرگان)، حنیف احمدی (رشت)، سیّدنوّاب صالحی (فرخ‌شهر)، فرزاد دولت علیزاده (دزفول)، حسین نوری (خلخال)، آریا جمشیدی (تهران)، ابوالفضل کریمانی (ملارد کرج)، علی‌اصغر صفوی (گرگان) و خانم‌ها: مریم گودرزی (بروجرد) و پریسا رحمانی (فولادشهر اصفهان).

از همهٔ شما عزیزان برای ارسال مقاله‌های درسی، کمک درسی و مسائل همراه با حل، سپاسگزاریم. در صورت امکان، از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجلّه استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه، چاپ خواهیم کرد.

آقای سجاد پوررحیمی آذر (تبریز) از پیشنهادهای سازندهٔ شما سپاسگزاریم. همان‌طور که در این شماره ملاحظه می‌کنید، پرسشهای چهارگزینه‌ای آمده است، ان‌شاءا... از این پس، در هر شمارهٔ مجله، پرسشهای چهارگزینه‌ای خواهیم داشت.

سرکار خانم م. ف (دانش‌آموز از مشهد مقدس) کتاب کوچک ریاضی «عبارتهای جبری» چاپ شده و کتابهای «نابرابریها و نامعادله‌ها» و «تقارن در جبر»، بزودی منتشر می‌شود. ان‌شاءا... این کتابها بتواند پاسخگوی سؤالهای شما در این زمینه‌ها باشد.

همکار محترم جناب آقای تیمور رضایی، فرهنگ و دایرةالمعارف ریاضی دبیرستان، از طرف انتشارات مدرسه بزودی منتشر خواهد شد. ان‌شاءا... این کتاب بتواند مشکلات علاقه‌مندان به ریاضی را برطرف کند.

جناب آقای مهندس حسین نوری، مقاله‌های ارسالی شما می‌تواند چند شماره باشد و موضوع مقاله می‌تواند جزو سرفصلهای درسهای دبیرستانی باشد و همچنین موضوع مقاله می‌تواند ارتباطی با سرفصلهای مطالب کتابهای ریاضی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی داشته باشد.

همکار محترم جناب آقای رسول کردی (باغ ملک خوزستان) از شما به خاطر ارسال مسائل با حل، متشکریم. از آن‌جا که مسائل

ارسالی شما می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین، یکی از آنها را با راه‌حل آورده‌ایم :

دستگاه معادله‌های گنگ $\begin{cases}\sqrt{x}+y=۷\\ x+\sqrt{y}=۱۱\end{cases}$، $(x,y>۰)$ را حل کنید.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=۷\\ x+\sqrt{y}=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-۳=۴-y\\ x-۹=۲-\sqrt{y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-۳=(۲-\sqrt{y})(۲+\sqrt{y})\\ (\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)=(۲-\sqrt{y})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}-۳=(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۳)(۲+\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}-۳=\left[۱-(\sqrt{x}+۳)(۲+\sqrt{y})\right]=۰$$

چون $۱<(\sqrt{x}+۳)(۲+\sqrt{y})$ بنابراین داریم :

$$\sqrt{x}-۳=۰\Rightarrow x=۹\Rightarrow y=۴$$

آقای رسول رُشدی (تهران)، از ارسال مقاله، طرح جلد و مسائل، سپاسگزاریم. از آن‌جا که مطلب شما دربارهٔ شگفتیهای اعداد، می‌تواند مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به ریاضی قرار گیرد، آن را در زیر می‌آوریم و بقیهٔ مطالب ارسالی جنابعالی، در صورت تصویب در هیأت تحریریه چاپ خواهد شد.

شگفتیهای اعداد

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹\times۱=۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$
$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹\times۲=۲۲۲۲۲۲۲۲۲$$
$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹\times۳=۳۳۳۳۳۳۳۳۳$$
$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹\times۴=۴۴۴۴۴۴۴۴۴$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹\times۹=۹۹۹۹۹۹۹۹۹$$

مسألهٔ مسابقه‌ای

مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را که دارای زاویه‌های حاده است، در نظر می‌گیریم. نیمساز داخلی زاویهٔ A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ L و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ N قطع کند. از L عمودهایی بر ضلعهای AB و AC رسم می کنیم و پای دو عمود را K و M می‌نامیم ؛ ثابت کنید مساحت چهارضلعی AKNM با مساحت مثلث ABC برابر است.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۶

۱ـ به هر مهرهٔ آبی، یک مهرهٔ سفید می‌چسبانیم. در این صورت، ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ آبی ـ سفید داریم و می‌خواهیم آنها را در یک ردیف، از راست به چپ قرار دهیم، که هر حالت قرار گرفتن این ۱۱ مهره، متناظر است با یک حالت چیدن مهره‌ها که پس از هر مهرهٔ آبی، لااقل یک مهرهٔ سفید واقع شده باشد و چون ۵ مهرهٔ سفید مثل هم و ۶ مهرهٔ آبی ـ سفید نیز مثل هم هستند، با توجه به فرمول تبدیل با تکرار، تعداد کلّ این حالتها برابر است با :

$$\frac{۱۱!}{۵!\times۶!}=۴۶۲$$

پرسشهای چهار گزینه‌ای

احمد قندهاری
محمدهاشم رستمی
حمیدرضا امیری
میرشهرام صدر
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

هندسهٔ ۲

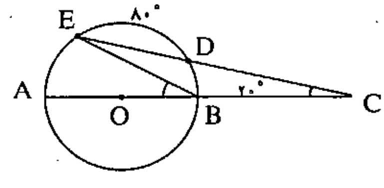
۱. شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی یک مستطیل کدام شکل است؟

۱) مربع ۲) مستطیل
۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

۲. مکان هندسی نقطه‌ای در درون یک مکعب که از دو وجه مقابل آن به یک فاصله است، کدام است؟

۱) صفحه‌ای عمود بر آن دو وجه
۲) یک خط موازی آن دو وجه
۳) صفحه‌ای موازی آن دو وجه
۴) تنها یک نقطه

۳. در شکل زیر $\hat{C}=20^\circ$ و $\overset{\frown}{ED}=80^\circ$ و O مرکز دایره است. زاویهٔ ABE چند درجه است؟



۱) ۲۵ ۲) ۳۵ ۳) ۴۵ ۴) ۷۵

۴. نیمسازهای زاویه‌های درونی یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، کدام چهارضلعی را می‌سازند؟

۱) تنها محاطی ۲) تنها محیطی
۳) غیر محاطی و غیر محیطی ۴) محاطی و محیطی

۵. طول وتر نظیر کمان درخور زاویهٔ ۶۰ درجه در یک دایره، برابر ۲۴ سانتیمتر است. اندازهٔ شعاع این دایره چند سانتیمتر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۶. اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ برابر ۱۰ است. نسبت اندازه‌های مماس مشترک برونی و مماس مشترک درونی این دو دایره چند است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

۷. در مثلثی قائم‌الزاویه، طول دو ضلع زاویهٔ قائمه $۲\sqrt{۳}$ و ۶ سانتیمتر است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی این مثلث، چه قدر است؟

۱) $۳-\sqrt{۳}$ ۲) $۴-\sqrt{۳}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۳}$ ۴) $۵-\sqrt{۳}$

۸. نقطه‌های $A=(-۱,۱)$ ، $B=(۳,۱)$ ، $C=(۳,۵)$ و $D=(-۱,۵)$ رأسهای یک مربعند. اگر نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' بترتیب تبدیل‌یافته‌های نقطه‌های A، B، C و D در دوران $R(x,y)=(y,-x)$ باشند، اندازهٔ مساحت $A'B'C'D'$

چه قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲

۹. تحت یک بازتاب نقطهٔ $M(3,-1)$ روی نقطهٔ $M'(1,1)$ تصویر می‌شود. معادلهٔ محور تقارن این بازتاب کدام است؟

۱) $y = x + 2$ ۲) $y = x - 2$

۳) $y = -x + 2$ ۴) $y = -x - 2$

۱۰. کدام گزاره نادرست است؟

۱) دو خط متمایز عمود بر یک صفحه، باهم موازیند.

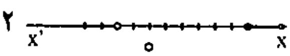
۲) دو صفحهٔ متمایز عمود بر یک خط، باهم موازیند.

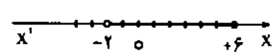
۳) دو خط متمایز موازی یک خط، همواره باهم موازیند.

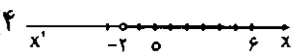
۴) دو خط متمایز موازی یک صفحه، همواره باهم موازیند.

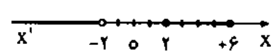
ریاضی ۵

۱۱. جواب نامعادلهٔ $-2 < \frac{x}{2} - 1 \le 2$ کدام نمودار است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲. اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} + x , & x \ge 1 \\ \sqrt{2} - x , & x < 1 \end{cases}$ باشد، $ff(-2)$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{2} + 2$ ۲) $2\sqrt{2} + 1$ ۳) $\sqrt{2} + 1$ ۴) $2\sqrt{2} + 2$

۱۳. اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، $f(x)f(-\frac{1}{x})$ کدام مقدار است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۴. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} (a+1)x + 3 , & x > -2 \\ -2x^2 + 1 , & x < -2 \end{cases}$ وقتی $x \to -2$ دارای حد است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵. اگر $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ باشد، $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶. اگر $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x \sin kx \sin 2kx}{6x^3} = 3$ باشد، k برابر است با:

۱) ۳+ ۲) ۳+ و ۳- ۳) ۲+ و ۲- ۴) ۳-

۱۷. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 , & x > -3 \\ 13 , & x = -3 \\ 2ax^2 + bx - 2, & x < -3 \end{cases}$ در نقطه $x = -3$ پیوسته باشد، a+b چه قدر است؟

۱) ۳۳- ۲) ۳۳ ۳) ۲۲ ۴) ۲۲-

۱۸. حدود a برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + a , & x \ge 1 \\ x^2 + 3x , & x < 1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته نباشد، کدام است؟

۱) $a \ne 3$ ۲) $a \ne 4$ ۳) $a \ne 5$ ۴) $a \ne 6$

۱۹. اگر $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$ باشد، آن‌گاه $f'(4)$ چند است؟

۱) ۱۸ ۲) $+\frac{1}{36}$ ۳) $-\frac{1}{36}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۲۰. اگر $A = (-2, -7)$ نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $f(x) = ax^2 + bx - 3$ باشد، $2a - b$ چه قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴-

حسابان ۲

۲۱. زاویهٔ بین دو نیم مماس بر منحنی به معادلهٔ $f(x) = |\sin x|$ در نقطهٔ $x_0 = 0$ کدام است؟

۱) 60° ۲) 120° ۳) 90° ۴) 45°

۲۲. در تابع به معادلهٔ $f(x) = |4 - x\sqrt{x}|$، $f'(1) + f'(9)$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{6}$

۲۳. اگر در تابع f داشته باشیم $f'(۲۷)=۱۲$ ، آن‌گاه مشتق تابع به معادلهٔ $y=f(x\sqrt{x})$ در $x_۰=۹$ کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۴۴ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

۲۴. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۲۵. در تابع به معادلهٔ $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}$ ، کدام نتیجه درست است؟

۱) اگر $x>۰$ تابع صعودی اکید است.

۲) اگر $x<۰$ تابع نزولی اکید است.

۳) تابع در R صعودی اکید است.

۴) تابع در R نزولی اکید است.

۲۶. در تابع به معادلهٔ $f(x)=-(x-۵)^{۲n}$ ، $n\in N$ ، $x=۵$ طول نقطه :

۱) ماکزیمم است ۲) می‌نیمم است

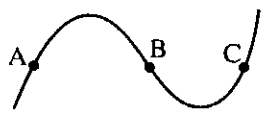
۳) عطف است ۴) زاویه‌دار است

۲۷. در تابع به معادلهٔ $f(x)=(x+۳)^{۲n+۱}$ ، $n\in N$ ، $x=-۳$ طول نقطه :

۱) ماکزیمم است ۲) می‌نیمم است

۳) عطف است ۴) زاویه‌دار است

۲۸. تابع f به‌صورت شکل زیر است، کدام نتیجه درست است؟



۱) در نقطهٔ A $f'>۰$ و $f''<۰$

۲) در نقطهٔ B $f'<۰$ و $f''>۰$

۳) در نقطهٔ C $f'>۰$ و $f''>۰$

۴) در نقطهٔ B $f'>۰$ و $f''<۰$

۲۹. اگر در تابع به معادلهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+b$ نقطهٔ $F\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ نقطهٔ عطف باشد، $(a-b)$ برابر است با :

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) -۴

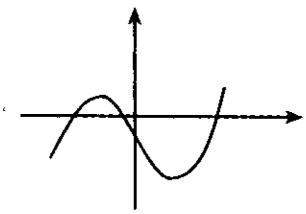
۳۰. کدام یک از تابعهای به معادله‌های زیر متناوبند.

۱) $\sqrt{\sin ۲x}$ ۲) $\sin\sqrt{x}$ ۳) $\cos\frac{۱}{x}$ ۴) $\tan\frac{۱}{x}$

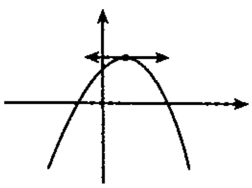
۳۱. نزدیکترین فاصلهٔ منحنی به معادلهٔ $y=x^۲-۲x$ از خط به معادلهٔ $y=۲x-۹$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

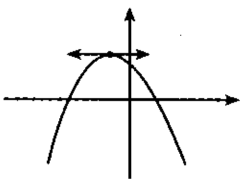
۳۲. اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر باشد، آن‌گاه نمودار تابع f' کدام است؟



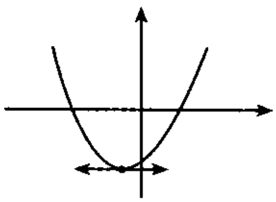
۱)



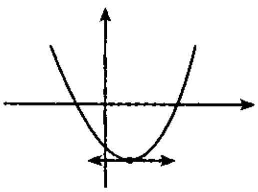
۲)



۳)



۴)



۳۳. اگر $y=\int_۱^x e^{۲t}dt$ ، آن‌گاه عبارت $(y''+۲y')$ کدام است؟

۱) $۲e^{۲x}$ ۲) $۳e^{۲x}$ ۳) $۴e^{۲x}$ ۴) $\frac{e^{۲x}}{۴}$

۳۴. حاصل $\int_۰^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ برابر است با :

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۵. اگر $\int(x^۲-۲x-۱)e^x=(mx^۲+nx+k)e^x$ ، آن‌گاه $(۴m+۳n+۲k)$ برابر است با :

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۳

❖ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۳۶. در تابع به معادلهٔ $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+12\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x+12}$ چند ماکزیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی وجود دارد؟

۱) یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی.
۲) دو ماکزیمم نسبی و دو می‌نیمم نسبی.
۳) ماکزیمم نسبی یا می‌نیمم نسبی ندارد.
۴) بی‌شمار ماکزیمم نسبی و بی‌شمار می‌نیمم نسبی دارد.

۳۷. اگر در تابع f، $x=a$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد شرط $f'(a)=0$:

۱) شرط لازم است. ۲) شرط کافی است.
۳) شرط لازم و کافی است. ۴) نه لازم است و نه کافی.

۳۸. تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ در بازهٔ $[-2,2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

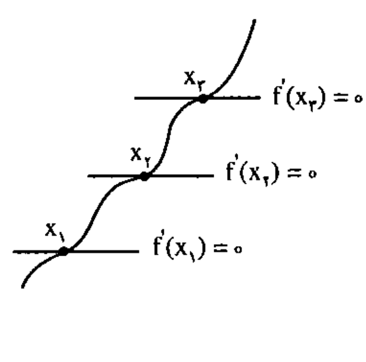
۳۹. اگر تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+a & , x\geq 3 \\ ax+b & , x<3 \end{cases}$ در $x=3$ مشتق داشته باشد، a و b کدامند؟

۱) $\begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a=6 \\ b=-3 \end{cases}$
۳) $\begin{cases} a=-6 \\ b=-3 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} a=-6 \\ b=3 \end{cases}$

۴۰. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x^3-4x^2+3$ ، چند عدد C بنا به قضیهٔ مقدار میانگین در بازهٔ $[0,3]$ وجود دارد؟

۱) یک عدد ۲) دو عدد ۳) سه عدد ۴) هیچ عدد

۴۱. تابع f به‌صورت شکل زیر است. کدام نتیجه درست و کامل است؟



۱) تابع f صعودی اکید است.
۲) تابع f نزولی اکید است.
۳) تابع f صعودی است.
۴) تابع f نزولی است.

۴۲. بخشی از جدول رفتار تابع به معادلهٔ $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به‌صورت

x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f′		−	؟	+	؟	−	
f		↘		↗		↘	

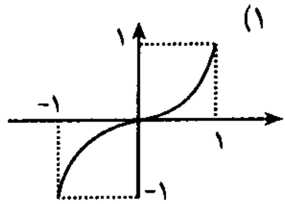
است، آن‌گاه می‌توان گفت :

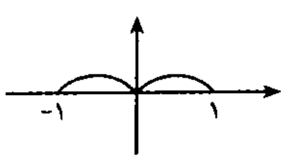
۱) این تابع، یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.
۲) این تابع، اکسترمم نسبی ندارد.
۳) این تابع، بی‌شمار ماکزیمم نسبی و بی‌شمار می‌نیمم نسبی دارد.
۴) این تابع، بی‌شمار ماکزیمم نسبی دارد

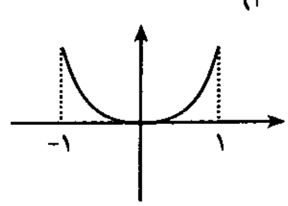
۴۳. مقدار ماکزیمم تابع به معادله $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ چه‌قدر است؟

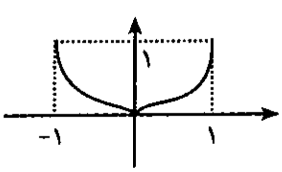
۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۴۴. نمودار تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴۵. در تابع به معادلهٔ $f(x)=x^2+2x$ در نقطهٔ $x=1$ و $dx=0/1$ خطا برابر است با :

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{50}$ ۴) $\frac{1}{100}$

۴۶. معادلهٔ $x^۳ - ۳x - ۱ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) صفر

۴۷. اگر $f(a) = ۱۰$ و $f'(a) = -۸$ ، آن‌گاه $f(a + \frac{۱}{۱۰})$ تقریباً برابر است با :

۱) ۹/۸ ۲) ۹/۶ ۳) ۹/۴ ۴) ۹/۲

۴۸. حاصل $\int \frac{۴dx}{۴ + e^x}$ برابر است با :

۱) $x + Ln(۴ + e^x) + c$ ۲) $x - Ln(۴ + e^x) + c$

۳) $e^x + Ln(۴ + e^x) + c$ ۴) $e^x - Ln(۴ + e^x) + c$

۴۹. مقدار متوسط $\int_۱^۳ (x + \frac{۱}{x})dx$ برابر است با :

۱) $۲ + \frac{Ln(۳)}{۲}$ ۲) $۴ + \frac{Ln(۳)}{۳}$

۳) $۳ + \frac{Ln(۳)}{۲}$ ۴) $۴ + \frac{Ln(۳)}{۲}$

۵۰. تابع به معادلهٔ $f(x) = x^۲$ را در بازهٔ $[۱,۳]$ در نظر می‌گیریم. اگر این بازه را به چهار زیربازهٔ مساوی اِفراز کنیم، مجموع پایین ریمان تابع کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴}$

❖ ریاضی عمومی ۲

۵۱. ماکزیمم مقدار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۱ - \sin x}{۱ - ۲\sin x}$ در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۲. چند خط با ضریب زاویهٔ ۲ می‌توان بر منحنی به معادلهٔ $۲x^۲ - y^۲ = ۱$ مماس رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۵۳. اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $x + ۲y = ۸$ ، آن‌گاه ماکزیمم xy کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۵۴. مکان هندسی نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}\sin^۲\alpha \\ \cos\alpha - ۱\end{matrix}\right.$ ، کدام مقطع مخروطی است؟

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی

۵۵. خروج از مرکز بیضی به معادلهٔ $y^۲ + ۴x^۲ - ۸x - ۲۸ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵۶. دو دایره به معادله‌های $(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶$ و $(x-۵)^۲ + (y-۷)^۲ = ۱$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متخارج ۲) متداخل

۳) مماس خارج ۴) مماس داخل

۵۷. معادله‌های مجانب‌های هذلولی به معادلهٔ $۹x^۲ - ۴y^۲ - ۱۶y = ۵۲$ کدام است؟

۱) $۳x = \pm ۲y - ۴$ ۲) $۲y = \pm ۳x - ۴$

۳) $۲x = \pm ۳y - ۴$ ۴) $۳y = \pm ۲x - ۴$

۵۸. اگر $\int_۰^{\frac{\pi}{k}} \sin\frac{kx}{۲}dx = \frac{۱}{۲}$ ، آن‌گاه مقدار k چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۹. سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $x^۲ + ۴y^۲ + ۱۶y - ۲۰ = ۰$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم جسم حادث کدام است؟

۱) ۲۴π ۲) ۳۶π ۳) ۷۲π ۴) ۱۴۴π

۶۰. اگر مقدار متوسط تابع با ضابطهٔ $f(x) = m + mx$ در فاصلهٔ $[-m, m]$ برابر ۱ باشد، m کدام است؟$(m \neq ۰)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

❖ جبر خطی

۶۱. اگر $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی و پوشا باشد و $f^{-۱}$ نگاشت وارون آن باشد، کدام گزینه **نادرست** است؟ (ماتریس نگاشت خطی f را A می‌نامیم.)

۱) $f^{-۱}$ یک به یک است.

۲) $|A| \neq ۰$

۳) $f^{-۱}(kx) = \frac{۱}{k}f^{-۱}(x)$

۴) ماتریسی چون $B_{n\times n}$ می‌توان یافت که $AB = I_n$

۶۲. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و یک به یک باشد آنگاه، $fof^{-1} = f^{-1}of =$ تابع ثابت

۲) اگر $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و A ماتریس f باشد و $|A| \neq 0$ آنگاه f وارون‌پذیر است.

۳) اگر $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و یک به یک باشد و A ماتریس f و B ماتریس f^{-1} آنگاه $B^{-1}A^{-1} = I$.

۴) اگر $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی و پوشا باشد و A ماتریس f باشد آنگاه $|A^{-1}| \neq 0$.

۶۳. اگر $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y) = (x+y, x+2y)$ نگاشتی خطی باشد، f^{-1} کدام است؟

۱) $\begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x,y) = (2x+y, -x+y) \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x,y) = (2x-y, -x+y) \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x,y) = (-2x+y, x-y) \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f^{-1}(x,y) = (-2x+y, -x-y) \end{cases}$

۶۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل AA^* کدام است؟ (A^* ماتریس الحاقی A است.)

۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

۶۵. اگر $A_{n\times n}$ ماتریس نگاشت خطی f باشد و دستگاه همگون $AX = \bar{0}$ فقط دارای جواب صفر باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) f یک به یک است ۲) $\{\bar{0}\} = f^{-1}(\bar{0}) =$ هستهٔ f

۳) $\varnothing =$ هستهٔ f ۴) $\{\bar{0}\} =$ هستهٔ f^{-1}

۶۶. اگر $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه برای نگاشت خطی f با ماتریس A باشد و (۳−) مقدار ویژهٔ نظیر آن باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ۲) $A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

۳) $A\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix}$ ۴) $A\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix}$

۶۷. اگر $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ معادلهٔ مشخصهٔ نگاشت خطی f با ماتریس A باشد، در این صورت (A^{-1}) کدام است؟

۱) $(A-2I)$ ۲) $(A+2I)$ ۳) $(A-I)$ ۴) $(A+I)$

۶۸. اگر λ یک مقدار ویژه برای نگاشت f باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) λ^{-1} یک مقدار ویژهٔ A^{-1} است.

۲) λ^3 یک مقدار ویژهٔ A^3 است.

۳) λ^2 یک مقدار ویژهٔ fof است.

۴) 2λ یک مقدار ویژهٔ $2A$ است.

۶۹. اگر ۲ و ۱− و ۳− مقادیر ویژهٔ ماتریس A وابسته به نگاشت $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ باشند، در این صورت کدام ماتریس می‌تواند وارون‌پذیر باشد؟

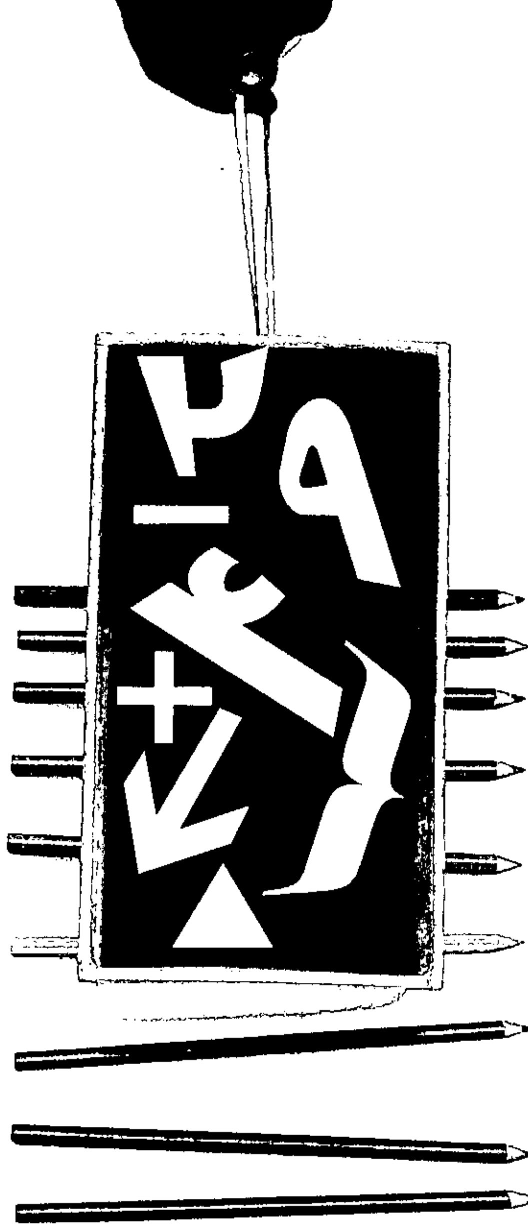
۱) $(A-2I)$ ۲) $(A+3I)$ ۳) $(A+I)$ ۴) $(A-I)$

۷۰. اگر ۲ و ۴− مقادیر ویژهٔ نگاشت $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y) = (mx-y, nx+2y)$ باشند، حاصل $(n-2m)$ کدام است؟

۱) ۸− ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۴−

۷۱. اگر $|A| = 3$ و A ماتریسی 2×2 باشد در این صورت حاصل $||A|A|$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۸۱ ۴) ۲۴۳



پاسخ پرسشهای چهارگزینه ای برهان ۲۷

هندسهٔ ۱

۱. گزینهٔ (۴) درست است؛ زیرا مثلث AEF متساوی‌الساقین و زاویهٔ رأس آن $E\hat{A}F = 360° - (90° + 60° + 60°) = 150°$ است. بنابراین $A\hat{E}F = 15°$ و متمم آن $75°$ است.

۲. گزینهٔ (۲) جواب است؛ زیرا مثلثهای QRS و STU متساوی‌الساقین و مجموع زاویه‌های رأسهای آن، در برابر $90°$ است. بنابراین:

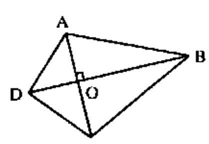
$$2(R\hat{S}Q + U\hat{S}T) = 360° - 90° = 270°$$
$$\Rightarrow R\hat{S}Q + U\hat{S}T = 135°$$
$$\Rightarrow Q\hat{S}U = 180° - 135° = 45°$$

۳. گزینهٔ (۲) درست است. راه اول: اگر اندازهٔ قطرهای یک چهارضلعی محدب d و d′ و زاویهٔ بین دو قطر برابر α باشد، مساحت چهارضلعی برابر $\frac{1}{2}dd'\sin\alpha$ است. در این چهار ضلعی $\alpha = 90°$ است؛ بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$\frac{1}{2}dd'\sin 90° = \frac{1}{2}d.d'\times 1 = \frac{1}{2}dd'$$

راه دوم: اگر نقطهٔ برخورد دو قطر چهارضلعی را O بنامیم، داریم:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD.AO + \frac{1}{2}BD.OC$$
$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(AO + OC) = \frac{1}{2}BD.AC$$



۴. گزینهٔ (۴) جواب است؛ زیرا مثلث CDE متساوی‌الاضلاع به ضلع 12cm است؛ پس $DE = 12cm$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADP، $AD = 8cm$ و $\hat{A} = 60°$ است. بنابراین $DP = 8\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}cm$ است؛ پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DPE،

$$PE = \sqrt{DE^2 + DP^2} = \sqrt{144 + 48} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

۵. گزینهٔ (۱) درست است؛ زیرا اگر نسبت تشابه دو مثلث را k فرض کنیم، داریم:

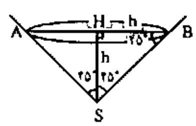
$$\frac{S}{S'} = k^2 = a^2 + 3 \ , \ \frac{2P}{2P'} = k = a + 1$$
$$\Rightarrow (a+1)^2 = a^2 + 3 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۶. گزینهٔ (۳) جواب است؛ زیرا اگر قطر مکعب $\sqrt{2}$ برابر شود، ضلع آن نیز $\sqrt{2}$ برابر خواهد شد. بنابراین، اگر a ضلع مکعب نخست و a′ ضلع مکعب بعدی باشد، $a' = a\sqrt{2}$ و در نتیجه $a'^3 = 2\sqrt{2}a^3$؛ یعنی $V' = 2\sqrt{2}V$ است.

۷. گزینهٔ (۲) درست است؛ زیرا ارتفاع منشور، برابر است با: $12\times\sin 60° = 6\sqrt{3}cm$، و مساحت قاعدهٔ آن، برابر $8\times 8 = 64cm^2$ است. بنابراین:

$$\text{حجم منشور مایل} = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع}$$
$$= 64\times 6\sqrt{3} = 384\sqrt{3}cm^3$$

۸. گزینهٔ (۴) جواب است؛ زیرا ارتفاع مخروط ایجاد شده، با شعاع قاعدهٔ آن برابر است. بنابراین، اگر ارتفاع آب را h فرض کنیم، شعاع قاعدهٔ آن نیز h خواهد بود. بنابراین داریم:

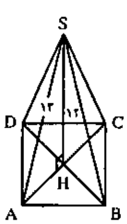


$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\times\text{سطح قاعده}\times\text{ارتفاع}$$
$$\Rightarrow 72\pi = \frac{1}{3}\times\pi h^2.h \Rightarrow \pi h^3 = 216\pi$$
$$\Rightarrow h^3 = 216 \Rightarrow h = 6$$

۹. گزینهٔ (۱) درست است؛ زیرا داریم:

$$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \Rightarrow 36\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3cm$$
$$\Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\times\pi(3)^3 = 36\pi$$
$$\Rightarrow \text{حجم نیمکره} = 18\pi cm^3$$

۱۰. گزینهٔ (۲) درست است؛ زیرا اگر SH ارتفاع و SA یک یال این هرم منتظم باشد، داریم:



$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$
$$\Rightarrow \text{قطر مربع} = AC = 10 = a\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \text{ضلع مربع} = 5\sqrt{2}cm$$
$$\Rightarrow \text{مساحت قاعده} = a^2 = 50cm^2$$

ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی

۱۱. گزینهٔ (۳) صحیح است (با توجه به تعریف گرافهای جهت‌دار برای رابطه‌ها).

۱۲. گزینهٔ (۲) صحیح است (با توجه به تعریف ماتریس برای

گرافهای جهت‌دار).

۱۳. گزینهٔ (۴) صحیح است، روی رأس C طوقه نداریم پس R انعکاسی نیست، و R متقارن هم نیست؛ زیرا مثلاً $(a,b)\in R$ ولی $(b,a)\notin R$ (از رأس b به رأس a پیکانی رسم نشده است) و همچنین R ترایایی نیست؛ زیرا به طور مثال $(a,d)\in R$ و $(d,c)\in R$ ولی $(a,c)\notin R$.

۱۴. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

۱۵. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا هر جمله از بسط عبارت $(a+b+c+d)^9$ جمله‌ای به صورت $a^xb^yc^zd^t$ می‌باشد که مجموع توانها باید ۹ باشد، یعنی $x+y+z+t=9$ و x,y,z,t اعداد صحیح و نامنفی می‌باشند (صفر هم می‌توانند باشند) و تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ فوق برابر است با $\binom{9+4-1}{4-1}$.

۱۶. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا فضای نمونه‌ای برابر است با m^n (برای هر کدام از m ظرف n راه انتخاب داریم) و باید به $\binom{n}{k}$ طریق k مهره را از بین n مهره انتخاب کرده و $(n-k)$ مهرهٔ باقی را در $(m-1)$ ظرف به $(m-1)^{n-k}$ طریق قرار دهیم.

۱۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا طبق قاعدهٔ بیز داریم:

$$P(A/B)\times P(B)=P(B/A)\times P(A)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\times P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{5}{24}$$

۱۸. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا احتمال شرطی بوده و فضای نمونه برای این که مهره سیاه باشد $8=5+3$ است و اگر بخواهد از کیسهٔ B باشد احتمال آن $\frac{5}{8}$ است.

۱۹. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$P(T)=\frac{2}{3}\Rightarrow P(H)=\frac{1}{3}$$

احتمال آنکه دقیقاً ۴ بار H بیاید =

$$\binom{5}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}=5\times\frac{2}{3^5}=\frac{10}{3^5}$$

۲۰. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$\sum \deg V_i=2q=2|E|\Rightarrow 4|V|=2|E|\Rightarrow |E|=2|V|$$

از طرفی طبق فرض $3|V|=|E|+8\Rightarrow 3|V|=2|V|+8\Rightarrow$
$|V|=8\ ,\ |E|=16$

۲۱. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

در هر درخت داریم: $p=q+1\Rightarrow 14=q+1\Rightarrow q=13$
پس باید از ۲۲ یال ۹ یال را حذف کنیم تا تعداد یالها به ۱۳ برسد.

۲۲. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$(2,3)=1\Rightarrow(2^5,3^m)=1\Rightarrow[(2^5,3^m)\ ,\ (3^m,6^m)]$$
$$=[1,(3^m,6^m)]=(3^m,6^m)\ ,\ 3^m|6^m$$
$$\Rightarrow(3^m,6^m)=3^m$$

۲۳. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$(5,7)=1\xrightarrow{\text{قضیهٔ فرما}}5^6\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow(5^6)^{20}\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow 5^{120}\overset{7}{\equiv}1$$
$$\Rightarrow 5^{120}-7\overset{7}{\equiv}-6\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow R=1$$

۲۴. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا شرط لازم و کافی برای آن که معادلهٔ $mx+m^2y=k$ دارای جواب باشد آن است که $(m,m^2)|k$ و چون $(m,m^2)=|m|$ پس باید $|m||k$ در نتیجه $(m,k)=|m|$.

جبر و احتمال

۲۵. گزینهٔ (۳)؛ زیرا اگر دایرهٔ مثلثاتی را به چهار ناحیه تقسیم کنیم، وقتی ۵ نقطه روی محیط آن در نظر می‌گیریم، طبق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل دو نقطه درون یک ناحیه قرار می‌گیرند.

۲۶. گزینهٔ (۱)؛ زیرا:

$$A=\{3,4,\dots,k-6,k-5,k-4,k-3\}$$
$$\Rightarrow A-B=\{k-5,k-4,k-3\}$$

۲۷. گزینهٔ (۴)؛ زیرا ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B وقتی خاصیت جابه‌جایی دارد، که داشته باشیم:

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}3x-2=3\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{5}{3}\ ,\ y=\frac{2}{3}$$

۲۸. گزینهٔ (۱)؛ زیرا:

$$[a]=[b]\Rightarrow(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R$$
$$\Rightarrow(a,b)\in R^{-1}$$

۲۹. گزینهٔ (۳)؛ زیرا:

$$[(a,b)]=\{(x,y)|(x,y)R(a,b)\}$$
$$=\{(x,y)|x+b=y+a\}$$
$$=\{(x,y)|y=x+(b-a)\}$$

۳۰. گزینهٔ (۵)؛ زیرا اگر عددی به ۴ ختم شود، توانهای زوج آن، به ۶ و توانهای فرد آن، به ۴ ختم می‌شوند:

$$4^{100}\overset{10}{\equiv}6$$
$$49\overset{10}{\equiv}-1\Rightarrow(49)^{101}\overset{10}{\equiv}-1$$
$$(49)^{101}+4^{100}\overset{10}{\equiv}6+(-1)=5$$

۳۱. گزینهٔ (۳)؛ زیرا:

$$4!=24\Rightarrow 4!\overset{24}{\equiv}0\ ,\ 5!=5\times4!\overset{24}{\equiv}0$$
$$\dots,20!\overset{24}{\equiv}0\Rightarrow 1!+2!+\dots+20!\overset{24}{\equiv}1+2+6=9$$

۳۲. گزینهٔ (۳)؛ زیرا:

در تیم ۵ نفره اصلاً فوتبالیست نباشد $P(A)=\dfrac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}}=\dfrac{5}{210}$

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{5}{210}=\frac{205}{210}$$

۳۳. گزینهٔ (۲)؛ زیرا:

$$P(1)=x\ ,\ P(2)=3x\ ,\ P(3)=x\ ,$$
$$P(4)=3x\ ,\ P(5)=x\ ,\ P(6)=3x$$
$$x+3x+x+3x+x+3x=1\Rightarrow x=\frac{1}{12}$$
$$A=\{1,2,3\};P(A)=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

۳۴. گزینهٔ (۱)؛ زیرا:

$$\begin{cases}1+x>2-x\Rightarrow x>\frac{1}{2}\\1+2-x>x\Rightarrow x<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\Rightarrow L_A=1\\2-x+x>1\Rightarrow 2>1\end{cases}$$

$$P(A)=\frac{L_A}{L_S}=\frac{1}{2}$$

۳۵. گزینهٔ (۲)؛ زیرا:

$$P(A-B)+P(B)$$
$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)=P(A\cup B)$$

۳۶. گزینهٔ (۴)؛ زیرا احتمال آن که هر دو به هدف بزنند، از یکدیگر مستقل است:

$$P(A)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$$
$$\Rightarrow P(A')=1-P(A)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

حسابان ۱

۳۷. گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases}x-1\ge0\\2-\sqrt{x-1}\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge1\\2\ge\sqrt{x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge1\\4\ge x-1\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x\ge1\\x\le5\end{cases}$$

۳۸. گزینهٔ (۴)

$\tan x+\cot x\ge2$ یا $\tan x+\cot x\le-2$

برد تابع اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ و اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی ۲- است.

۳۹. گزینهٔ (۳)

ابتدا $f(x-1)$ را رسم کنید، سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور x بکشید. آن گاه شکل حاصل را یک واحد به سمت بالا ببرید.

۴۰. گزینهٔ (۱) $f(x)=\left\lfloor\dfrac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor=0$

$\Rightarrow f(x)=0$ تابعی هم فرد است و هم زوج $f(x)=0$

۴۱. گزینهٔ (۳)

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ اگر a و c مختلف‌العلامه باشد، دلتای معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ همیشه مثبت است. چون در این تست، a و c مختلف‌العلامه است، پس سهمی به ازای همهٔ مقادیر m محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

۴۲. گزینهٔ (۴) $f(x)=x(x^2-3)$

پس $f(x)$ بر x بخش‌پذیر است؛ در نتیجه $f(2x-1)$ بر $(2x-1)$ بخش‌پذیر است.

۴۳. گزینهٔ (۴)

$$y-1=x^3-3x^2+3x-1\Rightarrow y-1=(x-1)^3$$
$$\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+1$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x-1}$$

۴۴. گزینهٔ (۱)

$$x\to2^+\Rightarrow\lim f(x)=(\lfloor2^+\rfloor-2)(\lfloor2^+\rfloor-1)$$
$$=(2-2)(1)=0$$
$$x\to2^-\Rightarrow\lim f(x)=(\lfloor2^-\rfloor-2)(\lfloor2^-\rfloor-1)$$
$$=(1-2)(1-1)=0$$

۴۵. گزینهٔ (۴) $\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3/14}{6}=0/52$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\lfloor x+\sin x\rfloor}{\lfloor5\sin x\rfloor}=\frac{\lfloor0/52+0/5\rfloor}{\lfloor5(0/5)\rfloor}=\frac{\lfloor1/02\rfloor}{\lfloor2/5\rfloor}=\frac{1}{2}$$

۴۶. گزینهٔ (۱)

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2-5}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-9}{x^2+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(4+\left[\frac{-9}{x^2+1}\right]\right)$$

$$=4+[0^-]=4-1=3$$

۴۷. گزینهٔ (۴)، چون عدد مجانب قائم $x=2$ با عدد مجانب افقی $y=2$ برابر است، پس معادلهٔ تابع معکوس، همان معادلهٔ تابع اصلی است.

۴۸. گزینهٔ (۲) $h(x)=f(\frac{x}{4})$

$$\frac{x}{4}=t\Rightarrow x=4t\Rightarrow\begin{cases}f(t)=y\Rightarrow f^{-1}(y)=t\\ h(4t)=y\Rightarrow h^{-1}(y)=4t\end{cases}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(y)=4f^{-1}(y)\Rightarrow h^{-1}(x)=4f^{-1}(x)$$

۴۹. گزینهٔ (۳)

$$|f(x)-5|<\frac{1}{100}\Rightarrow|3x+2-5|<\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow|3(x-1)|<\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow|x-1|<\frac{1}{300}\Rightarrow-\frac{1}{300}<x-1<\frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{300}<x<1+\frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow\frac{299}{300}<x<\frac{301}{300}$$

۵۰. گزینهٔ (۳)

$$\frac{\frac{49}{10}+\frac{51}{10}}{2}=5 \qquad \frac{49}{10}<4x+1<\frac{51}{10}$$

$$\frac{49}{10}-5<4x+1-5<\frac{51}{10}-5\Rightarrow-\frac{1}{10}<4x-4<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{40}<x-1<\frac{1}{40}\Rightarrow|x-1|<\frac{1}{40}\Rightarrow x\to 1$$

۵۱. گزینهٔ (۴) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{2x-1}$

مجانب افقی $x\to+\infty\Rightarrow$ حد $y=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

۵۲. گزینهٔ (۲) $f(x)=\frac{4x-1}{bx+10}$ و $\boxed{a=0}$ باید

$x\to\infty\Rightarrow$ حد $f(x)=\frac{4}{b}=1\Rightarrow\boxed{b=4}\Rightarrow a+b=4$

۵۳. گزینهٔ (۳)

$y=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-2}$ مجانب قائم غیرقابل قبول است.

$x\to\pm\infty\Rightarrow$ حد $y=$ حد $\frac{\pm x}{x}\Rightarrow$ حد $y=\pm1$

مجانب افقی $\Rightarrow y=\pm1$

۵۴. گزینهٔ (۴) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}$

چون $\sin x$ در صورت نیز هست، پس منحنی این تابع مجانب قائم ندارد.

۵۵. گزینهٔ (۴)

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ معادلهٔ مجانب قائم: $\boxed{x=0}$ ؛ $x=-1$ غیرقابل قبول

مجانب افقی $x\to+\infty\Rightarrow$ حد $y=0+0\Rightarrow\boxed{y=0}$

۵۶. گزینهٔ (۴) $-2x^2+11x-9=0\Rightarrow x=1\ ,\ \frac{9}{2}$

چون ضریب x^2 منفی است؛ پس $D_f=\left[1\ ,\ \frac{9}{2}\right]$، این تابع در بازهٔ $\left[1\ ,\ \frac{9}{2}\right]$ پیوسته است و در هر زیرمجموعهٔ آن نیز پیوسته است؛ پس این تابع در بازهٔ $\left[2\ ,\ \frac{9}{2}\right]$ هم پیوسته است.

⊙ دیفرانسیل و انتگرال ۱

۵۷. گزینهٔ (۴): بنا به قسمت ج صفحهٔ ۷ کتاب درسی.

۵۸. گزینهٔ (۳): از دو طرف نامساوی $\frac{a+b}{2}$ را کم کنید.

$$a-\frac{a+b}{2}<x-\frac{a+b}{2}<b-\frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow-\frac{b-a}{2}<x-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$$

۵۹. گزینهٔ (۳)

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty\ ,\ \left\{\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)=\infty\right.\right.$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+10}{n^2-1}=1\ ,\ \left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\right.\right.$$

۶۰. گزینهٔ (۲)

$$1/999-2<\frac{4n+1}{2n-5}-2<2/001-2$$

$$\Rightarrow\left|\frac{11}{2n-5}\right|<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow\frac{2n-5}{11}>1000\Rightarrow n>\frac{11005}{2}\Rightarrow n\geq 5503$$

۶۱. گزینهٔ (۳)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\pi+2n^2-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\pi}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+1}$$

$$=0+2=2$$

۶۲. گزینهٔ (۴)

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=l$$

$$\Rightarrow l=\sqrt{6+l}\Rightarrow l^2-l-6=0\Rightarrow(l-3)(l+2)=0$$

$$\Rightarrow l=3$$

۶۳. گزینهٔ (۳)

$f(k)=\frac{1}{k^2+1}\Rightarrow$ اگر $\sum_{k=1}^{n}(f(k)-f(k+1))=f(1)-f(n+1)$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)=\frac{1}{2}$$

۶۴. گزینهٔ (۴)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\log k-\log(k+1))\qquad f(k)=\log k$$

قاعدهٔ ادغام $\sum_{k=1}^{n}(f(k)-f(k+1))=f(1)-f(n+1)$

$$\Rightarrow S_n=\log 1-\log(n+1)=0-\log(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=-\infty$$

۶۵. گزینهٔ (۴)

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$$

۶۶. گزینهٔ (۳) $9-x^2\geq0\Rightarrow x^2\leq9\Rightarrow-3\leq x\leq3$

این تابع در $x_1=3$ حدّ چپ دارد و مقدار حدّ صفر است. و این تابع در $x_2=-3$ حدّ راست دارد و مقدار حدّ صفر است.

۶۷. گزینهٔ (۱) $\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]=[1+0^+]=1$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=[1+0^\pm]\Rightarrow\begin{cases}[1+0^+]=1\\ [1+0^-]=0\end{cases}$$

۶۸. گزینهٔ (۱)

$$\begin{cases}x\to0^+\Rightarrow\lim f(x)=a-4\\ x\to0^-\Rightarrow\lim f(x)=-1\\ x=0\Rightarrow f(0)=b-1\Rightarrow b=0\ ,\ a=-3\Rightarrow a+b=3\end{cases}$$

۶۹. گزینهٔ (۲) $(x-\frac{3}{2})(x^2-4)=0\Rightarrow x=\pm2\ ,\ \frac{3}{2}$

این تابع در نقاط به طولهای عددهای صحیح، فقط در $x=\pm2$ پیوسته است.

۷۰. گزینهٔ (۴) به تعریف تابع معکوس دقت کنید.

۷۱. گزینهٔ (۱) $x\to\pm\infty\Rightarrow\lim y=\frac{x^2}{\pm x}\Rightarrow y=\pm x$

۷۲. گزینهٔ (۳): این تابع در $x=0$ نه حدّ راست دارد و نه حدّ چپ. در نتیجه، نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ. مسلماً نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ.

۷۳. گزینهٔ (۳)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+2h)-f(\frac{\pi}{4}-2h)}{2h}=2f'(\frac{\pi}{4})$$

$$f(x)=\tan^2x\Rightarrow f'(x)=2(1+\tan^2x).\tan x$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=2(1+1)=4$$

$$\Rightarrow 2f'(\frac{\pi}{4})=2\times4=8$$

۷۴. گزینهٔ (۱)

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\\ 2ax\end{cases}\overset{x=2}{\Rightarrow}4a=12\Rightarrow a=3$$

$$\begin{cases}x\to2^+\Rightarrow\lim f(x)=8\\ x\to2^-\Rightarrow\lim f(x)=4a+b\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a+b=8\Rightarrow b=-4\Rightarrow a-b=7$$

۷۵. گزینهٔ (۲)

$$y=\sqrt{x^2-4}\Rightarrow y'_{(t)}=\frac{2xx'_t}{2\sqrt{x^2-4}}$$

$$\Rightarrow y'_{(t)}=\frac{\not{2}\times3\times5}{\not{2}\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y'_{(t)}=3\sqrt{5}$$

۷۶.

$$S=\pi R^2\Rightarrow S'(t)=2\pi RR'_t=2\times3/14\times10\times2$$

$\Rightarrow S'_t=125/6$ متر بر ثانیه

⊙ ریاضی عمومی ۱

۷۷. گزینهٔ (۲): زیرا:

$$V_{2x}=\frac{\delta_{2x}}{\bar{X}_{2x}}=\frac{2\delta_x}{2\bar{X}_x}=\frac{\delta_x}{\bar{X}_x}=V_x$$

۷۸. گزینهٔ (۳).

۷۹. گزینهٔ (۱) ؛ زیرا :

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}}{\binom{9}{1}}=\frac{3}{9}$$ مهرهٔ اول سیاه باشد

$$P(B)=\frac{\binom{2}{1}}{\binom{8}{1}}=\frac{2}{8}$$ مهرهٔ دوم سیاه باشد

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{6}{72}$$

۸۰. گزینهٔ (۱) ؛ زیرا :

$$\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}+\frac{a}{8}=1\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

۸۱. گزینهٔ (۴) ؛ زیرا :

$$\begin{vmatrix} a & -2 \\ b & a \end{vmatrix}=0\Rightarrow a^2+2b=0\Rightarrow a^2=-2b$$

۸۲. گزینهٔ (۳) ؛ زیرا :

$$y=2^{2x-1}\Rightarrow \log y=(2x-1)\log 2$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_2^x+\frac{1}{2}$$

۸۳. گزینهٔ (۱) ؛ زیرا :

$$e^x=u\Rightarrow u^2-2u+1=0\Rightarrow (u-1)^2=0\Rightarrow u=1$$
$$\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$$

۸۴. گزینهٔ (۱) ؛ زیرا :

$$\begin{cases} a+1=0 \\ a+b=0 \end{cases}\Rightarrow a=-b=-1\Rightarrow -a=b=1$$

۸۵. گزینهٔ (۴) ؛ زیرا :

$$f'(x)=\frac{(5x^4+5)(x^5+5x)}{|x^5+5x|}\Rightarrow f'_+(0)=5\ ,$$
$$f'_-(0)=-5$$

۸۶. گزینهٔ (۳) ؛ زیرا $\cos(x-y)=\cos(y-x)$:

$$f(x,y)=2e^{\cos(x-y)}+1=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-2\sin(x-y)e^{\cos(x-y)}}{2\sin(x-y)e^{\cos(x-y)}}=1$$

۸۷. گزینهٔ (۲) ؛ زیرا منحنی وقتی دارای یک مجانب قائم است که :

$$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ x^2+mx+4=0 \end{cases}\xrightarrow{\text{یک مجانب قائم}}\text{مجانب قائم}$$

$$\Delta=m^2-16=0\Rightarrow m=\pm 4$$

هندسهٔ تحلیلی

۸۸. گزینهٔ (۴) جواب است ؛ زیرا داریم :

$$AB=\sqrt{(a+1-1)^2+(2-3)^2+(3+a+1-a)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{26}=\sqrt{a^2+1+16}$$
$$\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=+3\ ,\ a=-3$$

۸۹. گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا شرط برابری دو بردار، آن است که تصویرهای متناظرشان برابر باشد. بنابراین داریم :

$$\begin{cases} m-1=3 \\ m+p-1=2p+5 \\ m+n=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=-3 \\ p=-2 \end{cases}\Rightarrow m+n+p=-1$$

نکته: اگر دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی بر حسب m، n و p را به صورت

$$\begin{cases} m-1=3 \\ 2p+5=m+p-1 \\ m+n=1 \end{cases}$$
$$m+n+p=-1$$

بنویسیم، با جمع کردن طرفهای نظیر سه رابطه جواب مسأله مشخص می‌شود.

۹۰. گزینهٔ (۱) جواب است.

$$a=2i+j+3k\ ,\ b=-i+2j-k$$
$$a.(a+2b)=a^2+2a.b$$
$$=2^2+1^2+3^2+2(2\times-1+1\times2+3\times-1)$$
$$=14-6=8$$

۹۱. گزینهٔ (۱) درست است. می‌دانیم که قرینهٔ بردار a نسبت به بردار b، برداری است مانند "a ؛ به قسمی که $a''=2\frac{a.b}{b.b}b-a$. بنابراین داریم :

$$a''=2\frac{3-2+0}{9+1+4}(3\ ,1\ ,2)-(1\ ,-2\ ,0)$$
$$=(\frac{6}{7}\ ,\ \frac{2}{7}\ ,\ \frac{4}{7})-(1\ ,-2\ ,0)$$
$$\Rightarrow a''=(\frac{6}{7}-1\ ,\ \frac{2}{7}+2\ ,\ \frac{4}{7}-0)$$
$$\Rightarrow a''=(-\frac{1}{7}\ ,\ \frac{16}{7}\ ,\ \frac{4}{7})$$

۹۲. گزینهٔ (۲) درست است. تصویرهای بردار $(2a)\times(3b)$ شش برابر تصویرهای نظیر از بردار $a\times b$ است. بنابراین، تصویر بردار $a\times b$ روی محور zها را پیدا کرده و در ۶ ضرب می‌کنیم. امّا تصویر این بردار، روی محور zها برابر $(3)(3)-(-1)(2)=11$ است. بنابراین، جواب این تست $6\times11=66$ است.

۹۳. گزینهٔ (۴) جواب است. دو نقطه از این خط $A=(2\ ,0\ ,0)$ و $B=(3\ ,4\ ,5)$ است. بنابراین معادلهٔ متقارن آن به صورت زیر است :

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-0}{4-0}=\frac{z-0}{5-0}\Rightarrow x-2=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$$

۹۴. گزینهٔ (۱) درست است. مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $B=(2,5,7)$ و $C=(0,3,2)$ صدق می‌کند :

$$BC:\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-5}{3-5}=\frac{z-7}{2-7}\Rightarrow\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{-5}$$

$$A=(x,y,1)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ BC}}\frac{x-2}{-2}$$
$$=\frac{y-5}{-2}=\frac{1-7}{-5}=\frac{6}{5}$$
$$\Rightarrow\frac{x+y-7}{-4}=\frac{6}{5}$$
$$\Rightarrow x+y=7-\frac{24}{5}=\frac{11}{5}$$

۹۵. گزینهٔ (۲) جواب است. بردار هادی خط D، بردار نرمال صفحهٔ مورد نظر است. بنابراین :

$$V_P=V_D=(2\ ,-3\ ,1)\ ,\ M=(2\ ,4\ ,-1)$$
$$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 2(x-2)-3(y-4)+1(z+1)=0$$
$$\Rightarrow 2x-3y+z+9=0$$

۹۶. گزینهٔ (۴) جواب است. می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ $A=(x_1,y_1,z_1)$ از صفحهٔ $P:ax+by+cz+d=0$ برابر است با : $d=AH=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

بنابراین داریم :

$$4=\frac{|4m+2-m+2+2m|}{\sqrt{4+1+4}}\Rightarrow 4=\frac{|5m+4|}{3}\Rightarrow$$
$$|5m+4|=12\Rightarrow 5m+4=+12$$
$$\Rightarrow m=\frac{8}{5}=5m+4=-12$$
$$m=-\frac{16}{5}$$

۹۷. گزینهٔ (۳) جواب است ؛ زیرا داریم :

$$V_D=(1\ ,2\ ,+2)\ ,\ V_P=(2\ ,-4\ ,3)$$
$$\cos(V_D,V_P)=\frac{V_D.V_P}{|\vec{V_D}||\vec{V_P}|}$$
$$=\frac{2-8+6}{\sqrt{1+4+4}.\sqrt{4+16+9}}=\frac{0}{\sqrt{29}}=0$$
$$\Rightarrow (V_D,V_P)=90^\circ\Rightarrow$$ زاویهٔ خط با صفحه
$$=90^\circ-90^\circ=0^\circ$$

ریاضی ۱

۹۸. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$(A'\cap B)\cup(A-\varnothing)=(A'\cap B)\cup A$$
$$=(A'\cup A)\cap(B\cup A)=M\cap(B\cup A)=A\cup B$$

۹۹. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ چنین است :

$$\varnothing\ ,\ \{\varnothing\}\ ,\ \{\{\varnothing\}\}\ ,\ A$$

۱۰۰. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$(ab)^{m-n}+(a^m.b^n.a^n.b^m)$$
$$=(ab)^{m-n}+(a^{m+n}.b^{m+n})$$
$$=(ab)^{m-n}+(ab)^{m+n}$$
$$=(ab)^{m-n-(m+n)}=(ab)^{-2n}$$

۱۰۱. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$x=0/3\overline{27}\ ,\ 10x=3/\overline{27}\ ,\ 1000x=327/\overline{27}$$
$$1000x-10x=327/\overline{27}-3/\overline{27}=324\ ;$$
$$990x=324\ ;\ x=\frac{324}{990}=\frac{36}{110}=\frac{18}{55}$$
$$18+55=73$$

۱۰۲. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$(2xyz)(\frac{-2}{3}xy^2z^3)(-3x^2y)=(2)(\frac{-2}{3})$$
$$(-3)(x^4y^4z^4)=(2x^2y^2z^2)^2$$

۱۰۳. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

روش ۱ (با عمل تقسیم) :

$$\begin{array}{l|l} x^2-8x+15 & -x+3 \\ \hline -(x^2-3x) & -x+5 \\ \quad -5x+15 & \\ \quad -(-5x+15) & \\ \quad\quad 0\ \text{(باقیمانده)} & \end{array}$$

روش ۲ (بدون عمل تقسیم):
ابتدا مقسوم‌علیه $(-x+3)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$-x+3=0\ ;\ x=3$

مقسوم را به‌ازای ریشهٔ مقسوم‌علیه حساب می‌کنیم، که در این‌صورت عدد حاصل، باقیماندهٔ تقسیم است:

$x=3:\ p(3)=(3)^2-8(3)+15$

$=9-24+15=24-24=0$

۱۰۴. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

روش ۱ (با عمل تقسیم):

$$\begin{array}{l|l} x^5+x+1 & x^3-x^2+1 \\ \hline -(x^5-x^4+x^2) & x^2+x+1 \\ x^4-x^2+x+1 & \\ -(x^4-x^3+x) & \\ x^3-x^2+1 & \\ -(x^3-x^2+1) & \\ 0 & \end{array}$$

روش ۲ (روش عددگذاری):

ابتدا حاصل عبارت $\frac{x^5+x+1}{x^3-x^2+1}$ را به‌ازای عدد دلخواهی مانند $x=1$ حساب می‌کنیم:

$x=1:\ \frac{(1)^5+(1)+1}{(1)^3-(1)^2+1}=3$

همچنین حاصل هر یک از عبارتهای داده شده را به‌ازای $x=1$ حساب می‌کنیم، بدیهی است که فقط حاصل x^2+x+1 برابر ۳ است.

۱۰۵. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

روش ۱ (روش تجزیه):

$A=y^2+2y-x^2+1=(y^2+2y+1)-x^2$

$=(y+1)^2-x^2$

$=(y+1-x)(y+1+x)$

$=(x+y+1)(y-x+1)$

روش ۲ (روش عددگذاری):

حاصل عبارت A را به‌ازای $y=x=1$، حساب می‌کنیم:

$y=x=1:\ A=(1)^2+2(1)-(1)^2+1=3$

فقط حاصل عبارت گزینهٔ (۳) به‌ازای $y=x=1$، برابر ۳ می‌شود:

$y=x=1:\ (x+y+1)(y-x+1)$

$=(1+1+1)(1-1+1)=3$

۱۰۶. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,

$3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$A=\frac{(x-1)(x-2)}{4(x-2)}\times\frac{12}{3(x-1)(x+1)}$

با توجه به $x\notin\{1,2\}$، می‌توان نوشت:

$A=\frac{1}{x+1}$

۱۰۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$,

$x+y=xy=-2$

$x^3+y^3=(-2)^3-3(-2)(-2)=-8-12=-20$,

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$(x-y)^2=(-2)^2-4(-2)=4+8=12$,

$B=\frac{-20}{12}=\frac{-5}{3}$

ریاضی ۲

۱۰۸. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y=-x$ است. بنابراین، هر نقطه به مختصات $M(x_0,-x_0)$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم واقع است:

$4m-1=-(2m-1)\ ;\ 4m+2m=2\ ;$

$6m=2\ ;\ m=\frac{1}{3}$

۱۰۹. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$AB^2=(2-2n+1)^2+(2n-2)^2=5^2=25\ ;$

$(3-2n)^2+(2n-2)^2=25\ ;$

$(9-12n+4n^2)+(4n^2-8n+4)=25\ ;$

$8n^2-20n+13=25\ ;\ 8n^2-20n-12=0\ ;$

$2n^2-5n-3=0\ ;$

$n=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}\ ,\ n=3\ ;\ n=-\frac{1}{2}$

۱۱۰. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا اگر a یک ضلع مربع و R قطر مربع باشد:

$2a^2=R^2$

$R^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$

$=(1+2)^2+(3-7)^2=9+16=25$

$2a^2=25\ ;\ a^2=\frac{25}{2}\ ;\ S=a^2=\frac{25}{2}$ (مساحت مربع)

۱۱۱. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا مختصات نقطه‌ای به طول ۱- در هر دو خط صدق می‌کند و همچنین حاصل‌ضرب ضریب زاویهٔ دو خط برابر ۱- است، بنابراین:

$\begin{cases}a(-1)-y=1\\ b(-1)-y+1=0\end{cases}\overset{(\text{از حذف } y)}{\Longrightarrow}\begin{cases}a-b=-2\\ ab=-1\ (\text{از شرط عمود بودن})\end{cases}\ ;$

$ab=(b-2)b=-1\ ;\ b^2-2b+1=0\ ;$

$(b-1)^2=0\ ;\ b=1$

$b=1:\ a(1)=-1\ ;\ a=-1$,

مقدار میانگین $=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=0$

۱۱۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$\begin{cases}2x+y+1=0\\ 2y-x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-3}{5}\ ,\ y=\frac{1}{5}\ ;\ O(\frac{-3}{5},\frac{1}{5})$

$d=\frac{|\frac{-3}{5}+\frac{1}{5}-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|\frac{-12}{5}|}{\sqrt2}=\frac{12}{5\sqrt2}=\frac{6\sqrt2}{5}$

۱۱۳. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$\frac{2}{m}=\frac{m}{2}\neq\frac{6}{5}\ ;\ m^2=4\ ;\ m=\pm2$

۱۱۴. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2}-\sqrt{20}=|x-2|+|x|-2\sqrt5$

$x=2-\sqrt5:\ |x-2|+|x|-2\sqrt5$

$=|2-\sqrt5-2|+|2-\sqrt5|-2\sqrt5$

$=\sqrt5+\sqrt5-2-2\sqrt5=2\sqrt5-2-2\sqrt5=-2$

۱۱۵. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$x^2=1-x:\ x^5=(x^2)^2.x=(1-x)^2.x$

$=(1-2x+x^2).x$

$=(1-2x+1-x)x=(2-3x)x$

$=2x-3x^2=2x-3(1-x)$

$=2x-3+3x=5x-3$

۱۱۶. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt3}}{\sqrt[4]{(\sqrt3-2)^2}}=\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt3}}{\sqrt{|\sqrt3-2|}}=\frac{\sqrt[4]{(2-\sqrt3)^2}}{\sqrt{2-\sqrt3}}$

$=\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{\sqrt{2-\sqrt3}}=1$

۱۱۷. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+$

$2\sin x\cos x+\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}-2\sin x\cos x=2$

۱۱۸. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$\frac{4x}{x-1}+\frac{8x}{2x+2}=4x\ ;\ \frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=x\ ;$

$\frac{x^2+x+x^2-x}{x^2-1}=x$

$\frac{2x^2}{x^2-1}=x\ ;\ \frac{2x^2}{x^2-1}-x=0\ ;\ \frac{2x^2-x^3+x}{x^2-1}=0\ ;$

$\frac{-x(x^2-2x-1)}{x^2-1}=0$

$-x=0\ ;\ x^2-2x-1=0\ ;\ x=0$,

$\Delta'=1+1=2>0$ (سه ریشهٔ حقیقی)

۱۱۹. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$x(x+2)-(x-1)(x+2)\geq0\ ;$

$(x+2)(x-x+1)\geq0\ ;\ x+2\geq0\ ;\ x\geq-2$

۱۲۰. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$a+b=1\ ,\ ab=-1$

$k=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}=\frac{(b+a)^2-2ba}{(ab)^2}$

$=\frac{(1)^2-2(-1)}{(-1)^2}=3$

۱۲۱. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$\frac{x+2}{3}\geq\frac{x+1}{2}\ ;\ 2x+4\geq3x+3\ ;\ x\leq1$

$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{x-2}{6}\ ;\ 3x-4>x-2\ ;\ 2x>2\ ;\ x>1$

اشتراک مجموعهٔ جوابهای نامعادله‌ها، مجموعهٔ تهی $(\varnothing)$ است.

۱۲۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y = x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \;;$$

$$y - \frac{4q - p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$S(\frac{-p}{2} \,,\, \frac{4q - p^2}{4}) \,,\; S(-3,2)$$

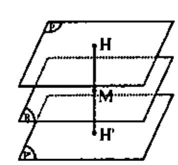
$$\begin{cases} \frac{-p}{2} = -3 \;;\; p = 6 \\ \frac{4q - p^2}{4} = 2 \;;\; q = 11 \end{cases} \,,\; \frac{p+q}{2} = \frac{6+11}{2} = \frac{17}{2}$$

پاسخ پرسشهای چهارگزینه‌ای برهان ۲۸

هندسهٔ ۲

۱. گزینهٔ (۱) درست است؛ زیرا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده، به وسیلهٔ نیمسازهای زاویه‌های درونی مستطیل متساوی‌الساقین می‌باشند.

۲. گزینهٔ (۳) جواب است؛ زیرا مکان هندسی نقطه‌ای که به یک فاصله از دو صفحهٔ موازی است، صفحه‌ای است موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن دو صفحه.



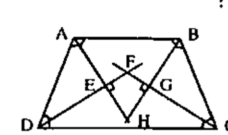
۳. گزینهٔ (۲) درست است؛ زیرا داریم:

$$\widehat{AE} + \widehat{DB} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \qquad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{AE - BD}{2} \Rightarrow 40 = \widehat{AE} - \widehat{BD} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \widehat{AE} = 70^\circ \,,\; \widehat{DB} = 30^\circ \Rightarrow A\hat{B}E = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

۴. گزینهٔ (۴) جواب است؛ زیرا اگر EFGH چهارضلعی حاصل از برخورد زاویه‌های درونی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD باشد، داریم:



$\hat{E} = \hat{G} = 90^\circ \Rightarrow \hat{E} + \hat{G} = 180^\circ \Rightarrow$ EFGH محاطی است

$EF = FG \,,\; GH = HE \Rightarrow EF + HG$

$= FG + EH \Rightarrow$ EFGH محیطی است.

۵. گزینهٔ (۴) درست است. اگر AB وتر نظیر کمان حاوی ۶۰ درجه باشد، کمان کوچک $\widehat{AB}$ برابر 120° است؛ یعنی $AB = C_3$. امّا در دایرهٔ به شعاع R، $C_3 = R\sqrt{3}$ است. بنابراین داریم:

$$24 = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 8\sqrt{3}$$

نکته: می‌دانیم که اگر AB وتر نظیر کمان در خور زاویهٔ α در دایره‌ای به شعاع R باشد، $\sin\alpha = \frac{AB}{2R}$ است. بنابراین با استفاده از این رابطه، می‌توان R را محاسبه کرد.

$$\sin 60 = \frac{AB}{2R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{2R} \Rightarrow R = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

۶. گزینهٔ (۲) جواب است؛ زیرا اگر d خط‌المرکزین این دو دایره، TT' مماس مشترک برونی و T_1T_1' مماس مشترک درونی آنها باشد، داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{10^2 - (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$T_1T_1' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{10^2 - (5+3)^2}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$$TT' : T_1T_1' = 4\sqrt{6} : 6 = 2\sqrt{6}/3$$

۷. گزینهٔ (۱) درست است؛ زیرا اگر مثلث را قائم‌الزاویه در رأس A فرض کنیم، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 12 + 36 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2p = 2\sqrt{3} + 6 + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2p = 6 + 6\sqrt{3} \Rightarrow p = 3 + 3\sqrt{3} \,,$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = 6\sqrt{3} \,,\; r = \frac{S}{P} = \frac{6\sqrt{3}}{3 + 3\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2} = 3 - \sqrt{3}$$

۸. گزینهٔ (۳) درست است؛ زیرا چون دوران، شکل را تغییر نمی‌دهد و مساحت مربع A'B'C'D' با مساحت مربع ABCD برابر است، بنابراین داریم:

$AB = a = \sqrt{(3+1)^2 + (1-1)^2} = 4$ ضلع مربع

$\Rightarrow S = a^2 = 16$ مربع

۹. گزینهٔ (۲) جواب است. اگر $M = (3,-1)$ و $M' = (1,1)$ باشد، محور تقارن بازتاب عمودمنصّف پاره‌خط MM' است. بنابراین داریم:

$H = (2,0)$ وسط MM'

$m/MM' = (3-1)/(-1-1) = -1 \Rightarrow$

$m = +1$ عمودمنصف

$\Rightarrow y - 0 = +1(x-2)$: معادلهٔ عمودمنصف

$\Rightarrow y = x - 2$ معادلهٔ محور تقارن

۱۰. گزینهٔ (۴) جواب است؛ زیرا شرط موازی بودن یک خط با یک صفحه، آن است که با یکی از خطهای آن صفحه موازی باشد. بنابراین، دو خط مورد نظر، می‌توانند با دو خط متقاطع از صفحه موازی باشند، که در این‌صورت، موازی یکدیگر نخواهند بود.

ریاضی ۵

۱۱. گزینهٔ (۲) درست است؛ زیرا داریم:

$$-2 < \frac{x}{2} - 1 \le 2 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \le 3 \Rightarrow -2 < x \le 6$$

۱۲. گزینهٔ (۴) درست است؛ زیرا داریم:

$$f(-2) = \sqrt{2} - (-2) = \sqrt{2} + 2$$

$$\Rightarrow f(f(-2)) = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

۱۳. گزینهٔ (۲) درست است؛ زیرا داریم:

$$f(-\frac{1}{x}) = \frac{\frac{-1}{x} - 1}{\frac{-1}{x} + 1} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x)f(\frac{-1}{x}) = \frac{x-1}{x+1} \times \frac{-(x+1)}{x-1} = -1$$

۱۴. گزینهٔ (۱) جواب است. باید حدّ راست و حدّ چپ تابع، وقتی $x \to -2$ با هم برابر باشند.

$$l_1 = \lim_{x \to -2^+} f(x) = -2(a+1) + 3 = -2a + 1$$

$$l_2 = \lim_{x \to -2^-} f(x) = -2(-2)^2 + 1 = -7$$

$$l_1 = l_2 \Rightarrow -2a + 1 = -7 \Rightarrow a = 4$$

۱۵. گزینهٔ (۳) درست است؛ زیرا داریم:

$$f(x+2) = \frac{x+4}{x} \Rightarrow f(x-2+2) = \frac{x-2+4}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

۱۶. گزینهٔ (۲) جواب است؛ زیرا داریم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin kx \sin 2kx}{6x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \times kx \times 2kx}{6x^3} = \frac{k^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{3} = 3 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = +3 \,,\; k = -3$$

۱۷. گزینهٔ (۱) درست است. شرط پیوستگی تابع در یک نقطه، آن است که حد چپ تابع و حدّ راست تابع و مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد. بنابراین داریم:

$$l_1 = \lim_{x \to -3^+} f(x) = -3a + 1$$

$$l_2 = \lim_{x \to -3^-} f(x) = 18a - 3b - 2$$

$$f(-3) = 13$$

$$-3a + 1 = 13 \Rightarrow a = -4 \quad 18a - 3b - 2 = 13 \Rightarrow b = -29$$

$$\Rightarrow a + b = -33$$

۱۸. گزینهٔ (۴) درست است؛ زیرا:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2 + a \,,\; f(1) = -2 + a$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + 3 = 4$$

$$l_1 \ne l_2 = f(1) \Rightarrow -2 + a \ne 4 \Rightarrow a \ne 6$$

۱۹. گزینهٔ (۲) جواب است. داریم:

$$f'(x) = \frac{1(x + \sqrt{x}) - (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})x}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x + \sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(2)}{(4+2)^2} = \frac{1}{36}$$

۲۰. گزینهٔ (۳) درست است؛ زیرا داریم:

$$A = (-2, -7) \xrightarrow{\text{در تابع}} -7 = a(-2)^2 + b(-2) - 3$$

$$\Rightarrow 4a - 2b = -4 \Rightarrow 2a - b = -2 \qquad (1)$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 2a(-2) + b = 0 \Rightarrow -4a + b = 0 \qquad (2)$$

$(1) , (2) \Rightarrow a = 1 , \; b = 4 \Rightarrow 2a - b = -2$

نکته: رابطهٔ (۱) خود، مقدار مورد نظر جواب تست را نشان می‌دهد.

حسابان ۲

۲۱. گزینهٔ (۳)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_+(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_-(0)$

دونیم مماس بر هم عمودند $\Rightarrow m \times m' = f'_+(0) \times f'_-(0) = -1$

۲۲. گزینهٔ (۲)

$x \to 1 \Rightarrow f(x) = 4 - x\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = -(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})$

$\Rightarrow f'(1) = -(1 + \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$x \to 9 \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x} - 4 \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(9) = 3 + \frac{9}{2\times 3} = 3 + \frac{3}{2} \Rightarrow f'(1) + f'(9) = 3$

۲۳. گزینهٔ (۳)

$y = f(x\sqrt{x}) \Rightarrow y'_x = (x\sqrt{x})' \times f'(x\sqrt{x})$

$y'_x = (\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}) \times f'(x\sqrt{x})$

$\Rightarrow x_0 = 9 \Rightarrow y'_{x=9} = (3 + \frac{9}{6}) \times f'(9\sqrt{9})$

$= (3 + \frac{3}{2}) f'(27) = \frac{9}{2} \times 12 = 54$

۲۴. گزینهٔ (۲). توابع رادیکالی غیرکسری با فرجهٔ زوج، به‌ازای xهایی که داخل رادیکال را صفر کنند، مشتق‌پذیر نمی‌باشند؛ پس:

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ در دو نقطه

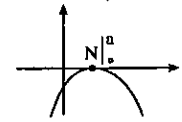
۲۵. گزینهٔ (۳)

$f'(x) = 3 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0$

تابع در $D_f = R$ پیوسته است و $f' > 0$. پس تابع در R صعودی اکید است.

۲۶. گزینهٔ (۱)

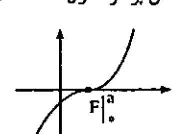
نمودار تابعهای به معادلهٔ $y = -(x-a)^{2n}$ ، $n \in N$ به‌صورت زیر است.



پس $x = a$ طول نقطهٔ ماکزیمم است.

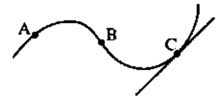
۲۷. گزینهٔ (۳)

نمودار تابعهای به معادلهٔ $y = (x-a)^{2n+1}$ ، $n \in N$ به‌صورت زیر است و ریشهٔ داخل پرانتز، طول نقطهٔ عطف است.



۲۸. گزینهٔ (۳)

این تابع در همسایگی نقطهٔ C صعودی اکید است؛ پس $f' > 0$. اگر در نقطهٔ C خطی مماس بر منحنی رسم کنیم، منحنی بالای خط مماس قرار می‌گیرد؛ پس تقعر منحنی به طرف بالاست؛ یعنی $f'' > 0$.



۲۹. $y = x^3 + ax^2 + b$

در تابع درجه سوم طول نقطهٔ عطف $-\frac{b}{3a}$ است؛ یعنی در این مسأله $-\frac{a}{3}$

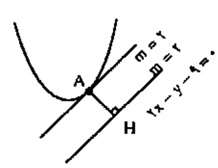
$-\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

$F\Big|_{0}^{1} \xrightarrow{\text{در معادله تابع}} 0 = 1 + a + b \Rightarrow 0 = 1 - 3 + b \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$\Rightarrow \boxed{a - b = -5}$

۳۰. گزینهٔ (۱). یک تابع مثلثاتی وقتی متناوب است که توان x در کمان مثلثاتی، فقط و فقط عدد (۱) باشد. پس گزینهٔ (۱) درست است.

۳۱. گزینهٔ (۲). مماسی بر منحنی به موازات خط رسم می‌کنیم تا نقطهٔ تماس (A) به‌دست آید. سپس فاصلهٔ AH را محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل

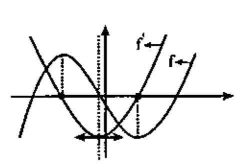


$y' = 2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A\Big|_{0}^{2}$

$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 0 - 9|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

۳۲. گزینهٔ (۳)

طولهای اکسترمم نسبی تابع f برابر طولهای نقاط برخورد منحنی f' با محور xهاست. طولهای نقاط عطف تابع f برابر طولهای اکسترمم نسبی تابع f' است. در ضمن، در ابتدای شکل تابع f صعودی اکید است؛ پس $f' > 0$ درنتیجه، نمودار f' در ابتدای شکل بالای محور xهاست. پس شکل (۳) درست است.



۳۳. گزینهٔ (۲)

$\int_1^x e^{2t}dt = \frac{1}{2}\int_1^x 2e^{2t}dt = \frac{1}{2}(e^{2t})\Big|_1^x$

$= \frac{1}{2}(e^{2x} - e^2) = y \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(2e^{2x}) = e^{2x}$

$y'' = 2e^{2x} \Rightarrow y'' + 2y' = 2e^{2x} + e^{2x} = 3e^{2x}$

راه دیگر:

$(\int_1^x e^{2t}dt)' = e^{2x} = y' \Rightarrow y'' = 2e^{2x}$

$\Rightarrow y'' + 2y' = 2e^{2x} + e^{2x} = 3e^{2x}$

۳۴. گزینهٔ (۲)

$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\text{Arcsin}\, x)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \text{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{Arcsin}\, 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

۳۵. گزینهٔ (۳)

$\int (x^2 - 2x - 1)e^x = (mx^2 + nx + k)e^x$

$\Rightarrow$ مشتق سمت راست $\equiv (x^2 - 2x - 1)e^x$

$\Rightarrow (2mx + n)e^x + e^x(mx^2 + nx + k) \equiv (x^2 - 2x - 1)e^x$

$\Rightarrow (mx^2 + (2m+n)x + (n+k))e^x = (x^2 - 2x - 1)e^x$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m + n = -2 \\ n + k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -4 \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow 4m + 3n + 2k = -2$

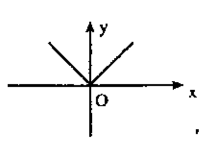
حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۳۶. گزینهٔ (۴)؛ زیرا تابع، تابع ثابت است. در تابع ثابت، هر نقطه اکسترمم نسبی است.

$y = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}x^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}x + 12)}{\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 12}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 12)}{\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 12} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

۳۷. گزینهٔ (۴): مثلاً در تابع به معادلهٔ $y = |x|$ نقطهٔ $(0,0)$ می‌نیمم نسبی است؛ در حالی که $f'(0)$ وجود ندارد.



۳۸. گزینهٔ (۳) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$ ، $f'(-2)$ ، $f'(2)$ وجود ندارند:

۳۹. گزینهٔ (۲)

$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ a & x < 3 \end{cases} \Rightarrow 2(3) = a \Rightarrow \boxed{a = 6}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \Rightarrow 9 + a = 3a + b$

$\Rightarrow 9 + 6 = 18 + b \Rightarrow \boxed{b = -3}$

۴۰. گزینهٔ (۱)

$f'(x) = 6x^2 - 8x$

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(x)\Rightarrow 6=6x^2-8x\Rightarrow 3x^2-4x-3=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\simeq 1/8\\ x\simeq -0/53\end{cases}\quad 0<1/8<3\quad\Rightarrow\quad c=1/8$$ یک نقطه

۴۱. گزینهٔ (۱) : اگر در تابع مشتق‌پذیر f داشته باشیم $f'(x)\geq 0$، به شرط آن که تابع f ثابت نباشد یا بخشی از تابع در بی‌شمار نقطهٔ ثابت نباشد، آنگاه تابع f اکیداً صعودی است. مثلاً، تابع به معادلهٔ $g(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ نمی‌تواند اکیداً صعودی باشد.

۴۲. گزینهٔ (۳) : باید توجه داشت که این تابع متناوب است و تناوب اصلی آن (2π) است. جدول تغییرات در یک دوره رسم شده است که یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم در جدول مشاهده می‌شود. پس تابع در کل، بی‌شمار ماکزیمم نسبی و بی‌شمار می‌نیمم نسبی دارد.

۴۳. گزینهٔ (۳) $\quad y=\sqrt{x^2(1-x^2)}$

مجموع دو مقدار x^2 و $1-x^2$ مقدار ثابت (۱) است، حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که مساوی باشند پس: $x^2=\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

۴۴. گزینهٔ (۴) : آنچه از ظاهر معادلهٔ تابع برمی‌آید، این است که $f(x)\geq 0$، پس شکل بالای محور xهاست و در $x=0$، تابع مشتق‌پذیر نیست و $x=\pm 1\Rightarrow y=0$، پس شکل (۴) درست است.

۴۵. گزینهٔ (۱)

$$dy=y'.dx=(2x+2)dx=(2+2)\times\frac{1}{10}=0/4$$

$$\Delta y=y_2-y_1=(1/1)^2+2(1/1)-1-2=0/41$$

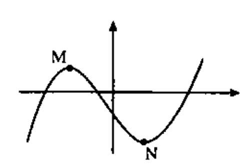
$$\text{خطا}=|\Delta y-dy|=|0/41-0/4|=\frac{1}{100}$$

۴۶. گزینهٔ (۳) $\quad y=x^3-3x-1$

$$y'=3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1$$

نقاط اکسترمم نسبی $\quad M\Big|_{1}^{-1}\quad N\Big|_{-3}^{1}$

در ضمن $x\to\pm\infty$ ، $y\to\pm\infty$ ، یعنی منحنی از ربع سوم شروع شده، به ربع اول ختم می‌شود و از نقاط N و M می‌گذرد.



به‌طوری که در شکل ملاحظه می‌شود، منحنی محور xها را در سه نقطه قطع می‌کند ؛ پس معادلهٔ $x^3-3x-1=0$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

۴۷. گزینهٔ (۴)

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x).\Delta x$$

$$\Rightarrow f(a+\frac{1}{10})\simeq f(a)+f'(a)\times\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow f(a+\frac{1}{10})\simeq 10-8(\frac{1}{10})=10-0/8\simeq 9/2$$

۴۸. گزینهٔ (۲) کسر را تفکیک می‌کنیم :

$$\int\frac{4dx}{4+e^x}=\int\frac{-e^x+(e^x+4)}{4+e^x}dx$$

$$=-\int\frac{e^x}{4+e^x}dx+\int dx=-Ln(4+e^x)+x+c$$

توجه : $\quad u=4+e^x\Rightarrow u'=e^x$

۴۹. گزینهٔ (۴)

مقدار متوسط $\int_a^b f(x)dx$ برابر است با : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{3-1}\int_1^3(x+\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+Ln(x)\right)_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+Ln(3)-\frac{1}{2}-Ln(1)\right)=2+\frac{Ln(3)}{2}$$

۵۰. گزینهٔ (۴)

$$\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$Ln(f)=\frac{1}{2}\left(1^2+(\frac{3}{2})^2+(2)^2+(\frac{5}{2})^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{4}+4+\frac{25}{4}\right)=\frac{27}{4}$$

ریاضی عمومی ۲

۵۱. گزینهٔ (۱) : زیرا :

$$y'=\frac{-\cos x(1-2\sin x)+2\cos x(1-\sin x)}{(1-2\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos x}{(1-2\sin x)^2}=0\Rightarrow\cos x=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$\Rightarrow y=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1-1}{1-2}=0$$

۵۲. گزینهٔ (۲) : زیرا :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{-2y}=2\Rightarrow x=y$$

$$2x^2-x^2=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\ ;\ y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$$

۵۳. گزینهٔ (۲) : زیرا :

$$\begin{cases}x+2y=8\Rightarrow x=8-2y\\ A=xy=(8-2y)y=8y-2y^2\end{cases}$$

$$A'=8-4y=0\Rightarrow y=2\ ,\ x=8-4=4$$

$$A=xy=2\times 4=8$$

۵۴. گزینهٔ (۳) : زیرا :

$$\begin{cases}x=\sin^2\alpha\\ y=\cos\alpha-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sin^2\alpha\\ y+1=\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow x+(y+1)^2=1$$ معادلهٔ سهمی

۵۵. گزینهٔ (۴) : زیرا :

$$y^2+4(x-1)^2=32\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{y^2}{32}=1$$

$$c^2=a^2-b^2=32-8=24$$

$$\Rightarrow c=2\sqrt{6}\ ;\ e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۶. گزینهٔ (۳) : زیرا :

$$c\Big|_3^2\ ,\ r=4\ ;\ c'\Big|_7^5\ ,\ r=1$$

$$cc'=\sqrt{(2-5)^2+(3-7)^2}=\sqrt{25}=5$$

$cc'=r+r'=5$ مماس خارج

۵۷. گزینهٔ (۲) : زیرا :

$$9x^2-4(y^2+4y)=52\Rightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{y+2}{3}\Rightarrow 2y=\pm 3x-4$$

۵۸. گزینهٔ (۴) : زیرا :

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}}\sin\frac{kx}{2}dx=-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}+c\Big|_0^{\frac{\pi}{k}}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=4$$

۵۹. گزینهٔ (۴) : زیرا :

$$\begin{cases}x^2+4y^2+16y-20=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow y=-5\ ,\ y=1$$

$$V=\pi\int_{-5}^{1}x^2dy=\pi\int_{-5}^{1}(20-16y-4y^2)dy=144\pi$$

۶۰. گزینهٔ (۱) : زیرا :

$$\hat{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{m+m}\int_{-m}^{m}(m+mx)dx=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2m}\int_{-m}^{m}m(1+x)dx=1\Rightarrow m=1$$

جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۶۱. گزینهٔ (۳) : زیرا $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ پوشا پس یک‌به یک است و لـذا f^{-1} نیـز نگـاشتی خطـی مـی‌باشـد پـس $f^{-1}(kx)=kf^{-1}(x)$.

۶۲. گزینهٔ (۱) : زیرا، $f^{-1}of$ و fof^{-1} هرکدام تابع همانی هستند.

۶۳. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x,y)=(2x-y,-x+y)$$

۶۴. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$AA^*=A^*A=|A|I\ ,\ |A|=12\Rightarrow AA^*=12I$$

۶۵. گزینهٔ (۳) : زیرا هستهٔ f هیچگاه تهی نیست و حداقل این‌که $f(\vec{0})=\vec{0}$ یعنی $\vec{0}\in k_f$.

۶۶. گزینهٔ (۴) : زیرا هر مضرب بردار ویژهٔ Aیک بردار ویژه برای A محسـوب می‌شود و مقدار ویژه برای همهٔ آنها همان (۳-) است پس باید :

$$A\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\12\end{bmatrix}$$

۶۷. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا طبق قضیهٔ کیلی «هر ماتریس در معـادلـهٔ مشـخصـهٔ خـود صـدق مـی‌کـنـد» پـس بـایـد $A^2-2A-I=\vec{0}$ بنابراین داریم،

$$A(A-2I)=I\Rightarrow(A-2I)=A^{-1}$$

۶۸. گزینهٔ (۱) : زیرا λ^{-1} در صورتی یک مقدار ویژه برای

A^{-1} است که صفر نباشد.

۶۹. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا در حالت کلی اگر λ مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد همواره $|A-\lambda I|=0$ و برعکس پس $|A-2I|=0$ و $|A+I|=0$ و $|A+3I|=0$ پس ماتریسهای $(A-2I)$ و $(A+I)$ و $(A+3I)$ وارون‌پذیر نیستند.

۷۰. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ n & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1+\lambda_2=2+m \ , \ \lambda_1\lambda_2=|A|$$

$$\Rightarrow (-4)+2=2+m \Rightarrow m=-4 \ , \ (-4)\times 2=-8+n$$

$$\Rightarrow -8=-8+n \Rightarrow n=0 \Rightarrow n-2m=0-2\times(-4)=8$$

۷۱. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$|A|=3 \Rightarrow \big||A|A\big|=|3A|=3^2|A|=3^2\times 3=3^3=27$$

شرایط و فرم اشتراک مجلّه ریاضی برهان

۱ ـ واریز مبلغ ۹۰۰۰ ریال علی الحساب برای یک دوره (۴ شماره) به حساب ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبه کریمخان زند به نام مشترکین انتشارات مدرسه و ارسال اصل فیش همراه با فرم تکمیل شده اشتراک به نشانی انتشارات مدرسه.

۲ ـ واحدهای آموزشی می‌توانند دانش‌آموزان خود را به صورت گروهی مشترک نمایند.

نشانی : تهران ، خیابان سپهبد قرنی ، نرسیده به پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶

کدپستی ۱۵۹۸۸ ــ صندوق پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

تلفن: ۹-۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس ۸۸۲۰۵۹۹ ــ ۸۹۰۳۸۰۹

اطلاعات مشترک

در اینجا چیزی ننویسید

مشخصات مشترک برای افراد

نام خانوادگی   نام   نام پدر

تاریخ تولد   محل تولد   پایه تحصیلی

مشخصات مشترک برای واحدهای آموزشی ـ ادارات و سازمانها

نام واحد آموزشی   نام مدیر مسئول

نام سازمان

مقطع   دخترانه

پسرانه

نشانی

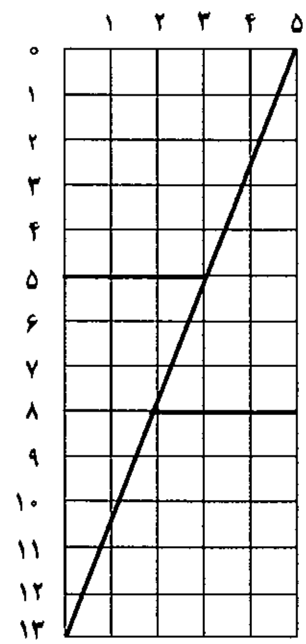
استان   شهرستان   خیابان   کوچه

پلاک   کدپستی   مبلغ واریزی   شماره فیش



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱ :



پاسخ ۲ :

۲-به جای در نظر گرفتن تعداد نقطه ها عدد مربوط به آنها رادر نظر می گیریم. روی یکی از سطوح عدد ۱رامی نویسیم،پس از آن ۵ عدد می ماند. اینک پنج حالت برای انتخاب سطحی که مقابل سطح ۱ می باشد وجود دارد. پس از انجام این عمل باید روی چهار سطح باقیمانده ۴ عدد دیگر راکه دایره وار روی این چهار سطح قرار میگیرند، بنویسیم.

فرض می کنیم عدد ۵ یکی از این چهار عدد باشدکه آنراروی یکی ازاین چهار سطح می نویسیم.

اینک سه حالت برای انتخاب سطحی که مقابل آن است وجوددارد. پس ازانجام این کار دوعدد باقی ماند که باید روی دوسطح مقابل نوشته شوند،که این کار نیزبه دوصورت ممکن است.

پس در مجموع تعداد حالتهای ممکن برابراست با ۳۰=۲×۳×۵ ، یعنی۳۰ حالت مختلف برای گذاشتن علامت روی شش وجه یک مهره باتوجه به شرط مسأله وجود دارد.

پاسخ ۳ :

x = ۸

پاسخ ٤ :

از نقطه ای که اولین بار مهرداد خانمش را می بیند،تا رفتن به ایستگاه وبرگشتن از آنجاورسیدن به همان نقطه،با اتومبیل ۲۰ دقیقه طول کشیده است،پس برای رفتن از این نقطه به ایستگاه راه آهن با اتومبیل ۱۰ دقیقه وقت لازم است.

در مدت ۲۵ دقیقه ای که مهرداد به راه رفتنش ادامه می دهد، اتومبیل از اولین نقطهٔ ملاقات به ایستگاه می رود وبرمی گردد تامهرداد را می بیند وسوار می کند.

بنابراین فاصلهٔ بین نقطهٔ اولین ملاقات مهرداد باخانمش، ونقطه ای که اورا سوار می کند با اتومبیل، در مدت ۵=۲۰-۲۵ دقیقه پیموده می شود.

مهرداد این مسافرت را ۲۵دقیقه طی کرده است. پس سرعت او $\frac{1}{5}$ سرعت اتومبیل است.

بین ایستگاه و اولین نقطهٔ ملاقات مهرداد وخانمش با اتومبیل۱۰دقیقه راه است، پس مهرداد این مسافت را در۵۰ دقیقه پیموده است. بنابراین مهرداد ۵۰ دقیقه بعد ازرسیدنش به ایستگاه و۱۰ دقیقه جلوتر از ترن معمولی اش به اولین نقطهٔ ملاقات رسیده است.

در نتیجه اختلاف زمان حرکت بین دوترن برابر است با۶۰=۱۰+۵۰دقیقه، پس ترنی که آنروز مهرداد سوار شده است، یک ساعت زودتر از همیشه حرکت کرده است.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



جدید

هندسهٔ دلپذیر

پژوهش و نگارش: دکتر احمد شرف‌الدّین / ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب «هندسهٔ دلپذیر» اثری است که می‌تواند مورد استفادهٔ استادان، دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان قرار گیرد. مطالب این کتاب برای دانش‌آموزان، بسیار سودمند و آموزنده است و علاقهٔ آنان را به هندسه می‌افزاید و دبیران می‌توانند برای دلپذیر ساختن تدریس خود، از مطالب این کتاب، یاری جویند.

در بخش اوّل این کتاب، با عنوان «هندسه دلها» دربارهٔ قدرت تخیل آفرین استادان نقشگر ایرانی در کاشیکاریها، قالیها و ... سخن رفته است.

در بخش دوم کتاب، اساس هندسیِ تعداد زیادی از دستگاه‌های صنعتی شرح داده شده است.

در بخش سوم کتاب، مثالهایی برای طرح و حل مسائل جبر و آنالیز با هندسه ارائه شده است.

در بخش چهارم،چند مثال هندسی، که از آن نتایج فلسفی مهم و جالب حاصل می‌شود، مطرح شده است.



جدید

رام کردن و پرورش مسأله‌های ریاضی

عبدالحسین مصحفی / ناشر: انتشارات مدرسه

مؤلف محترم در این کتاب، با شیوه‌ای داستان‌گونه و بسیار شیوا، اصول اولیهٔ برخورد با مسائل ریاضی و چگونگی راه‌یابی به الگوریتم حلِ آن را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد.

این کتاب، ثمرهٔ بیش از نیم قرن سابقهٔ تدریس، تألیف، ترجمه و سردبیری مجلهٔ ریاضی (یکان) می‌باشد.

مؤلف محترم در ضمن این‌که به دانش‌آموزان و خوانندگان، نحوهٔ برخورد با مسائل ریاضی و یا به عبارت دیگر، رام کردن و پرورش مسأله‌های ریاضی را یاد می‌دهد؛ نکات و ظرایف بسیاری را در آموزش ریاضی گوشزد می‌کند که مطالعهٔ کتاب را جذّابتر می‌نماید.

مطالعه و استفاده از این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان، دبیران، دانشجویان و همهٔ علاقمندان به ریاضیات توصیه می‌کنیم.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ می‌باشند:

۱ ـ ورودی به نظریهٔ اعداد/ حمید رضا امیری ـ مازیار رامین راد ۲ ـ دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمّد عابدی
۳ ـ انتگرال معین و کاربردهای آن/ محمّد عابدی ۴ ـ بردار / سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی
۵ ـ نابرابریها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر ۶ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۷ـ آمار و مدل‌سازی / دکتر عین‌ا... پاشا ۸ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری

☆ *جلد اول دائرةالمعارف هندسه بصورت دومجلّدجدید (جلداوّل وجلددوم) زیرچاپ است.*

ابومحمود حامد بن خضر خجندی

ریاضیدان مسلمان و منجم معروف ایرانی (در حدود ۳۹۰)

ابومحمود حامد بن خضر خجندی از بزرگان علمای ریاضی و هیأت و به قول بیرونی، یگانهٔ زمان خود در ساختن اصطرلابها و افزارهای نجومی بود. وی در زمان فخرالدولهٔ دیلمی در ری می‌زیست. چنانکه خواهیم دید، خجندی برهانی بر امتناع حل معادلهٔ $x^3 + y^3 = z^3$ آورده است. وی یکی از کسانی است که اختراع «شکل مغنی» بین آنان، مورد بحث است. شکل مغنی، یعنی رابطهٔ زیر در مثلث کروی غیر قائم الزاویهٔ ABC:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

وجه تسمیهٔ آن شکل به «مغنی» این است که این رابطه، منجمان را از «شکل قطاع» که به کاربستنش مشکل بود، بی‌نیاز می‌ساخت. ابوریحان بیرونی در کتاب *«مقالید علم الهیئه»* و نصیرالدین طوسی در کتاب *«کشف القناع عن اسرار شکل القطاع»* برهان خجندی را برای شکل مغنی ثبت کرده‌اند.

بیرونی در شهر ری با خجندی ملاقات کرده و کتابی از وی دیده بوده است که در آغاز آن کتاب، خجندی «شکل مغنی» را بیان نموده و همهٔ مطالب کتاب را بر آن شکل، بنا کرده و آن شکل را «قانون الهیئه» نامیده بوده است. بیرونی خود در این باره نوشته است: «سپس به شهر ری رفتم و در آن‌جا ابومحمود حامد بن خضر خجندی را ملاقات کردم و او کتابی به من نشان داد که دربارهٔ «اعمال اللیل بالکواکب‌الثابته» نوشته و در اوایل آن همین قضیه را با برهان طولانی دیگر، بیان کرده و آن را «قانون الهیئه» نامیده بود و همهٔ اعمال آن کتاب را بر آن بنا نهاده بود.»

اثر ریاضی موجود وی

از خجندی چند کتاب دربارهٔ نجوم و افزارهای نجومی در دست است. اما تنها اثر ریاضی که از وی باقی مانده، رساله‌ای است مختصر متعلق به یک مجموعه در کتابخانهٔ خدیویهٔ مصر. از جمله رسائل آن، مجموعهٔ رساله‌ای است موسوم به: «مسائل متفرقة هندسیة لبعض العلماء» این رساله، دارای دوازده مسأله است. یکی از این مسأله‌ها را که اثر خجندی است، «کارل شوی» در آخر یکی از مقالات خود به زبان آلمانی ترجمه کرده است.

مسألهٔ مذکور، که در واقع قضیه‌ای از مثلثات کروی است، این است:

قضیه. هرگاه دو دایرهٔ عظیمه در سطح کره، یکدیگر را به زاویهٔ معینی، مثلاً در نقطهٔ Z قطع کنند و روی دایرهٔ عظیمهٔ اول قوسهای ZT و ZC را در یک جهت و قوس ZF را در جهت دیگر جدا کنیم و از نقاط T و C و F دوایر عظیمه‌ای بر دایرهٔ عظیمهٔ دوم عمود کنیم و پای عمودها را به ترتیب K و D و Q بنامیم، روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{\sin TZ}{\sin TK} = \frac{\sin ZC}{\sin CD} = \frac{\sin ZF}{\sin FQ}$$

استدلال این قضیه را در مقالهٔ کارل شوی خواهید یافت.

خجندی و معادلهٔ $x^3 + y^3 = z^3$

در بیشتر کتابهای تاریخ ریاضیات می‌نویسند که خجندی برهان ناقصی بر عدم امکان حل این معادله آورده است. امّا این‌که این استدلال چه بوده و چرا ناقص بوده و منبع این خبر چیست، سخنی به میان نمی‌آورند.

در هر صورت، تردیدی نیست که خجندی رساله‌ای دربارهٔ حل معادلهٔ مذکور نوشته یا کتابی تألیف کرده بود که حل معادلهٔ مذکور جزو مطالب آن بوده و آن رساله یا کتاب از بین رفته است.

✹ برگرفته از کتاب زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی - ابوالقاسم قربانی - مرکز نشر دانشگاهی

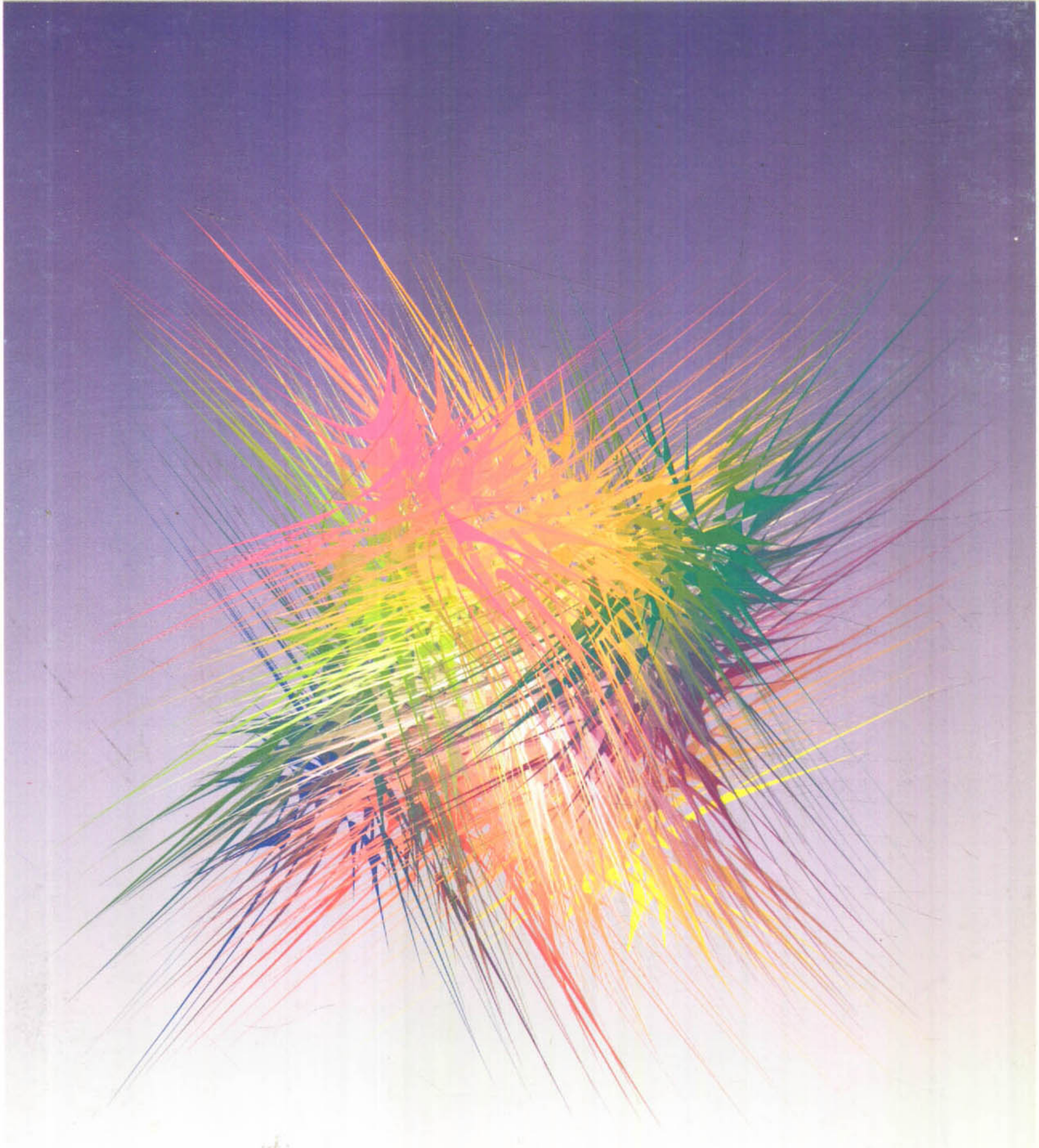
مجله ریاضی

برهان

۲۹

برای دانش آموزان دبیرستان

سال نهم، شماره اول، تابستان ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحيم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

مطالب این شماره

■ سال نهم، تابستان ۱۳۷۸، شمارهٔ اول.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حک و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقاله ها آزاد است.
■ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
■ مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

کد ۷۵۵/۱

حرف اوّل

حافظ، وظیفهٔ تو دعا گفتن است و بس　　　در بند آن مباش که نشنید یا شنید

مهربانم!

می خواهم تو را پند بدهم؟ نه. می خواهم مقدمه ای بنویسم بر اندرزنامه؟ نه! می خواهم با «تو» صمیمانه حرف بزنم؛ البته که معلمانه هم! برهان به دوستی و آشنایی با تو افتخار می کند. همهٔ آن عزیزانِ همراه و همدل که در مایه وری برهان، نقش دارند و حضور زنده، خیر و سعادت و بهروزی تو را می خواهند و آراسته بودنِ گوهر وجودِ تو را به نور ایمان.

اگر هر از گاهی در گوشه ای از برهان، کلام رنگِ سفارش و نصیحت می گیرد، به خاطر حفظ تناسب است! به خاطر حفظ اعتدال و میزان و رعایتِ حساب و کتاب است و دو دوتا چهارتا! مگر می شود که ماهنامه ای یا فصلنامه ای ریاضی، دور از حساب حرف بزند؟!

حرفِ حساب این که عزیزانِ نوجوان ما، قدر گوهرِ وجود معلمان خود را بدانند! همهٔ معلمان، عزیزند و سرفراز؛ اما نگین وجودِ معلمِ درس ریاضی را باید که ارج نهاد.

«او» با عشق و سوز و درایت می گوید؛ «او» در پرتو ایمان و سواد و تجربه ای که دارد، با آن بیانِ روشن و سرِ حوصله، به تو درس می دهد و سعی می کند که تو بهتر و بیشتر بدانی و برای فردا آماده شوی و مهیّا. جای تأسف و دریغ است که اگر سکوت و نظم و رعایتِ ادب تو، کار را بی سامان کند و آشفته. گاهی گفتن و چگونه گفتن، هنر است و گاهی هنر، در نوع سکوت است!

معلم که درس می دهد، سکوت و خوب شنیدن و حوصله و دقّتِ تو، به او شوق و ذوقِ بهتر گفتن را می دهد.

عزیزم!

مهربانم!

تو نمی خواهی که معلم، بهتر و بیشتر بگوید و تو همراه با چراغ و آینه زندگی کنی؟!

می دانم که خوبان، راه و رسمِ زندگی در خوبیها را می دانند. می دانم که ...

سردبیر

از تاریخ بیاموزیم (۳)

● پرویز شهریاری



دوره‌های تکامل تاریخ ریاضیات[1]

گفتیم که ریاضیات، برای پیشرفت خود، راهی دراز پیموده است: برای این که بتوانیم، با سادگی بیشتر، قانونمند بودن این پیشرفت را نشان دهیم و دیدگاه‌های اصلی، که راه را برای این پیشرفت گشوده‌اند، تشخیص دهیم، باید پیش از همه، دوره‌های تکامل ریاضیات را بروشنی از هم جدا کنیم.

این پرسش پیش می‌آید که چگونه این دوره‌ها را تقسیم کنیم و چه اصلهایی باید راهنمای این تقسیم باشد؟ آیا باید این دوره‌ها را به دلیل دانشمندان برجسته‌ای تعیین کرد که مسأله‌های زیادی در جهتهای مختلف طرح کرده‌اند و در طول سالهای زیادی دربارهٔ مسیرهای اساسی فکری که باید در ریاضیات دنبال می‌شد، نقشی تعیین‌کننده داشته‌اند؟ یا آن که باید دوره‌های مسیر تاریخی ریاضیات را به‌وسیلهٔ ملتهایی تعیین کرد که در گذشته توانسته‌اند به گنجینهٔ دانش بشری، ذخیرهٔ قابل توجهی بیفزایند؟ یا شاید بتوان دوره‌های مختلف تاریخ ریاضیات را، با توجه به تقسیم تاریخ جامعهٔ انسانی، براساس شکلهای مختلف تولید اقتصادی، طرح ریخت؟ در این صورت، باید از ریاضیات جامعهٔ ابتدایی، دوران نظام بردگی، فئودالیسم، سرمایه‌داری و دوران پس از آن صحبت کرد.

ولی روشن است که هیچ یک از این سه روش، نمی‌تواند راضی‌کننده باشد. در واقع، اگر دوره‌های مختلف پیشرفت ریاضیات را، برای نمونه، با روش اخیر بپذیریم، به‌طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید که: بین ریاضیات دوران بردگی با ریاضیات جامعهٔ ارباب و رعیتی چه اختلافی وجود دارد؟ یا چه مرزی، ریاضیات نظام سرمایه‌داری را از ریاضیات نظام فئودالی جدا می‌کند؟... پرسشهایی که بدون پاسخ می‌مانند.

این روشهای تقسیم دوره‌های گذشتهٔ تاریخ ریاضیات، از این جهت راضی‌کننده نیستند که یا بر پایهٔ جنبه‌های خاص و غیراساسی تکامل دانش قرار گرفته‌اند و یا از ویژگیهای درونی ریاضیات، که بسیار جدّی است، منحرف شده‌اند. وقتی از تاریخ ریاضیات و مرحله‌های آن سخن می‌گوییم، در درجهٔ اوّل، باید به شرطهای

اصلی مربوط به تکامل خود ریاضیات بپردازیم و سپس، بستگی این شرطها و دلیل تأثیر آنها را در چیزهایی از نوع اقتصاد، نظامهای اجتماعی، تکامل صنعت و دانشهای تجربی، دیدگاه‌های گوناگون فلسفی و غیر آن، بررسی کنیم.

تاریخ ریاضیات را به چهار دورهٔ مختلف می‌توان تقسیم کرد:

۱. دورهٔ زایش ریاضیات؛

۲. دورهٔ ریاضیات مقدماتی؛

۳. دورهٔ ریاضیات با کمیتهای متغیر؛

۴. و سرانجام، دورهٔ ریاضیات کنونی.

آغاز دورهٔ نخست، در ژرفای سده‌های گذشته کم می‌شود. تردیدی نیست که مفهومهای نخستین ریاضیات، با خود وجود جامعهٔ انسانی همراه است: تصورهایی از نوع «بیشتر» و «کمتر»، «برابری»، «فاصلهٔ کوتاهتر»، در مرحله‌های ابتدایی انسانهای نخستین هم، ولو به صورت ناآگاهانه، وجود داشته است. نیازهای زندگی، انسان را وامی‌داشت تا به محاسبه بپردازد و راهی برای اندازه‌گیری طول، سطح یا حجم پیدا کند. ذخیرهٔ آگاهیهایی که روی هم انباشته می‌شد، فزونی می‌یافت. ولی این، هنوز حکم یک مجموعهٔ پراکنده را داشت و به عنوان عنصرهای شاخهٔ مستقلی از دانش، که موضوع خاص و روش کار خاصی داشته باشد، احساس نمی‌شد. می‌توان دورهٔ زایش ریاضیات را، به عنوان یک دانش مستقل، نزدیک به شش سده پیش از میلاد دانست؛ ولی این، یک تاریخ مشروط است: زیرا بسیاری از ملتها خیلی دیرتر توانستند درک ریاضی خود را، به این دوره برسانند (و هستند قومهایی که هنوز به این مرحله نرسیده‌اند). در مقالهٔ بعدی خواهید دید، از نوعی محاسبه صحبت شده است که در بین برخی قومها، در سدهٔ نوزدهم و آغاز سدهٔ بیستم دیده شده است.

در این دوره، ریاضیات مقدماتی پایه‌ریزی شده است. انسانهای ناشناخته‌ای با کار خلاق خود و براساس تجربه‌های بسیار، مسأله‌هایی را طرح کردند و به گنجینهٔ دانش بشری افزودند. این آفرینندگان بی‌نام دانش بشری، به دلیل نیازهای زندگی اقتصادی، به کشفهای خود جهت دادند، بتدریج راه عمل کردن با عددهای طبیعی را شناختند، سپس به بررسی عددهای کسری راهنمایی شدند و شروع به محاسبهٔ حجم جسمهایی کردند که کم و بیش پیچیده بود. در همین دوره، وسیله‌های کمکی برای ساده‌تر کردن محاسبه (چه محاسبهٔ مربوط به آنچه در اختیار داشتند و چه برای محاسبه‌های بازرگانی و داد و ستد) اختراع شد. گرچه این اختراعها، در دید ما بسیار ساده‌اند، گرچه دانش بشری در این دوره، خیلی ابتدایی است؛ ولی همین گامهای نخستین بود که پایه‌های پیشرفت فرهنگ انسانی را ریخت. اگر انسان امروز، توانایی و دانش بی‌اندازه‌ای دارد، تنها به این دلیل است که نسلهای متوالی، با تکیه به تجربه‌ها و کشفهای نسلهای پیشین، توانستند سطح دانش خود را روزبه‌روز بالاتر ببرند.

روشن است برای دانش ریاضیات در این دورهٔ کهن، بیش از همه یادداشتها و صورت حسابهای مربوط به زندگی اقتصادی آن زمان، اهمیت دارد.

دورهٔ دوم، همان‌طور که گفتیم، دورهٔ ریاضیات مقدماتی نامیده می‌شود. آنچه امروز به‌طور عمده در دبیرستان یاد می‌گیریم، در این دوره شکل گرفته است. ولی آنچه به‌طور اساسی، این دوره را از گذشته جدا می‌کند، این است که مفهومهای ریاضی، به صورتی علمی درآمدند؛ بویژه، سده‌های ششم یا پنجم پیش از میلاد را می‌توان آغاز شکل گرفتن ریاضیات، به عنوان دانشی که موضوع ویژهٔ خود و روش بررسی خاص خود را دارد، به‌شمار آورد. ریاضیات از مجموعهٔ پراکندهٔ «نسخه‌هایی» که برای زندگی روزمره قابل استفاده بود، به یک دستگاه معرفت علمی تبدیل شد. در این دوره، هندسه، پایهٔ نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات روی صفحه و کره به نظم درآمد. ریاضیات، به کندی و بسختی خود را از قید تجربه آزاد کرد و درستی نتیجه‌گیریها را، نه در مشاهده و آزمایش روی نمونه‌های خاص، بلکه از راه استدلال منطقی و برای همهٔ حالتهای ممکن، به‌دست می‌آورد.

پایان دورهٔ دوم را باید آغاز سدهٔ هفدهم میلادی دانست؛ زمانی به دلیل نیاز به مطالعهٔ حرکت و تغییر از دیدگاه ریاضیات، اندیشه‌ها و مفهومهای تازه‌ای در ریاضیات پدید آمد. بی‌تردید بررسی مفهومهای تازه، به مسأله‌هایی نزدیک بود که در برابر جامعهٔ بشری قرار داشت. اگر به یادآوریم که این دوره، زمان کشفهای بزرگ جغرافیایی و پیشرفت بی‌اندازهٔ دریانوردی و توجه بیش از اندازه به آگاهیهای اخترشناسی است، اگر به یاد آوریم که همین دوره،

زمان رشد تند تولید کارگاهی و پیشرفت رشتهٔ توپخانه است، آن‌وقت بسادگی قانع می‌شویم، همهٔ مسأله‌هایی که به این مناسبتها طرح می‌شد، نمی‌توانست براساس جبر و هندسهٔ مقدماتی حل شود؛ به اندیشه‌ها و مفهومهای تازه‌ای نیاز بود که در واقع هم به‌وجود آمدند. این اندیشه‌ها در نقطه‌های مختلفی از سرزمین اروپا و بویژه در کشورهایی که صنعت و بازرگانی رونق بیشتری داشت، پیدا شد، و به این ترتیب شرطهای لازم، برای آغاز دورهٔ سوم پیشرفت فراهم شد.

دورهٔ ریاضیات با کمیتهای متغیر، به این ترتیب، مشخص می‌شود که ریاضیات به بررسی جریانها می‌پردازد. در نظر اوّل، ریاضیات این دوره، به پژوهش و بررسی کمیّتهای متغیر یک تابع مربوط می‌شود. اندیشهٔ محورهای مختصات به‌طور اساسی، به‌گونه‌ای به‌روش هندسی تبدیل شد که به صورت رابطه‌های تابعی نشان داده می‌شود. به شاخه‌هایی که پیش از آن در ریاضیات وجود داشت، هندسهٔ تحلیلی و آنالیز ریاضی هم اضافه شد. آموزش تابع، و به حساب آخر، بررسی کمیتهای متغیر، در سرفصل ریاضیات قرار گرفت. بررسی شکلهای فضایی هم، به یاری آنالیز ریاضی آغاز شد. ولی در هر حال، ریاضیات از مرزهای فضای واقعی سه‌بعدی خارج نشد. همچنین قانونهای کمیّتی، تنها به وسیلهٔ کمیّتهایی بیان می‌شد که مقدارهای عددی را می‌پذیرفتند. چه مقدارهای متغیرها و چه مقدارهای تابعها، تنها می‌توانستند مقدارهای عددی را بپذیرند.

روشن است که دورهٔ سوم، نه تنها برای خود ریاضیات، مرحلهٔ تکاملی بزرگی بود؛ بلکه برای تعبیر ریاضی پدیده‌های طبیعت و هم برای پیشرفت صنعت، بارور و سازنده بود.

با تکیه برپیشرفت آنالیز ریاضی، توانستند قانونهای اساسی فیزیک را به صورت ریاضی بیان کنند؛ از راه محاسبه، به کشفهای تازه‌ای دربارهٔ پدیده‌های فیزیکی دست یافتند که تا آن زمان، از راه تجربه و آزمایش مشاهده نشده بود. به عنوان یکی از نمونه‌های درخشان توانایی آنالیز ریاضی و شناخت پدیده‌های طبیعی، کشف سیارهٔ جدید دستگاه خورشیدی است که تقریباً در یک زمان، به‌وسیلهٔ دو اخترشناس، «آدامس» و «لوّریه» انجام شد. بعدها در سال ۱۹۳۰ میلادی، از همین راه «پلوتن» سیارهٔ نهم دستگاه خورشیدی هم کشف شد که مدار آن، خیلی پیشتر، در سال ۱۸۱۵ به‌وسیلهٔ «ب. لوول» اخترشناس امریکایی محاسبه شده بود.

ولی سدهٔ نوزدهم، تنها سدهٔ پیشرفت کمیّتی ریاضیات نبود، تنها امکانهای تازهٔ بررسی پدیده‌های طبیعت را از دیدگاه ریاضیات همراه نداشت؛ بلکه به دلیل تأثیر جدّی و متقابل دانشهای تجربی و ریاضیات در یکدیگر، منجر به تغییر کیفی خود ریاضیات شد. به مناسبت این تغییرها، ریاضیات در نیمهٔ دوم سدهٔ گذشته، چهرهٔ خود را چنان به‌طور اساسی و جدّی تغییر داد که دیگر به آستانهٔ مرحلهٔ تازهٔ خود، مرحلهٔ چهارم تکامل ریاضیات، رسید.

چه خطهایی، این مرحلهٔ چهارم را از سه مرحلهٔ پیشین جدا می‌کند؟ پیش از هر چیز، موضوع ریاضیات، بی‌اندازه گسترش یافته است. ریاضیات، بجز کمیّتهای عددی، از کمیتهای دیگری هم، مثل بردارها، تانسورها و سینورها استفاده می‌کند. همراه با فضای سه بعدی اقلیدسی، به بررسی چنان فضاها و موضوعهای هندسی می‌پردازد که بکلی طبیعت دیگری دارند. درستی منطقی هندسه‌های نااقلیدسی، مثل هندسهٔ اقلیدسی تأیید شده است. فضاهای چند بعدی و سپس فضای nبعدی بررسی می‌شود. این موضوعهای تازه را، تا اندازهٔ زیادی، فیزیک در برابر ریاضیات گذاشته است. مضمون جبر به طور اساسی تغییر کرده است. جبر، از دانشی که به روشهای حلّ معادله‌های جبری می‌پرداخت، به دانشی تبدیل شده است که دستگاههایی از چیزهای با طبیعتهای مختلف را مطالعه می‌کند و عملهایی را دربارهٔ این چیزها انجام می‌دهد که، از نظر ویژگی، بی‌شباهت به عملهای جمع و ضرب نیست.

تمامی شیوهٔ اندیشهٔ ریاضی دگرگون شده است و ریاضیدانان، باز هم تلاش می‌کنند دایرهٔ این مفهومها را (مفهومهایی را که در حوزهٔ عمل ریاضیات قرار دارند) گسترش دهند. اگر در گذشته، صدها سال وقت لازم بود تا عددهای منفی یا مختلط پذیرفته شوند، امروزه به هر اندازه که لازم باشد، دستگاههای جبری با کیفیتهای گوناگون ساخته می‌شود. در نمونهٔ هندسه لباچوسکی، امکان پدید آوردن نظریه‌های ریاضی تازه‌ای، با روشهای انتزاعی، مطرح است. با همهٔ اینها، روشن شده است که نظریه‌های ریاضی، که به این ترتیب شکل می‌گیرند، می‌توانند برای تجزیه و تحلیل پدیده‌ها و

روندهای موجود در طبیعت، به کار روند. به همان اندازه که ریاضیات به سمت انتزاع می‌رود، به همان اندازه که به ظاهر از مشاهدهٔ مستقیم پدیده‌های طبیعت دور می‌شود، به همان اندازه هم نیرومندتر می‌شود و امکان بیشتری برای بررسی مجموعه‌ای از ویژگیهای طبیعت پیدا می‌کند.

به این ترتیب، در همان حال که مضمون ریاضیات گسترش یافته و در جهت مفهومهای تازه‌ای پیش‌رفته است، به صورت شگفتی‌آوری ژرفتر شده و بستگی همه جانبه و بی‌نظیری با دانشهای تجربی و حالتهای کاربردی پیدا کرده است. برای نمونه، می‌توان از خودکار کردن ادارهٔ سازمانهای تولیدی نام برد که با استفادهٔ گسترده از رایانه‌ها (که بر پایهٔ توضیح ریاضی و منطقی مسیر صنعت ساخته شده‌اند) پیشرفت بی‌اندازه‌ای کرده است.

اکنون که با دیدی کلی و کوتاه، تاریخ ریاضیات را بررسی کردیم، می‌توانیم متوجه شویم که بین پیشرفت ریاضیات و دگرگونیهای اقتصادی و اجتماعی، بستگی مستقیمی وجود ندارد. در جریان صدها سال، شکل تازهٔ نظام اجتماعی، از پیشرفت دانش جلو گرفت و آن را به عقب برد. کافی است بحران اندیشهٔ علمی را در طول سالهای سده‌های میانه به یاد آوریم. موفقیّتهای دانش یونانی، بکلی فراموش شد. پس از پیشرفت استثنایی ریاضیات در یونان باستان، سده‌هایی بر جهان گذشت که در اروپا بسختی می‌شد کسی را یافت که از عهدهٔ انجام چهار عمل اصلی حساب برآید.

ولی تأثیر تکامل جامعه و تغییر رابطهٔ تولیدی را بر پیشرفت دانشها، نمی‌توان این‌گونه ساده، شبیه آنچه دربارهٔ توقف پیشرفت دانشها و به وجود آمدن کیفیت تازه‌ای در معرفت بشری، در نظر گرفت. ریاضیات، همراه با طبقه‌های اجتماعی از میان نمی‌رود و با نابودی یک نظام اجتماعی و به قدرت رسیدن نظامی دیگر، نابود نمی‌شود یا تغییر ماهیت نمی‌دهد. قانونهای حساب توانسته است به همهٔ شکلهای مختلف اجتماعی و به همهٔ طبقه‌ها خدمت کند... مسأله را باید به صورت دیگری دید. هر شکل تازهٔ نظام اجتماعی با آرزوهای جدید علمی و با دیدگاه‌های جدیدی نسبت به زندگی اجتماعی و هدف آن، همراه است. به این دلیل، برخورد نسبت به دانشها و تصور دربارهٔ آن تغییر می‌کند، سمت تازه‌ای برای بررسیهای علمی پیدا می‌شود و در برابر قانونهای علمی، مسأله‌های تازه‌ای قرار می‌دهد.

لازم است دوباره نحوهٔ تقسیم تاریخ ریاضیات را به دوره‌های مختلف یادآوری کنیم. در واقع، بررسیهای مربوط به ریاضیات مقدماتی، بعدها و در گرماگرم دورهٔ سوّم هم ادامه داشت. این بررسیها، امروز هم کنار گذاشته نشده است و بی‌تردید در آینده ادامه می‌یابد. از سوی دیگر در کارهای ارشمیدس (سدهٔ سوّم پیش از میلاد) نمونهٔ کامل آغاز محاسبهٔ انتگرالی دیده می‌شود. ولی این مطلب به آن معنا نیست که، آغاز دورهٔ سوّم را، از زمان ارشمیدس بدانیم؛ زیرا ریاضیات یونانی در مجموع خود، خیلی دور از آنالیز ریاضی بود و بویژه شرایط مادی تکامل جامعه، نمی‌توانست مسأله‌هایی را مطرح کند که به آنالیز ریاضی مربوط شوند. تقسیم تاریخ ریاضیات به دوره‌های مختلف، تصوری کلی دربارهٔ قانونهای اصلی تکامل ریاضیات و رهنمونهای کلی مفهومهای آن در دوره‌های مختلف می‌دهد. این تقسیم‌بندی، وسیله‌ای است برای درک خطهای کلی پیشرفت ریاضیات از یک پله به پلهٔ بعدی و این که، هر کدام از این پله‌ها، بر پلهٔ پیش از خود تکیه دارد و در ضمن، شرایط لازم را برای شکل گرفتن پلهٔ بعدی فراهم می‌کند. کشفهای جداگانهٔ دانشمندان که موجب پیشرفت دانش می‌شود، می‌تواند گواهی بر این مطلب باشد.

لایب‌نیتس هم، دربارهٔ اهمیت بررسی تاریخ دانش برای «هنر کشف کردن» اشاره‌هایی دارد. در یکی از نوشته‌های او که پس از مرگش چاپ شد، آمده است:

«این مطلب، بسیار جالب است که بتوانیم سرچشمهٔ کشفهای مهم را پیدا کنیم؛ بویژه کشفهایی که با نیروی اندیشه، و نه به‌صورت تصادفی انجام گرفته است. تاریخ نه تنها از این جهت جالب است که پاداش هر کسی را درخور خودش می‌دهد و دیگران را برمی‌انگیزد که به این جمع بپیوندند؛ بلکه بیش از همه، از این جهت مهم است که آشنایی با نمونه‌های اساسی در تکامل هنر کشف کردن، نقشی جدّی برای دانش دارد.»

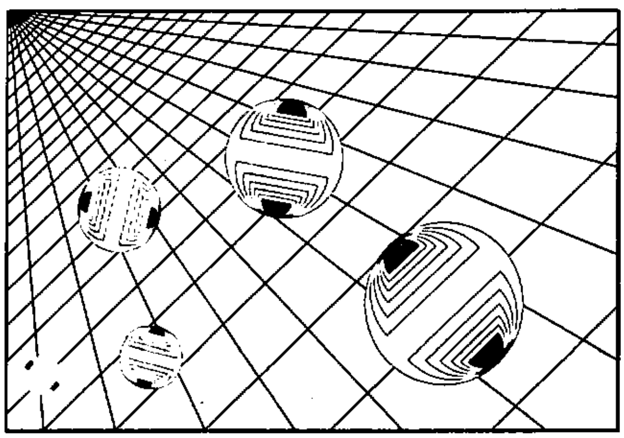
به این اعتقاد لایب‌نیتس، بویژه در زمان ما، باید تکیه کرد؛ زیرا اکنون از همهٔ افراد جامعه، توقّع می‌رود که ویژگی و توانایی «هنر کشف کردن» را داشته باشند.



در پایان، یادآور می‌شوم، مدتهاست که تاریخ ریاضیات، اهمیت و موجودیت خود را به کرسی نشانده است. نخستین تاریخ هندسه، در سدهٔ چهارم پیش از میلاد، به‌وسیلهٔ اُدموس رودسی، شاگرد ارسطو نوشته شد. لایب‌نیتس رساله‌ای دربارهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی نوشت. در میانهٔ سدهٔ هجدهم (در سال ۱۷۵۸ میلادی) مونتوکلا، تاریخ ریاضیات را در دو جلد تنظیم کرد. پس از این زمان، تاریخ ریاضیات، به عنوان موضوعی که علاقه‌مندی بسیاری را به خود جلب کرده بود، درآمد؛ بویژه هر دانشمندی دربارهٔ کارهای خودش، به‌طور منظم به بررسیهای تاریخی توجه کرده است؛ زیرا احساس می‌کرد که باید مقام اندیشه‌ها و نوآوریهای خود را در بین آگاهیهایی که از پیش روی هم جمع شده بود، پیدا کند. تا اندازهٔ زیادی، معلمان هم به سوی تاریخ ریاضیات کشش پیدا کردند؛ زیرا از این راه، نه تنها می‌توانستند مجموعهٔ گرانبهایی از آگاهیها را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند؛ بلکه در ضمن، به این وسیله می‌شد برای تنظیم بحثهایی که در نوآوریهای آینده و پیشرفت فرهنگ انسانی اثر کرده است، راهی جست و جو کنند.

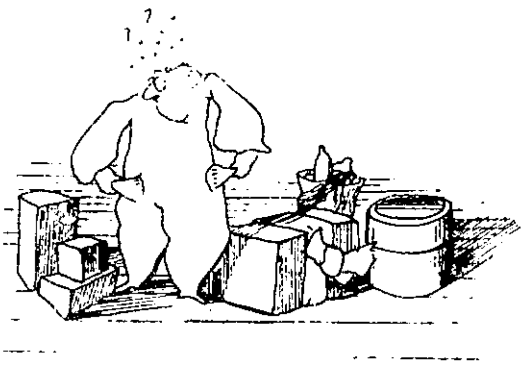
پاورقی

۱. دیدگاه نویسندهٔ مقاله را دربارهٔ نحوهٔ تکامل ریاضیات، بدون هیچ تغییری آورده‌ایم؛ ولی این دیدگاه با همهٔ سودمندیهایی که دارد، نمی‌تواند حق همهٔ ملتها را در ساختمان ریاضیات امروزی ادا کند. در بخش دوم کتاب، که بعد از مقاله‌های استادان تاریخ ریاضیات می‌آوریم، با گستردگی بیشتری در این‌باره صحبت خواهیم کرد.





تفریح اندیشه ۱

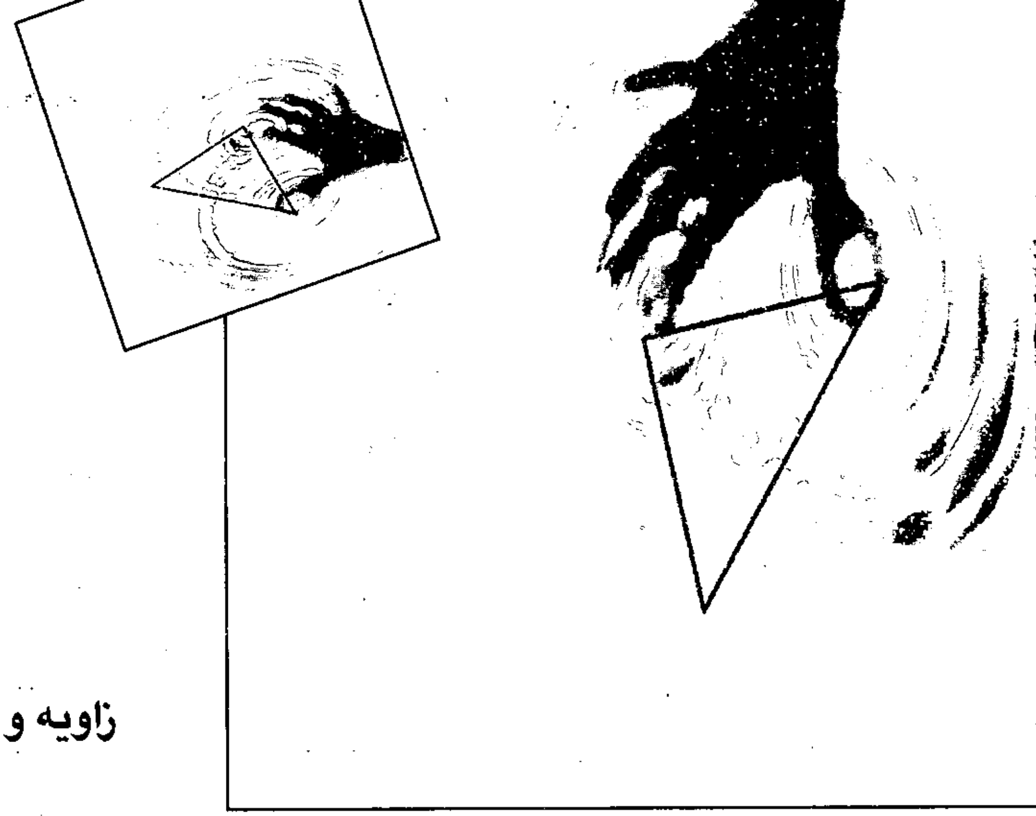


مهرداد تمام پول خود را در پنج مغازه‌ای که از آنها خرید کرده بود خرج کرد. او در هر مغازه پنج ریال بیشتر از نصف مبلغی را که به هنگام ورود به آن مغازه داشت، خرج کرده است.

مهرداد قبل از خرید چقدر پول داشته است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



در حاشیهٔ مثلثات

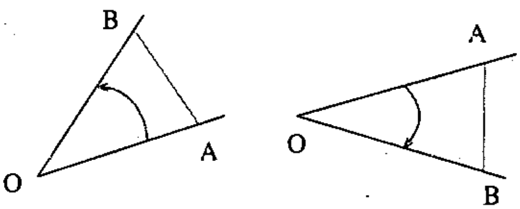
(قسمت اوّل)

زاویه و مقیاسهای اندازه‌گیریِ آن

● حمیدرضا امیری

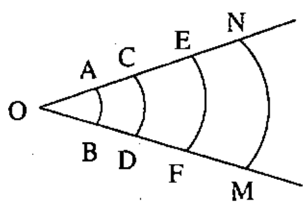
تعریف زاویه:

هرگاه نیمخطی مانند OA، حول یکی از نقاطش دوران کند (برای راحتی نقطهٔ ابتدا یعنی O را در نظر می‌گیریم) تا به وضعیت جدید OB برسد (مطابق شکل ۱). آن قسمت از صفحه که باید نیمخط OA جاروب کند تا بر وضعیت ثانویه خود یعنی OB منطبق شود، زاویه بین OA و OB می‌نامیم. به‌طور کلّی، زاویه از دوران یک نیمخط حول یکی از نقاطش حاصل می‌شود.



شکل ۱

با توجه به تعریف زاویه، واضح است که می‌توان زاویه‌ای چون $\angle MON$ را (مطابق شکل ۲) با هر یک از کمانهای AB، CD، EF یا MN نمایش داد.



شکل ۲

مقیاسهای اندازه‌گیری زاویه *(درجه، گراد، رادیان و اجزای آنها ـ مسأله‌های حل شده)*

الف) تعریف درجه و اجزای آن: هرگاه نیمخطی چون OA حول نقطهٔ O، آن‌قدر دوران کند تا بر خودش منطبق شود، شکل حاصل یک دایره بوده و گوییم نیمخط OA یک دوران کامل انجام داده است. اگر این دوران کامل را (دایره را) به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم، اندازهٔ یک قسمت از این ۳۶۰ قسمت را ۱ درجه می‌نامیم. به عبارت دیگر، اندازهٔ زاویه‌ای در یک دایره را که اندازهٔ کمان روبه‌روی آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره باشد، ۱ درجه می‌نامیم.

اجزای درجه، عبارت است از : دقیقه و ثانیه که بترتیب با نمادهای (′) و (″) نمایش می‌دهیم. هر درجه، ۶۰ دقیقه و هر دقیقه ۶۰ ثانیه است (مشابه رابطهٔ ساعت و دقیقه و ثانیه).

برای تبدیل این اجزا به یکدیگر، به این صورت عمل می‌کنیم که اگر بخواهیم درجه را به دقیقه یا ثانیه، و یا دقیقه را به ثانیه تبدیل کنیم، عمل ضرب را انجام می‌دهیم و بعکس.

مسألهٔ ۱: اندازهٔ زاویه‌ای برابر است با $\alpha = 25^\circ, 20', 45''$، اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب دقیقه ب) برحسب ثانیه ج) برحسب درجه محاسبه کنید.

برحسب دقیقه $\alpha = (25^\circ \times 60) + 20' + (\frac{45}{60}) =$

$$150' + 20' + \frac{3'}{4} = 170/75'$$

برحسب ثانیه $\alpha = (25^\circ \times 3600) + (20' \times 60) + 45'' =$

$$90000'' + 1200'' + 45'' = 91245''$$

برحسب درجه $\alpha = 25^\circ + (\frac{20}{60}) + (\frac{45}{3600}) =$

$$25 + \frac{1}{3} + \frac{1}{80} = \frac{6083}{240}$$

ب) تعریف گراد و اجزای آن: هرگاه نیمخطی چون OA یک دوران کامل انجام دهد و این دوران کامل را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ هر قسمت از این اقسام را یک گراد می‌نامیم ($\frac{1}{400}$ از یک دوران کامل، ۱ گراد نام دارد). به‌طور خلاصه، ۱ گراد اندازهٔ زاویه‌ای است که اندازهٔ کمان روبه‌روی آن زاویه در دایره، $\frac{1}{400}$ اندازهٔ محیط دایره است.

پرسش: اگر اندازهٔ زاویهٔ α یک درجه و اندازهٔ زاویهٔ β یک گراد باشد، کدام بزرگترند؟ اجزای گراد عبارت است از: دسیگراد، سانتیگراد و میلیگراد، که هر گراد ۱۰ دسیگراد و هر دسیگراد ۱۰۰ سانتیگراد (هر گراد ۱۰۰ سانتیگراد) و هر سانتیگراد ۱۰ میلیگراد (هر گراد ۱۰۰۰ میلیگراد) می‌باشد. در این‌جا نیز برای تبدیل اجزای بزرگتر به کوچکتر، عمل ضرب و برای تبدیل اجزای کوچکتر به بزرگتر، عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

مسألهٔ ۲: اندازهٔ زاویه β عبارت است از ۱۰۰ گراد (gr)، ۲۰ دسیگراد (dgr)، ۴۴ سانتیگراد (cgr) و ۱۲ میلیگراد (mgr). اندازهٔ این زاویه را:

الف) برحسب گراد ب) برحسب دسیگراد ج) برحسب سانتیگراد د) برحسب میلیگراد محاسبه کنید.

الف) برحسب گراد $\beta = 100_{gr} + (\frac{20}{10})_{gr} + (\frac{44}{100})_{gr}$

$$+ (\frac{12}{1000})_{gr} = (102/452)_{gr}$$

ب) برحسب دسیگراد $\beta = (100 \times 10)_{dgr} + 20_{dgr}$

$$+ (\frac{44}{10})_{dgr} + (\frac{12}{100})_{dgr} = (1024/52)_{dgr}$$

روش دوم: برحسب دسیگراد $\beta = (102/452)_{gr}$

$$\times 10 = 1024/52_{dgr}$$

ج) برحسب سانتیگراد $\beta = (100 \times 100)_{cgr} + (20 \times 10)_{cgr}$

$$+ 44_{cgr} + (\frac{12}{10})_{cgr} = (10245/2)_{cgr}$$

روش دوم: برحسب سانتیگراد $\beta = (1024/52)_{dgr}$

$$\times 10 = 10245/2_{cgr}$$

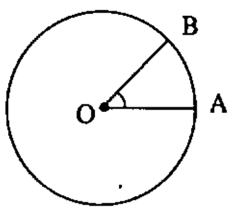
د) برحسب میلیگراد $\beta = (100 \times 1000)_{mgr} + (20 \times 100)_{mgr}$

$$+ (44 \times 10)_{mgr} + 12_{mgr} = (102452)_{mgr}$$

روش دوم: برحسب میلیگراد $\beta = (10245/2)_{cgr} \times 10$

$$= 102452_{mgr}$$

ج) تعریف رادیان: دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA را در نظر می‌گیریم (شکل ۳). اگر شعاع OA آن‌قدر دوران کند تا اندازهٔ کمان به‌دست آمده از این دوران (کمان AB) برابر با اندازهٔ شعاع دایره، یعنی OA شود، اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روی چنین کمانی را، یک **رادیان** می‌نامیم (۱ رادیان، اندازهٔ زاویه‌ای است که اندازهٔ کمان مقابل آن زاویه، برابر با شعاع دایره باشد).



شکل ۳

$\overline{\widehat{AB}} = \overline{OA} \Rightarrow \angle AOB =$ ۱ رادیان

برای محاسبهٔ اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان، کافی است محیط دایره را به اندازهٔ کمانی که زاویهٔ روبه‌رو به آن ۱ رادیان است، تقسیم کنیم، در این‌صورت، اگر شعاع دایره را L بنامیم، خواهیم داشت:

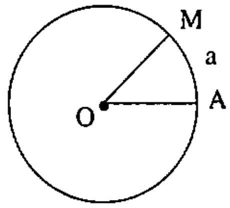
$$\text{اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان} = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{اندازهٔ طول کمانی برابر با شعاع}}$$

$$= \frac{2\pi L}{L} = 2\pi$$

تبصره: با توجه به تعاریف درجه، گراد و رادیان، اندازهٔ محیط دایره عبارت است از: ۳۶۰درجه یا ۴۰۰ گراد یا ۲π رادیان.

رابطهٔ تبدیل مقیاسهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر ـ مسأله‌های حل شده

دایره‌ای به مرکز O و به شعاع L را در نظر می‌گیریم، اگر طول کمان AM را مطابق شکل (۴) a بنامیم، خواهیم داشت :



شکل ۴

$$a=\frac{\text{محیط دایره} \times \text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM برحسب درجه}}{۳۶۰}$$

$$a=\frac{\text{محیط دایره} \times \text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM بر حسب گراد}}{۴۰۰}$$

$$a=\frac{\text{محیط دایره} \times \text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM بر حسب رادیان}}{۲\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{۲\pi L\times D}{۳۶۰} \quad \text{(D: اندازهٔ زاویه برحسب درجه)} \\ a=\dfrac{۲\pi L\times G}{۴۰۰} \quad \text{(G: اندازهٔ زاویه برحسب گراد)} \\ a=\dfrac{۲\pi L\times R}{۲\pi} \quad \text{(R: اندازهٔ زاویه برحسب رادیان)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{۲\pi L\times D}{۳۶۰}=\frac{۲\pi L\times G}{۴۰۰}=\frac{۲\pi L\times R}{۲\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}}\ (۱)$$

توجه ۱: D را اندازهٔ زاویه برحسب درجه می‌خوانیم و G را اندازهٔ زاویه برحسب گراد و هیچ‌گاه D را درجه و G را گراد نمی‌خوانیم و همین‌طور R را.

توجه ۲: با توجه به دو نسبت اولِ رابطهٔ (۱) داریم :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow \boxed{\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}}\ (۲)$$

و فراموش نمی‌کنیم که از رابطهٔ (۲) فقط و فقط برای تبدیل درجه و گراد به یکدیگر استفاده می‌کنیم و هر کجا که پای رادیان به میان کشیده شود، پای رابطهٔ (۱) را باید به میان کشید!

مسألهٔ ۳: اندازهٔ زاویهٔ α عبارت است از $\alpha=۳۲/۶_{gr}$ ، اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب درجه ب) برحسب رادیان، محاسبه کنید.

داریم $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{۳۲/۶}{۱۰}\Rightarrow ۱۰D=۲۹۳/۴$

$\Rightarrow D=۲۹/۳۴$

حال ۰/۳۴ را به دقیقه و ثانیه تبدیل می‌کنیم :

$۰/۳۴=۰/۳۴\times۶۰=(۲۰/۴)'$ برحسب دقیقه

و حالا $۰/۴'$ را به ثانیه تبدیل می‌کنیم :

$۰/۴=۰/۴'\times۶۰=۲۴''$ برحسب ثانیه

پس اندازهٔ زاویه α بر حسب درجه، یعنی D، برابر است با :

$\alpha=۲۹^\circ, ۲۰', ۲۴''$

ب) طبق رابطه تبدیل داریم: $\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۳۲/۶}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$

$\Rightarrow ۳۲/۶\pi=۲۰۰R\Rightarrow R=۰/۱۶۳\pi\Rightarrow$

$\alpha=۰/۱۶۳\pi$ رادیان

مسألهٔ ۴: اگر ۲/۱ برابر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد را به اندازهٔ همان زاویه، برحسب درجه اضافه کنیم، عدد ۴۵ به‌دست می‌آید. اندازهٔ این زاویه را برحسب رادیان محاسبه کنید.

طبق فرض مسأله داریم: $۲/۱G+D=۴۵\Rightarrow$

$D=۴۵-۲/۱G\ \ (۱)$

از طرفی داریم : $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\overset{(۱)}{\Rightarrow}\frac{۴۵-۲/۱G}{۹}=\frac{G}{۱۰}$

(دو مجهول را به یک مجهول تبدیل کردیم.)

$\Rightarrow ۴۵۰-۲۱G=۹G\Rightarrow ۴۵۰=۳۰G\Rightarrow G=۱۵$

اندازهٔ زاویه برحسب گراد

و نیز داریم: $\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۱۵}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۱۵}{۲۰۰}\pi\Rightarrow$

$R=\frac{۳}{۴}\pi$

(اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان)

مسألهٔ ۵: اندازهٔ زاویه‌ای برحسب رادیان، برابر است با حاصل تقسیم 5π بر اندازهٔ همان زاویه برحسب درجه، اندازهٔ این زاویه را بر حسب گراد محاسبه کنید:

طبق فرض داریم : $R=\frac{5\pi}{D}$

از طرفی طبق رابطهٔ تبدیل داریم : $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \overset{R=\frac{5\pi}{D}}{\Rightarrow} \frac{\frac{5\pi}{D}}{\pi}$

$$=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow \frac{5\pi}{D\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow D^{۲}=۹۰۰ \Rightarrow D=\pm ۳۰$$

از طرفی : $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow \frac{\pm ۳۰}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow ۹G=\pm ۳۰۰$

$$\Rightarrow G=\pm ۳۳/\overline{۳}$$

توجه بسیار مهم : همان‌طور که در مسائل گذشته مشاهده کردید، ما هیچ‌گاه D را به معنای درجه در نظر نگرفته‌ایم یا G را به معنای گراد یا R را به معنای رادیان ؛ بلکه D یعنی اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه، G یعنی اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد و R یعنی اندازهٔ زاویه برحسب رادیان، که توجه به این نکته، کمک قابل توجهی در حل مسائل می‌کند.

مسألهٔ ۶: در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}=۸۰^\circ$ و اندازهٔ زاویه C برحسب گراد $\frac{۵}{۳}$ اندازهٔ زاویهٔ B است، برحسب درجه، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

طبق فرض داریم : $\hat{C}_{gr}=\frac{۵}{۳}\hat{B}^\circ$

از طرفی $\hat{A}=۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۱۰۰^\circ$ (۱)

حال اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ را که برحسب گراد داریم، برحسب درجه به‌دست می‌آوریم تا رابطه دیگری بین زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برحسب درجه به‌دست آید و با توجه به رابطهٔ (۱) دو معادله دو مجهول به‌دست آید.

داریم : $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \overset{\hat{C}_{gr}=\frac{۵}{۳}\hat{B}^\circ}{\Rightarrow} \frac{D}{۹}=\frac{\frac{۵}{۳}\hat{B}}{۱۰} \Rightarrow ۱۰D=\frac{۴۵}{۳}\hat{B}$

$$\Rightarrow D=\frac{۴۵}{۳۰}\hat{B} \Rightarrow D=\frac{۱۵}{۱۰}\hat{B}$$

(اندازهٔ زاویهٔ C برحسب درجه) $\Rightarrow \hat{C}^\circ=\frac{۱۵}{۱۰}\hat{B}^\circ$

طبق رابطهٔ (۱) داریم: $\hat{B}+\hat{C}=۱۰۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\frac{۱۵}{۱۰}\hat{B}=۱۰۰$

$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۱۰}\hat{B}=۱۰۰ \Rightarrow ۲۵\hat{B}=۱۰۰۰$$

$\Rightarrow \hat{B}=۸۰^\circ$ و چون $\hat{A}=۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=۸۰^\circ$

پس مثلث متساوی‌الساقین است.

مسألهٔ ۷: α چه زاویه‌ای است، اگر حاصلضرب ۹۰۰π در تفاضل عکس اندازه‌های آن برحسب درجه و گراد، برابر با دو برابر اندازهٔ آن برحسب رادیان باشد؟

طبق فرض داریم: $۹۰۰\pi(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{G})=۲R$

این معادله دارای ۳ مجهول است ؛ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}$، معادله را به ۲ مجهول تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow ۱۰D=۹G \Rightarrow D=\frac{۹}{۱۰}G$$

$$\Rightarrow ۹۰۰\pi(\frac{۱}{\frac{۹G}{۱۰}}-\frac{۱}{G})=۲R \Rightarrow ۹۰۰\pi(\frac{۱۰}{۹G}-\frac{۱}{G})=۲R$$

$$\Rightarrow \overset{۱۰۰}{\cancel{۹۰۰}}\pi(\frac{۱}{\cancel{۹}G})=۲R \Rightarrow \frac{۱۰۰\pi}{G}=۲R \Rightarrow R=\frac{۱۰۰\pi}{۲G}$$

$=\frac{۵۰\pi}{G}$ پس $\boxed{R=\frac{۵۰\pi}{G}}$

از طرفی داریم $\rightarrow \frac{R}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow \frac{\frac{۵۰\pi}{G}}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰}$

$$\Rightarrow \frac{۵۰\pi}{G\pi}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow G^{۲}=۱۰۰۰۰$$

$\Rightarrow G=۱۰۰$ اندازهٔ زاویهٔ α برحسب گراد

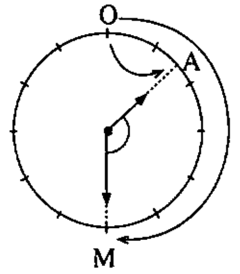
$$\alpha=۱۰۰_{gr} \Rightarrow \alpha=۹۰^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۲rad}$$

تعیین زاویه‌های بین عقربه‌های ساعت در ساعتهای مختلف ـ مسأله‌های حل شده

صفحهٔ ساعت را دایره شکل فرض می‌کنیم و برای محاسبهٔ

بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم: (این روش با ذکر مثالی توضیح داده می‌شود).

مطابق (شکل ۵) مثلاً زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۱/۵ را با توجه به تعریف زاویه، می‌توان با کمان AM نمایش داد که این کمان از تفاضل کمان OA از کمان OM به‌دست می‌آید؛ یعنی: محاسبهٔ این زاویه مستلزم محاسبهٔ کمان OA که همان انحراف عقربه ساعت‌شمار است و محاسبهٔ کمان OM که انحراف عقربهٔ دقیقه‌شمار است، می‌باشد. انحراف این عقربه‌ها را در حالت کلّی، به‌ازای گذشت هر دقیقه بررسی می‌کنیم؛ با توجه به این‌که صفحهٔ ساعت، دایره و ۳۶۰° است و نیز به ۱۲ قسمت تقسیم شده، هر قسمت یعنی: فاصلهٔ هر عدد با عدد بعدی $\frac{۳۶۰}{۱۲}=۳۰^\circ$ می‌باشد، پس،



شکل ۵

دقیقه	عقربه ساعت شمار
۶۰	۳۰°
۱	x = ۰/۵

(عقربهٔ ساعت‌شمار، هریک دقیقه، ۰/۵ درجه منحرف می‌شود)

دقیقه	عقربه دقیقه شمار
۵	۳۰°
۱	x = ۶

(عقربهٔ دقیقه‌شمار، هر یک دقیقه، ۶ درجه منحرف می‌شود)

تذکر ۱: عقربهٔ دقیقه‌شمار، فاصلهٔ ۲ عدد متوالی ساعت؛ یعنی ۳۰° را در ۵ دقیقه و ساعت شمار را در ۱ ساعت یا ۶۰ دقیقه طی می‌کند، که از این مطالب، در تناسبهای فوق استفاده شده است.

تذکر ۲: برای محاسبهٔ انحراف عقربهٔ دقیقه‌شمار، فقط دقیقه‌های وقتِ موردنظر را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم و برای محاسبهٔ انحراف عقربه ساعت‌شمار، ساعت و دقیقهٔ وقت موردنظر را به دقیقه تبدیل کرده و در ۰/۵ ضرب می‌کنیم. مثلاً، در مورد یافتن زاویهٔ عقربه‌های ساعت در همان ساعت ۱/۵ (شکل ۵) داریم:

انحراف دقیقه‌شمار $= ۳۰ \times ۶ = ۱۸۰^\circ$

انحراف ساعت‌شمار $= [(۱\times۶۰)+۳۰]\times ۰/۵ = ۹۰\times ۰/۵ = ۴۵^\circ$

زاویهٔ بین دو عقربه $= ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$

مسألهٔ ۸: در ساعت ۳ و ۳۵ دقیقه و ۴۵ ثانیه، زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت و دقیقه شمار را حساب کنید.

برای حلّ مسأله، ابتدا ثانیه را به دقیقه تبدیل کرده و با دقیقه‌های وقتِ موردنظر جمع می‌کنیم:

۴۵ ثانیه $= \frac{۴۵}{۶۰} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow$

جمع دقیقه و ثانیه بر حسب دقیقه $= ۳۵ + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۴۳}{۴}$ دقیقه

انحراف دقیقه‌شمار $= \frac{۱۴۳}{۴} \times ۶ = \frac{۴۲۹}{۲}$

انحراف ساعت‌شمار $= \left[(۳\times۶۰) + \frac{۱۴۳}{۴}\right] \times ۰/۵$

$= (۱۸۰ + \frac{۱۴۳}{۴}) \times \frac{۱}{۲} = (\frac{۸۶۳}{۴}) \times \frac{۱}{۲} = \frac{۸۶۳}{۸} \Rightarrow$

زاویه بین ۲ عقربه $= \frac{۴۲۹}{۲} - \frac{۸۶۳}{۸} = \frac{۱۷۱۶ - ۸۶۳}{۸} = (\frac{۸۵۳}{۸})^\circ$

تبصره: با توجه به این‌که عقربهٔ ثانیه‌شمار، فاصلهٔ هر دو عدد متوالی ساعت را در مدت ۵ ثانیه طی می‌کند، داریم:

ثانیه	
۵	۳۰°
۱	x = ۶

یعنی عقربهٔ ثانیه‌شمار، هر یک ثانیه، ۶ درجه منحرف می‌شود؛ بنابراین، با همان روش بالا و با محاسبهٔ انحراف عقربهٔ ثانیه‌شمار، می‌توان زاویهٔ بین این عقربه و دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار را نیز به‌دست آورد.

نسبتهای مثلثاتی و مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه:

تعریفها و قضیه‌هایی در ذیل خواهد آمد که بعضی از آنها حتی

فراوان در مباحث آینده مورد استفاده قرار خواهند گرفت، این قضیه‌ها را بدون اثبات بیان کرده‌ایم.

تعریف: هر مثلث که دارای یک زاویه قائمه باشد، مثلث قائم‌الزاویه می‌نامیم.

تعریف: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه قائمه را وتر می‌نامیم.

قضیهٔ ۱: (فیثاغورس) در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ مربع وتر، برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر.

قضیهٔ ۲: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه، نصف وتر است.

قضیهٔ ۳: هرگاه وتر و یک زاویهٔ حادّه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث متساویند.

تعریف نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

الف) اگر α، زاویه‌ای در مثلث قائم‌الزاویه باشد، سینوس این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

ب) اگر α، زاویه‌ای حادّه در مثلث قائم‌الزاویه باشد، کسینوس این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cos\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

ج) اگر α، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، تانژانت این زاویه، به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$tg\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}$$

د) اگر α، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، کتانژانت این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cot g\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}$$

هـ) عکسِ کسینوس هر زاویه را سکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha}$$

و) عکسِ سینوس هر زاویه را کسکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\cos ec\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

تبصرهٔ ۱: با توجه به بند «ج» و «د»، مشاهده می‌شود که $tg\alpha$ و $\cot g\alpha$ عکس یکدیگرند، یعنی:

$$tg\alpha = \frac{۱}{\cot g\alpha},\ \cot g\alpha = \frac{۱}{tg\alpha} \Rightarrow tg\alpha.\cot g\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow \boxed{tg^n\alpha.\cot g^n\alpha = ۱}$$

پس $tg\alpha$ و $\cot g\alpha$ از هر توانی، عکس یکدیگر و حاصل‌ضربشان مساوی یک می‌شود.

تبصرهٔ ۲: با توجه به تعریف تانژانت، سینوس و کسینوس که قبلاً ذکر کردیم، داریم:

$$tg\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha} \Rightarrow$$

حال صورت و مخرج را بر اندازه وتر تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\dfrac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}}{\dfrac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

پس ثابت شد: $\boxed{tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (۱)

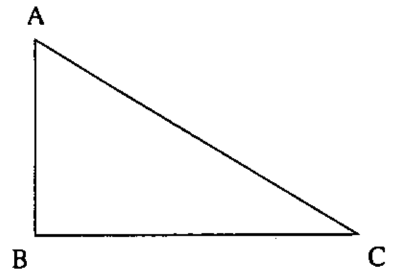
و داریم $\rightarrow \cot g\alpha = \dfrac{۱}{tg\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot g\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ (۲)

نتیجه:

$$(۱) \Rightarrow \sin\alpha = tg\alpha.\cos\alpha,\ \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$$

$$(۲) \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha.\cot g\alpha,\ \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cot g\alpha}$$

فرض کنیم: مثلث ABC در رأس B قائمه باشد (شکل ۱) در این صورت، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $\overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ = \overline{AC}^۲$



شکل ۱

حال دو طرف این رابطه را بر $\overline{AC}^2$ (مربع اندازه وتر) تقسیم می‌کنیم که در این‌صورت خواهیم داشت :

$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=1$ که با توجه به تعریفهای سینوس وکسینوس برای زاویه‌های حادّه داریم :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=1\Rightarrow \boxed{\sin^2 C+\cos^2 C=1}$$

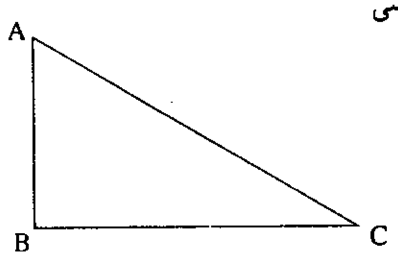
یا $\boxed{\cos^2 A+\sin^2 A=1}$

پس اگر به‌طورکلّی α، زاویه‌ای حادّه در مثلث قائم‌الزاویه باشد، رابطهٔ زیر همواره برقرار است، که آن را رابطهٔ اساسی مثلثات می‌نامیم. $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

رابطهٔ بالا را با توجه به روابط بین نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های منفرجه و حاده، می‌توان تعمیم داده و به‌طورکلّی برای هر زاویه (حاده، منفرجه و قائمه) اثبات کرد.

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های ۳۰، ۶۰ و ۴۵ درجه:

الف) زاویهٔ ۳۰ درجه : در مثلث قائم‌الزاویه ABC فرض کنیم $\hat{C}=30^\circ$ (شکل ۲) طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، نصف وتر است ؛ یعنی



شکل ۲

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{2}\Rightarrow \overline{AC}=2\overline{AB} \text{ از طرفی داریم } \rightarrow \sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\cancel{\overline{AB}}}{2\cancel{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

حال با توجه به فرمول اساسی مثلثات، یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، داریم :

$$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ=1\Rightarrow (\frac{1}{2})^2+\cos^2 30^\circ=1$$

$$\Rightarrow \cos^2 30^\circ=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

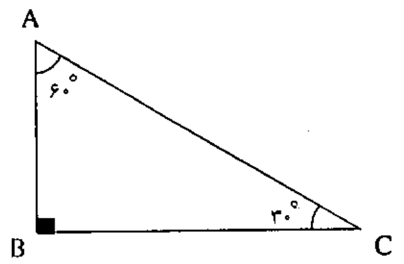
$$\text{با توجه به تعریف تانژانت}\rightarrow tgx=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow tg30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow tg30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\overset{\text{گویا می‌کنیم}}{=}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ونیزداریم } \cot gx=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \cot g30^\circ=\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \cot g30^\circ=\sqrt{3}\ \ (\cot gx=\frac{1}{tgx}\Rightarrow \cot g30^\circ=\frac{1}{tg30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3})$$

ب) زاویه 60° : فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویهٔ $\angle A=60^\circ$ (مطابق شکل ۳) با توجه به این که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، لذا $\angle C=30^\circ$ پس طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، یعنی AB، نصف وتر است $AC=2AB$ یا $AB=\frac{AC}{2}$



شکل ۳

داریم: $\cos ۶۰^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{۲AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

طبق فرمول اساسی $\Rightarrow \sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$

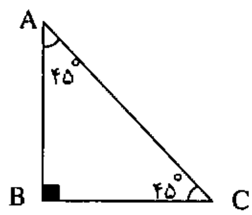
$$\Rightarrow \sin^۲ ۶۰^\circ = ۱ - \cos^۲ ۶۰ = ۱ - (\frac{۱}{۲})^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۶۰ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \boxed{\sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$tg ۶۰^\circ = \frac{\sin ۶۰}{\cos ۶۰} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot g ۶۰ = \frac{۱}{tg ۶۰}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ج) زاویه ۴۵° : فرض کنیم مثلث ABC در رأس B قائمه و زاویهٔ $\angle C = ۴۵^\circ$ ، بنابراین واضح است که $\angle A = ۴۵^\circ$ (مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است)؛ یعنی مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است (مطابق شکل ۴) پس $AB = BC$.



شکل ۴

از طرفی $\sin A = \sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC}$

و $\cos A = \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ \quad (۱)$$

طبق فرمول اساسی داریم : $\sin^۲ ۴۵^\circ + \cos^۲ ۴۵^\circ = ۱$

$$\overset{(۱)}{\Rightarrow} \sin^۲ ۴۵^\circ + \sin^۲ ۴۵^\circ = ۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ ۴۵^\circ = ۱ \Rightarrow \sin^۲ ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

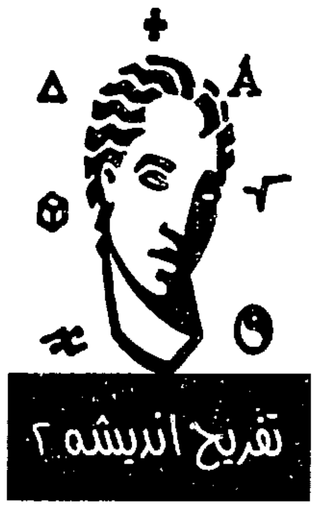
$$\Rightarrow \boxed{\sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\overset{(۱)}{\Rightarrow} \boxed{\cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

پس $tg ۴۵^\circ = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\cos ۴۵^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow \boxed{tg ۴۵^\circ = ۱}$

چون

$$\cot g ۴۵^\circ = \frac{۱}{tg ۴۵^\circ} \Rightarrow \boxed{\cot g ۴۵^\circ = ۱}$$



E
ECE
ECUCE
ECE
E

درشکل بالا با استفاده از حروف مجاز، به چند طریق کلمهٔ ECU را می‌توان خواند؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸

مفاهیم حسابان در اسلام و هند

(قسمت اوّل)

مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

نویسنده: VICTOR J. KAT2

University of Discrit of Columbia

Washington, DS 20008

مقدمه

آیزاک نیوتن، برداشت خود از حسابان[1] را حدود سالهای ۱۶۶۵ تا ۱۶۷۰ میلادی ابداع کرد. یکی از مفاهیم اصلی نیوتن، در انجام این کار، مفهوم سری توانی[2] بود. وی در این باره اعتقاد داشت که مفهوم مزبور را، با استفاده از شباهت آن با کسرهای دهدهی نامتناهی[3] حساب، اختراع کرده است [g. Vol. III, P. 33].

البته، نیوتن، از کارهای انجام گرفته در حل مسألهٔ سطح، یکی از مفاهیم اصلی موضوعی که قرار بود حسابان خوانده شود، آگاه بود و به خوبی می‌دانست که سطح زیر خم[4] $y = x^n$، بین $x = 0$ و $x = b$ با $b^{n+1}/(n+1)$ معلوم می‌شود. (این قاعده، در دههٔ ۱۶۳۰، توسط چند ریاضیدان، از جمله بوناونتورا کاوالیری[5]، ژیل‌پرسون، رُبروال[6]، پی‌یر فرما[7]، مطرح شده بود.)

نیوتن، با گسترش سری توانی برای نمایش توابع[8] گوناگون، توانست از این قاعدهٔ اساسی برای یافتن سطحهای زیر خمهای گوناگون بسیاری استفاده کند و بعکس، با استفاده از فرمول سطح[9]، توان گسترش سریهای توانی را یافت. به عنوان مثال، سری توانی $y = \arcsin x$ را، در ارتباط با تعریف آن بر حسب سطح و استفاده از فرمول سطح، مطرح کرد. سپس، سری توانی سینوس را، با حل معادلهٔ $y = \arcsin x$ برای $x = \sin y$ با استفاده از عکس سری مورد بحث، به دست آورد.

اما آنچه نیوتن نمی‌دانست، این بود که هم فرمول سطح ـ که خیال می‌کرد حدود ۳۵ سال پیش مطرح شده است ـ و هم سری توانی مربوط به سینوس، صدها سال پیش، در ناحیه‌های دیگری از جهان، کشف شده بود.

فرمول سطح مورد بحث، حدود هزار سال پس از میلاد در مصر، و سری توانی سینوس، همچنین کسینوس و آرک تانژانت، احتمالاً در قرن چهاردهم میلادی، در هندوستان مطرح شده بود. در این مقاله، توسعهٔ این دو فرمول را مورد بحث قرار خواهیم داد. اما پیش از بازگشتن، به مصر قرن یازدهم، ابتدا به بخشی می‌پردازیم که فرما و روبروال، به سال ۱۶۳۶، در برداشتشان از فرمول سطح انجام داده‌اند.

روبروال، در اکتبر سال مزبور، در نامه‌ای به فرما نوشت که می‌تواند سطح زیر خمهای به صورت $y = x^k$ را، با استفاده از فرمولی بیابد که، تاریخچهٔ آن را در دنیای اسلام پی خواهیم گرفت و مربوط به مجموعهای توانهای اعداد طبیعی[10] است:

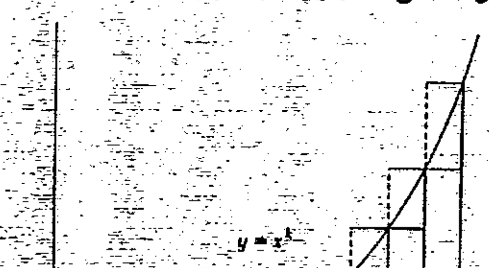
مجموع عددهای مربع[11]، همواره بزرگتر از یک سوم مکعبی است که ریشهٔ بزرگترین مربعها را به عنوان ریشهٔ خود داراست و همین مجموع مربعها، با حذف بزرگترین مربع مربوطه، کوچکتر از یک سوم همان مکعب است، نیز مجموع مکعبهای مربوطه، از یک چهارم توان چهارم[12] بزرگتر، و با حذف بزرگترین مکعب، از یک چهارم توان مزبور کوچکتر است، و غیره [5, P. 221].

به عبارت دیگر، یافت سطح ناحیهٔ مطلوب، به فرمول زیر وابسته است:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < \sum_{i=1}^{n} i^k$$

فرما، در پاسخ نوشت که، این مطلب را می‌دانسته و مانند روبروال، آن را در تعیین سطح زیر نمودار[13] $y = x^k$، روی بازهٔ[14] $[\circ , x_\circ]$، به کار برده است.

هر دو دانشمند، ملاحظه کرده بودند که اگر بازهٔ مبنا به n زیر بازهٔ[15] برابر، هر یک به طول $x_\circ/n$، تقسیم، و روی هر زیر بازهٔ مستطیلی[16] که ارتفاع آن، عرض نقطهٔ انتهایی راست آن است، بنا شود (شکل ۱ را ملاحظه کنید)؛ آن‌گاه مجموع مساحتهای این N مستطیل محیطی[17]، عبارت است از:



شکل ۱

$$\frac{x_\circ^k}{n^k}\frac{x_\circ}{n} + \frac{(2x_\circ)^k}{n^k}\frac{x_\circ}{n} + \cdots + \frac{(nx_\circ)^k}{n^k}\frac{x_\circ}{n}$$

$$= \frac{x_\circ^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$$

به همین ترتیب، آن دو توانستند مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی[18] مربوطه را محاسبه کنند: مستطیلهایی که ارتفاع آنها عرض نقطهٔ انتهایی چپ زیر بازهٔ نظیر است. در واقع، اگر A، سطح زیر خم، بین ۰ و $x_\circ$ باشد؛ آن‌گاه

$$\frac{x_\circ^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k) < A < \frac{x_\circ^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\cdots+n^k)$$

تفاضل[19] بین عبارتهای[20] بیرونی این نابرابری[21]، همان سطح آخرین مستطیل محیطی سمت راست است و فرما با توجه به این که $x_\circ$ و $y_\circ = x_\circ^k$ ثابت هستند، می‌دانست که می‌توان تفاضل مزبور را بسادگی و با استفاده از این که مقدار n را به قدر کافی بزرگ در نظر بگیریم، از هر مقدار تخصیص یافته، کمتر کرد.

از نابرابری مورد استنثای روبروال، نتیجه می‌شود که هم سطح A و هم مقدار

$$x_\circ^{k+1}/(k+1) = x_\circ y_\circ/(k+1)$$

بین دو مقداری فشرده شده‌اند که تفاضلشان به ۰ نزدیک می‌شود. به این ترتیب، فرما و روبروال دریافتند که سطح مورد نظر $x_\circ y_\circ/(k+1)$ است.

در این مورد، این پرسش واضح مطرح می‌شود که چگونه این دو دانشمند، به کشف فرمولهایی برای مجموعهای توانها نائل شدند؟ اما در حال حاضر، پاسخی برای این پرسش در دست نیست؛ چه در آثار روبروال، چیزی بیش از نامهٔ ذکر شده وجود ندارد، و تمام چیزی هم که از فرما، در نامه‌هایش به مارین مرسن[22] و روبروال، دربارهٔ این موضوع در دست داریم، گزاره‌ای عمومی بر حسب عددهای مثلثی[23]، عددهای هرمی[24]، و سایر عددهایی است که به صورت ستونهای مثلث پاسکال[25] رخ می‌دهند. (توجه داشته باشیم که کار فرما، در حدود بیست سال پیش از زمانی که پاسکال، مطالب خود را دربارهٔ مثلث حسابی[26] منتشر کرد، انجام گرفته است؛ اما مثلث مزبور، بیش از ششصد سال پیش از آن زمان، به صورتهای بسیاری در چین، خاورمیانه، افریقای شمالی و اروپا انتشار یافته است[27]. مرجع زیر را ملاحظه کنید: ([4], PP. 191-192; 241 - 242; 324-325).

آنچه که فرما در این باره می‌گوید، چنین است: آخرین ضلع، ضربدر در بزرگتر بعدی، دو برابر مثلث را تشکیل می‌دهد. آخرین ضلع، ضربدر مثلث ضلع بزرگتر بعدی، سه برابر هرم را تشکیل می‌دهد. آخرین ضلع، ضربدر هرم ضلع بزرگتر بعدی، چهار برابر مثلث در مثلث[28] را تشکیل می‌دهد، و همین‌طور و با همین تقریر تا بی‌نهایت [5,P. 230].

گزارهٔ فرما را می‌توان، با استفاده از نمادنویسی[29] جدید ضرایب دو جمله‌ای[30]، به صورت زیر نوشت:

$$n\binom{n+k}{k} = (k+1)\binom{n+k}{k+1}$$

از این فرمول، می‌توان به ازای هر نوبت k، با شروع از k = 1، فرمول صریحی[31] برای مجموع توان kام، با استفاده از ویژگیهای مثلث پاسکال، به دست آورد. به عنوان مثال، اگر k = 2، داریم:

$$[illegible]$$

$$= 3\sum_{j=2}^{n+1}\frac{j(j-1)}{2} - 3\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} - 3\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2}$$

بنابراین،

$$2\frac{n}{3}\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3+3n^2+2n}{3} - \frac{n^2+n}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

در حالت عمومی، فرمول مجموع[۳۲] به صورت

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + P(n)$$

است، که در آن، $P(n)$، چند جمله‌ای[۳۳] برحسب nی، تا درجه‌ای[۳۴] کمتر از k است و نابرابری روبروال می‌تواند به ازای هر k اثبات شود.

در این باره، از این موضوع که استخراج[۳۵] فرما شبیه فوق بوده یا خیر، بی‌خبریم؛ زیرا وی تنها فرمول مجموعی، به ازای $k = 4$، را به طور صریح بیان کرده و توضیح دیگری از شیوهٔ خود به دست نداده است.

مجموعهای توانهای صحیح[۳۶] در مصر قرن یازدهم

اما فرمولهای مربوط به مجموعهای توانهای kام، دست کم تا $k = 4$ نیز، صورتی از نابرابری روبروال، حدود ۶۵۰ سال پیش از نیمهٔ قرن هفدهم، توسط ابوعلی‌الحسن‌بن‌الحسن‌بن‌الهَیْثَم (ابن هیثم) (۹۶۵ ـ ۱۰۳۹ میلادی)[۳۷]، که در اروپا به الهازن[۳۸] معروف است، مطرح شده است.

فرمولهای مربوط به مجموعهای مربعها و مکعبها، حتی از این تاریخ نیز زودتر بیان شده‌اند. مورد مربوط به مربعها، توسط ارشمیدس[۳۹]، حدود ۲۵۰ پیش از میلاد، در رابطه با تعیین مساحت سهمی[۴۰] بیان شد؛ در حالی که مورد مربوط به مکعبها، گرچه احتمالاً برای یونانیان شناخته شده بوده است، اولین بار به طور صریح، توسط آریابهاتا[۴۱]، حدود ۵۰۰ میلادی، در هند، مکتوب گردید [2,PP.37-38].

کشف فرمول مربوط به مربعها مشکل نیست و فرمول مکعبها نیز، با اندکی تجربه، تقریباً آشکار است؛ در حالی که، بعکس، فرمول مربوط به توانهای چهارم واضح نیست، و اگر کسی بتواند روشی برای تعیین این فرمول کشف کند، می‌تواند روش تعیین فرمول مجموع هر توان درست[۴۲] را به دست آورد.

در واقع، ابن هیثم چگونگی طرح فرمول مربوط به توانهای kام، از $k = 1$ تا $k = 4$ را نشان داد؛ تمام اثباتهای وی، ذاتاً، مشابه کشف و اثبات فرمولهای مربوط به مجموع هر توان مفروض از عددهای صحیح[۴۳]، و بسادگی قابل تعمیم به آن است، و احتمالاً این موضوع که وی چنین تعمیمی[۴۴] را بیان نکرده، از این لحاظ بوده که، برای حل مسألهٔ مورد علاقهٔ خود، یعنی محاسبهٔ حجم[۴۵] سهمی واری[۴۶] خاص، تنها فرمولهای توانهای دوم و چهارم نیاز داشته است.

پیش از بررسی کار ابن هیثم، بد نیست مختصری از دنیای علم در اسلام، سخن به میان آوریم (برای بررسی مفصل [۱] را ملاحظه کنید). طی قرن نهم میلادی، مأمون، خلیفهٔ عباسی، برای گسترش شیوه‌های علمی در دنیای اسلام، پژوهشگاهی[۴۷]، موسوم به بیت‌الحکمه[۴۸]، در بغداد تأسیس، و دانشمندانی از تمام نواحی تحت نفوذ خلیفه، دعوت کرد. دانشمندان مزبور نه تنها مسلمان، که مسیحی، یهود و زرتشتی نیز بودند.

هدف این دانشمندان، در مرحلهٔ اول، ترجمهٔ بهترین آثار ریاضی و علمی از یونان و هند به زبان عربی، و در مرحلهٔ دوم، ایجاد مفاهیم جدید ریاضی و علمی بر مبنای این آثار بود.

گرچه، بیت‌الحکمه، در حدود دو قرن بعد از میان رفت، بسیاری از حکومتهای مناطق اسلامی، به حمایت خود از دانشمندان در امر پژوهشهای علمی ادامه دادند؛ زیرا دریافته بودند که پژوهشهای مزبور در کارهای عملی ارزشمندند.

به این ترتیب بود که ابن هیثم، متولد بصره در عراق امروزی، توسط **الحکیم** خلیفه، برای بررسی پروژهٔ کنترل رود نیل، به مصر دعوت شد، و گرچه پروژهٔ مزبور هیچ گاه به ثمر ننشست؛ اما ابن‌هیثم، مهمترین اثر خود، **في المناظر**[۴۹] را در هفت باب و در مصر به وجود آورد.

في المناظر در اوایل قرن سیزدهم میلادی به لاتین ترجمه شد و طی چندین قرن بعد، در اروپا، به بررسی و بحث در آن پرداخته شد.

شهرت ابن هیثم، به عنوان ریاضیدان[۵۰]، از قرون وسطی تا

حال حاضر، بیشتر به خاطر مسألهٔ الحسن[۵۱]، او است، که مسألهٔ یافتن نقطه یا نقاطی واقع بر رویهٔ منعکس کننده‌ای است که نوری که از یکی از دو نقطهٔ خارج از رویه به آن (ها) برخورد می‌کند و از دیگری می‌گذرد.

الحسن، در باب پنجم **فی المناظر**، راه حلهای خود را برای رویه‌های گوناگونی، از کروی[۵۲] گرفته تا استوانه‌ای[۵۳] و مخروطی[۵۴]، مقعر[۵۵] و محدب[۵۶]، مطرح می‌کنند. دستاوردهای وی، که مبتنی بر شش لم[۵۷] جداگانهٔ به اثبات رسیده دربارهٔ ترسیمهای هندسی[۵۸] است، نشان می‌دهد که وی از هر دو بخش هندسهٔ مقدماتی[۵۹] و پیشرفتهٔ[۶۰] یونانیها آگاهی کامل داشته است.

اندیشهٔ اصلی ابن هیثم در اثبات فرمولهای مجموع، استخراج[۶۱] معادلهٔ زیر بوده است:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right) \qquad (*)$$

طبیعی است که وی این نتیجه را در صورت عمومی آن بیان نکرده و تنها به بیان آن در مورد عددهای صحیح خاص، یعنی $k = 1, 2, 3$ و $n = 4$ پرداخته است؛ اما اثبات وی، به ازای هر یک از این kها، با استفاده از استقرا[۶۲] بر n انجام گرفته و بلافاصله، بر هر مقدار k، تعمیم‌پذیر[۶۳] است. (برای تفصیل واقعهٔ [۷] را ملاحظه کنید.) در این جا به بررسی اثبات ابن هیثم، به ازای $k = 3$ و $n = 4$، می‌پردازیم:

$$(4+1)(1^3+2^3+3^3+4^3)$$
$$= 4(1^3+2^3+3^3+4^3)+1^3+2^3+3^3+4^3$$
$$= 4.4^3+4(1^3+2^3+3^3)+1^3+2^3+3^3+4^3$$
$$= 4^4+(3+1)(1^3+2^3+3^3)+1^3+2^3+3^3+4^3$$

به دلیل این که معادلهٔ (*)، به ازای $n = 3$، راست در نظر گرفته شده است،

$$(3+1)(1^3+2^3+3^3)$$
$$= 1^4+2^4+3^4+(1^3+2^3+3^3)+(1^3+2^3)+1^3$$

در این صورت، معادلهٔ (*)، به ازای $n = 4$، اثبات می‌شود و به این ترتیب، می‌توان، استدلال[۶۴] ابن هیثم را، بر حسب اصطلاحات[۶۵] جدید، بسادگی تشکیل، و با استفاده از استقرا بر n و به ازای هر مقدار k، اثباتی به دست داد.

در این مرحله، ابن هیثم از دستاورد خود برای استخراج فرمولهایی، برای مجموعهای توانهای درست، استفاده می‌کند و ابتدا، به اثبات فرمولهای مجموع در مورد مربعها و مکعبها می‌پردازد:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

در این جا به این اثباتها نمی‌پردازیم و تنها به استخراج نتیجه‌ای مشابه[۶۶] برای توانهای چهارم توجه، و خاطر نشان می‌کنیم که اگر چه خود ابن هیثم، این نتیجه را تنها به ازای $n = 4$ به دست آورده، آن را، به ازای هر n دلخواه، بیان کرده است. بنابراین، برای استخراج فرمول مورد بحث در این حالت، با نمونه‌برداری از روش وی، و با استفاده از شیوه‌های جدید، کارمان را با توجه به فرمولهای مربوط به مجموعهای مربعها و مکعبها، برای نوشتن معادلهٔ (*) به صورت زیر، آغاز می‌کنیم:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^4 + \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^4}{4}+\frac{p^3}{2}+\frac{p^2}{4}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(n+1-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n - \frac{1}{5}\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)n(n+1)n - \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)n.\frac{1}{3}$$

ابن هیثم دستاورد خود را به طور شفاهی، به گونه‌ای بیان می‌کند که در نمادنویسی جدید، به صورت زیر ترجمه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right]$$

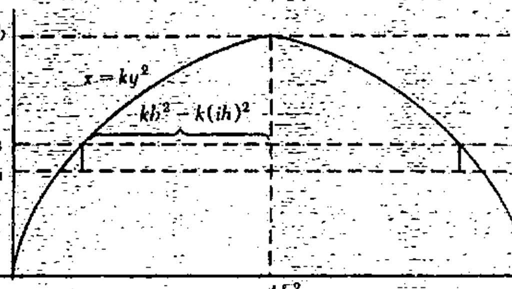
این نتیجه را می‌توان به صورت یک چند جمله ای نیز نوشت :

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

آشکار است که از این فرمول می‌توان، مانند استفادهٔ فرما و روبروال از نابرابری روبروال، در اثبات رابطهٔ زیر بهره برد :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^4}{n^5}=\frac{1}{5}$$

ابن هیثم از دستاورد خود در مجموعهای توانهای درست، برای انجام دادن کاری استفاده کرد که آن را انتگرال‌گیری[۶۷] می‌نامیم، و بخصوص، دستاورد مزبور را در تعیین حجم[۶۸] جسم[۶۹] ساخته شده از دوران سهمی[۷۰] $x = ky^2$ حول خط[۷۱] $x = kb^2$، عمود بر محور[۷۲] سهمی، به کار برد و نشان داد که این حجم، $\frac{8}{15}$ حجم استوانه‌ای[۷۳] به شعاع[۷۴] kb^2 و ارتفاع[۷۵] b است. (شکل ۲ را ملاحظه کنید.)



شکل ۲

استدلال صوری[۷۶] ابن هیثم، استدلال اِفنائی متعارفی[۷۷] از نوع یونانی بود که از برهان خلفی[۷۸] دوگانه استفاده می‌برد ؛ اما روش وی در ذات، شامل برش دادن استوانه و سهمی‌وار به n قرص[۷۹]، هر یک به ضخامت $h = \frac{b}{n}$ [۸۰]، و سپس جمع کردن قرصهاست. iامین قرص سهمی‌وار دارای شعاع $kb^2 - k(ih)^2$ است و بنابراین حجم :

$$\pi h(kh^2n^2 - ki^2h^2)^2 = \pi k^2h^5(n^2-i^2)^2$$

را داراست. در این صورت، حجم کل[۸۱] سهمی‌وار مورد بحث، به طور تقریب، برابر است با :

$$\pi k^2h^5\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-i^2)^2 = \pi k^2h^5\sum_{i=1}^{n-1}(n^4-2n^2i^2+i^4)$$

اما از آن جا که ابن هیثم از فرمولهای مجموعهای مربعهای درست و توانهای چهارم آگاه بود، توانست محاسبه کند که :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n^4-2n^2i^2+i^4)=\frac{8}{15}(n-1)n^4+\frac{1}{30}n$$

$$=\frac{8}{15}n.n^4-\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{30}n$$

و بنابراین :

$$\frac{8}{15}(n-1)n^4<\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-i^2)^2<\frac{8}{15}n.n^4$$

اما حجم برشی معمولی[۸۲] از استوانهٔ محیطی[۸۳] مربوطه $\pi h((kb)^2)^2 = \pi k^2h^5n^4$ است و بنابراین حجم کل استوانه $\pi k^2h^5n.n^4$ است، در حالی که حجم استوانهٔ بدون برش بالایی، $\pi k^2h^5(n-1)n^4$ است. در این صورت، نابرابری فوق نشان می‌دهد که حجم سهمی‌وار مورد بحث بین $\frac{8}{15}$ استوانهٔ بدون برش بالایی و $\frac{8}{15}$ کل استوانه است.

از آن جا که برش بالایی را می‌توان با بزرگ کردن به قدر کفایت n، در حد مطلوب کوچک کرد، نتیجه می‌شود که حجم سهمی‌وار، چنان که اظهار کردیم، به طور دقیق $\frac{8}{15}$ حجم استوانه است.

فرمول مجموع توانهای چهارم ابن هیثم، در سایر نواحی دنیای اسلامی و تا چند قرن بعد هم ظاهر شده است. این فرمول در آثار ابوالحسن بن حیدر (در حدود ۱۴۱۳ میلادی)، که در مراکش کنونی می‌زیسته و آثار ابوعبدالله بن قاضی (۱۴۳۷ـ۱۵۱۵ میلادی)، که وی نیز ساکن مراکش بوده، آورده شده است. (برای تفصیل بیشتر [۳] را ملاحظه کنید.)

گذشته از این، فرمول یاد شده را می‌توان در **مفتاح الحساب**[۸۴] غیاث‌الدین جمشید کاشانی (حدود ۱۴۹۲ میلادی) نیز یافت : ریاضیدان و منجمی که بیشتر دوران با برکت عمر خویش را در سمرقند ــ که در حال حاضر در ازبکستان قرار دارد ــ در دربار الغ بیگ گذرانده است.

اما این نکته، که ریاضیدانان مزبور، چگونه از این فرمول آگاه شده‌اند یا برای چه هدفی آن را به کار برده‌اند، نامعلوم است.

یادداشتها :

1. Calculus
2. Power Series
3. Infinite Decimal Expansions
4. Curve
5. Bonaventura Cavalieri
6. Gilles Persone de Roberval
7. Pierre de Fermat
8. Functions
9. Area Formula
10. Natural Numbers

۱۱. Square Numbers، یعنی اعداد ۱^۲، ۲^۲، ۳^۲، ۴^۲ و...، قضیه به صورت ریاضی چنین است:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2<\frac{1}{3}n^3<1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$$

12. Fourth Power
13. Graph
14. Interval
15. Subinterval
16. Rectangle
17. Circumscribed Rectangle
18. Inscribed Rectangles
19. Defference
20. Expressions
21. Inequality
22. Marin Mersenne
23. Triangular Numbers
24. Pyramidal Numbers
25. Pascal's Triangle
26. Arithmetical triangle

۲۷. از ریاضیدانان ایرانی، ابوبکر محمدبن حسین کرجی، ریاضیدان نیمهٔ دوم قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری نیز به این کار پرداخته است.

28. Triangulotriangle
29. Notation
30. Binomial Coefficients
31. Explicit Formula
32. Sum for Mula
33. Polynomial
34. Degree
35. Derivation
36. Sums of Integer Powers

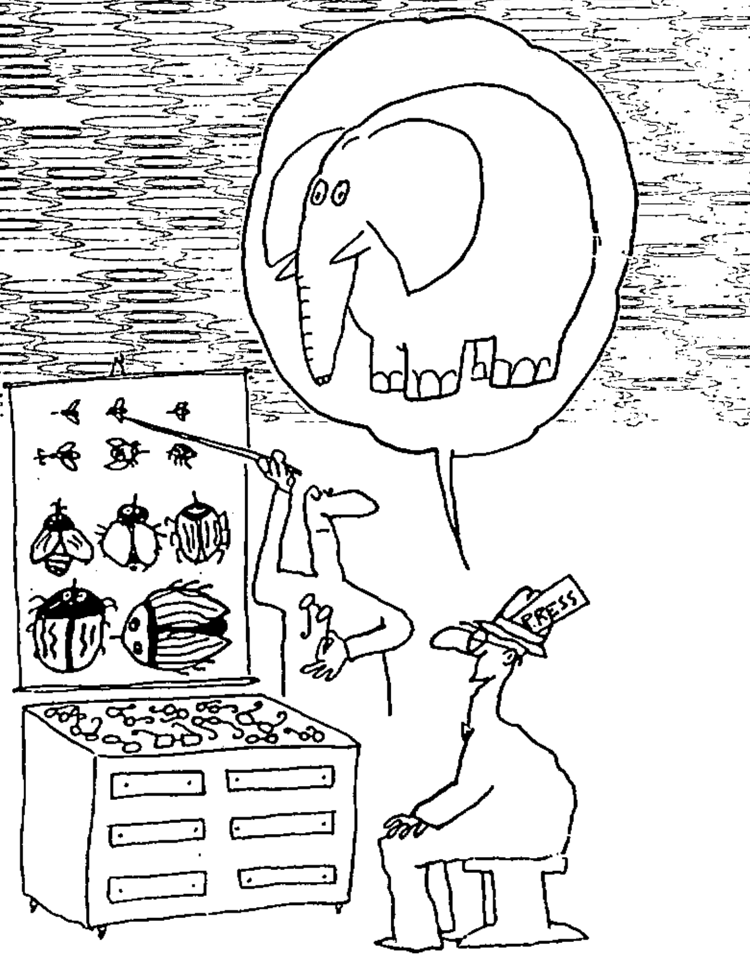
۳۷. مطابق با ۳۵۴ ـ ۴۳۰ هجری، برای شرح حال این ریاضیدان مسلمان، به زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، ابوالقاسم قربانی رجوع کنید.

38. Alhazen
39. Archimedes
40. Quadrature of Parabola
41. Aryabhata
42. Integral Power
43. Integer Numbers
44. Generalization
45. Volume
46. Paraboloid
47. Research Institute
48. House of Wisdom
49. Optics
50. Mathematician
51. Alhazen's Problem
52. Spherical
53. Cylindrical
54. Conical
55. Concave
56. Convex
57. Lemma
58. Geometrical Constructions
59. Elementary
60. Advanced
61. Equation
62. Induction
63. Generalizable
64. Argument
65. Terminology
66. Analogus Result
67. Integration
68. Volume
69. Solid
70. Parabola
71. Line
72. Axis
73. Cylinder
74. Radius
75. Height
76. Formal Argument
77. Exhaustion Argument
78. Reductio ad Absurdum
79. Disk
80. Thickness
81. Total volume
82. Typical slice
83. Circumscribing Cylinder
84. The Caculator's Key

مسأله

حلّ مسأله‌های ریاضی (۴)

● عبدالحسین مصحفی



پرسشهای چند گزینه‌ای

بیش از چند دهه نیست که پرسشهای چند گزینه‌ای را در آزمونها به‌کار می‌برند. بنابر آن‌که آزمون برای چه کار باشد، آزمون‌دهندگان در چه پایهٔ تحصیلی باشند و تعدادشان کم باشد یا زیاد، تعداد گزینه‌های هر پرسش می‌تواند یک، دو، چهار یا پنج باشد. پرسشهای تک گزینه‌ای از گونهٔ همان پرسشهای معمولی‌اند که در برابر هر پرسش، باید پاسخ درست آن داده شود. در نمونه‌ای از این گونه پرسشها، هر پرسش به صورت جمله‌ای با یک جای خالی نموده می‌شود و آزمون‌دهنده باید آن جای خالی را با نوشتن پاسخی که به گمانش درست می‌نماید، پر کند؛ مانند:

«مجموع زاویه‌های هر nضلعی کوژ برابر با ... درجه است.»

در پرسشهای دو گزینه‌ای، هر پرسش با دو پاسخ همراه است و آزمون دهنده باید دریابد کدام یک از دو گزینه پذیرفتنی است و آن را نشانه بگذارد؛ مانند:

«اگر احتمال روی دادن یک پیشامد برابر با a باشد، احتمال روی ندادن آن پیشامد برابر با $a-$○، $1-a$○ است.»

پرسشهای چهار یا پنج گزینه‌ای دو گونه‌اند؛ در یک گونهٔ آنها بعضی از گزینه‌ها، که ممکن است هیچ‌کدام یا همهٔ آنها نیز باشد، پذیرفتنی و بقیهٔ آنها کنارگذاشتنی هستند؛ مانند:

دو نقطهٔ A و B و همچنین دو نقطهٔ C و D نسبت به خط Δ قرینهٔ یکدیگرند و A و C در یک طرف Δ واقعند. اگر AC و BD در P، و AD و BC در Q برخورد کنند، در این صورت، از گزاره‌های:

الف) هریک از دو نقطهٔ P و Q بر Δ واقع است.

ب) خط Δ نیمساز زاویهٔ APB و همچنین نیمساز زاویهٔ CQD است.

ج) هیچ‌یک از دو نقطهٔ P و Q در هیچ حالتی نمی‌تواند مرکز تقارن دو پاره خط AC و BD باشد.

د) دو قطر چهارضلعی PCQD برهم عمودند.

هـ) خطی که وسط AC را به وسط BD وصل می‌کند، در هر حالت، بر یکی از دو نقطهٔ P یا Q می‌گذرد.

کدام یا کدامها نادرستند؟

در این گونه از پرسشهای چند گزینه‌ای، هریک از گزینه‌ها

باید جداگانه بررسی و معلوم شود پذیرفتنی است یا نه.

در گونهٔ دیگر پرسشهای چهار یا پنج گزینه‌ای، تنها یکی از گزینه‌ها پذیرفتنی است؛ مانند:

«هرگاه α اندازهٔ یکی از زاویه‌های یک مثلث باشد، درکدام یک از حالتهای:

الف) $P = tg\alpha \cdot cotg\alpha$ ب) $P = \cos\alpha + \cos^4 \alpha$

ج) $P = \sin\alpha + \sin^3 \alpha$ د) $P = \sin\alpha - \sin^3 \alpha$

مقدار P ممکن است عددی منفی باشد؟»

در این‌گونه از پرسشهای چند گزینه‌ای، همین که معلوم شود کدام گزینه را باید پذیرفت، کار پایان می‌یابد و بررسی گزینه‌های دیگر، لزومی ندارد. در ایران، چه در آزمونهای ورودی دانشگاه‌ها و چه در آزمونهای دیگر، پرسشهای چهار گزینه‌ای تک پذیره‌ای را به کار می‌برند. در این نوشتار هم از این پس، تنها این‌گونه پرسشها بررسی می‌شوند.

چگونگی طرح و توزیع پرسشها

طرح پرسشهای چند گزینه‌ای مربوط به یک آزمون، بررسیهایی همه‌جانبه را لازم دارد و مهارت و کارایی ویژه می‌خواهد. پرسشها نباید پیش‌پا افتاده باشند و نباید تلاش فکری سخت یا محاسبه‌هایی وقتگیر را ایجاب کنند. اگر مسأله‌ای را مطرح می‌کنند، باید کوچک و رام شدنی باشد. مجموعهٔ پرسشهای هر آزمون باید دو جنبهٔ اساسی را دارا باشند: نخست آن‌که پرسشها از نظر سادگی و دشواری در پنج گروه باشند: ساده، به نسبت ساده، متوسط، بالاتر از متوسط یا دشوار، و هرکدام از اینها درصد معیّنی از مجموع پرسشها را تشکیل دهند. دیگر آن‌که، پرسشها از نظر هدفهای آموزشی و پرورشی نیز به نسبتهای معین توزیع شده باشند و هرکدام یکی از جنبه‌های یادگیری و یادآوری، فهم و درک صحیح مفهومها، توانایی کاربرد قاعده‌ها و فرمولها، تفکر استدلالی، داشتن استعدادهای ویژه و نیروی ابتکار و خلّاقیت را مورد سنجش قرار دهد. چگونگی توزیع پرسشها چه ازنظر سادگی و دشواری، و چه ازنظر هدفهای آموزشی و پرورشی، بستگی به هدفی دارد که آزمون برای آن انجام می‌گیرد. پراکندگی پرسشهای دارای جنبه‌های مختلف، تصادفی است و این طور نیست که بترتیب، از ساده به دشوار، مرتّب شده باشند.

رو به رویی با پرسشهای چندگزینه‌ای

شناخت ساختار و ویژگیهای پرسشهای چندگزینه‌ای، چگونگی برخورد با آنها را به‌دست می‌دهد.

● سهم هر پرسش از مدت زمان نموده شده برای آزمون، معمولاً بیش از دو دقیقه نیست و پرسشها از هرگونه که باشند امتیاز برابر دارند. پراکندگی پرسشهای ساده و دشوار، ترتیب معین ندارد. از این رو، نخستین کار باید این باشد که پرسشها را با سرعت ازنظر گذراند و تنها آنهایی را نشانه زد که ذهن، پاسخشان را آماده دارد. با هر بار از سرگیری این روند کار، هم تعداد زیادی امتیاز به‌دست می‌آید و هم مقدار زیادی وقت برای پرسشهایی که فکر کردن یا محاسبه را لازم دارند، ذخیره می‌شود.

● پرسشهایی که با شیوهٔ درست طرح شده باشند، هیچ کدامشان تلاش فکری سخت یا محاسبه‌ای پیچیده را لازم ندارد. اگر یک پرسش با چنین وضعی به‌نظر می‌رسد، یا به نکته‌ای از آن توجه نشده است و راه ساده‌ای دارد و یا این‌که آن را باید رها کرد و به پرسشهای دیگر پرداخت.

● در روبه‌رویی با هر پرسش، تنها کاری که ارزش دارد، یافتن گزینهٔ پذیرفتنی آن است. چگونگی دستیابی به این گزینه، هیچ ارزشی ندارد. از این رو، برای پرسش با زمینهٔ جبری، لازم نیست حتماً روش جبری را به کار برد. اگر روش هندسی ساده‌تر باشد و وقت کمتری را بگیرد، صرفه با آن است. برای پرسش با زمینهٔ هندسی هم می‌توان روش جبری را به‌کار برد.

● چون از چهار گزینه، تنها یکی از آنها را باید پذیرفت، همین که آن گزینه معلوم شد، بررسی گزینه‌های دیگر لزومی ندارد و اگر با بررسی سه تا از گزینه‌ها معلوم شد که هیچ‌کدام پذیرفتنی نیست، دلیل بر پذیرفتنی بودن گزارهٔ باقیمانده است و بررسی آن دیگر بی‌مورد است.

● هرگاه گزینه‌هایی از یک پرسش، هم‌ارز باشند، پذیرفتنی نیستند و بررسی آنها مورد ندارد.

● هرگاه پرسش عبارت از یک مسأله باشد، برای دستیابی به گزینهٔ پذیرفتنی آن، می‌توان روش برهان مستقیم و روش برهان خلف را به‌کار برد. در روش برهان مستقیم، می‌توان پرسش را به‌صورت یک مسأله حل کرد و جواب آن را به‌دست آورد. در روش برهان خلف، معلوم می‌شود کدام گزینه‌ها نمی‌توانند جواب آن مسأله باشند و باید کنار گذاشته شوند.

● بنابر قانونهای احتمال، گزیدن شانسی گزینه‌های پذیرفتنی، سودی را دربی نخواهد داشت. اگر برای همهٔ پرسشهای یک آزمون، شانسی عمل شود، احتمال دارد امتیاز ناچیزی به‌دست آید. اما اگر روی پرسشهایی به شیوهٔ درست عمل شود و روی بقیهٔ پرسشها کار به شانس سپرده شود، آن امتیازهای به‌دست آمده هم تباه می‌شوند.

● در آزمون با پرسشهای چندگزینه‌ای، مانند هر آزمون دیگر، کامیابی با آن دسته از آزمون دهندگان است که در فراگیری درسها تنها به حفظ قاعده‌ها بسنده نکرده باشند؛ تعریفها و هر مفهوم دیگر را عمقی و با همهٔ نکته‌های مربوط به آنها آموخته باشند و در حلّ مسأله‌ها ورزیدگی لازم را به‌دست آورده باشند. دانش‌آموزانی با این گمان که پاسخ دادن به پرسشهای چند گزینه‌ای، روندی ویژهٔ خود و بی‌ارتباط با حلّ مسأله‌ها را دارد، در زمینهٔ حلّ مسأله‌ها آن‌گونه که شاید و باید تلاش نمی‌کنند. در صورتی که پرسشهای ساده و متوسط یک آزمون را اکثریت آزمون دهندگان، پاسخ درست می‌گویند و تنها آنان که بتوانند پاسخ دادن به پرسشهای بالاتر از متوسط و دشوار را نیز از عهده برآیند، از بقیه جلو می‌افتند. اینان آن دسته از آزمون دهندگان خواهند بود که در حلّ مسأله‌ها هم خود را ورزیده کرده باشند. اگر پایهٔ درسی ضعیف باشد و چنانچه اندیشه برای حلّ مسأله به‌کار نرفته و ورزیده نشده باشد، به کامیابی در آزمونهای با پرسشهای چندگزینه‌ای هم امیدی نمی‌توان داشت.

● همراه با توانمندی بنیهٔ درسی و ورزیدگی در حلّ مسأله‌ها، به‌دست آوردن هر چه بیشتر پرسشهای آزمونهای پیشتر، انجام گرفته و تمرین با آنها، همچنین شرکت در آزمونهای آزمایشی، از جمله عاملهای مؤثر برای کامیابی در چنین آزمونهایی محسوب می‌شوند. این فعالیتها هم آن‌گاه نتیجه‌ای مؤثر را به دنبال خواهند داشت که، در هر مورد از آنها ذهن به کار افتاده باشد. از این رو، لازم است که چنین تمرینهایی نیز با شیوه‌ای صحیح به کار روند. چنین شیوه‌ای، در نوشتاری دیگر یادآوری می‌شود.

چند نمونه از پرسشهای چهارگزینه‌ای

۱. اگر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c چنان باشند که $a^2 = b^2 + c^2$، در این صورت از نابرابریهای:

(۱) $a > b + c$ (۲) $a < b + c$

(۳) $a > |b - c|$ (۴) $a < |b - c|$

کدام یا کدامها همواره برقرار است؟

الف) تنها (۱) ب) تنها (۴)

ج) (۱) و (۴) د) (۲) و (۳)

این پرسش به‌نظر می‌رسد که در زمینهٔ جبر است. اگر بخواهیم روش جبری را به کار ببریم، عملهایی هرچند نه زیاد را به دنبال دارد. امّا اگر به این نکته توجه کنیم که a، b و c اندازه‌های سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند و به یاد آوریم که در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر، کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است، بدون انجام دادن هیچ عمل و خیلی فوری درمی‌یابیم که گزینهٔ (د) پاسخ درست است.

۲. دوجمله‌ای $x^4 + 1$ اگر تجزیه شود، کدام یک از عاملهای زیر را دربر خواهد داشت؟

الف) $x^2 + 1$ ب) $x^2 - 1$

ج) $x^2 -$ [illegible] د) $x + 1$

در این پرسش، اگر بخواهیم روش مستقیم را به‌کار ببریم و $x^4 + 1$ را تجزیه کنیم، مدت زمانی را باید صرف آن کنیم. اما اگر به یاد داشته باشیم که یک چندجمله‌ای $P(x)$ تنها آن‌گاه بر $x^n + a$ بخش‌پذیر است که اگر در آن x^n را برابر با $-a$ بگیریم، حاصل صفر شود، می‌بینیم که در $P(x) = x^4 + 1$ اگر x^2 را برابر با -1، یا x^2 را برابر با ۱ و یا x را برابر با -1 بگیریم، در هیچ حالت، $x^4 + 1$ برابر با صفر نمی‌شود. گزینه‌های (الف، ب و د) کنارگذاشته می‌شوند و گزینهٔ (ج) پذیرفتنی است.

۳. به فرض $a \neq 0$ معادلهٔ:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{4}{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$$

الف) جواب ندارد. ب) یک ریشهٔ مضاعف دارد.

ج) دو ریشهٔ مضاعف دارد. د) چهار ریشهٔ متمایز دارد.

معادله به‌سادگی، به دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = 2 \ , \ \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = -2$$

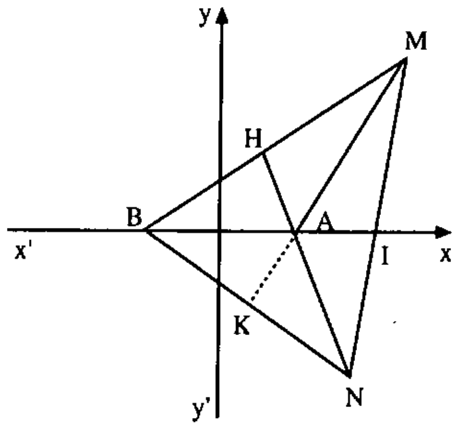
اکنون به‌نظر می‌رسد که باید هریک از این دو معادله را مرتّب کرد و علامت مبیّن آن را به‌دست آورد. اما اگر به این ویژگی آشنا باشیم که «مجموع هر عدد و عکس آن از ۲ بزرگتر یا از ۲− کوچکتر و تنها آن‌گاه برابر با ۲± است که آن عدد برابر با ۱± باشد» بدون هیچ محاسبه، درمی‌یابیم که $x = a$ ریشهٔ مضاعف

معادلهٔ یکم و $x=-a$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ دوم است و گزینهٔ (ج) پذیرفتنی است.

۴. در صفحهٔ محورهای عمود برهم $x'x$ و $y'y$ دو نقطهٔ ثابت $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ و نقطهٔ متغیر $M(a,b)$ داده شده‌اند. عمودی که در A بر BM و عمودی که در B بر AM رسم شود، با یکدیگر در $N(x,y)$ برخورد می‌کنند. دو مقدار x و y برابرند با :

الف) $x=a\ ,\ y=\frac{a^2-1}{b}$ ب) $x=a+1\ ,\ y=\frac{a^2-1}{b}$

ج) $x=a-1, y=\frac{1-a^2}{b}$ د) $x=a\ ,\ y=\frac{1-a^2}{b}$



این پرسش در زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی بیان شده است. اگر روش تحلیلی را به کار ببریم، باید ضریب زاویه‌ای دو خط AM و BN و پس از آن معادله‌های دو خط AH و BK را به‌دست آوریم و این دو معادله را با هم حل کنیم که این محاسبه‌ها مدتی از وقت ما را می‌گیرد. اگر شکل را به صورت هندسی آن درنظر بگیریم، می‌بینیم که N نقطهٔ برخورد دو ارتفاع از مثلث ABM است ؛ پس MN ارتفاع سوّم این مثلث و بر $x'x$ عمود است و بنابراین، طول نقطهٔ N همان طول نقطهٔ M و برابر با a است. اکنون مثلث BMN و ارتفاعهای آن را درنظر می‌گیریم و درمی‌یابیم دو مثلث IAM و IBN متشابهند و به دست خواهیم آورد که $IM\cdot IN$ با $IA\cdot IB$ برابر است و عرض نقطهٔ N برابر با $\frac{1-a^2}{b}$ به‌دست می‌آید.

این نکته یادآوری می‌شود که در روش هندسی حلّ یک مسأله، آن‌گاه وقتی کمتر از روش تحلیلی صرف می‌شود که برای حلّ مسأله‌های هندسه، کارایی و آمادگی ذهنی وجود داشته باشد.

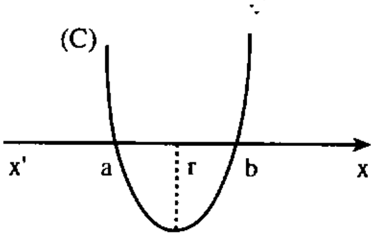
۵. بین اندازه‌های زاویهٔ A، دو ضلع b و c، d نیمساز زاویهٔ داخلی A و S مساحت مثلث ABC رابطهٔ $(b+c)d=2\sqrt{2}S$ برقرار است. زاویهٔ A از این مثلث :

الف) حاده است. ب) منفرجه است.

ج) قائمه است. د) قائمه نیست.

در این پرسش، گزینه‌ها با شیوهٔ درست گزیده نشده‌اند ؛ یکی از دو گزینهٔ (الف) و (د) یا (ب) و (د) که درست فرض شود، دیگری نیز درست خواهد بود و این خلاف یکتا بودن گزینهٔ پذیرفتنی در هر پرسش است. بنابراین، گزینهٔ (ج) درست و پذیرفتنی است و کار روی رابطهٔ داده شده، مورد ندارد.

۶. چندجمله‌ای $P(x)$ و مشتق آن $Q(x)$، دو تابع $y=P(x)$ و $y'=Q(x)$ را نشان می‌دهند. هرگاه منحنی C نمودار تابع y'، نسبت به محور طولها به شکل زیر باشد، نمودار تابع y :



الف) در دو نقطهٔ به طولهای a و b با محور طولها برخورد می‌کند.

ب) در نقطهٔ به طول a ماکسیمم و در نقطهٔ به طول b می‌نیمم است.

ج) در نقطهٔ به طول a می‌نیمم و در نقطهٔ به طول b ماکسیمم است.

د) در نقطهٔ به طول r عطف و بر محور طولها مماس است.

این پرسش ممکن است برای دانش‌آموزانی ناآشنا به‌نظر آید ؛ اما اگر توجه کنند که منحنی C علامت مشتق را به‌دست می‌دهد (هرجا که منحنی بالای $x'x$ باشد، مشتق مثبت و هرجا که منحنی زیر $x'x$ باشد، مشتق منفی است) بسادگی خواهند داشت :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	۰	−	۰	+	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

و نتیجه می‌گیرند که گزینهٔ (ب) درست و پذیرفتنی است. این نکته هم یادآوری می‌شود که بخش نخست گزینهٔ (د) درست، اما بخش

دوم آن نادرست است. منحنی نمودار تابع y دارای نقطهٔ عطف به طول r است، اما در این نقطه، موازی با $x'x$ (یا واقع بر آن) نمی‌تواند باشد.

پاسخهای تمرین (۳)

۱. فرض مسأله می‌شود $ab = P$ و حکم آن می‌شود $t = u$. اگر فرض درست باشد، یعنی عمل ضرب بدرستی انجام گرفته باشد، حکم $t = u$ نیز درست است.

عکس مسأله : اگر $t = u$ ، آن‌گاه $ab = P$ که معتبر نیست ؛ اگر در عمل ضرب، این اشتباه روی داده باشد که مضربی از ۹ به P افزوده یا از آن کم شده باشد، باز هم $t = u$ ، اما $ab \neq P$ خواهد بود.

عکس نقیض مسأله : اگر $t \neq u$ ، آن‌گاه $ab \neq P$ ، که درست است.

متقابل مسأله : اگر $ab \neq P$ ، آن‌گاه $t \neq u$ ، که در حالت کلی درست نیست.

خلاف مسأله : اگر $ab \neq P$ ، آن‌گاه $t = u$. یا این‌که اگر $t \neq u$ ، آن‌گاه $ab = P$ ، که نادرست است.

۲. فرض مسأله : $A \subset B$ و $B \subset C$ ، $C \subset A$

حکم مسأله : $A = B = C$

برهان مسأله : از دو رابطهٔ $A \subset B$ و $B \subset C$ ، نتیجه می‌شود $A \subset C$ و از این رابطه و رابطهٔ $C \subset A$ ، نتیجه می‌شود $A = C$. در این صورت داریم $B \subset A$ و از این رابطه و رابطهٔ $A \subset B$ ، به‌دست می‌آید $A = B$ ؛ بنابراین $A = B = C$.

عکس مسأله : اگر $A = B = C$ ، آن‌گاه $C \subset A$ ، $B \subset C$ و $A \subset B$ که درست است ؛ زیرا از دو مجموعهٔ برابر، هرکدام زیرمجموعهٔ دیگری است.

عکس نقیض مسأله : اگر از سه مجموعهٔ A، Bو C هیچ دوتای آنها با هم برابر نباشند، آن‌گاه هریک از این سه مجموعه، زیرمجموعهٔ هریک از دوتای دیگر نمی‌تواند باشد، که درست است.

متقابل مسأله : اگر هریک از سه مجموعهٔ A، B و C، زیرمجموعهٔ هریک از دو تای دیگر نباشد، آن‌گاه هیچ دو تای آنها با هم برابر نیست، که درست است.

خلاف مسأله : اگر هریک از سه مجموعهٔ A، B و C، زیرمجموعهٔ هریک از دو تای دیگر باشد، آن‌گاه هیچ دو تای از آنها با هم برابر نیست، که مسأله‌ای نادرست است.

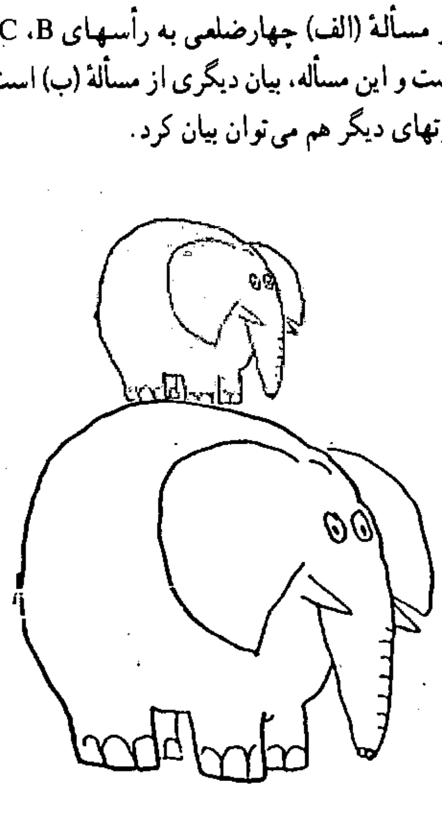
بیان صحیح مسأله : برای آن‌که $A = B = C$ لازم و کافی است که $A \subset B$ و $B \subset C$ و $C \subset A$.

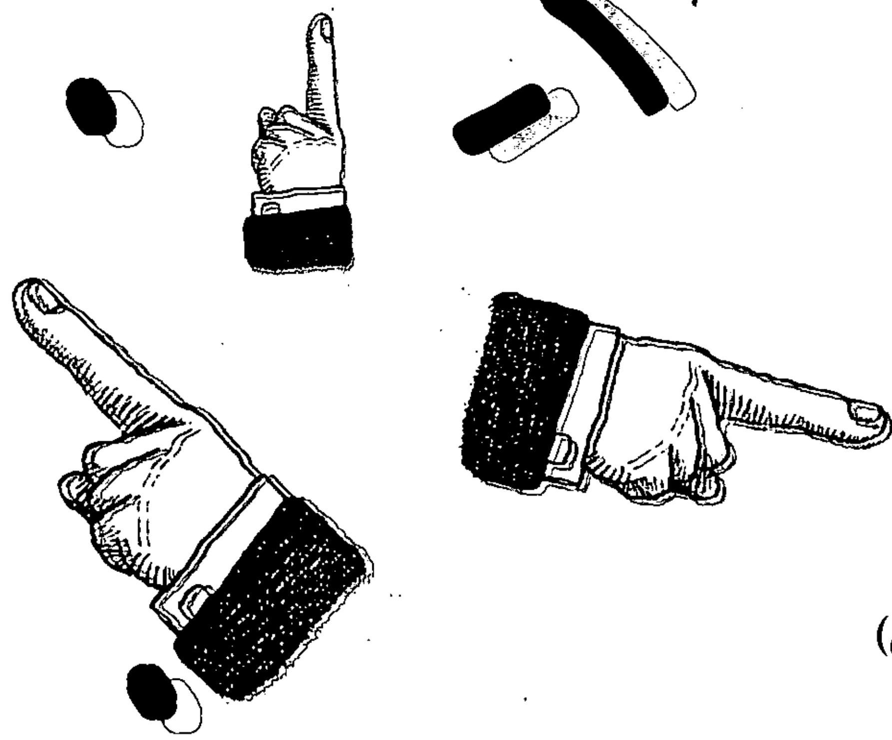
۳. خلاف مسأله می‌شود : «اگر a و b نسبت به هم اول باشند، دو عدد $p = ab$ و $s = a + b$ مقسوم‌علیهی مشترک بزرگتر از یک دارند». اگر k این مقسوم علیه مشترک باشد، p بر k بخش‌پذیر است و چون a و b نسبت به هم اوّلند، پس یکی از دو عدد a یا b مثلاً a بر k بخش‌پذیر است. در این صورت، a و $s = a + b$ هر دو بر k بخش‌پذیرند و نتیجه می‌شود b نیز بر k بخش‌پذیر است و نسبت به a اوّل نیست که خلاف فرض است. بنابراین، خلاف مسأله نادرست و خود مسأله درست است.

۴. شعاع دایره برابر است با $CM = \sqrt{AC \cdot BC}$ و مسأله عبارت می‌شود از رسم پاره‌خطی که واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط AC و BC باشد. رسم این پاره‌خط را از راه‌های گوناگون می‌توان انجام داد. یک راه آن چنین است : نیمدایرهٔ به قطر AC وعمودی که در B بر AC رسم شود، در نقطهٔ T برخورد می‌کنند و CT واسطهٔ هندسی AC و BC و برابر با شعاع دایره است.

نقطهٔ B داخل دایرهٔ مکان M واقع می‌شود ؛ زیرا شعاع دایره که واسطهٔ هندسی CB و CA است، از CB بزرگتر و از CA کوچکتر است.

۵. در مسألهٔ (الف) چهارضلعی به رأسهای B، C، P و Q محاطی است و این مسأله، بیان دیگری از مسألهٔ (ب) است. مسأله را به‌صورتهای دیگر هم می‌توان بیان کرد.





حد

(دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

• **احمد قندهاری**

حد، یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضی است؛ به طوری که مباحث اصلی دیگری مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری، انتگرال و ... به آن وابسته است.

وقتی درمورد حد بحث می‌کنیم، منظور ما بررسی رفتار یک تابع است، وقتی که متغیر آن به عدد مشخصی، بسیار نزدیک می‌شود؛ ولی هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد. پیش از ورود به بحث حد، به موارد زیر باید توجه کرد:

۱ـ همسایگی عدد حقیقی a [1]:

الف: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی a را یک همسایگی عدد حقیقی a گویند. برای مثال، اگر $a=۲$، آن‌گاه بازه‌های $(۱,۶)$، $(۰,۵)$، $(-۱,۱۰)$ را یک همسایگی عدد ۲ گویند.

ب: همسایگی متقارن:

بازهٔ $(a-r\,,\,a+r)$ را یک همسایگی متقارن عدد a گویند.

مثال: بازهٔ $(۲-\frac{۱}{۲},۲+\frac{۱}{۲})$ را یک همسایگی متقارن عدد ۲ گویند. و بازهٔ $(۴-\frac{۱}{۵},۴+\frac{۱}{۵})$ را یک همسایگی متقارن عدد ۲ گویند.

ج: همسایگی متقارن محذوف:

اگر از همسایگی متقارن عدد a، خود عدد a را برداریم، این همسایگی را همسایگی متقارن محذوف گویند:

$(a-r,a+r)-\{a\}$

برای مثال، همسایگی $(۵-\frac{۱}{۱۰},۵+\frac{۱}{۱۰})-\{۵\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف عدد ۵ گویند.

د: بهترین شکل نشان دادن همسایگی متقارن محذوف عدد a با شعاع r، به صورت $۰<|x-a|<r$ می‌باشد که خود به خود $x\neq a$ را می‌رساند.

$$۰<|x-a|<r\Rightarrow -r<x-a<r\ ,\ x\neq a$$

یا $a-r<x<a+r$ و $x\neq a$

همسایگی متقارن عدد a با شعاع r را با نماد $N(a,r)$ [2] نیز نشان می‌دهند؛ یعنی:

$$N(a,r)=(a-r,a+r)$$

مثال: $N(۳,\frac{۱}{۱۰})=(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰})$

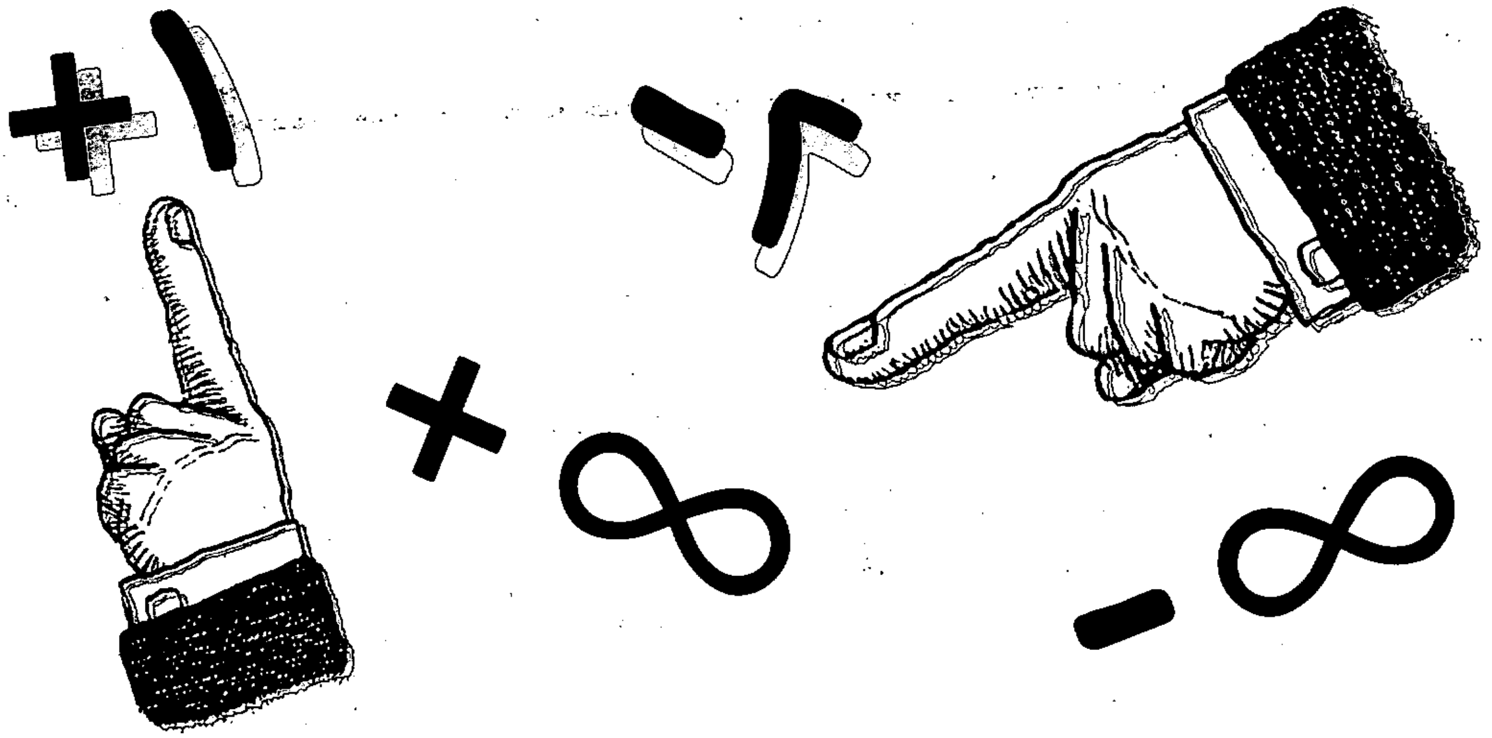
مثال: اگر همسایگی $N(a,\varepsilon)$ به صورت $(\frac{۱۳}{۴},\frac{۱۵}{۴})$ باشد، a و ε را بیابید.

حل: $N(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-\varepsilon=\frac{۱۳}{۴}\\ a+\varepsilon=\frac{۱۵}{۴}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۷}{۲}\ ,\varepsilon=\frac{۱}{۴}$$

تست: اشتراک دو همسایگی $N(۱,\frac{۱}{۲})$ و $N'(۰,۱)$ کدام است؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(-۱,\frac{۱}{۲})$



۳) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$

حل: گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا :

$$N(۱,\frac{۱}{۲})=(۱-\frac{۱}{۲},۱+\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

$$N'(۰,۱)=(۰-۱,۰+۱)=(-۱,۱)$$

$$N\cap N'=(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})\cap(-۱,۱)=(\frac{۱}{۲},۱)$$

۲ـ تغییرات $|x|$ وقتی x در بازه‌های مختلف باشد:

الف: اگر x در یک بازه مثبت باشد، قدرمطلق x نیز در همان بازه است. مثال :

$$۲<x<۵\Rightarrow ۲<|x|<۵$$

ب: اگر x در یک بازه منفی باشد، قدرمطلق x در بازه قرینه آن است. مثال :

$$-۳<x<-۱\Rightarrow ۱<|x|<۳$$

$$-۷<x<-۲\Rightarrow ۲<|x|<۷$$

ج: اگر x در یک بازه که شامل عددهای منفی و مثبت باشد، آن‌گاه قدرمطلق x ازخود صفر تا قدرمطلق، بزرگترین عدد بازه قرار می‌گیرد. مثال :

$$-۴<x<۱۰\Rightarrow\begin{cases}-۴<x<۰\Rightarrow ۰<|x|<۴\\ ۰\le x<۱۰\Rightarrow ۰\le|x|<۱۰\end{cases}\Rightarrow ۰\le|x|<۱۰$$

$$-۸<x<۳\Rightarrow\begin{cases}-۸<x<۰\Rightarrow ۰<|x|<۸\\ ۰\le x<۳\Rightarrow ۰\le|x|<۳\end{cases}\Rightarrow ۰\le|x|<۸$$

تست: اگر $۵>x>۲$ ، آن‌گاه، $|x-۳|$ درکدام یک از بازه‌ها قرار دارد؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[۰,۲]$

۳) $[۰,۳]$ ۴) $[۰,۲]$

حل: گزینهٔ (۴).

$$۲<x<۵\Rightarrow ۲-۳<x-۳<۵-۳$$

$$\Rightarrow -۱<x-۳<۲\Rightarrow ۰\le|x-۳|<۲$$

حد

ورود به مبحث حد را با مثالی شروع می‌کنیم :

مثال: تابع به معادلهٔ $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x-۱}{x-۱}$ با شرط $x\neq۱$ را درنظر می‌گیریم. این تابع برای تمام مقادیر x بجز $x=۱$ تعریف شده است. می‌خواهیم رفتار $f(x)$ را وقتی x نزدیک به ۱ ولی مخالف با ۱ است، مورد بررسی قرار دهیم.

الف: فرض کنیم، x مقادیر۰/۲۵ ، ۰/۵۰ ، ۰/۷۵ ، ۰/۹ ، ۰/۹۹ ، ۰/۹۹۹ و ۰/۹۹۹۹ را بپذیرد، این عمل به این معناست که x را با مقادیر کمتر از ۱ به سمت ۱ نزدیک کرده‌ایم. مقادیر $f(x)$ را برای مقادیر فوق و در جدول صفحه بعد نشان می‌دهیم :

x	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹
f(x)	۱/۷۵	۲/۵	۳/۲۵	۳/۷	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد، وقتی x، با مقادیر کمتر از ۱ به سمت عدد ۱ میل می‌کند، f(x) به طور مرتب به عدد ۴ نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

ب: فرض کنیم x مقادیر ۱/۷۵، ۱/۵۰، ۱/۲۵، ۱/۱، ۱/۰۱، ۱/۰۰۱ و ۱/۰۰۰۱ را بپذیرد، این عمل به این معناست که x را با مقادیر بزرگتر از ۱ به سمت ۱ نزدیک کرده‌ایم، مقادیر f(x) را برای این مقادیر x در جدول زیر نشان می‌دهیم :

x	۱/۷۵	۱/۵۰	۱/۲۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۶/۲۵	۵/۵	۴/۷۵	۴/۳	۴/۰۳	۴/۰۰۳	۴/۰۰۰۳

با ملاحظهٔ دقیق، به دو جدول بالا نتیجه می‌گیریم که، وقتی x به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، f(x) به عدد ۴ نزدیک و نزدیکتر می‌شود و هرچه x به عدد ۱ نزدیکتر شود، f(x) به عدد ۴ نزدیکتر می‌شود.

از جدولهای قبل نتایج زیر به‌دست می‌آید :

وقتی $\begin{cases} x=۰/۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۳ \end{cases}$؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۳ \end{cases}$؛ یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

همچنین وقتی $\begin{cases} x=۰/۹۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۰۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۰۳ \end{cases}$؛

یعنی وقتی x به اندازهٔ ۰/۰۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۰۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است و بالاخره وقتی

$\begin{cases} x=۰/۹۹۹۹ \\ \text{یا} \\ x=۱/۰۰۰۱ \end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases} f(x)=۳/۹۹۹۷ \\ \text{یا} \\ f(x)=۴/۰۰۰۳ \end{cases}$؛ یعنی وقتی x به‌اندازهٔ ۰/۰۰۰۱ کمتر یا بیشتر از ۱ است، f(x) به اندازهٔ ۰/۰۰۰۳ کمتر یا بیشتر از ۴ است.

این نتایج را می‌توان به صورتهای زیر نشان داد :

$|x-۱|<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۳$

$|x-۱|<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۳$

$|x-۱|<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۰۳$

$|x-۱|<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۴|<۰/۰۰۰۳$

اکنون برای بررسی این وضعیت، از دیدی دیگر، ابتدا مقادیر f(x) را درنظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که اگر x را به اندازهٔ کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم، می‌توانیم f(x) را به هر اندازهٔ دلخواه که بخواهیم، به عدد ۴ نزدیک کنیم ؛ به بیان دیگر : می‌توانیم $|f(x)-۴|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم ؛ به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم ؛ یعنی $|x-۱|$ را به اندازهٔ کافی کوچک کنیم. به صورت کلّی‌تر می‌تواند $|f(x)-۴|$ از هر عدد مثبت مفروض ε کوچکتر شود ؛ به شرطی که $|x-۱|$ از عدد مثبتی مانند δ که به طور مناسب اختیار می‌شود، کوچکتر باشد.

در نابرابریهای بالا، نتایج زیر برای ε و δ وجود دارد.

اگر $ε=۰/۳$، آن‌گاه $δ=۰/۱$

اگر $ε=۰/۰۳$، آن‌گاه $δ=۰/۰۱$

اگر $ε=۰/۰۰۳$، آن‌گاه $δ=۰/۰۰۱$

اگر $ε=۰/۰۰۰۳$، آن‌گاه $δ=۰/۰۰۰۱$

پس برای هر $ε>۰$ (ε به قدر کافی کوچک) دلخواه، δ ی مناسبی یافت می‌شود.

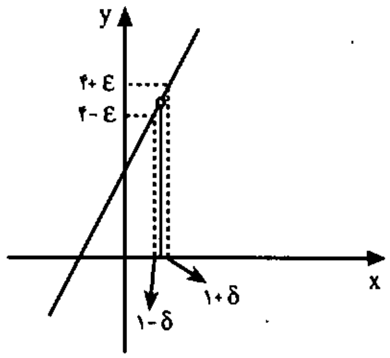
تعبیر هندسی این بحث چنین است :

$$f(x)=\frac{۳x^۲-۲x-۱}{x-۱}=\frac{(۳x+۱)(x-۱)}{x-۱}=۳x+۱ \;،\; x\neq ۱$$

نمودار $f(x)=۳x+۱$ را با شرط $x\neq ۱$ رسم می‌کنیم.

$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۱$

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۲$



به طور خلاصه می‌توان گفت که مقدار δ به ε بستگی دارد و هر چه‌قدر ε را کوچکتر اختیار کنیم، δ نیز کوچکتر خواهد شد.
بنابراین، در مورد تابع f می‌توان نوشت :
$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۴$ ؛ زیرا برای هر $\varepsilon > ۰$ هرقدر کوچک یک $\delta > ۰$ ی وجود دارد که

$$۰ < |x-۱| < \delta \Rightarrow |f(x)-۴| < \varepsilon$$

حال، این آمادگی را داریم که حدّ تابع را در حالت کلّی تعریف کنیم.

۱ـ تعریف:

فرض کنید f تابعی باشد، در تمام نقاط بازهٔ I که شامل عدد حقیقی a است (بجز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. حدّ تابع f(x) وقتی x به سمت a میل می‌کند، برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$. اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد که :

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

یا بنویسیم :

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad \ni |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

برای اثبات رابطهٔ فوق، چنین عمل می‌کنیم :
$|f(x)-L| < \varepsilon$ را با جایگذاری عبارت f(x) در آن حل می‌کنیم تا به رابطهٔ $|x-a| < \delta$ برسیم.
در حقیقت باید δ را بر حسب ε پیدا کنیم و توجه داشته باشیم که، باید برای δ ی به‌دست آمده بتوان از نابرابری $|x-a| < \delta$ به نابرابری $|f(x)-L| < \varepsilon$ رسید.

مثال: در تابع به معادلهٔ $f(x) = ۳x-۱$ ، داریم

$$\left\{\lim_{x\to ۳} f(x) = ۸\right.$$

نخست: δ ای برای $\varepsilon = ۰/۰۰۱$ بیابید.
دوم: مسأله را در حالت کلّی حل کنید.

حل نخست: $|f(x)-۸| < ۰/۰۰۱$

$$\Rightarrow |۳x-۱-۸| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳x-۹| < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳(x-۳)| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow ۳|x-۳| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |x-۳| < \frac{۱}{۳۰۰۰} \Rightarrow \delta = \frac{۱}{۳۰۰۰}$$

توجّه: $\delta \le \frac{۱}{۳۰۰۰}$ نیز درست است ؛ زیرا :

$$|x-۳| < \delta \le \frac{۱}{۳۰۰۰} \Rightarrow |x-۳| < \frac{۱}{۳۰۰۰}$$

$$\Rightarrow ۳|x-۳| < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳(x-۳)| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳x-۹| < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳x-۱-۸| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |f(x)-۸| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

حل دوم: ثابت می‌کنیم که برای هر $\varepsilon > ۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد که

$$۰ < |x-۳| < \delta \Rightarrow |f(x)-۸| < \varepsilon$$

$$|f(x)-۸| < \varepsilon \Rightarrow |۳x-۱-۸| < \varepsilon \Rightarrow |۳x-۹| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |۳(x-۳)| < \varepsilon \Rightarrow ۳|x-۳| < \varepsilon \Rightarrow |x-۳| < \frac{\varepsilon}{۳}$$

$$\Rightarrow \delta \le \frac{\varepsilon}{۳}$$

مسألهٔ (۱): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید $\left\{\lim_{x\to ۲}(x^۲-۴) = -۴\right.$.

حل: ثابت می‌کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$$

$$|f(x)+4| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 4x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-2)^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta \le \sqrt{\varepsilon}$$

مسألهٔ (۲): با استفاده ازتعریف حدّ تابع، ثابت کنید

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 5x) = -4$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)+4| < \varepsilon$$

$$|f(x)+4| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 5x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x-4)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1| \times |x-4| < \varepsilon$$

در این‌جا از همسایگی متقارن محذوف عدد ۱ استفاده می‌کنیم با شعاع $r = 1$:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

در بازهٔ $0 < x < 2$، یک کران بالای $|x-4|$ را پیدا می‌کنیم، ابتدا، $x-4$ را می‌سازیم، سپس $|x-4|$ را می‌سازیم ؛ آن‌گاه یک کران بالای آن را پیدا می‌کنیم :

$$0 < x < 2 \Rightarrow 0-4 < x-4 < 2-4$$

$$\Rightarrow -4 < x-4 < -2 \Rightarrow 2 < |x-4| < 4$$

اگر $0 < x < 2$، یک کران بالای $|x-4|$ عدد ۴ است، می‌نویسیم :

$$\underbrace{|x-1| \times 4}_{(1)} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-1| \times |x-4|}_{(2)} < \varepsilon \quad \text{اگر}$$

زیرا عبارت (۱) بزرگ‌تر از عبارت (۲) است. اگر عبارت بزرگ‌تر، کوچک‌تر از ε باشد، آن‌گاه عبارت کوچک‌تر هم، کوچک‌تر از ε می‌شود. در نتیجه :

$$|x-1| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta \le \operatorname{Min}\left\{r, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\delta \le \operatorname{Min}\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\} \quad \text{یا}$$

می‌توان نشان داد برای δ ی به‌دست آمده از نابرابری $0 < |x-1| < \delta$ به نابرابری $|f(x)+4| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

مسألهٔ (۳): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-4} = -1$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$$

$$|f(x)+1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2}{x-4} + 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-2+x-4}{x-4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x-6}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2(x-3)}{x-4}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| \times \frac{2}{|x-4|} < \varepsilon$$

در این‌جا یک همسایگی متقارن محذوف برای عدد ۳ درنظر می‌گیریم با شعاع $r = \frac{1}{2}$:

$$0 < |x-3| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

حال یک کران پایین $|x-4|$ را در این بازه پیدا می‌کنیم :

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} - 4 < x-4 < \frac{7}{2} - 4$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x-4 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-4| < \frac{3}{2}$$

یک کران پایین $|x-4|$، $\frac{1}{2}$ است .

می‌نویسیم :

$$\underbrace{|x-3| \times \frac{2}{\frac{1}{2}}}_{(1)} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-3| \times \frac{2}{|x-4|}}_{(2)} < \varepsilon \quad \text{اگر}$$

زیرا عبارت (۱) از عبارت (۲) بزرگ‌تر است، اگر عبارت بزرگ‌تر از ε کوچک‌تر باشد ؛ آن‌گاه عبارت کوچک‌تر هم از ε کوچک‌تر خواهد شد.

$$\Rightarrow |x-3| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta \le \operatorname{Min}\left\{r, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

$$\delta \le \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

مسألهٔ (۴): با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x-2} = 7$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni |x-۳|<\delta \Rightarrow |f(x)-۷|<\varepsilon$$

$$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۲}{x-۲}-۷\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x-۲}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-۳)(x-۴)}{x-۲}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$$

حال یک همسایگی متقارن محذوف برای عدد (۳) انتخاب می‌کنیم با شعاع $r=\frac{۱}{۲}$:

$$|x-۳|<\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x-۳<\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$$

حال وقتی $\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$ یک کران بالایی برای $|x-۴|$ و یک کران پایینی برای $|x-۲|$ پیدا می‌کنیم.

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}-۴<x-۴<\frac{۷}{۲}-۴$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x-۴<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۴|<\frac{۳}{۲}$$

کران بالا $(\frac{۳}{۲})$ است.

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}-۲<x-۲<\frac{۷}{۲}-۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}<x-۲<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

کران پایین $(\frac{۱}{۲})$ است.

می‌نویسیم :

$$\text{اگر}\quad \underbrace{|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}}_{(۱)}<\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}}_{(۲)}<\varepsilon$$

عبارت (۱) بزرگتر از عبارت (۲) است، اگر عبارت بزرگتر، کوچکتر از ε باشد ؛ آن‌گاه عبارت کوچکتر، کوچکتر از ε خواهد شد.

$$|x-۳|\times۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۳} \Rightarrow \delta\le \text{Min}\left\{\frac{۱}{۲},\frac{\varepsilon}{۳}\right\}$$

تمرین: با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید :

$$۱)\ \left\{\lim_{x\to۲}\frac{x^۲+۲}{۵x-۸}=۳\right.$$

$$\left\{\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-۳}{x^۲-۳x+۳}=۱\right.$$

۲ـ حدّ چپ و حدّ راست:

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک بازهٔ باز (a,b) تعریف شده باشد، می‌گویند تابع f در a، حد راست برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد $\delta>۰$ وجود داشته باشد که اگر $۰<x-a<\delta$ ؛ آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ یا :

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni ۰<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک بازهٔ باز (c,a) تعریف شده باشد، می‌گویند تابع f در a حدّ چپ برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a^-}f(x)=L$ ، هرگاه : برای هر $\varepsilon>۰$ هر چه‌قدر کوچک، عدد $\delta>۰$ وجود داشته باشد که اگر $۰<a-x<\delta$ ؛ آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$ یا :

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni ۰<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

مسألهٔ (۵): با استفاده از تعریف، ثابت کنید : $\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}=۳$.

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni ۰<a-۱<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}-۳\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}-۳\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{+(x-۱)}-۳\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^۲+x+۱-۳|<\varepsilon \Rightarrow |x^۲+x-۲|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-۱)(x+۲)|<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times|x+۲|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یکطرفه برای عدد ۱ درنظر می‌گیریم با شعاع $r=1$:

$$\begin{cases} x\to 1^+ \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<2$$

سپس کران بالایی برای $|x+2|$ پیدا می‌کنیم :

$$1<x<2 \Rightarrow 3<x+2<4 \Rightarrow 3<|x+2|<4$$

عدد (۴) یک کران بالای $|x+2|$ در بازهٔ $1<x<2$ می‌باشد.

اگر $|x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|\times 4<\varepsilon \Rightarrow \underset{x\to 1^+}{|x-1|}<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 0<x-1<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \delta \le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

مسألهٔ (۶): با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{|x-1|}=-3$$

حل: باید ثابت کنیم :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni 0<1-x<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3-1}{|x-1|}+3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)}+3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|-(x^2+x+1)+3\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|x^2+x+1-3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x^2+x-2\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|(x-1)(x+2)\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یکطرفه برای عدد ۱ در نظر می‌گیریم $r=1$:

$$\begin{cases} x\to 1^- \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow 2<x+2<3$$

$$\Rightarrow 2<|x+2|<3$$

یک کران بالای $|x+2|$ برابر ۳ است.

اگر $|x-1|\times 3<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|\times 3<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta\le \mathrm{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

تمرین: با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$1)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{|x-2|}=12 \qquad 2)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{|x-2|}=-12$$

قضیه: تابع f در نقطهٔ a حد دارد ؛ اگر و تنها اگر حدّ راست و حدّ چپ در نقطهٔ a موجود و با هم برابر باشند.

تمرین: با استفاده از تعریف، ثابت کنید :

$$1)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x+4}{\lfloor -x\rfloor-3}=-1 \qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{5x-3}=\frac{3}{2}$$

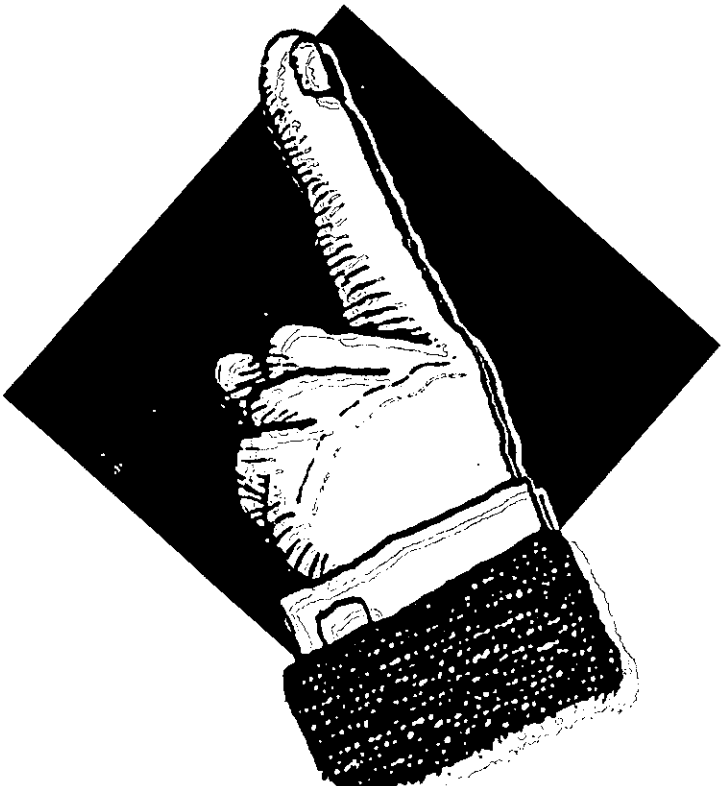
$$3)\ \lim_{x\to 3}(x^2-10x)=-21 \qquad 4)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{2}$$

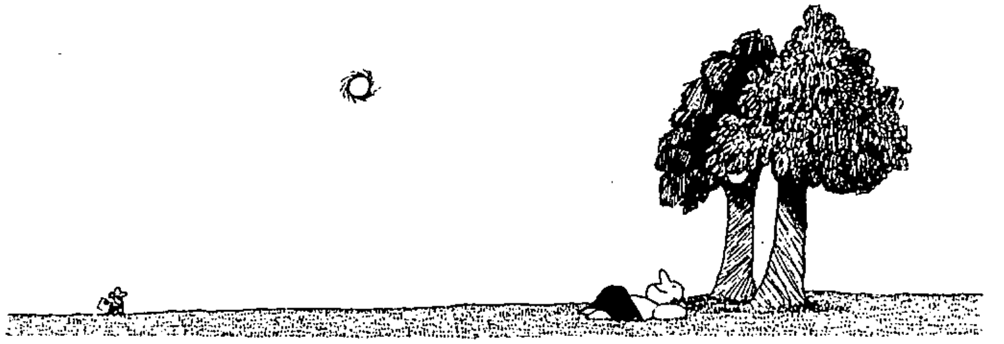
$$5)\ \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0 \qquad 6)\ \lim_{x\to 5^-}\sqrt{5-x}=0$$

یادداشتها :

۱ـ کلیّهٔ عددها و بازه‌های مورد بحث، حقیقی‌اند.

۲ـ عدد N حرف اوّل کلمهٔ Neighbourhood است که به معنای همسایگی است.

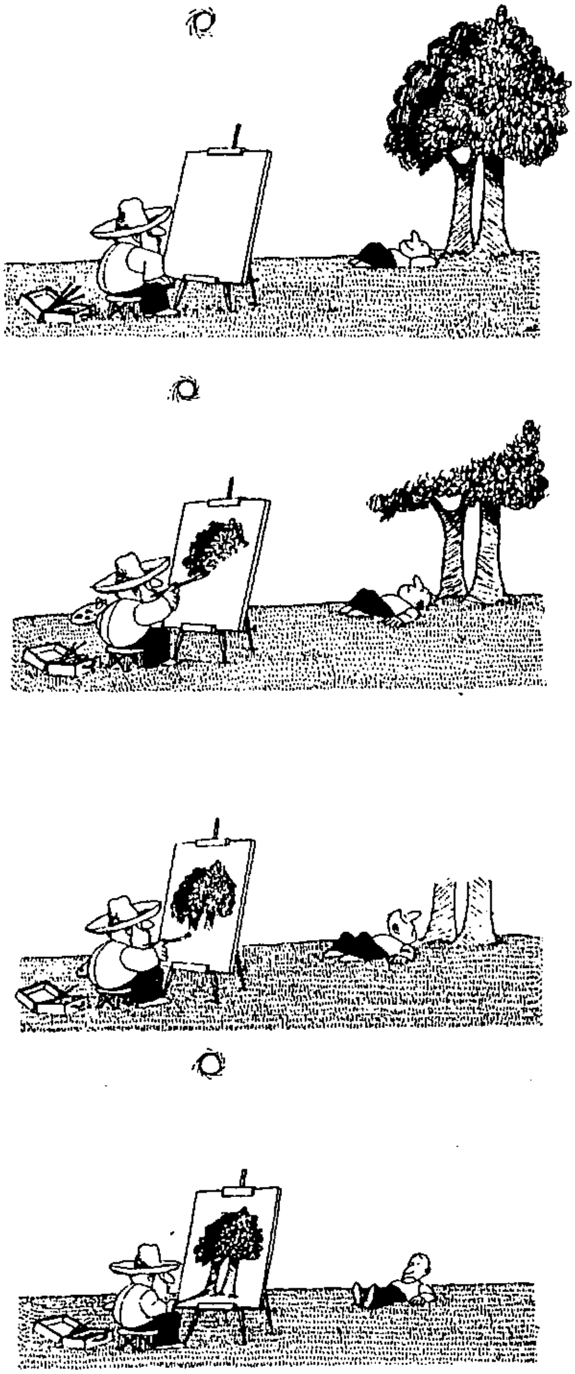




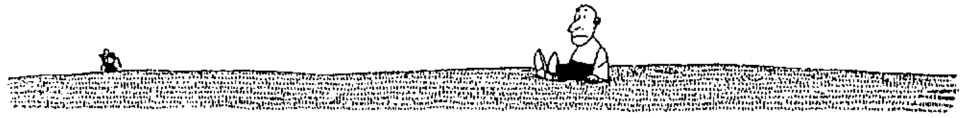
رشد و زوال

(دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی، رشته‌های ریاضی و تجربی)

● میرشهرام صدر



در این مقاله، یکی از کاربردهای مشتق و تابع نمایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، کمیّتهایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در حال افزایش (رشد) یا کاهش (زوال) هستند و آهنگ تغییرات آنها (رشد یا زوال) نسبت به زمان، متناسب با مقدار کمیّت اوّلیه است. برای مثال، اگر پول خود را نزدِ یکی از بانکها برای سرمایه‌گذاری بلندمدت، سپرده‌گذاری کنید پس از گذشت زمانی، مقدار پول افزایش (رشد) می‌یابد و متناسب با مقدار پول اوّلیه است. امّا در هر مادهٔ رادیواکتیو، بعد از مدتی، نصف اتمهای رادیواکتیو موجود در آن، متلاشی (زوال) می‌شود و این مدّت زمان را نیمه عمر مادهٔ رادیواکتیو گوییم. برای مثال، «رادیم» دارای نیمه عمر ۱۶۲۰ سال است؛ یعنی اگر هم اکنون یک گرم رادیم داشته باشیم، پس از گذشت ۱۶۲۰ سال، فقط ۰/۵ گرم آن فعّال باقی می‌ماند و پس از گذشت ۱۶۲۰ سال دیگر، تنها ۰/۲۵ گرم رادیم فعّال داریم. بنابراین، اگر زمان را با t واحد نمایش دهیم



و اندازهٔ کمیّت موجود در هر زمان ؛ A واحد باشد، آن‌گاه با فرض این که kعدد ثابتی است، آهنگ تغییرات کمیّت A نسبت به زمان t یعنی $\frac{dA}{dt}$ متناسب با مقدار A است ؛ پس داریم :

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad (1)$$

اگر در حالی که t افزایش می‌یابد، به A افزوده شود، آن‌گاه $k > 0$ و **قانون رشد طبیعی** برقرار است. اگر در حالی که t افزایش می‌یابد، A کاهش یابد، آن‌گاه $k < 0$ و **قانون زوال طبیعی** برقرار است.

اکنون با توجه به رابطهٔ (۱) به دنبال معادله‌ای هستیم که به کمک آن، بتوان کمیّت Aرا در زمان t به دست آورد ؛ یعنی باید کمیّت A را برحسب t به دست آوریم. برای این‌منظور، نیازمند ابزار جدیدی به نام **انتگرال نامعین** هستیم ؛ بنابراین ابتدا، انتگرال نامعین را تعریف می‌کنیم و سپس به کمک آن، معادله‌ای با توجه به رابطهٔ (۱) به دست می‌آوریم که کمیّت A را درزمان t مشخص کند.

تابع اوّلیه (انتگرال معین)

تابع مشتق‌پذیر با ضابطهٔ $F(x) = x^2 + 3x + 1$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم مشتق این تابع به صورت زیر است :

$F'(x) = 2x + 3$

اکنون بنا به تعریف تابع باضابطهٔ $F(x) = x^2 + 3x + 1$ را تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2x + 3$ می‌نامند.
به همین ترتیب، اگر تابع با ضابطهٔ $G(x) = x^2 + 3x + 5$ را درنظر بگیریم، خواهیم داشت :

$G'(x) = 2x + 3$

یعنی تابع با ضابطهٔ $G(x) = x^2 + 3x + 5$ نیز یک تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ است. در نتیجه، اگر C یک عدد ثابت دلخواه باشد، هر تابع با ضابطهٔ $F(x) = x^2 + 3x + C$ تابع اوّلیه یا انتگرال نامعین تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2x + 3$ است. در این حالت می‌نویسیم :

$\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$

و می‌خوانیم انتگرال نامعین تابع باضابطهٔ $f(x) = 2x + 3$ برابر تابع باضابطهٔ $F(x) = x^2 + 3x + C$ است.

تعریف. اگر f تابعی باشد که در بازه‌ای شامل فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه F را **تابع اوّلیه** یا **انتگرال نامعین** تابع f می‌نامند ؛ در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$، داشته باشیم :

$F'(x) = f(x)$

تابع اوّلیه f را به صورت $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف بالا، اگر تابع F(x) یک تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع f(x) باشد، یعنی داشته باشیم : $F'(x) = f(x)$ و C یک عدد ثابت دلخواه باشد، چون مشتق تابع ثابت، برابر صفر است، آن‌گاه تابع $F(x) + C$ نیز تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) برای تابع f(x) است ؛ بنابراین هر تابع که تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) داشته باشد، بی‌شمار تابع اوّلیه دارد و در این حالت، تابع اوّلیه یا انتگرال نامعین تابع f(x) با تقریب یک عدد ثابت، به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

مثال ۱. تابع با ضابطه $F(x) = kx$، $(k \in \mathbb{R})$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = k$، بنابراین داریم :

$$\int kdx = kx + C$$

مثال ۲. تابع با ضابطهٔ $F(x) = \sin x$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = \cos x$، بنابراین داریم :

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

مثال ۳. تابع باضابطهٔ $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$، $(a \neq 0)$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = e^{ax}$، بنابراین داریم :

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

مثال ۴. تابع با ضابطهٔ $F(x) = \mathrm{Ln}|x|$ را درنظر می‌گیریم ؛ چون $F'(x) = \frac{1}{x}$، بنابراین داریم :

$\int \frac{1}{x}dx = Ln|x| + C$

اکنون در ادامهٔ بحث رشد و زوال، با استفاده از انتگرال نامعین و مثالهای بالا، کمیّت A را برحسب t از رابطه $\frac{dA}{dt} = kA$ به دست می‌آوریم:

$\frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \frac{dA}{A} = kdt$ (متغیرها از هم جدا شده‌اند)

$\Rightarrow \int \frac{dA}{A} = \int kdt \Rightarrow Ln|A| = kt + C_۱$

در نتیجه داریم:

$|A| = e^{kt+C_۱}$

چون $A > ۰$، بنابراین:

$A = e^{kt} \times e^{C_۱}$

با فرض این که $C = e^{C_۱}$ خواهیم داشت:

$A = Ce^{kt}$

با توجه به رابطهٔ بالا، ملاحظه می‌کنیم که توانستیم A را برحسب t به دست آوریم و پس از این، در حلّ مسائل رشد و زوال، از این فرمول استفاده می‌کنیم.

مثال ۵. آهنگ افزایش طبیعی جمعیت شهری، متناسب با جمعیت آن شهر است. اگر در طی چهل سال، جمعیت از ۴۰۰۰۰ نفر به ۶۰۰۰۰ نفر افزایش یابد، چه موقع جمعیت به ۸۰۰۰۰ نفر می‌رسد؟

حل. فرض کنیم فاصلهٔ زمانی از آغاز t سال باشد. تعداد افراد جامعه در سال t ام را با A نمایش داده و معادلهٔ زیر، تعداد افراد جامعه را در سال t ام نشان می‌دهد:

$A = Ce^{kt}$

شرایط اولّیه، درجدول زیر مشخص شده است:

t	۰	۴۰	T
A	۴۰۰۰۰	۶۰۰۰۰	۸۰۰۰۰

در حالتی که $t = ۰$ و $A = ۴۰۰۰۰$ خواهیم داشت:

$۴۰۰۰۰ = Ce^{۰} \Rightarrow C = ۴۰۰۰۰ \Rightarrow A = ۴۰۰۰۰e^{kt}$ (۱)

از این شرط که $t = ۴۰$ و $A = ۶۰۰۰۰$ نتیجه می‌شود که:

$۶۰۰۰۰ = ۴۰۰۰۰e^{۴۰k} \Rightarrow e^{۴۰k} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow k = \frac{۱}{۴۰}Ln\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow k = Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۳}{۲}}$

با قرار دادن مقدار k در معادلهٔ (۱) داریم:

$A = ۴۰۰۰۰e^{Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۳}{۲}}t}$

اگر در این معادله قرار دهیم $t = T$ و $A = ۸۰۰۰۰$، نتیجه می‌شود که:

$۸۰۰۰۰ = ۴۰۰۰۰e^{Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۳}{۲}}T} \Rightarrow Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۳}{۲}}T = Ln۲$

$\Rightarrow T = \frac{Ln۲}{Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۳}{۲}}} \approx ۶۸/۳۸$

بنابراین پس از گذشت ۶۸ سال و در سال شصت و نهم از لحظهٔ شروع، جمعیت این جامعه به ۸۰۰۰۰ نفر می‌رسد.

مثال ۶. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری، متناسب با تعداد باکتری موجود است، اگر تعداد باکتریها پس از گذشت ۳ ساعت، سه برابر شود و در پایان ۱۲ ساعت، تعداد آنها ۱۰ میلیون شود، در این صورت، چند باکتری در آغاز داشته‌ایم.

حل. شرایط اولّیه، در جدول زیر مشخص شده است:

t	۰	۳	۱۲
A	x	۳x	$۱۰^{۷}$

$A = Ce^{kt}$

در حالتی که $t = ۰$ و $A = x$ داریم:

$x = Ce^{۰} \Rightarrow C = x \Rightarrow A = xe^{kt}$

در حالتی که $t = ۳$ و $A = ۳x$، نتیجه می‌شود که:

$۳x = xe^{۳k} \Rightarrow ۳ = e^{۳k} \Rightarrow k = \frac{۱}{۳}Ln۳ = Ln\sqrt[۳]{۳}$

در حالتی که $t = ۱۲$ و $A = ۱۰^{۷}$، خواهیم داشت:

$$۱۰^{۷} = xe^{۱۲Ln\sqrt[۴]{۳}} \Rightarrow ۱۰^{۷} = xe^{Ln ۳^{۴}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۰^{۷}}{۳^{۴}} \approx ۱۲۳۴۵۷$$

مثال ۷. فرض کنید بهای یک گلدان عتیقه، با قدمت آن افزایش می‌یابد و آهنگ رشد بهای آن در هر زمان، متناسب با بهایش در همان زمان باشد. اگر بهای گلدان عتیقه در ده سال پیش ۲۵۰۰۰۰ تومان و بهای آن در حال حاضر ۳۵۰۰۰۰ تومان باشد، انتظار می‌رود در ۳۰ سال بعد، بهای گلدان عتیقه چه‌قدر باشد؟

شرایط اوّلیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۱۰	۳۰
A	۲۵۰۰۰۰	۳۵۰۰۰۰	x

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t = ۰$ و $A = ۲۵۰۰۰۰$ ، داریم :

$$۲۵۰۰۰۰ = Ce^{۰} \Rightarrow C = ۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow A = ۲۵۰۰۰۰e^{kt}$$

در حالتی که $t = ۱۰$ و $A = ۳۵۰۰۰۰$ ، نتیجه می‌شود که :

$$۳۵۰۰۰۰ = ۲۵۰۰۰۰e^{۱۰k} \Rightarrow \frac{۷}{۵} = e^{۱۰k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱}{۱۰}Ln\frac{۷}{۵} = Ln\sqrt[۱۰]{\frac{۷}{۵}}$$

در حالتی که $t = ۳۰$ ، خواهیم داشت :

$$A = ۲۵۰۰۰۰e^{۳۰Ln\sqrt[۱۰]{\frac{۷}{۵}}} \Rightarrow A = ۲۵۰۰۰۰ \times (\frac{۷}{۵})^{۳}$$

$= ۶۸۶۰۰۰$ تومان

مثال ۸. طبق قانون نیوتن، برای کاهش دما در یک جسم، آهنگ تغییر دمای هر جسم، متناسب با اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است. اگر جسمی در هوای با دمای ۳۵ درجه باشد و طی ۴۰ دقیقه، دمای جسم از ۱۲۰ درجه به ۶۰ درجه برسد، دمای آن پس از ۱۲۰ دقیقه چه‌قدر است؟

حل. فرض کنیم از زمانی که جسم شروع به سرد شدن می‌کند، t دقیقه گذشته باشد و فرض کنیم دمای جسم در دقیقه t ام، A درجه باشد، چون آهنگ تغییر دما در جسم، متناسب با اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است، داریم :

$$(I) \quad \frac{dA}{dt} = k(A - ۳۵)$$

($(A - ۳۵)$ همان اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است.)

شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۴۰	۱۲۰
A	۱۲۰	۶۰	x

اگر در رابطهٔ (I)متغیرها از هم جدا شوند، داریم :

$$\frac{dA}{(A - ۳۵)} = kdt \Rightarrow \int\frac{dA}{(A - ۳۵)} = \int kdt$$

$$\Rightarrow Ln|A - ۳۵| = kt + C_۱$$

$$\Rightarrow |A - ۳۵| = e^{kt + C_۱}$$

چون $A - ۳۵ > ۰$ ، داریم :

$$A - ۳۵ = e^{kt} \times e^{C_۱}$$

با فرض $C = e^{C_۱}$ خواهیم داشت :

$$A = Ce^{kt} + ۳۵$$

در حالتی که $t = ۰$ و $A = ۱۲۰$ ، نتیجه می‌شود :

$$۱۲۰ = Ce^{۰} + ۳۵ \Rightarrow C = ۸۵ \Rightarrow A = ۸۵e^{kt} + ۳۵$$

در حالتی که $t = ۴۰$ و $A = ۶۰$ ، داریم :

$$۶۰ = ۸۵e^{۴۰k} + ۳۵ \Rightarrow e^{۴۰k} = \frac{۵}{۱۷}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۱}{۴۰}Ln\frac{۵}{۱۷} = Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۵}{۱۷}}$$

در حالتی که $t = ۱۲۰$ ، داریم :

$$A = ۸۵e^{۱۲۰Ln\sqrt[۴۰]{\frac{۵}{۱۷}}} + ۳۵ = ۸۵ \times (\frac{۵}{۱۷})^{۳} + ۳۵ = ۳۷/۱۶^{\circ}$$

مثال ۹. اگر سود با نرخ سالیانه ۸ درصد و به‌طور پیوسته محاسبه شود، پس از چه مدت، ۵۰۰۰ تومان سپرده به ۱۰۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد؟

$$k = ۰/۰۸ \Rightarrow A = Ce^{۰/۰۸t}$$

شرایط اوّلیه، در جدول زیر آمده است:

t	۰	T
A	۵۰۰۰	۱۰۰۰۰

در حالتی که $t=۰$ و $A=۵۰۰۰$، داریم:

$$۵۰۰۰ = Ce^{۰} \Rightarrow C = ۵۰۰۰ \Rightarrow A = ۵۰۰۰e^{۰/۰۸t}$$

در حالتی که $A=۱۰۰۰۰$، خواهیم داشت:

$$۱۰۰۰۰ = ۵۰۰۰e^{۰/۰۸t} \Rightarrow t = \frac{Ln۲}{۰/۰۸} = ۸/۶۶$$

یعنی پس از گذشت هشت سال و در سال نهم، سپرده به ۱۰۰۰۰ تومان می‌رسد.

مثال ۱۰. نیمهٔ عمر فسفر رادیواکتیو ۱۴ روز است. اگر ۲ گرم از این ماده را در محفظه‌ای داشته باشیم، پس از ۲۸ روز، چه‌مقدار از آن فعّال باقی می‌ماند.

حل. شرایط اوّلیه، در جدول زیر مشخص شده است:

t	۰	۱۴	۲۸
A	۲	۱	x

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t=۰$ و $A=۲$، داریم:

$$۲ = Ce^{۰} \Rightarrow C = ۲ \quad ; \quad A = ۲e^{kt}$$

در حالتی که $t=۱۴$ و $A=۱$، نتیجه می‌شود که:

$$۱ = ۲ \times e^{۱۴k} \Rightarrow k = \frac{۱}{۱۴}Ln\frac{۱}{۲} = Ln\sqrt[۱۴]{\frac{۱}{۲}}$$

در حالتی که $t=۲۸$، خواهیم داشت:

$$A = ۲ \times e^{Ln\sqrt[۱۴]{\frac{۱}{۲}} \times ۲۸} = ۲e^{۲۸Ln\sqrt[۱۴]{\frac{۱}{۲}}} = ۲e^{Ln(\frac{۱}{۲})^{۲}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

یعنی پس از ۲۸ روز، ۰/۵ گرم فسفر رادیواکتیو فعال داریم.

مسائل برای حل

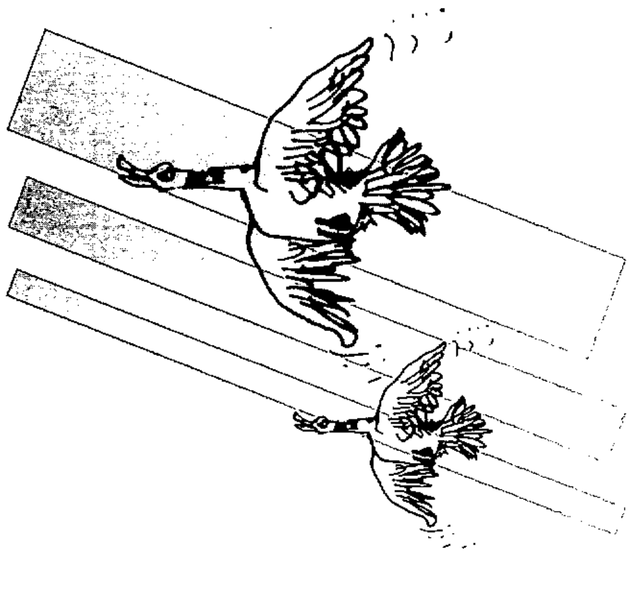
۱. آهنگ افزایش جمعیت شهر معینی، متناسب با جمعیت شهر است. اگر جمعیت در سال ۱۳۴۰، ۵۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۷۰، ۷۵۰۰۰ نفر بوده باشد، جمعیت مورد انتظار در سال ۲۰۰۰ چند نفر است؟

۲. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر در آغاز ۱۰۰۰ باکتری وجود داشته باشد و تعداد باکتریها در هر ۱۲ دقیقه، دو برابر شود، پس از گذشت چه مدت، تعداد باکتریها به $۱۰^{۶}$ می‌رسد؟

۳. در هر زمان، آهنگ واپاشی رادیم متناسب با مقدار موجود آن است. اگر اکنون ۶۰ میلیگرم رادیم داشته باشیم و نیمهٔ عمر آن ۱۶۹۰ سال باشد، ۱۰۰ سال دیگر چقدر رادیم خواهیم داشت؟

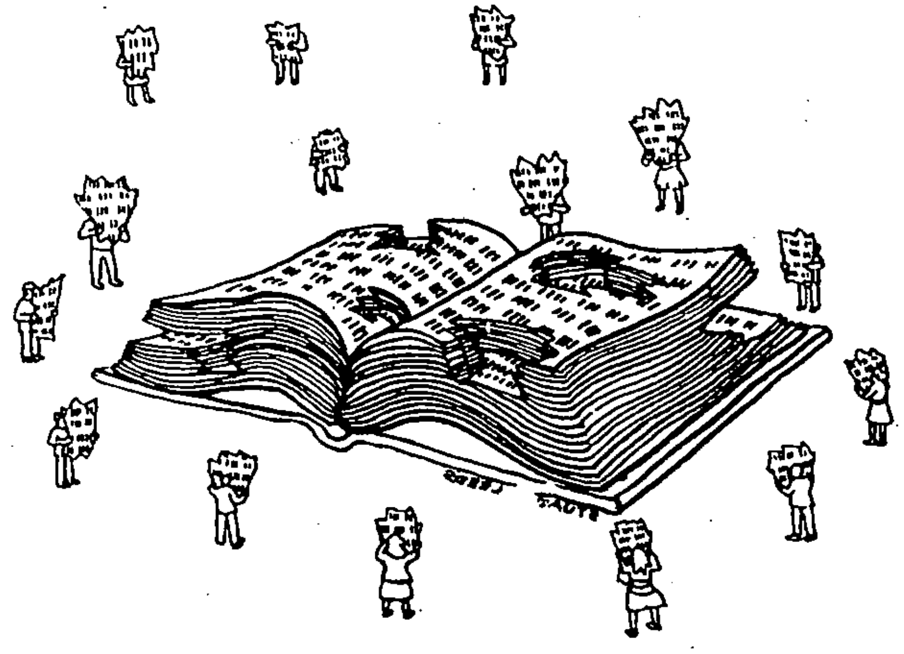
۴. پس از این که وسیله‌ای یک سال کار کند، در هر زمان، آهنگ استهلاک آن، متناسب با بهای همان وسیله در آن زمان است. اگر وسیله‌ای در اوّل فروردین ۱۳۶۹ خریداری شده باشد و بهای آن در اوّل فروردین ۱۳۷۰، ۷۰۰۰۰۰ تومان و در اوّل فروردین ۱۳۷۱، ۵۸۰۰۰۰ تومان بوده باشد، بهای مورد انتظار آن وسیله در اوّل فروردین ۱۳۷۵ چه‌قدر است؟

۵. اگر دمای جسمی در هوایی که دمای آن ۰ درجه است، طی ۴۰ دقیقه از ۲۰۰ درجه به ۱۰۰ درجه برسد، با استفاده از قانون نیوتن، برای سرد شدن (تمرین حل شدهٔ «۳») تعیین کنید که پس از چند دقیقهٔ دیگر، دمای آن به ۵۰ درجه می‌رسد؟



گشت و گذاری در
ریاضیات معاصر

• تهیه و تنظیم: غلامرضا یاسی پور



مقدمه: آغاز هزارهٔ سوّم و ابتدای قرن بیست و یکم میلادی، یعنی، سال ۲۰۰۰، برابر با یازدهم دیماه ۱۳۷۸ تا دهم دیماه ۱۳۷۹ را سال جهانی ریاضیات نام نهاده‌اند، و این اهمیت ریاضیات را در دنیایی که با هزارهٔ سوّم آغاز می‌شود نشان می‌دهد، ریاضیاتی که هدفِ ساختنِ نه تنها رایانه‌های هرچه پیشرفته‌تر را دارد که بر سرِ ابداع ماشینهای متفکر است و از قعر گل سیاه تا اوج زحل را درنوردیده.

مقاله‌هایی که از این شماره به بعد، تحت عنوان **گشت و گذاری در ریاضیات معاصر** منتشر می‌شود، با توجه به این نقش حیاتی ریاضیات در زندگی انسانها، و به توصیهٔ هیأت تحریریهٔ **مجلهٔ برهان** و برای آشنایی هرچه بیشتر خوانندگان این مجله، تهیه و تنظیم شده‌اند.

مقاله‌ها به سفارش هیأت تحریریهٔ مجله، کوتاه ؛ اما بسیار دقیق هستند و آشنایی مختصری به خوانندهٔ علاقه‌مند به ریاضیات می‌دهند و مطالب آنها با استفاده از دایرهٔ المعارف فشردهٔ ریاضیات نوشتهٔ ریاضیدانهای آلمانی تهیه و تنظیم شده‌اند.

* * *

رمزگذاری

از دوران باستان تا عصر حاضر، پیامهای سری بسیاری ارسال شده است، و نیاز به ارتباطهای مخفیانه، به طور سنتی، در موارد سیاسی و نظامی بسیاری رخ داده است.

* امروزه، مسألهٔ پیامهای سری، با به میان آمدن کاربردهای وسیعی از ارتباطهای الکترونیکی، حتی در مورد مذاکرات مالی نیز ضروری شده است. در نتیجه علاقهٔ بسیاری به روشهایی وجود دارد که پیامها را برای هر کس، غیر از دریافت کنندهٔ مورد نظر نامفهوم کند.

یکی از دستگاه‌های رمزی، مبتنی بر مسألهٔ پشت‌واره است، صورت این مسأله چنین است :

* با معلوم بودن مجموعه اعداد صحیح و مثبت a_1 تا a_n، و عدد صحیح S، مشخص کنید که کدامیک از عددهای مزبور، با جمع شدن با یکدیگر، S را به دست می‌دهند.

رایانه‌کاران نشان داده‌اند که رمزهای پشت واره‌ای، برای رمزنگاریِ کلید همگانی رضایت‌بخش نیستند.

* * *

مجموعه‌های هم‌توان

دو مجموعهٔ S و T را هم‌توان گویند اگر نگاشت دوسویی از S به T موجود باشد. عدد اصلی، رده‌ای از مجموعه‌های هم‌توان با مجموعه‌ای مفروض است. اعداد اصلیِ مجموعه‌های متناهی به اعداد طبیعی موسومند، و اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را

ترامتناهی می‌نامیم.

* در این صورت، و با توجه به تعاریف مربوطه، نمی‌توان با خانوادهٔ جمیع مجموعه‌ها، یا حتی با خانوادهٔ جمیع مجموعه‌های هم‌توان با مجموعه‌ای مفروض سر و کار داشت؛ زیرا این کار به پارادوکس راسل منجر می‌شود.

* برای اجتناب از این وضع، معمولاً تعریف مربوطه را به خانوادهٔ Fای محدود می‌کنیم که حتی‌الامکان بزرگ و ضروری باشد.

در این حالت، اعداد اصلی، خودِ مجموعه یعنی، خانوادهٔ مجموعه‌ها هستند، گرچه ممکن است بعدها گسترش دادن خانوادهٔ F ضروری شود.

* * *

فرض پیوستار

فرض پیوستار، بر این است که مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی یا شماراست یا عدد اصلی N را داراست.

در ۱۹۶۴ کوهن ثابت کرد که، اثبات فرض پیوستار، با استفاده از اصول موضوع مجموعه ـ نظری استاندارد، غیرممکن است.

* پیش از این، در ۱۹۳۸، گودل نشان داده بود که فرض پیوستار این اصول موضوع را نقض نمی‌کند.

این دو نتیجه، با هم نشان می‌دهند که فرض پیوستار از سایر اصول موضوع مجموعه ـ نظری مستقل است.

* اما خود پیوستار چیست؟ طبق تعریف، عدد اصلیِ مجموعهٔ اعداد حقیقی به عدد اصلیِ پیوستار موسوم است و با N یا C نمایش داده می‌شود.

عدد اصلیِ مجموعهٔ اعدادِ حقیقی، در بازهٔ باز (۱ , ۰) نیز N است؛ زیرا این بازه به طور دوسویی به مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقیِ نگاشت می‌یابد.



* * *

قضیهٔ خوش ترتیبی

یکی از قضایای نظریهٔ مجموعه‌ها، قضیهٔ خوش ترتیبی است. این قضیه چنین است: بر هر مجموعهٔ S رابطه‌ای موجود است که تحت آن S خوش ترتیب است. کانتور این قضیه را به عنوان یکی از اصول تفکر در نظر گرفته، آن را به ترتیبی که خواهیم گفت معقول کرده بود، این ترتیب چنین است:

* عنصر دلخواه a_0ی را از S اختیار می‌کنیم، سپس عنصر دومی، و همین‌طور الی آخر. اگر S نامتناهی باشد، دنبالهٔ

$$a_0, a_1, \ldots$$

را به دست می‌آوریم. اکنون یا S به اتمام رسیده است یا نه؛ اگر نه، فرآیند مزبور را تا زمانی که برای به اتمام رسیدن مجموعهٔ مورد بحث، لازم است ادامه می‌دهیم.

* اگر S توسط دنباله‌ای که عناصر مورد بحث در آن انتخاب شده‌اند مرتب شده باشد، در این صورت، هر زیر مجموعه دارای یک کوچکترین عنصر است؛ یعنی عنصری که ابتدا انتخاب شده است.

* * *

منطق ریاضی

یکی از کارهای اصلیِ منطق ریاضی، بررسیِ تفکرِ صوری و استنتاج به کمکِ روشهای ریاضیِ مثلاً گرفته شده از جبر یا نظریهٔ الگوریتمهاست.

* اما این کار، که آغاز در فلسفه دارد، تنها کار آن نیست؛ امروزه منطق ریاضی، شاملِ انبوهی موضوعات و کاربردها در حوزه‌های بسیار گوناگونی از قبیل علوم طبیعی، جبرگزینشی، نظریهٔ دستگاه‌های پردازش داده‌ها، زبانشناسی، چندین شاخه از علومِ اجتماعی چون فلسفه، حقوق، و اخلاق است.



* انگیزهٔ قطعی در توسعهٔ منطق ریاضی، از وضعیت ریاضیات در پایان قرن نوزدهم به وجود آمد. تا آن زمان، ریاضیات تعداد فراوانی از دستاوردهای جداگانه را جمع کرده، به درجهٔ بالایی از تجرید رسیده بود، بدون این که به وضوحی متناسب در موردِ محتوای مفاهیم اساسی‌ای نائل شده باشد که به شیوه‌ای شهودی، مثلاً مفهومِ مجموعه یا مفهومِ استنتاج منطقی، به کار رفته بودند.

در آن زمان، غیر از نیاز به بنیانِ غیرقابل تردیدی برای مفهوم مجموعه، برای اولین بار دریافت معنای درستِ منطق و قیاسِ منطقی، ضروری شد.

* * *



اصلهای منطق گزاره‌ها

گزاره‌ها، نامی است که در مورد ساختهای زبانی معینی، برای توصیف و انتقال اطلاعات، به کار می‌رود.

منطق گزاره‌های کلاسیک، با فرض آغاز می‌شود، بنا به اصل دو ارزشی، هر گزاره، یا راست است یا دروغ است.



مفهومِ راستی یا صدق به کار رفته در این جا، که به ارسطو باز می‌گردد، گزاره را در صورتی راست در نظر می‌گیرد که اظهار بیان شده با آن متناظر با حقیقتی باشد.

* اصل دو ارزشِ مورد بحث، در واقع دربرگیرندهٔ دو اصلِ زیر است: اصل اوّل، اَصل طرد اوسط است که به موجب آن، هر گزاره راست یا دروغ است. اصلِ دوم، اصل طردِ تناقض است که بنا بر آن، گزاره‌ای وجود ندارد که هم راست، هم دروغ باشد.

* بنابراین، ردهٔ جمیع گزاره‌ها به دو زیر ردهٔ مجزا تقسیم می‌شود، که با نمادهای ۱ یا راست و ۰ یا دروغ نمایش داده و ارزش راستی نامیده می‌شوند، ارزشهای راستی مزبور را با T و F نیز نمایش می‌دهند.

* * *

رابطهای منطق گزاره‌ها

گزاره‌های منطق کلاسیک را می‌توان به کمک ادواتِ زبانی‌ای از قبیل نه، و، یا، و غیره به گزاره‌های پیچیده‌تر ترکیب کرد.

* بنا به دومین اصل اساسی، یعنی اصل توسیع، ارزش راستی یک گزارهٔ مرکب، منحصراً توسط ارزشهای راستیِ مؤلفه‌های آن معین می‌شود و به معنای آنها بستگی ندارد.

در نتیجه، چنین ترکیباتی را می‌توان به صورت توابعی در نظر گرفت که ارزشهای راستی را به n تایی‌های ارزشهای راستی، تخصیص می‌دهند.

* ادواتِ رابطیِ اغلب به کار رونده در منطق گزاره‌ها، متناظر با توابع ارزشِ نه، متناظر با اداتِ نه، تابع ارزش و، متناظر با اداتِ و، تابع ارزشِ یا، متناظر با اداتِ یا، تابع ارزش اگر ... آنگاه ... متناظر با همین ادات و تابع ارزش اگر و تنها اگر، متناظر با اداتِ اگر و تنها اگر است.

کارِ منطق گزاره‌ها عبارت است از: تحلیل ریاضی این مفاهیم، که برای این منظور در چهارچوبِ حسابی به نام حسابِ گزاره‌ها، فرمول بندی می‌شوند.

* * *

منطق و زبان ریاضی

عبارتهای حسابِ گزاره‌ها برای تنظیمِ حقایقِ رخ دهنده در ریاضیات کافی نیستند؛ ترجمهٔ فرمول‌بندی شده‌ای از زبان ریاضی، باید به طور قابل ملاحظه‌ای غنی‌تر باشد. در این مورد یکی از صورتهای خاص، استفادهٔ مکرّر از متغیرها و نمادهای مخصوص توابع یا رابطه‌هاست.

* متغیرها، نمادهای از پیش تخصیص یافته‌ای هستند که اشیای دلخواهِ حوزه‌ای قبلاً مشخص شده را نمایش می‌دهند. نمادهایی از قبیل ۰ و +، در حوزهٔ اعداد طبیعی، که معنایشان معین است، به ثابت‌ها موسوم‌اند.

ویژگی دیگر زبان ریاضی، امکانِ متغیرهایِ مقید، به کمک سورهای منطقِ محمولی است.

* در عبارت «اعداد p و q ای چنان وجود دارند که ۲n = p+q» نمادهای p و q توسط تابعگونِ محمولی ــ منطقیِ «وجود دارد» مقید شده‌اند، در حالی که متغیر n آزاد است.

آشکار شده که برای کاربردهایِ متغیرهایِ مقید در ریاضیات، دو عملِ منطقِ محمولیِ «وجود دارد» و «به ازای هر» کافی‌اند. بنابراین زبانهایِ منطقِ محمولی تنها مبتنی بر این نوع متغیرهایِ مقیدند.

* * *

زبانهای محمولی و الگوریتمی

زبانهایِ منطقِ محمولی توصیفی‌اند؛ یعنی عبارتهای چنین زبانهایی روابط رایج در ساختارهای ریاضی را توصیف می‌کنند.

زبانهایِ الگوریتمی، با توسعهٔ پردازش داده‌ها توسطِ ماشینها، اهمیت یافته‌اند. زبانهایِ الگوریتمی، دارای کاربردِ فرمان دادن، راه انداختنِ عملیات و هدایت کردنِ فرایندها هستند. مثالهایی از زبانهایِ الگوریتمیِ به کار رفته در تکنولوژی برنامه‌ریزی عبارتند از: PL1، FORTRAN، COBOL و غیره.

* حتی در زبانهایِ مقدماتی نیز بعضی عناصرِ الگوریتمی وارد شده‌اند: یک جمله را می‌توان به صورت دنباله‌ای از فرمانهایی در نظر گرفت که باید انجام گیرند؛ به عنوان مثال، (x+۱).y نمایشگر این دنباله است:

«۱ را با x جمع کن، آن گاه نتیجه را در y ضرب کن.»

* اما ظهور الگوریتمها، در چهارچوب ریاضیات و منطق، به‌صورتِ روشهایی عمومی برای حلِ جمیعِ مسائلِ رده‌ای مفروض، انجام گرفته است.

* * *

الگوریتم و توابع بازگشتی

مفهوم دقیق الگوریتم، شرطی لازم، برای تحقیقِ این پرسش

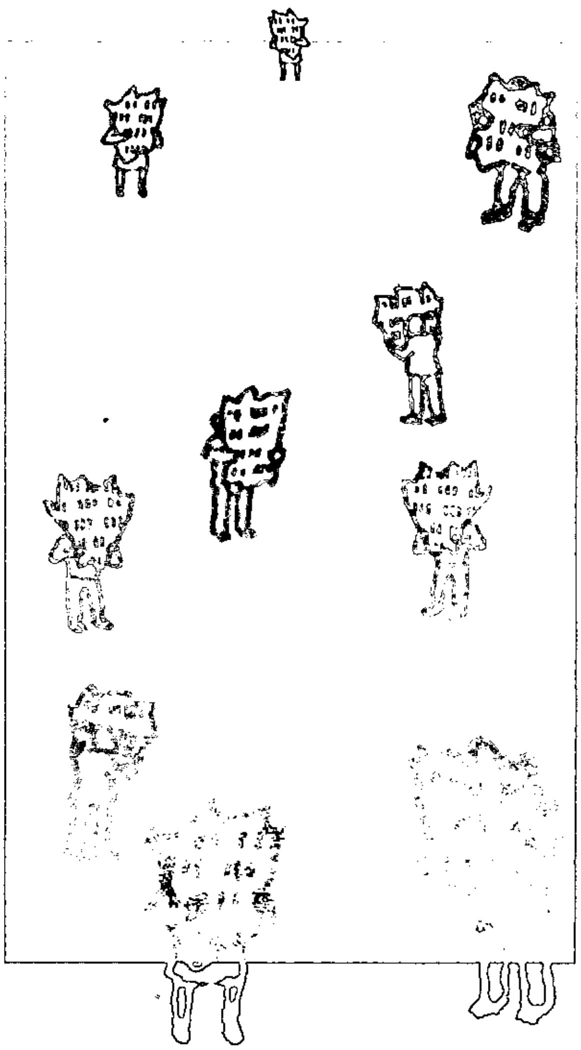
است که آیا مسائل خاصی از لحاظِ الگوریتمی حل‌پذیرند یا خیر؟ پرسشهایی چنین حتی در قرونِ وسطی نیز مورد بحث بودند.

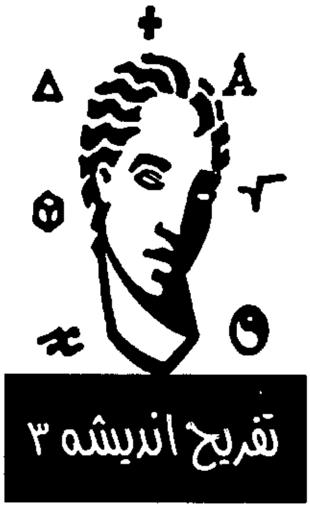
* به عنوانِ مثال، حدودِ ۱۳۰۰ میلادی، ریموندوس لولوس «Raymundus Lullus» اصطلاحِ ایده را مطرح کرد که مقصود از آن روشی عمومی برای یافتنِ جمیعِ حقایق ممکن بود. ایده‌های مزبور زمانی به اولین اوجشان رسیدند که لایب نیتس دریافت که مفهومِ دقیقِ ایده شاملِ دو مفهومِ تشخیص و تولید است.

* این اندیشه بعد از لایب نیتس دنبال نشد. یکی از دلایلِ این دنبال نشدن آن بود که هنوز روشهای صوری کردن و تعبیر نمودنِ منطقِ ریاضی، که برای چنین بررسیهایی ضروری‌اند، وجود نداشتند.

در حالِ حاضر، می‌توان به کمک توابع بازگشتی، صورت دقیقِ تشخیص و روش تولید را به دست داد. این مفاهیم، ابتدا برای مجموعه‌های اعدادِ طبیعی تعریف شدند.

* * *





۲	۲	۲	۲	= ۰
۲	۲	۲	۲	= ۱
۲	۲	۲	۲	= ۲
۲	۲	۲	۲	= ۳
۲	۲	۲	۲	= ۴
۲	۲	۲	۲	= ۵
۲	۲	۲	۲	= ۶
۲	۲	۲	۲	= ۱۰
۲	۲	۲	۲	= ۱۲

در هر سطر، بین ارقام ۲ علامتهای +، −، ×، : و ( ) را طوری قرار دهید که یک تساوی به دست آید.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



نگاهی به معادله های سیاله

● علی بختیاری

۱. مقدمه و تاریخچه: هندسه و قسمتی از آنچه که امروزه ما آن را تحت عنوان نظریهٔ اعداد می‌شناسیم، از قدیمی‌ترین شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌شوند. این قدمت، به چند هزار سال پیش و به تمدن بابل، یونان و مصر قدیم بازمی‌گردد. در این میان، یافتن جواب برای معادله‌هایی که از هندسه به‌دست آمده، جایگاه ویژه‌ای دارد. این‌گونه معادله‌ها، بیشتر در شاخهٔ دیگر ریاضی، یعنی جبر، بررسی می‌شود. اما آنچه که در حال حاضر به نظریهٔ اعداد مربوط می‌شود، مسألهٔ یافتن جوابهای صحیح (و حدّاکثر گویا) برای این معادله‌هاست که به بررسی حالت خاصی از آنها می‌پردازیم.

معادلهٔ $ax + by = c$ را در نظر می‌گیریم. این معادله را در حالتی که a، b و c ضرایبی صحیح هستند، معادلهٔ سیالهٔ خطی (درجهٔ اوّل) می‌نامیم. این معادله را گاهی معادلهٔ دیوفانتی می‌نامند. دیوفانتی از نام ریاضیدان یونانی «دیوفانتوس[1]» گرفته شده است. گرچه دیوفانتوس را نخستین کسی می‌دانند که در صورتبندی معادله‌های جبری تلاشهایی داشته ؛ اما وی اوّلین کسی نبوده که به حلّ معادله‌های سیاله پرداخته است. کتاب «آریثمتیکا[2]»ی او که مهمترین اثر وی محسوب می‌شود، شامل حل حدود ۱۳۰ مسألهٔ نظریهٔ اعداد است. با ذکر تنها اطلاعی که از زندگی شخصی دیوفانتوس در دست است، به حلّ معادله‌های سیاله می‌پردازیم :

«دیوفانتوس یک ششم زندگی خود را در کودکی، یک دوازدهم آن را در جوانی و یک هفتم دیگر را در تجرّد به سر برد. پنج سال پس از ازدواج، صاحب پسری شد که چهارسال پیش از پدر درگذشت. سنّ او در لحظهٔ مرگ، نصف سنّ (نهایی) پدر بود.» (خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند سنّ دیوفانتوس را به دست آورد ؛ در این صورت، به عدد ۸۴ خواهد رسید.)

۲. حلّ معادلهٔ سیال درجهٔ اوّل: معادلهٔ سیاله $ax + by = c$ را در نظر می‌گیریم. منظور از حلّ این معادله، به‌دست آوردن جوابهای صحیح آن، در صورت وجود، است ؛ یعنی عددهای صحیح x و y را چنان بیابیم که در رابطهٔ $ax + by = c$ صدق کنند. چند سؤال اساسی مطرح می‌شود :

الف ـ آیا چنین مقادیری برای x و y وجود دارد؟

ب ـ آیا می‌توان تعداد جوابها را به دست آورد و آیا می‌توان تمام این جوابها را یافت؟

پ ـ آیا در مسائل کاربردی، تمام این مقادیر و جوابها «مناسب» هستند؟

و سؤالهای دیگر. قضیهٔ زیر، راهگشای ما در یافتن پاسخ این پرسشها خواهد بود. ابتدا یک لم را بدون اثبات بیان می‌کنیم. اثبات این لم معروف، ساده است.

لم. اگر $(a,b) = 1$ و $a|bc$ آن‌گاه $a|c$ ■

قضیه: فرض کنیم معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ داده شده باشد و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b باشد ؛ یعنی $d = (a,b)$. در این صورت، معادلهٔ مذکور، جواب (صحیح)



دارد ؛ اگر و تنها اگر $d|c$. در این صورت، یعنی اگر $d|c$ ، آن‌گاه معادله دارای جوابهایی نامتناهی است.

اثبات: فرض کنیم x_0 و y_0 دو عدد صحیح باشند که در رابطهٔ $ax_0 + by_0 = c$ صدق کنند. از طرفی، فرض کرده‌ایم $d = (a,b)$ ، لذا $d|a$ و $d|b$ و با توجه به ویژگی بخش‌پذیری داریم $d|ax_0 + by_0$ ؛ یعنی $d|c$. بعکس، فرض کنیم $d|c$. با توجه به الگوریتم اقلیدسی عددهای صحیح r و s چنان وجود دارند که $d = ar + bs$. همچنین عدد صحیح t چنان یافت می‌شود که $c = dt$. از دو رابطهٔ اخیر داریم : $c = dt = art + bst$. بنابراین $x = rt$ و $y = st$ یک جواب معادلهٔ سیاله داده شده‌اند و لذا مسألهٔ وجود جواب این معادله، حل خواهد شد. برای اثبات نامتناهی بودن تعداد جوابها، ابتدا فرض می‌کنیم $x = x_0$ و $y = y_0$ یکی از جوابهای معادلهٔ مذکور باشد ؛ یعنی $ax_0 + by_0 = c$. اگر x و y جواب دیگری برای این معادله باشند، خواهیم داشت :

$$ax + by = c = ax_0 + by_0$$

درنتیجه : $a(x - x_0) = b(y - y_0)$ و لذا

$$(۱)\quad \frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y - y_0)$$

از طرف دیگر، از رابطهٔ $d = (a,b)$ ، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$(۲)\quad \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = ۱$$

از رابطهٔ (۱) داریم : $\frac{b}{d}\Big|\frac{a}{d}(x - x_0)$. رابطهٔ (۲) و لم قبل نشان می‌دهند که $\frac{b}{d}\Big|(x - x_0)$ و لذا عدد صحیحی چون t وجود دارد که $x - x_0 = \frac{b}{d}t$ ؛ یعنی $x = x_0 + \frac{b}{d}t$. با جایگذاری این مقدار در (۱) مقدار y به دست می‌آید : $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ ؛ لذا به ازای هر عدد صحیح t، مقادیر مختلفی برای x و y حاصل می‌شود. براحتی دیده می‌شود x و y که توسط روابط بالا داده شده‌اند در معادله، صدق می‌کنند و لذا جواب این معادله هستند ؛ پس حکم قضیه ثابت می‌شود.■

قضیهٔ قبل، علاوه بر این که وجود جوابها را ثابت می‌کند، روش به‌دست آوردن آن را نیز بیان می‌کند. اغلب x_0 و y_0 را جواب اختصاصی و x و y که از روابط بیان شده به دست می‌آیند، جواب عمومی معادله نامیده می‌شوند. همچنین می‌توان گفت (x_0, y_0) یک جواب اختصاصی معادلهٔ مذکور است.

مثال. معادلهٔ ۲x + ۵y = ۱۱ را حل کنید.

حل. داریم ۱ = (۲,۵) و ۱|۱۱ و لذا معادلهٔ داده شده، دارای جواب است. بنا به الگوریتم تقسیم اقلیدسی ۱ = ۲(۲−) + ۵(۱) و درنتیجه : ۱۱ = ۲(۲۲−) + ۵(۱۱) . بنابراین ۲۲− = x_0 و ۱۱ = y_0 یک جواب برای معادلهٔ مزبور است. کلیهٔ جوابها به شرح زیر خواهد بود :

$$x = -۲۲ + ۵t \;,\; y = ۱۱ - ۲t \;;\; (t \in z)$$

مثال. معادلهٔ ۱۹x + ۱۱۴y = ۱۴ را حل کنید.

حل. داریم ۱۹ = (۱۹,۱۱۴) و با توجه به این که ۱۹∤۱۴ لذا معادلهٔ داده شده، جواب (صحیح) ندارد.

۳. چند حالت خاص: معادلهٔ $ax + by = c$ را در نظر می‌گیریم. اگر a و b نسبت به هم اوّل باشند ؛ یعنی $(a,b) = ۱$ ، آن‌گاه $۱|c$ و لذا معادله جواب خواهد داشت و اگر (x_0, y_0) جواب اختصاصی آن باشد، جوابهای عمومی آن از روابط زیر به‌دست می‌آید :

$$x = x_0 + bt \;,\; y = y_0 - at \;;\; (t \in z)$$

در کاربرد، اغلب لازم است تنها جوابهای مثبت یا جوابهایی که در شرط خاصی صدق کنند، انتخاب شوند. بدین منظور، از روابطی که جوابهای عمومی را برحسب ضرایب و جوابهای اختصاصی بیان می‌کنند، استفاده می‌کنیم ؛ لذا ممکن است از تعداد نامتناهی جواب، تنها یک جواب قابل قبول باشد.

مثال. یک فروشنده قصد دارد ۵۱۰ بسته از یکی از کالاهای خود را برای مشتریان خود ارسال کند ؛ به‌طوری که به هر مشتری، ۲۰ یا ۵۰ بسته از این کالا تعلق بگیرد. این توزیع به چند طریق



امکان دارد؟

حل. معادلهٔ $۲۰x + ۵۰y = ۵۱۰$ را تشکیل می‌دهیم. با حلّ این معادله، مسأله حل خواهد شد. برای حلّ این معادله، جواب اختصاصی $(-۱۰۲,۵۱)$ به‌دست می‌آید. رابطه‌های زیر، جواب عمومی معادله را تعیین می‌کنند :

$$x = -۱۰۲ + ۵t \ , \ y = ۵۱ - ۲t \ ; \ (t \in z)$$

از طرفی x و y تعداد خریداران کالا را نشان می‌دهند و لذا نمی‌توانند منفی باشند. بنابراین، نامعادله‌های $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ به‌دست می‌آید. از حلّ این نامعادله‌ها برحسب t داریم :

$$۲۰/۴ = \frac{۲۰۴}{۱۰} \leq t \leq \frac{۵۱}{۲} = ۲۵/۵ \quad (t \in z)$$

و در نتیجه مقادیر زیر، برای t قابل قبول خواهند بود :

$$t = ۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۲۵$$

بنابراین، به پنج روش می‌توان توزیع مورد نظر را انجام داد.

توجه می‌کنیم که منظور از جواب صحیح و مثبت، جوابی است که x و y هر دو مثبت باشند.

مثال. تمام جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $۲x + ۵y = ۱۱$ را در صورت وجود، بیابید.

حل. در نخستین مثال بخش قبل، دیدیم جوابهای عمومی معادلهٔ داده شده، به‌صورت زیر است :

$$x = -۲۲ + ۵t \ , \ y = ۱۱ - ۲t \ , \ (t \in z)$$

لذا برای این که x و y هر دو مثبت باشند، باید داشته باشیم :

$$۴/۴ = \frac{۲۲}{۵} \leq t \leq \frac{۱۱}{۲} = ۵/۵$$

لذا این معادله، تنها یک جواب مثبت $x = ۳$ و $y = ۱$ دارد که به ازای $t = ۵$ حاصل می‌شود.

مثال. جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $۷x + ۱۶y = ۲۰۹$ را به‌دست آورید.

حل. از حل معادلهٔ داده شده، جوابهای عمومی زیر حاصل می‌شوند :

$$x = ۷ + ۱۶t \ , \ y = -۳ - ۷t \quad (t \in z)$$

با در نظر گرفتن $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$، داریم: $-\frac{۷}{۱۶} \leq t \leq -\frac{۳}{۷}$ و با توجه به این که $t \in z$، لذا معادلهٔ داده شده، دارای جواب صحیح و مثبت نیست.

روشهای دیگری نیز برای حلّ معادلهٔ سیاله $ax + by = c$ وجود دارد ؛ یکی از این روشها را با مثال زیر نشان می‌دهیم :

مثال. معادلهٔ سیاله $۶x - ۲۱y = ۱۵$ را حل کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم $(۶,۲۱) = ۳|۱۵$. پس معادلهٔ داده شده، دارای جواب (صحیح) می‌باشد. قدرمطلق ضریب x، یعنی ۶ از قدرمطلق ضریب y، یعنی ۲۱ کوچکتر است. پس معادله را برحسب x حل می‌کنیم. داریم : $x = \frac{۱۵ + ۲۱y}{۶}$ و به دنبال مقادیر صحیح برای x هستیم. عددهای ۱۵ و ۲۱ را برحسب مضربی از ۶ می‌نویسیم و مقادیر صحیح را جدا می‌کنیم. خواهیم داشت :

$$x = \frac{۱۲ + ۳ + ۱۸y + ۳y}{۶} \text{ و لذا } x = ۲ + ۳y + \frac{۱ + y}{۲} \ (*)$$

برای صحیح بودن x، باید $\frac{y + ۱}{۲}$ مقدار صحیح داشته باشد. به این منظور، لازم است y مقداری فرد باشد ؛ یعنی $y = ۲k + ۱$ که $k \in z$. با قرار دادن این مقدار در (*) داریم : $x = ۷k + ۶$.

درنتیجه، جوابهای عمومی معادله، به صورت زیر است :

$$x = ۷k + ۶ \ , \ y = ۲k + ۱ \ , \ k \in z$$

(توجه می‌کنیم که این مقادیر، در معادله صدق می‌کنند.)

این روش در برخی موارد، از روش قبلی کاراتر است ؛ بویژه در حالتی که ضریب یکی از مجهولها برابر یک باشد، این روش توصیه می‌شود.

۴. تعمیم معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل: آنچه تاکنون مطالعه کردیم، در واقع حالت خاصی از معادله‌های سیاله به‌شمار می‌آید. با دقت نظر بیشتر، یک معادلهٔ سیاله عبارت است از معادله‌ای با بیش از یک مجهول و ضرایب صحیح که جوابهای صحیح آن مورد نظر باشد. بنابراین، معادله‌های $x^۲ + y^۲ = z^۲$ و $۲x + ۷y + ۶z = ۴$ و حتی $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{۱۴}$ نیز معادله‌های سیاله هستند. توجه کنید که معادلهٔ اخیر را می‌توان به صورت $۱۴x + ۱۴y = xy$ نوشت. در این بخش، به بررسی معادلهٔ سیالهٔ

خطی می‌پردازیم و بررسی سایر معادله‌ها را به وقت دیگری موکول می‌کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ سیالهٔ خطی زیر داده شده باشد :

$$(*)\ a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \ldots + a_nx_n = b$$

معادلهٔ (*) جواب (صحیح) دارد ؛ اگر و تنها اگر $d|b$ ، که در آن d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای صحیح $a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . و a_n است ؛ یعنی $d = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$. اثبات این حکم، به کمک استقرا و با استفاده از این رابطه که $((a,b),c) = (a,b,c)$ انجام می‌گیرد و ما از اثبات آن خودداری می‌کنیم ؛ زیرا اثبات مانند حالت دو مجهولی انجام می‌گیرد. در این‌جا با ذکر یک مثال، روش کلی حلّ چنین معادله‌هایی را بیان می‌کنیم.

مثال. معادلهٔ $۲x + ۳y + ۴z = ۵$ را حل کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم $(۲,۳,۴) = ۱|۵$ ؛ زیرا $(۲,۳) = ۱$ و لذا معادلهٔ داده شده دارای جواب می‌باشد. برای حلّ این معادلهٔ سه مجهولی، ابتدا آن را به معادلهٔ دو مجهولی تبدیل کرده و مانند قبل، آن را حل می‌کنیم. به این منظور، قرار می‌دهیم $۲x + ۳y = w$ (در حالت کلی قرار می‌دهیم $ax + by = dw$ که در آن $d = (a,b)$) بنابراین، معادلهٔ داده شده، به صورت $w + ۴z = ۵$ تبدیل می‌شود. این معادله را به روش دوم ذکر شده در بخش قبل، حل می‌کنیم ؛ یعنی قرار می‌دهیم $w = ۵ - ۴z$ و لذا به ازای $z = t$ ، داریم $w = ۵ - ۴t$ و توجه می‌کنیم که $t \in z$ حال، معادلهٔ $۲x + ۳y = ۵ - ۴t$ را حل می‌کنیم. این معادله، جواب صحیح دارد ؛ زیرا $(۲,۳) = ۱|۵ - ۴t$. با حل این معادله، جواب کلی زیر به دست می‌آید :

$$x = -۵ + ۴t + ۳t' \ ,\ \ y = ۵ - ۴t - ۲t' \ ;\ (t' \in z)$$

لذا جواب عمومی معادلهٔ داده شده، به‌صورت زیر می‌باشد :

$$x = -۵ + ۴t + ۳t',\ y = ۵ - ۴t - ۲t',\ z = t\ ;\ (t, t' \in z)$$

توجه می‌کنیم که به ازای $t = ۱$ و $t' = -۱$ ، یک جواب معادلهٔ مذکور، عبارت است از : $x = -۴$ و $y = ۳$ و $z = ۱$.

به همین ترتیب، می‌توان دستگاه معادله‌های سیاله را تشکیل داده و آنها را حل کرد. این مطالب را به خواست خدا در مقاله‌ای دیگر بررسی خواهیم کرد. مطلب این شماره را با ذکر چند تمرین به پایان می‌رسانیم.

الف. معادله‌های زیر را حل کرده، در صورت وجود جوابهای مثبت آن را مشخص کنید :

۱) $۱۷x + ۱۳y = ۱۰۰$

۲) $۱۰۱x + ۱۰۲y + ۱۰۳z = ۱$

۳) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{۱۴}$

ب. جوابهای صحیح دستگاه معادله‌های سیالهٔ زیر را به دست آورید :

$$\begin{cases} x + y + z = ۱۰۰ \\ x + ۶y + ۲۱z = ۱۲۱ \end{cases}$$

(راهنمایی. برای حل این دستگاه، می‌توانید از هر معادله، یک معادله با دو مجهول به دست آورید و دستگاه جدیدی تشکیل دهید.)

تمرین زیر برای دانش‌آموزانی که با برنامه‌نویسی کامپیوتر آشنایی دارند، در نظر گرفته شده است :

پ. برنامه‌ای بنویسید که معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّلی با دو مجهول را حل کند و سپس تمام جوابهای مثبت آن را در صورت وجود پیدا کند.

پاورقی:

۱.Diophantus

۲.Arithmetica

منابع:

۱ . Kenneth H.Rosen, Elementary Number Theory and Its Application (2nd ed.), ADDISON-WESLEY Pub.,1988

۲. هاورد. و. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اوّل و دوم)، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۷۲، ۱۳۷۳).

۳. ویلیام ج. لوک، مبانی نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ محمدتقی دیبایی، انتشارات مبتکران، (۱۳۷۲).

دنباله و تصاعدهای عددی و هندسی

• سیّدمحمّدرضا هاشمی موسوی



یکی از اساسی‌ترین مفهومها در ریاضیات «دنباله» است؛ زیرا مهمترین مفهومهای ریاضیات عالی بر پایهٔ آن ساخته شده است (مانند: مفهوم حد، که در آینده با آن آشنا خواهید شد).

دنبالهٔ عددی

هرگاه مجموعهٔ مرتّبی از عددها به‌دنبال هم بیایند، آن را «دنبالهٔ عددی» گویند. هر عدد از دنباله را **عضو** یا **جملهٔ دنباله** گویند: جملهٔ اوّل، جملهٔ دوم، ...، جملهٔ دهم، ... و جملهٔ nام.

به‌طور معمول، هر یک از جمله‌های دنباله را با a_1، a_2، ... و a_n نشان می‌دهند و با عددهای طبیعی ۱، ۲، ... و n مشخص می‌نمایند. بنابراین، دامنهٔ دنبالهٔ عددی، مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در اصطلاح، a_1 را **جمله اوّل** و a_n را جملهٔ nام یا **جملهٔ عمومی** دنباله گویند.

مثال ۱. دنبالهٔ عددهای فرد و زوج طبیعی را به صورت زیر نشان می‌دهند:

(دنبالهٔ عددهای فرد طبیعی): ۱, ۳, ۵, ۷, ..., (۲n − ۱), ..., $(n \in \mathbb{N})$

(دنبالهٔ عددهای زوج طبیعی): ۲, ۴, ۶, ۸, ..., ۲n, ...

($\mathbb{N}$ مجموعهٔ عددهای طبیعی است)

مثال ۲. دنبالهٔ عددهای اوّل کوچکتر از ۲۰ به صورت زیر است:

۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹

مسألهٔ ۱. دنبالهٔ عددهای مثبت بخش‌پذیر بر ۳ را بنویسید و تعیین کنید عدد **۱۳۷۷** چندمین جملهٔ دنباله است.

حل: جملهٔ عمومی این دنباله، به صورت **۳n** است، که اگر در آن، مقدار n را بترتیب عددهای طبیعی {...,۱,۲,۳,۴} قرار دهیم، جمله‌های پی‌درپی دنبالهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید:

۳,۶,۹,۱۲,...,۱۳۷۷,...,۳n,...

چون جملهٔ عمومی دنباله **۳n** است، بنابراین:

$$۳n = ۱۳۷۷ \;;\; n = \frac{۱۳۷۷}{۳} = ۴۵۹$$

بنابراین، عدد **۱۳۷۷**، جملهٔ چهار صد و پنجاه و نهم دنباله است.

مسألهٔ ۲. جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است، کدام جملهٔ این دنباله برابر **۵۵** است.

حل:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} = ۵۵ \;;\; n^۲ + n - ۱۱۰ = ۰ \;;$$

$$(n+۱۱)(n-۱۰) = ۰$$

$n \in \mathbb{N} : n - ۱۰ = ۰ \;;\; n = ۱۰$ (جملهٔ دهم)

مسألهٔ ۳. اگر عدد n، معرّف تعداد ضلعهای یک چندضلعی کوژ (محدب) باشد، تعداد قطرهای این چندضلعیها را به صورت یک دنبالهٔ عددی بنویسید.

حل: این مسأله را می‌توان با روشهای مختلف حل کرد، که ما برای اختصار، به روش مستقیم عمل می‌کنیم.

اگر در nضلعی، یک رأس را انتخاب کنیم، با وصل کردن آن به $(n-۳)$ رأس، قطرهایی از nضلعی به دست می‌آید که از این رأس گذشته‌اند؛ البته توجه داریم که برای پدید آمدن قطر، نمی‌توان هر رأس را به خودش یا به دو رأس مجاورش وصل کرد. به این ترتیب، از n رأس به تعداد $n(n-۳)$ قطر می‌گذرد؛ چون هر قطر مربوط به دو رأس، دو بار به حساب آمده است، پس تعداد قطرهای هر n ضلعی، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

جملهٔ عمومی دنباله: $a_n = \frac{۱}{۲}n(n-۳)$ $\quad (۱)$

واضح است که اوّلین جملهٔ دنباله، با قرار دادن $n = ۳$ در رابطهٔ (۱)، تعیین می‌شود و جمله‌های بعدی دنباله نیز به ازای عددهای طبیعی بزرگتر از ۳ به‌دست خواهد آمد:

$$۰, ۲, ۵, ۹, ۱۴, \ldots, \frac{n(n-۳)}{۲}, \ldots$$

یک نوع خاصی از دنباله‌های عددی وجود دارند، که این گونه دنباله‌ها را به سبب صعودی یا نزولی بودن آنها، **«دنبالهٔ صعودی»** یا **«دنبالهٔ نزولی»** می‌نامیم.

دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی)

دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن، با افزودن عددی ثابت (غیرصفر) به جملهٔ قبل خود، به‌دست می‌آید. عدد ثابت دنباله را تفاضل مشترک یا **«قدر نسبت»** دنبالهٔ حسابی **(تصاعد حسابی)** می‌نامند و آن را با d نشان می‌دهند.

تعریف: اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مثبت باشد، آن دنباله را صعودی و اگر منفی باشد، دنباله را نزولی نامند. بنا به همین تعریف، بهتر است که به جای لفظ تصاعد حسابی، لفظ عام دنبالهٔ حسابی را به کار بریم؛ زیرا تصاعد به معنای صعود کردن است و درنتیجه لفظ «تصاعد نزولی» کاملاً غلط است و باید به جای آن، از لفظ «دنبالهٔ نزولی» استفاده کنیم.

مثال ۳. دنبالهٔ عددهای طبیعی، یک دنبالهٔ صعودی با قدرنسبت $d = ۱$ و جملهٔ اوّل $a = ۱$ است و دنبالهٔ عددهای صحیح منفی، یک دنبالهٔ نزولی با قدرنسبت $d = -۱$ و جملهٔ اوّل $a = -۱$ است.

تعیین جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی)

جملهٔ اوّل دنبالهٔ حسابی را به $a(t_۱)$[۱] و قدرنسبت آن را به d نشان می‌دهیم. بنا به تعریف دنبالهٔ حسابی:

(جملهٔ اوّل) $t_۱ = a$,(جملهٔ دوم) $t_۲ = a + d$,

(جملهٔ سوم) $= t_۳ = [(a+d)+d] = a + ۲d, \ldots$

دیده می‌شود که ضریب d در هر جمله، یکی کمتر از عددی است که مرتبهٔ آن جمله را مشخص می‌کند (زیرا d برای نخستین بار برای تعیین جملهٔ دوم به a افزوده شده است). پس، اگر عمل فوق را ادامه دهیم، به‌طور مثال، جملهٔ دهم برابر $t_{۱۰} = a + ۹d$ است و به‌طور کلی می‌توان نوشت:

(جملهٔ nام) $t_n = a + (n-۱)d$ (جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی)

مثال ۴. کدام جمله از دنبالهٔ حسابی زیر، برابر با **۵۶** است؟

$۲, ۵, ۸, ۱۱, \ldots$

حل: در این دنباله، جملهٔ اوّل **۲** و قدرنسبت **۳** است. اگر فرض کنیم که جملهٔ nام این دنباله، **۵۶** است، مطابق با دستور جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی:

$$t_n = a + (n-۱)d \;,\; a = ۲ \;,\; d = ۳ \;,\; t_n = ۵۶$$

$$۵۶ = ۲ + (n-۱)(۳); ۳(n-۱) = ۵۴; \; n - ۱ = ۱۸; n = ۱۹$$

مسألهٔ ۴. جملهٔ kام یک دنبالهٔ حسابی برابر S و جمله nام آن برابر با P است؛ این دنباله را مشخص کنید.

حل: اگر جملهٔ اوّل دنبالهٔ مورد نظر را به $t_۱$ و جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) آن را به t_n نشان دهیم، در این صورت:

$$\begin{cases} t_k = t_1 + (k-1)d = S \\ t_n = t_1 + (n-1)d = P \end{cases} \xrightarrow{\text{(از تفاضل دو رابطه)}}$$

$d = \dfrac{S-P}{k-n}$ (قدر نسبت دنباله)

$t_1 = S-(k-1)d$ (جملهٔ اول دنباله)

مسألهٔ ۵. اگر جملهٔ چهارم یک تصاعد حسابی ۲- و جملهٔ چهاردهم آن ۳۴ باشد، جملهٔ هفتادوهشتم آن را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} t_4 = t_1 + (4-1)d = t_1 + 3d = -2 \\ t_{14} = t_1 + (14-1)d = t_1 + 13d = 34 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} t_1 + 3d = -2 \\ t_1 + 13d = 34 \end{cases}$$

از حل دستگاه:

(جملهٔ اول) $t_1 = -12/8$, $d = 3/6$ (قدر نسبت)

(جملهٔ هفتادوهشتم) $t_{78} = -12/8 + 77 \times 3/6 = 264/4$

واسطه‌های حسابی (عددی)

در هر دنباله، جمله‌هایی را که بین دو جملهٔ متوالی قرار دارند، واسطهٔ عددی یا حسابی بین آن دوجمله گویند.

مثال ۵. در دنبالهٔ ...، ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ عددهای ۳، ۵ و ۷ سه واسطهٔ حسابی بین ۱ و ۹ هستند. در این صورت، در اصطلاح می‌گویند که عددهای ۳، ۵ و ۷ سه واسطهٔ حسابی هستند که بین ۱ و ۹ درج شده‌اند. هرگاه سه جملهٔ متوالی، از یک دنبالهٔ حسابی را در نظر بگیریم، جملهٔ وسط را به‌طور مطلق، واسطهٔ حسابی (یا میانگین) بین دو جملهٔ دیگر می‌نامند. به‌طور مثال، عدد ۱۰ واسطهٔ حسابی (میانگین) عددهای ۹ و ۱۱ در دنبالهٔ ...، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸ است.

درج واسطهٔ حسابی بین دو عدد

مقصود از درج m واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b، این است که یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهیم که $(m+2)$ جمله داشته و a و b بترتیب، جمله‌های اول و آخر آن باشند. پس، اگر a را جملهٔ اول دنباله و b را جملهٔ آخر دنباله بنامیم، می‌توان نوشت:

$b = t_{m+2} = t_1 + (m+2-1)d = a + (m+1)d$;

$d = \dfrac{b-a}{m+1}$ $(m \in \mathbb{N})$

در این‌جا، قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید. بنابراین، برای درج m واسطهٔ حسابی بین a و b، باید قدرنسبت $\dfrac{b-a}{m+1}$ را به جملهٔ اول، سپس به جملهٔ دوم و ... اضافه کنیم. واسطهٔ حسابی (میانگین) دو عدد a و b برابر با نصف مجموع آنهاست؛ زیرا اگر x، واسطهٔ حسابی a و b باشد، می‌توان نوشت:

$d = x-a = b-x$; $x-a = b-x$;

$2x = a+b$

درنتیجه:

$x = \dfrac{a+b}{2}$ [x واسطهٔ حسابی (میانگین) a و b است.]

مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی متناهی (تصاعد حسابی)

مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی را به S_n نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$S_n = t_1 + (t_1+d) + (t_1+2d) + \ldots + (t_n-2d) + (t_n-d) + t_n \qquad (1)$$

حال اگر جمله‌های مجموع (۱) را بعکس ترتیب بالا بنویسیم:

$$S_n = t_n + (t_n-d) + (t_n-2d) + \ldots + (t_1+2d) + (t_1+d) + t_1 \qquad (2)$$

از جمع برابریهای (۱) و (۲)، برابری زیر حاصل می‌شود:

$$2S_n = \underbrace{(t_1+t_n) + (t_1+t_n) + \ldots + (t_1+t_n)}_{\text{n مرتبه}} ;$$

$$2S_n = n(t_1+t_n)$$

بنابراین:

$$S_n = \frac{n(t_1+t_n)}{2} \qquad (3)$$

با جایگزینی جملهٔ عمومی تصاعد $(t_n = t_1 + (n-1)d)$ در رابطهٔ (۳)، به دستور زیر می‌رسیم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

مثال ۶. مجموع n عدد طبیعی اولیه را حساب کنید.

حل: قدر نسبت دنبالهٔ عددهای طبیعی برابر ۱ است و جملهٔ اول آن نیز برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)] = \frac{n(n+1)}{2} ;$$

$$S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دنبالهٔ هندسی (تصاعد هندسی)

دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن، با ضرب کردن جملهٔ پیش از آن در عددی ثابت غیرصفر و یک، به‌دست می‌آید. عدد ثابت را **نسبت مشترک** یا «قدرنسبت» دنبالهٔ هندسی گویند.

مثال ۷. دنبالهٔ زیر، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ است:

۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ...

تعیین جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) دنبالهٔ هندسی (تصاعد هندسی)

جملهٔ اوّل دنباله را t_1 و قدرنسبت آن را q می‌نامیم. بنا به تعریف دنبالهٔ هندسی:

جملهٔ اوّل $= t_1$ ، جملهٔ دوم $= t_1 q = t_2$ ،

جملهٔ سوم $= t_1 q.q = t_1 q^2 = t_3, ...$

ملاحظه می‌شود که نمای q در هر جمله، یکی کمتر از عددی است که مرتبهٔ آن را مشخص می‌کند (زیرا q برای نخستین بار برای تعیین جملهٔ دوم در t_1 ضرب شده است) پس اگر عمل فوق را انجام دهیم، به‌طور مثال، جملهٔ بیستم دنبالهٔ هندسی، برابر $t_1 q^{19}$ است و به‌طور کلی می‌توان نوشت:

(جملهٔ nام تصاعد هندسی) $t_n = t_1 q^{n-1}$ (جملهٔ عمومی)

مسألهٔ ۶. جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی زیر را حساب کرده و تعیین کنید که آیا جمله‌ای از آن هست که برابر با $\frac{4}{243}$ باشد؟

۱۰۸, ۳۶, ۱۲, ۴, ...

حل: در این دنباله، $t_1 = 108$ و $q = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$ است، پس:

$$t_6 = t_1 q^{6-1} = 108(\frac{1}{3})^5 = \frac{4}{9}$$

اگر جملهٔ nام این دنباله، برابر با $\frac{4}{243}$ باشد، خواهیم داشت:

$$t_1 q^{n-1} = \frac{4}{243} \; ; \; 108(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{4}{243} \; ;$$

$$(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{4}{108 \times 243} = (\frac{1}{3})^8 \; ; n-1 = 8 \; ; \; n = 9$$

بنابراین، جملهٔ نهم این دنباله، برابر $\frac{4}{243}$ است.

مسألهٔ ۷. اگر جملهٔ nام یک دنبالهٔ هندسی، برابر R و جملهٔ mام آن برابر S باشد، دنباله را مشخص کنید.

حل: با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی:

$$\begin{cases} t_n = t_1 q^{n-1} = R \\ t_m = t_1 q^{m-1} = S \end{cases} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m} = \frac{t_1 q^{n-1}}{t_1 q^{m-1}} = \frac{R}{S} \; ;$$

$$q^{n-m} = \frac{R}{S}$$

$$k \in \mathbb{N} \; , \; n-m = 2k \; : \; q = \pm(\frac{R}{S})^{\frac{1}{n-m}} \; ,$$

$$n-m = 2k-1 \; : \; q = (\frac{R}{S})^{\frac{1}{n-m}}$$

$$t_1 = \frac{R}{q^{n-1}} \; ; \; t_1 = \frac{S}{q^{m-1}}$$

واسطه‌های هندسی

در یک دنبالهٔ هندسی، جمله یا جمله‌هایی را که بین دو جملهٔ نامتوالی قرار دارند، واسطه یا واسطه‌های هندسی بین آن دو جمله می‌نامند. به‌طور مثال، در دنبالهٔ ۸۰، ۴۰، ۲۰، ۱۰، ۵ عددهای ۱۰، ۲۰ و ۴۰، سه واسطهٔ هندسی بین عددهای ۵ و ۸۰ هستند. در این صورت می‌گویند: عددهای ۱۰، ۲۰ و ۴۰ سه واسطهٔ هندسی هستند که بین عددهای ۵ و ۸۰ درج شده‌اند.

هرگاه سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی را در نظر بگیریم، جملهٔ وسط را به‌طور مطلق، واسطهٔ هندسی بین دو جملهٔ دیگر می‌نامند. به‌طور مثال، اگر بخواهیم واسطهٔ هندسی بین دو عدد را تعیین کنیم، با فرض این که واسطهٔ هندسی دو عدد را x بنامیم:

$$a, x, b : \frac{x}{a} = \frac{b}{x} = q \; ; \; x^2 = ab \; ;$$

$$x = \pm\sqrt{ab} \qquad (ab \geq 0)$$

درج واسطه‌های هندسی بین دو عدد

مقصود از درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد معلوم a و b، این است که یک دنبالهٔ هندسی متناهی تشکیل دهیم که $(m+2)$ جمله داشته باشد و a و b بترتیب، جمله‌های اوّل و آخر آن باشند:

$$t_{m+2} = t_1 q^{m+2-1} \; ; \; b = aq^{m+1} \; ;$$

$q=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ (m عددی زوج باشد) ;

$q=\pm(\frac{b}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ (m عددی فرد باشد)

بنابراین، برای درج m واسطهٔ هندسی بین a و b، کافی است قدرنسبت : $(\frac{b}{a})^{\frac{1}{m+1}}$ را در جملهٔ اوّل و سپس در جملهٔ دوم و... ضرب کنیم. واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b، جذر حاصلضرب a در b، با شرط $ab>0$ است.

محاسبهٔ مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی

مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی را به S_n نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$S_n=t_1+t_1q+t_1q^2+...+t_1q^{n-2}+t_1q^{n-1} \qquad (1)$$

اگر دو طرف رابطهٔ (۱) را در q ضرب کنیم:

$$qS_n=t_1q+t_1q^2+t_1q^3+...+t_1q^{n-1}+t_1q^n \qquad (2)$$

حال رابطهٔ (۲) را از رابطهٔ (۱) کم می‌کنیم:

$$S_n-qS_n=t_1-t_1q^n \;;$$

$$S_n(1-q)=t_1(1-q^n) \;;$$

$$S_n=\frac{t_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad (q\neq 1)$$

مثال ۸. مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی $1,2,4,8,...,2^{n-1}$، برابر $S_n=\frac{1(1-2^n)}{1-2}$ یا $S_n=2^n-1$ است.

وقتی که $|q|<1$ و n بزرگترین عدد طبیعی فرض شود، دنبالهٔ هندسی نامتناهی است و مجموع جمله‌های آن (S) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|q|<1: \; S=\frac{t_1}{1-q}$$ (مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی نامتناهی)

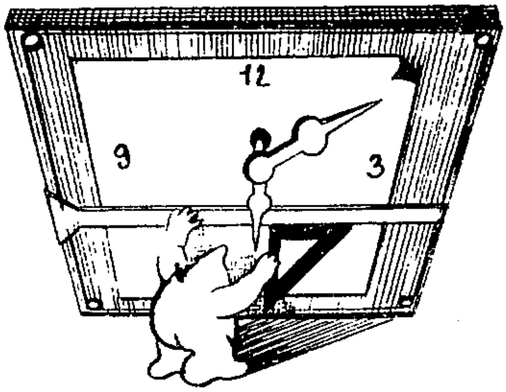
مثال ۹. مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی نامتناهی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ را بیابید.

حل: $\boxed{S=2}$ $t_1=1,\; q=\frac{1}{2}: \; S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \;;$

یادداشتها:

۱. t حرف اول کلمهٔ لاتین (term) به معنای (جمله) است.





عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار ساعت، طی ۲۴ ساعت، چند بار زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

● محمد هاشم رستمی

شکل‌های هندسی

(قسمت هفدهم)

رویّه‌های درجهٔ دوم. رویه‌هایی که معادلهٔ آنها در دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ به‌صورت کلی :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx+$$
$$2Gx+2Hy+2Iz+J=0$$

باشد، رویّه‌های درجهٔ دوم نامیده می‌شوند.

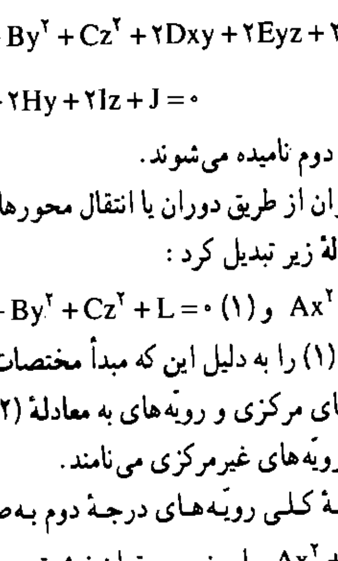
این معادله را می‌توان از طریق دوران یا انتقال محورها و یا هر دو، به یکی از دو معادلهٔ زیر تبدیل کرد :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+L=0 \quad (1) \quad \text{و} \quad Ax^2+By^2+2Iz=0 \quad (2)$$

رویّه‌های به معادلهٔ (۱) را به دلیل این که مبدأ مختصات، مرکز تقارن آنهاست، رویّه‌های مرکزی و رویّه‌های به معادلهٔ (۲) را که این ویژگی را ندارند، رویّه‌های غیرمرکزی می‌نامند.

بیضوی. معادلهٔ کلی رویّه‌های درجهٔ دوم به‌صورت $Ax^2+By^2+Cz^2+L=0$ را چنین می‌توان نوشت :

$$Ax^2+By^2+Cz^2=-L$$



با تقسیم دو طرف این معادله بر $-L$ داریم :

$$-\frac{A}{L}x^2-\frac{B}{L}y^2-\frac{C}{L}z^2=1 \qquad (1)$$

اگر A، B و C همعلامت باشند ؛ ولی علامتشان مخالف علامت L باشد، با انتخاب $-\frac{A}{L}=\frac{1}{a^2}$ ، $-\frac{B}{L}=\frac{1}{b^2}$ و $-\frac{C}{L}=\frac{1}{c^2}$ ، معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲) رویّهٔ درجهٔ دومی را مشخص می‌کند که بیضوی یا بیضی‌گون یا بیضی‌وار نامیده می‌شود. a، b و c را نیمهٔ قطرهای بیضوی می‌گویند. صفحه‌های xOy، yOz و zOx صفحه‌های تقارن، مبدأ مختصات مرکز تقارن، و محورهای مختصات محور تقارن آن می‌باشند.

ثابت می‌توان کرد که فصل مشترک بیضوی با هر صفحه، یک بیضی است و به همین دلیل، آن را بیضوی می‌نامند. به عنوان مثال :

۱. فصل مشترک صفحه‌های مختصات $z=0$ ، $y=0$ و $x=0$ با بیضوی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بترتیب، بیضیهایی به معادله‌های $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است.

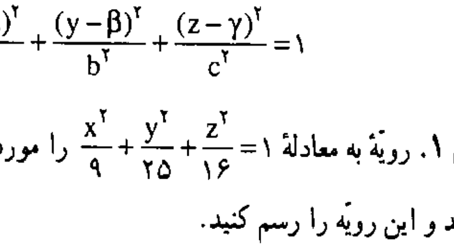
۲. اگر بیضوی را با صفحهٔ $z=h$ ، $(|h|<c)$ قطع کنیم،

بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ به‌دست می‌آید، که نیمهٔ قطرهای آن $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ و $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ است و بیضی هایی که با تغییر h پدید می‌آید، متشابه‌اند ؛ یعنی خروج از مرکز آنها برابر است.

تبصره. اگر محورهای بیضوی به معادلهٔ (۲) موازی محورهای مختصات و نقطهٔ $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ مرکز آن باشد، معادلهٔ آن به صورت زیر است :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

مثال ۱. رویهٔ به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ را مورد بررسی قرار دهید و این رویه را رسم کنید.



حل. این رویه، یک بیضوی است که نیمهٔ قطرهای آن $a=3$، $b=5$ و $c=4$ است. صفحه‌های مختصات، صفحهٔ تقارن و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آن است. این بیضوی، محور xها را در نقطه‌های $A(3,0,0)$ و $A'(-3,0,0)$، محور yها را در نقطه‌های $B(0,5,0)$ و $B'(0,-5,0)$ و محور zها را در نقطه‌های $C(0,0,4)$ و $C'(0,0,-4)$ قطع می‌کند. فصل مشترک این رویه با صفحهٔ xOy بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$، با صفحهٔ xOz بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ و با صفحهٔ yOz بیضی به معادلهٔ $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ است.

مثال ۲. ثابت کنید معادلهٔ

$$3x^2+4y^2+z^2-12x-16y+4z-4=0$$

نمایشگر یک بیضوی است. مختصات مرکز و اندازهٔ نصف قطرهای آن را تعیین کنید.

حل. ثابت می‌کنیم این معادله را به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$ می‌توان درآورد.

داریم :

$$3x^2-12x+4y^2-16y+z^2+4z-4=0$$

$$\Rightarrow 3(x^2-4x)+4(y^2-4y)+(z^2+4z)-4=0$$

$$\Rightarrow 3\left[(x-2)^2-4\right]+4\left[(y-2)^2-4\right]+\left[(z+2)^2-4\right]-4=0$$

$$\Rightarrow 3(x-2)^2+4(y-2)^2+(z+2)^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(z+2)^2}{36}=1$$ معادلهٔ بیضوی

$\Rightarrow O'(2,2,-2)$ مختصات مرکز بیضوی

$a^2=12\Rightarrow a=2\sqrt{3},$

$b^2=9\Rightarrow b=3, c^2=36\Rightarrow c=6$

نیمهٔ قطرهای بیضوی

مثال ۳. معادلهٔ بیضوی استاندارد (به مرکز مبدأ مختصات که قطرهایش روی محورهای مختصات واقعند) را که از نقطه‌های $(2,-1,1)$، $(-3,0,0)$ و $(1,-1,-2)$ می‌گذرد، بنویسید.

حل. بیضوی به معادلهٔ کلی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را در نظر می‌گیریم. شرط آن که این بیضوی از نقطه‌های داده شده بگذرد، آن است که مختصات این نقطه‌ها در معادلهٔ آن صدق کند. بنابراین :

$$(2,-1,1)\Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1 \qquad (1)$$

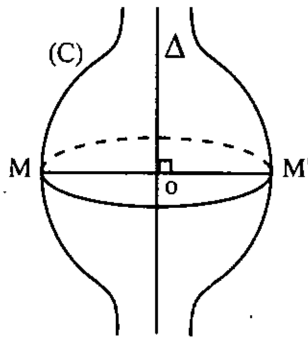
$$(-3,0,0)\Rightarrow \frac{9}{a^2}+0+0=1 \qquad (2)$$

$$(1,-1,-2)\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{4}{c^2}=1 \qquad (3)$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)، $a^2=9$، $b^2=\frac{9}{4}$ و $c^2=9$ و از آن‌جا، معادلهٔ بیضی‌گون به صورت $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}+\frac{z^2}{9}=1$ یا

$x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ به‌دست می‌آید.

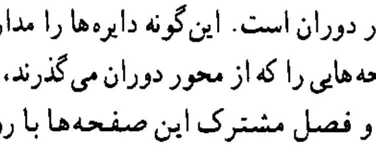
رویّه‌های دوّار. از دوران یک منحنی مسطح مانند (C) حول محوری مانند خط راست Δ که در یک صفحه قرار دارند، رویّه‌ای به‌وجود می‌آید که آن را رویّهٔ دوّار می‌نامند.



خط Δ محور و منحنی (C) منحنی مولّد رویّهٔ دوّار نامیده می‌شوند. هر نقطه مانند M از منحنی (C) هنگام دوران، دایره‌ای رسم می‌کند که صفحهٔ آن، عمود بر محور دوران و مرکز آن (نقطهٔ O) روی محور دوران است. این‌گونه دایره‌ها را مدار رویّهٔ دوّار می‌نامند. صفحه‌هایی را که از محور دوران می‌گذرند، صفحه‌های نصف‌النهار و فصل مشترک این صفحه‌ها با رویّهٔ دوّار را منحنی‌های نصف‌النهار می‌نامند.

معادلهٔ رویّهٔ دوّار. فرض می‌کنیم خط Δ به معادلهٔ $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ محور، و منحنی (C) به معادله‌های

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$



مولّد سطح دوّار باشند. برای تعیین معادلهٔ سطح دوّار، ملاحظه می‌کنیم که این رویّه از جابه‌جا شدن مداری پدید می‌آید که همواره متکی بر مولّد باشد.

مدار را می‌توان فصل مشترک کره‌ای که مرکز آن روی Δ واقع است، با صفحه‌ای عمود بر Δ دانست. بنابراین، معادلهٔ آن چنین است:

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = m \\ ax + by + cz + d = n \end{cases} \qquad (2)$$

با تغییر m و n کلیهٔ مدارها مشخص می‌شوند.

چون بین معادله‌های مدار و مولد، یعنی دستگاه‌های (۱) و (۲)، x، y و z را حذف کنیم، رابطه‌ای بین m و n به‌صورت $f(m,n) = 0$ به‌دست می‌آید، که چون در این رابطه به جای m و n مقدارهایشان را از دستگاه (۲) قرار دهیم، معادلهٔ رویّهٔ دوّار به‌دست می‌آید.

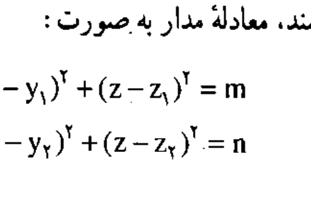
معادلهٔ صفحه را به‌صورت $ax + by + cz = n$ نیز می‌توان در نظر گرفت.

تبصره. مدار سطح دوّار را می‌توان فصل مشترک دو کره که مرکزهای آنها روی خط Δ محور رویّهٔ دوّار قرار دارد، در نظر گرفت. در این صورت، اگر (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) دو نقطهٔ واقع بر Δ باشند، معادلهٔ مدار به‌صورت:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = m \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = n \end{cases}$$

خواهد بود.

مثال ۱. معادلهٔ رویّهٔ دوّار حاصل از دوران خط $D: \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}$، حول محور zها را پیدا کنید.



حل. محور دوران (خط Δ) همان محور zها و منحنی هادی یعنی منحنی (c)، خط $D:\begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}$ است، که موازی محور zها می‌باشد. برای تعیین معادلهٔ این رویهٔ دوّار، مدار دلخواهی از آن را در نظر می‌گیریم که فصل مشترک صفحهٔ $z = n$ و کره‌ای به مرکز $O(0,0,0)$ و شعاع $\sqrt{m}$ باشد؛ یعنی:

$$\text{مدار}: \begin{cases} z = n \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \end{cases}$$

حال کافی است x، y و z را در چهار معادلهٔ زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \\ z = n \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \end{cases}$$

داریم:

$$x = 1 ,\ \ y = 1 \Rightarrow 1 + 1 + n^2 = m \Rightarrow 2 + n^2 = m$$

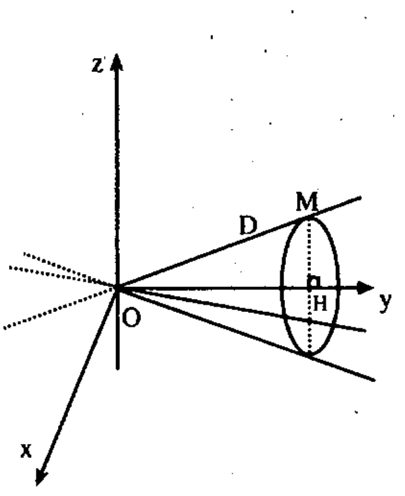
با جایگزینی $n = z$ و $m = x^2 + y^2 + z^2$ در رابطهٔ $2 + n^2 = m$ معادلهٔ این رویهٔ دوّار که یک سطح استوانی (استوانه‌ای دوّار) است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

نکته. فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه‌ای عمود بر محور این سطح دوّار یک دایره است. به عنوان مثال، مقطع سطح دوّار استوانه به معادلهٔ $x^2 + y^2 = 2$ با صفحهٔ xOy به معادلهٔ $z = 0$ (که بر محور Oz عمود است) دایرهٔ به معادلهٔ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ است.

مثال ۲. معادلهٔ رویهٔ دوّار حاصل از دوران خط $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases}$ حول محور yها را به‌دست آورید.

حل. منحنی مولّد این رویهٔ دوّار، خط $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases}$، خط راستی واقع در صفحهٔ yOz است که از مبدأ مختصات می‌گذرد. از دوران این خط حول محور yها یک سطح مخروطی دوّار پدید



می‌آید. معادلهٔ یک مدار دلخواه از این رویهٔ دوّار به‌صورت $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = m \\ y = n \end{cases}$ است. حال بین چهار معادلهٔ

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \\ x^2 + y^2 + z^2 = m \\ y = n \end{cases}$$

مقدارهای x، y و z را حذف می‌کنیم. داریم:

$$\Rightarrow n = 3z \Rightarrow z = \frac{n}{3} \Rightarrow 0 + n^2 + \frac{n^2}{9} = m$$

$$\Rightarrow 9m - 10n^2 = 0$$

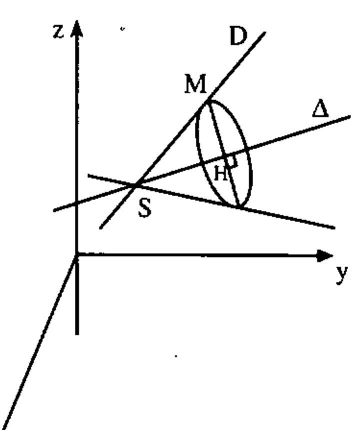
اکنون با جایگزین کردن مقدار به جای m و n معادلهٔ سطح مخروطی دوّار به‌دست می‌آید:

$$9(x^2 + y^2 + z^2) - 10y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$$

مثال ۳. معادلهٔ رویهٔ دوّار حاصل از دوران خط $D:\frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$، حول خط $\Delta:\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ را تعیین کنید. (a' و b'، c') و (a و b، c) بترتیب، کسینوسهای هادی دو خط D و Δ می‌باشند.

حل. رویهٔ حاصل، یک سطح مخروطی دوّار، یا به‌طور خلاصه



یک مخروط است، که محور آن، خط $\Delta: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$، و مولّد آن، خط $D: \frac{x-x_0}{a'}=\frac{y-y_0}{b'}=\frac{z-z_0}{c'}$ است.

معادلهٔ یک مدار دلخواه از این رویه چنین است:

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=m\\ ax+by+cz=n\end{cases}$$

(m و n در دو معادلهٔ بالا متغیرند.)

اکنون بین دو معادلهٔ بالا و معادله‌های مولّد، یعنی در دستگاه زیر x، y و z را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{a'}=\frac{y-y_0}{b'}=\frac{z-z_0}{c'}\\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=m\\ ax+by+cz=n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{(x-x_0)^2}{a'^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b'^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c'^2}=\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{a'^2+b'^2+c'^2=1}=\frac{m}{1}=m\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=n-ax_0-by_0-cz_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=a'\sqrt{m}\ ,\ y-y_0=b'\sqrt{m}\ ,\ z-z_0=c'\sqrt{m}\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=n-ax_0-by_0-cz_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow aa'\sqrt{m}+bb'\sqrt{m}+cc'\sqrt{m}=n-ax_0-by_0-cz_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{m}(aa'+bb'+cc')=n-ax_0-by_0-cz_0$$

و یا $m(aa'+bb'+cc')^2=\left[n-(ax_0+by_0+cz_0)\right]^2$

امّا اگر زاویهٔ بین دو خط Δ و D را α اختیار کنیم، $\cos\alpha=aa'+bb'+cc'$ است.

بنابراین داریم: $m\cos^2\alpha=\left[n-(ax_0+by_0+cz_0)\right]^2$

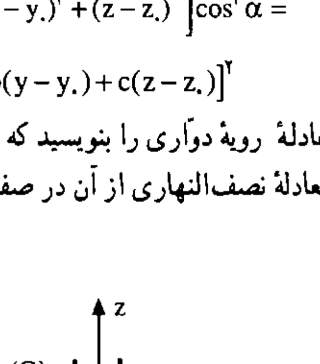
و با جایگزین کردن m و n در رابطهٔ بالا، معادلهٔ سطح مخروطی دوّار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\cos^2\alpha=$$
$$\left[ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)\right]^2$$

و یا:

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\cos^2\alpha=$$
$$\left[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\right]^2$$

مثال ۴. معادلهٔ رویهٔ دوّاری را بنویسید که محور آن Oz و $f(x,z)=0$، معادلهٔ نصف‌النهاری از آن در صفحهٔ xOz باشد.



حل. می‌توان نصف‌النهاری به معادله‌های $\begin{cases}f(x,z)=m\\ y=0\end{cases}$ را مولّد این سطح دوّار دانست.

معادلهٔ مداری دلخواه از این رویهٔ دوّار چنین است:

$$\begin{cases}x^2+y^2=m\\ y=n\end{cases}$$

از حذف x، y و z بین چهار معادلهٔ بالا، رابطهٔ زیر بین m و n به‌دست می‌آید:

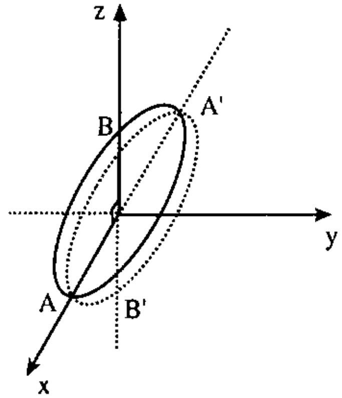
$$f(m,n)=0$$

پس معادلهٔ این رویهٔ دوّار چنین است:

$$f(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z)=0$$

یعنی برای تعیین معادلهٔ این سطح دوّار در معادلهٔ نصف‌النهار به جای x^2، مقدار (x^2+y^2) را قرار می‌دهیم.

مثال ۵. معادلهٔ رویهٔ دوّار حاصل از دوران بیضی به معادلهٔ $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$ حول محور zها را تعیین کنید.



حل. این بیضی را یک نصف‌النهار از رویهٔ دوّار حاصل، در نظر می‌گیریم. معادلهٔ یک مدار دلخواه از این رویهٔ دوّار، به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=m\\ z=n\end{cases}$$

اکنون بین چهار معادلهٔ دستگاه بالا : x، y و z را حذف می‌کنیم. داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ y=0\\ x^2+y^2+z^2=m\ \Rightarrow x^2+0+n^2=m\Rightarrow x^2=m-n^2\\ z=n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m-n^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$$

با جایگزینی مقدارهای m و n در رابطهٔ بالا معادلهٔ رویهٔ دوّار به‌دست می‌آید :

$$\frac{x^2+y^2+z^2-z^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

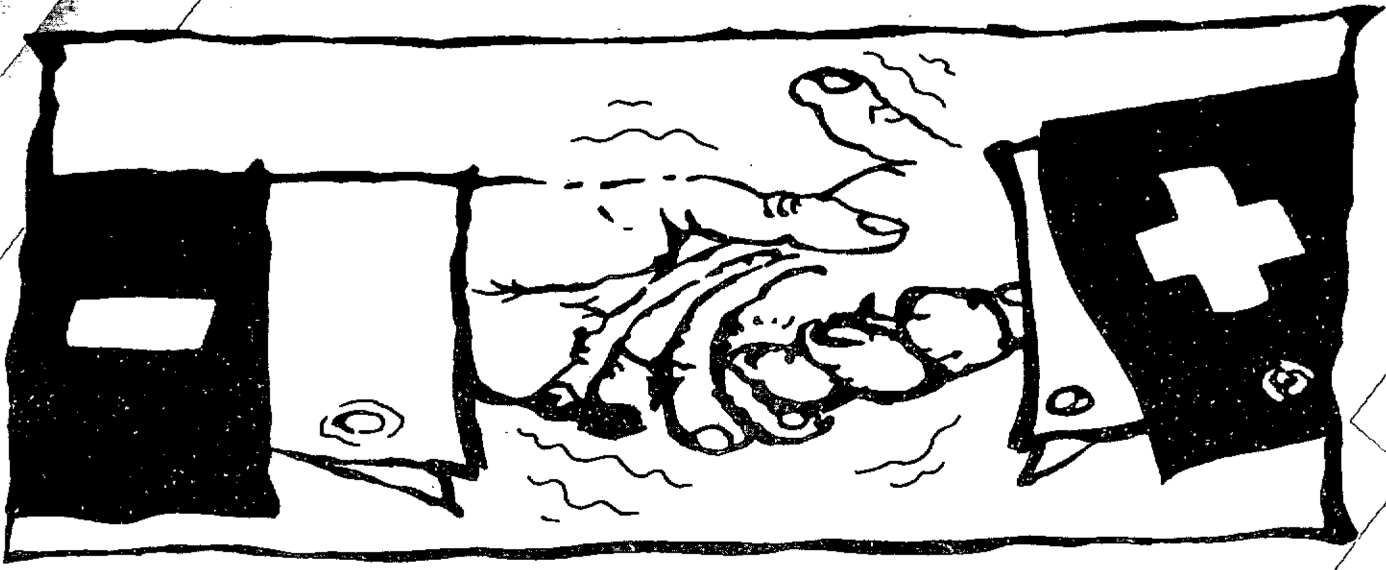


محمدباقر یزدی از ریاضیدانان دورهٔ صفویه و معاصر با شاه عباس اوّل و شاه صفی و شاه عباس دوم بوده و کمی پیش از ۱۰۶۹ هجری درگذشته است.

مهمترین اثر ریاضی او، کتاب **عُیونُ الحساب** اوست که به عربی نوشته و می‌توان گفت که آن را به تقلید از **مفتاح‌الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی** فراهم کرده است. با این همه، در عیون‌الحساب، مطالبی هست که در مفتاح‌الحساب دیده نمی‌شود. مثلاً یزدی در مطلب دوازدهم از باب اوّل کتاب خود، حالتهای خاصی از معادلهٔ درجهٔ پنجم را حل کرده است.

عنوان مطلب دوازدهم از باب اوّل عیون‌الحساب این است : «استخراج ریشهٔ اوّل از مُضَلّعات زائده و ناقصه» و مقصود یزدی از مضلّعات زائده و ناقصه، عباراتی جبری است مثلاً به‌صورت $x^4(x+123)$ یا $x^3(x^2+144)$ و غیره.

زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی - ابوالقاسم قربانی



تعیین علامت عبارتهای جبری، حلّ نامعادله ها

(قسمت اوّل)

● هوشنگ شرقی

برای حلّ نامعادله‌های خطی یا نامعادله‌های کسری که مجهول نامعادله در مخرج کسر باشد، لازم است از تعیین علامت عبارتهای جبری استفاده شود. در این‌جا ابتدا مفهوم تعیین علامت را شرح داده و سپس روشهای تعیین علامت عبارتهای جبری را می‌آموزیم و در نهایت، کاربرد تعیین علامت را در حلّ نامعادله‌های درجهٔ دوم و بالاتر، و نیز نامعادله‌های کسری توضیح می‌دهیم.

تعیین علامت: منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری با یک مجهول، آن است که مشخص کنیم که این عبارت جبری، به‌ازای مقادیر مختلف آن مجهول، چه علامتی دارد. به‌عنوان مثال، کسر $A=\frac{x+1}{x-1}$ را درنظر بگیرید، می‌خواهیم ببینیم که به‌ازای چه مقادیر x، $A>0$ و به‌ازای کدام مقادیر آن، $A<0$ و چه موقع $A=0$ می‌شود. دربارهٔ چگونگی این کار در این قسمت بحث می‌کنیم.

۱) تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ اوّل:

برای تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ اوّل، ابتدا آنها را ساده می‌کنیم، تا به‌صورت $ax+b$ تبدیل شوند. آن‌گاه ریشهٔ عبارت فوق را به‌دست می‌آوریم؛ یعنی جواب معادلهٔ $ax+b=0$ را به‌دست می‌آوریم: $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$، آن‌گاه در یک جدول به‌صورت زیر، عبارت فوق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $-2x+4$ را تعیین علامت کنید.

حل: همان‌طور که گفته شد، ابتدا ریشهٔ این عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$-2x+4=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=2$$

حال در یک جدول مشابه جدول بالا، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$-2x+4$	+		−

از روی این جدول، مشخص می‌شود که به‌ازای هر x که بزرگتر از ۲ باشد، علامت این عبارت، منفی و به‌ازای هر x که کوچکتر از ۲ باشد، علامت آن، مثبت و به‌ازای $x=2$ این عبارت،

مساوی صفر است. مثلاً به‌ازای $x=4$ که بزرگتر از ۲ است، داریم :

$$-2x+4=-2(4)+4=-8+4=-4<0$$

و به‌ازای $x=1$ که کوچکتر از ۲ است داریم :

$$-2x+4=-2(1)+4=-2+4=2>0$$

تمرین : هریک از عبارتهای جبری زیر را در جدولی مشابه این جدول تعیین علامت کنید :

۱) $-5x+3$ ۲) $6x-3$ ۳) $-2x+4+5x$

۲) تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ دوم :

برای تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ دوم، پس از آن‌که عبارت را ساده کردیم و به شکل کلی ax^2+bx+c تبدیل نمودیم، ابتدا مبین معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را به‌دست می‌آوریم. در این‌جا سه حالت پیش می‌آید که در هر حالت، جدول تعیین علامت عبارت جبری، به‌صورت خاص خود رسم می‌شود :

الف) اگر $\Delta>0$، ریشه‌های معادله را از دستور $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به‌دست می‌آوریم. جدول تعیین علامت عبارت جبری ax^2+bx+c به‌صورت زیر رسم می‌شود :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

$(x_2>x_1)$

توجه داشته باشید که x_1 و x_2 به‌ترتیب صعودی در جدول واقع می‌شوند.

مثال: تعیین علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم $5x^2+6x-11$.

حل: ابتدا سه جمله‌ای را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$5x^2+6x-11=0$$

$$\Rightarrow \Delta=36-4(5)(-11)=256>0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{256}}{10}=\frac{-6\pm16}{10}\Rightarrow x_1=\frac{-22}{10}=-\frac{11}{5}\ ,$$

$$x_2=\frac{10}{10}=1$$

اکنون عبارت فوق را در جدول زیر، تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{5}$		1	$+\infty$
$5x^2+6-1$	+	۰	−	۰	+

مفهوم این جدول، آن است که عبارت فوق، وقتی که $-\frac{11}{5}<x<1$ باشد، منفی و به‌ازای هر $x>1$ یا $x<-\frac{11}{5}$ مثبت است. مثلاً به‌ازای $x=-3$ مثبت است :

$$5x^2+6x-11=5(-3)^2+6(-3)-11$$

$$=45-18-11=15>0$$

ولی به‌ازای $x=-2$ $(-\frac{11}{5}<-2<1)$ منفی است :

$$5x^2+6x-11=5(-2)^2+6(-2)-11$$

$$=20-12-11=-3<0$$

مثال: عبارت درجهٔ دوم $4-x^2$ را تعیین علامت کنید.

حل: $4-x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$4-x^2$	−	۰	+	۰	−

از این جدول می‌فهمیم که اگر $-2<x<2$ باشد، $4-x^2>0$ و اگر $x>2$ یا $x<-2$ باشد، $4-x^2<0$ و به‌ازای $x=\pm2$، $4-x^2=0$ می‌باشد. (چرا؟)

تمرین : هریک از عبارتهای جبری زیر را تعیین علامت کنید :

۱) x^2+x-2 ۲) $4x^2-9$ ۳) $-2x^2-5x+7$

ب) اگر $\Delta=0$، معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، دارای ریشهٔ مضاعف به‌صورت $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ است و در این حالت، علامت سه‌جمله‌ای، همواره موافق علامت a بوده و فقط در $x=-\frac{b}{2a}$ صفر است :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

مثال: عبارت جبری $4x^2-4x+1$ را تعیین علامت کنید.

حل: سه‌جمله‌ای فوق را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$4x^2-4x+1=0\Rightarrow \Delta=16-16=0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۴x^۲-۴x+۱$		+	۰	+	

یعنی سه‌جمله‌ای $۴x^۲-۴x+۱$ به‌ازای همهٔ مقادیر x همواره مثبت بوده و فقط به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ مساوی صفر می‌شود.

تمرین : هریک از سه‌جمله‌ایهای زیر را، تعیین علامت کنید :

$۱)\ x^۲-۲x+۱ \qquad ۲)\ -x^۲+۴x-۴ \qquad ۳)\ -۳x^۲$

ج) اگر $\Delta<۰$ ، معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای جواب حقیقی نمی‌باشد و در این حالت، علامت سه‌جمله‌ای، همواره موافق علامت a است :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	

مثال: عبارت جبری $۲x^۲-x+۱$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت فوق را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$۲x^۲-x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴\times۲\times۱=۱-۸<۰$

x	$-\infty$	$+\infty$
$۲x^۲-x+۱$	+ + +	

یعنی سه‌جمله‌ای $۲x^۲-x+۱$ به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی، x همواره مثبت است.

مثال: ثابت کنید :

$x\in\mathbb{R} \Rightarrow x(x+۱)>-۱$

حل: اثبات نابرابری فوق، معادل است با اثبات نابرابری $x^۲+x+۱>۰$ (چرا؟)

برای اثبات این نابرابری سه‌جمله‌ای، $x^۲+x+۱$ را تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^۲+x+۱$	+	+

$x^۲+x+۱=۰ \qquad \Delta=۱-۴<۰$

یعنی $x^۲+x+۱$ به‌ازای هر عدد حقیقی x همواره مثبت است و این معادل با آن است که :

$x\in\mathbb{R} \Rightarrow x^۲+x+۱>۰ \Rightarrow x(x+۱)-۱$

تمرین : هر یک از سه جمله‌ایهای زیر را تعیین علامت کنید.

$۱)\ -x^۲+x-۲ \qquad ۲)\ ۳x^۲-x+۱$

۳) برای تعیین علامت عبارتهای جبری که به‌صورت حاصل‌ضرب و تقسیم تعدادی عبارت جبری درجهٔ یک و دو باشند، ابتدا همهٔ عبارتهای تشکیل دهندهٔ آنها را در یک جدول، تعیین علامت می کنیم. آن‌گاه علامتهای این عبارتها را در هم ضرب می‌کنیم و علامت عبارت تشکیل یافته از آنها را در فاصله‌های مختلف به‌دست می‌آوریم. همچنین عبارت جبری فوق، روی ریشه‌های مخرج کسرها تعریف نشده و روی سایر ریشه‌ها مساوی صفر می‌شود.

مثال: عبارت $A=\frac{(x-۱)(x^۲-۴)}{(۳x-۲)(۲-x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا چهار عبارتی را که از ضرب و تقسیم آنها کسر A به‌دست آمده است، مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آنها را به‌دست می‌آوریم :

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲$

$۳x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$

$۲-x=۰ \Rightarrow x=۲$

آن‌گاه این چهار عبارت را در یک جدول چهار سطری (هر عبارت در یک سطر) به‌طور جداگانه و مطابق دستورهای گفته شده، تعیین علامت می کنیم :

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۲}{۳}$		۱		۲		$+\infty$
$x-۱$		−		−		−	۰	+		+	
$x^۲-۴$		+	۰	−		−		−	۰	+	
$۳x-۲$		−		−	۰	+		+		+	
$۲-x$		+		+		+		+	۰	−	
A		+	۰	−	∞	+	۰	−	∞	−	

از روی این جدول، مشخص می‌شود که اگر $x<-۲$ یا $\frac{۲}{۳}<x<۱$ باشد، $A>۰$ و اگر $-۲<x<\frac{۲}{۳}$ یا $۱<x<۲$ یا $x>۲$ باشد، $A<۰$ و به‌ازای $x=-۲$ و $x=۱$ ، $A=۰$ و به‌ازای $x=\frac{۲}{۳}$ و $x=۲$ ، کسر A تعریف نشده می‌باشد.

مثال: عبارت $P=\frac{(x^{۲}-۲x+۱)(x^{۲}-۹)}{(-x^{۲}+۴x)(۳-x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: مانند مثال قبل، عمل می‌کنیم :

$x^{۲}-۲x+۱=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۱)=۰ \Rightarrow x_{۱}=x_{۲}=۱$

(ریشهٔ مضاعف)

$x^{۲}-۹=۰ \Rightarrow x^{۲}=۹ \Rightarrow x=\pm ۳$

$-x^{۲}+۴x=۰ \Rightarrow x(-x+۴)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۴$

$۳-x=۰ \Rightarrow x=۳$

x	$-\infty$	-۳		۰		۱		۳		۴	$+\infty$
$x^{۲}-۲x+۱$	+		+		+	۰	+		+		+
$x^{۲}-۹$	+	۰	−		−		−	۰	−		−
$-x^{۲}+۴x$	−		−	۰	+		+		+	۰	−
$۳-x$	+		+		+		+	۰	−		−
P	−	۰	+	∞	−	∞	−	∞	+	∞	−

لازم به ذکر است که اگر عبارت جبری، به حاصلضرب عوامل درجهٔ یک یا دو تجزیه نشده باشد، قبلاً باید آن را به حاصلضرب عوامل تبدیل نمود و سپس آن را تعیین علامت کرد.

مثال: عبارت جبری $x^{۳}-x$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا عبارت $x^{۳}-x$ را به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم :

$x^{۳}-x=x(x^{۲}-۱)=x(x-۱)(x+۱)$

اکنون با تعیین علامت سه عبارت x، $x-۱$ و $x+۱$ در یک جدول می‌توان عبارت $x^{۳}-x$ را تعیین علامت نمود.

$x=۰ \; ; \; x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \; ; \; x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

x	$-\infty$	-۱		۰		۱	$+\infty$
x	−		−	۰	+		+
$x-۱$	−		−		−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+		+		+
$x^{۳}-x$	−	۰	+	۰	−	۰	+

از روی جدول، معلوم می‌شود که اگر $۱<x$ یا $-۱<x<۰$ باشد، $x^{۳}-x>۰$ و اگر $۰<x<۱$ یا $x<-۱$ باشد، $x^{۳}-x<۰$ و اگر $x=-۱,۰,۱$ باشد، $x^{۳}-x=۰$ است.

مثال: عبارت جبری $A=\frac{x+۲}{x-۲}-\frac{x+۳}{x-۳}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا مخرج مشترک گرفته و عبارت A را ساده می‌کنیم :

$$A=\frac{(x+۲)(x-۳)-(x-۲)(x+۳)}{(x-۲)(x-۳)}$$

$$=\frac{x^{۲}-x-۶-(x^{۲}+x-۶)}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{x^{۲}-x-۶-x^{۲}-x+۶}{(x-۲)(x-۳)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{-۲x}{(x-۲)(x-۳)}$$

$-۲x=۰ \Rightarrow x=۰ \quad ; \quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$

x	$-\infty$	۰		۲		۳	$+\infty$
$-۲x$	+	۰	−		−		−
$x-۲$	−		−	۰	+		+
$x-۳$	−		−		−	۰	+
A	+	۰	−	∞	+	∞	−

تمرین : هریک از عبارتهای جبری زیر را تعیین علامت کنید :

۱) $-۵x+۷$

۲) $-x^{۲}+۸$

۳) $۴x^{۲}+x-۵$

۴) $x^{۲}+۴x+۴$

۵) $۶x^{۲}-۵x$

۶) $\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)}$

۷) $\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{۲x}$

۸) $x^{۴}-x$

۹) $x^{۴}+x^{۲}-۲$

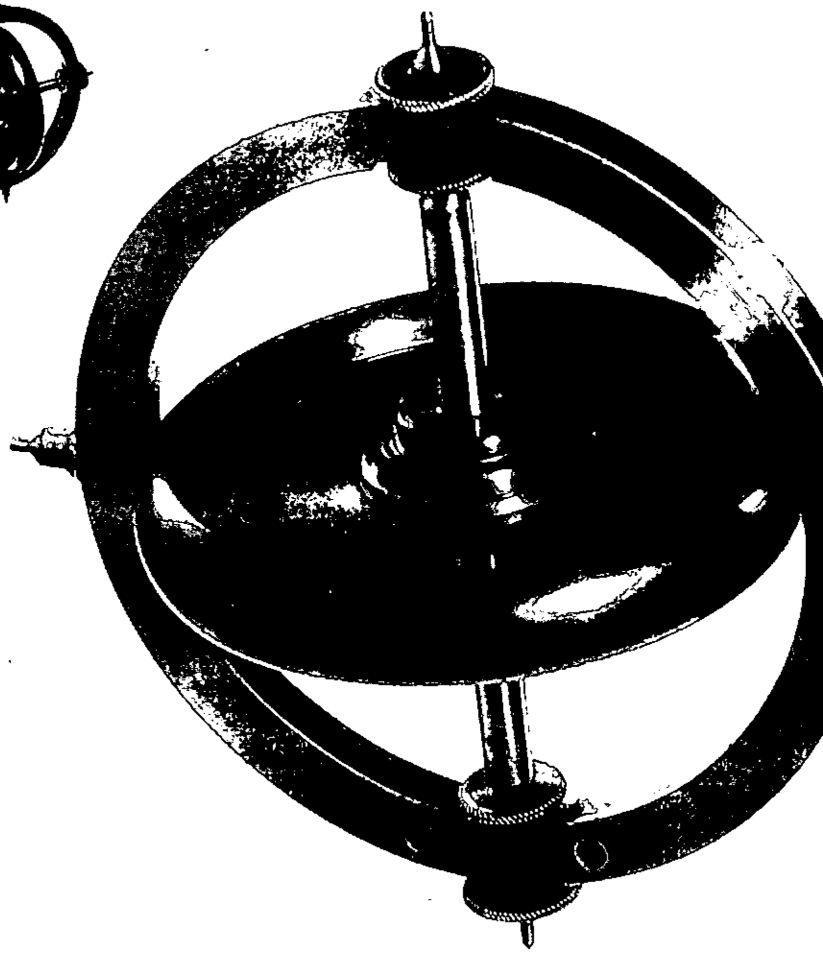
۱۰) $\frac{x^{۲}+۱}{x}-۲x$

۱۱) $\frac{x+۴}{x+۱}-\frac{x+۳}{x-۱}$

۱۲) $\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}-\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$

۱۳) $\frac{(x^{۲}-۵x+۶)(x^{۲}-۴)}{(x^{۲}+x)(x^{۲}+x+۱)}$





قضیهٔ مقدار میانگین

(قسمت سوّم)

● محمدصادق عسگری

فرض کنیم f تابعی حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر بازهٔ $]a,b[$ باشد. در این صورت وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

اثبات: فرض کنیم $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ، ثابت می‌کنیم وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $f'(c)=k$. تابع جدید $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ با $g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ را در نظر می‌گیریم ؛ چون f پیوسته و مشتق‌پذیر است. درنتیجه، g نیز روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$g(a)=f(a)-f(a)-k(a-a)=0$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-k(b-a)$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0$$

یعنی $g(a)=g(b)=0$. بنابر قضیه رول وجود دارد $a<c<b$ ؛ به‌طوری که $g'(c)=0$.

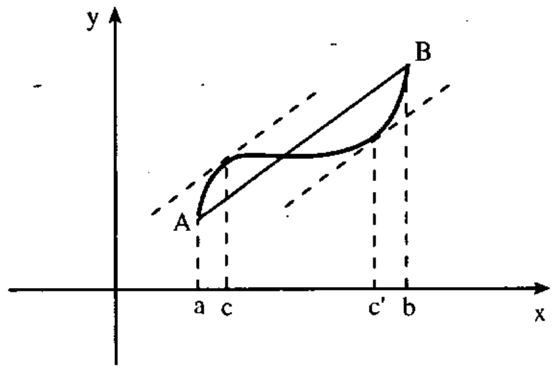
$$g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$$

$$g'(x)=f'(x)-k$$

$$g'(c)=f'(c)-k=0\Rightarrow \boxed{f'(c)=k}$$

تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین

اگر دو نقطهٔ $A\big|^{a}_{f(a)}$ و $B\big|^{b}_{f(b)}$ را روی نمودار تابع f در نظر بگیریم، در این صورت، عدد $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خط گذرنده از نقاط A و B است. بنابراین، قضیه بیان می‌کند که، اگر f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در نقطه‌ای به طول c خط مماس بر منحنی، موازی پاره‌خط AB است.



نتایج قضیه مقدار میانگین

نتیجهٔ ۱: اگر f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشد و عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد؛ به‌طوری که برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $|f'(x)| \le M$، آن‌گاه، $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$.

اثبات: بنابر قضیهٔ مقدار میانگین وجود $a<c<b$؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ طبق فرض $|f'(c)| \le M$، درنتیجه داریم:

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le M \Rightarrow |f(b)-f(a)| \le M|b-a|$$

نتیجهٔ ۲: اگر f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر $a<x<b$ داشته باشیم $f'(x)=0$، آن‌گاه f تابع ثابت است. $(f=cte)$

اثبات: فرض کنیم $a<x<b$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. بنا به فرض تابع f روی بازهٔ $[a,x]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,x[$ مشتق‌پذیر است، طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $a<c<x$؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. بنا به فرض $f'(c)=0$، درنتیجه $f(x)-f(a)=0$؛ یعنی $f(x)=f(a)$. چون x دلخواه است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که f تابع ثابت است.

نتیجهٔ ۳: اگر توابع حقیقی f و g بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشند و برای هر $a<x<b$، داشته باشیم $f'(x)=g'(x)$، آن‌گاه $f(x)=g(x)+c$. (یعنی f و g با اختلاف یک مقدار ثابت c با یکدیگر مساوی هستند.)

اثبات: تابع جدید $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $h(x)=f(x)-g(x)$ در نظر می‌گیریم. تابع h بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و برای هر $a<x<b$، $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$. بنابراین، طبق نتیجهٔ ۲، h یک تابع ثابت است؛ یعنی عدد ثابت c هست؛ به‌طوری که $h(x)=c$، درنتیجه، $f(x)-g(x)=c$ یا $f(x)=g(x)+c$.

مثال ۲۲: برای توابع زیر روی بازه‌های داده شده، شرایط قضیهٔ مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقطه یا نقاط c مذکور در قضیه را بیابید.

الف) $f(x)=\sin x+\frac{x}{2}$ روی $[-\pi,\pi]$.

حل: تابع f روی بازهٔ $[-\pi,\pi]$ مشتق‌پذیر است. طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $-\pi<c<\pi$؛ به‌طوری که $f'(c)=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi+\pi}$ یا $f'(c)=\frac{1}{2}$.

$$f(x)=\sin x+\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}$$

$$f'(c)=\cos c+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos c=0$$

$$\Rightarrow c=-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}$$

ب) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ روی بازهٔ $[-1,1]$.

حل: تابع f در نقطه‌ای به طول $x=0$ از این بازه پیوسته است؛ ولی مشتق‌پذیر نیست. در صورتی که اگر قرار دهیم: $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1+1}$ یا $f'(c)=1$، آن‌گاه داریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=1 \Rightarrow \sqrt[3]{c^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{1}{27} \Rightarrow c=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{3}}{9}$$

یعنی شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست. درصورتی که نقطهٔ c مذکور در قضیه وجود دارد.

ج) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی بازهٔ $[-1,1]$.

حل: تابع f در نقطه‌ای به طول $x=0$ ناپیوسته است و اگر قرار دهیم: $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1+1}$ یا $f'(c)=1$، آن‌گاه داریم:

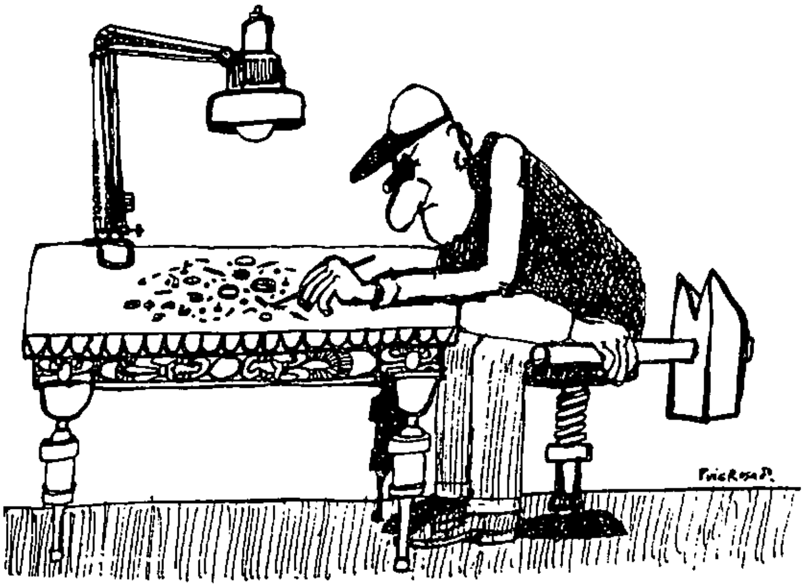
$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{-1}{c^2}=1 \Rightarrow c^2=-1 \qquad \text{(معادله ریشه ندارد)}$$

یعنی شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست و نقطهٔ c مذکور در قضیه نیز وجود ندارد.

جزء صحیح

(قسمت دوم)



● علی‌حسن‌زاده ماکویی

در شمارهٔ ۴ بهار ۷۷ مجلهٔ برهان (شمارهٔ ۲۴ مسلسل) در مورد جزء صحیح x یعنی $[x]$ (براکت x) مطالبی به اطلاع علاقه‌مندان رسید. اینک دنبالهٔ آن مطالب را با ذکر چند مثال، پی می‌گیرم.

الف: چند مثال در مورد معادله‌های براکتی

مجموعهٔ جواب معادله‌های زیر را تعیین کنید.

۱. $[۲x+۱]=-۲$

حل: $-۲\le ۲x+۱<-۱$ یا $-۳\le ۲x<-۲ \Rightarrow$

$\frac{-۳}{۲}\le x<-۱$ یا $x\in\left[\frac{-۳}{۲},\ -۱\right]$

۲. $|[۲x-۱]|=۲$

حل: $[۲x-۱]=۲\Rightarrow[۲x]-۱=۲\Rightarrow[۲x]=۳\Rightarrow\frac{۳}{۲}\le x<۲$ یا

$[۲x-۱]=-۲\Rightarrow[۲x]=-۱\Rightarrow-۱\le ۲x<۰$ یا $x\in\left[\frac{۳}{۲},\ ۲\right)$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{-۱}{۲},\ ۰\right)\Rightarrow$

مجموعهٔ جواب $x\in\left[-\frac{۱}{۲},\ ۰\right)\cup\left[\frac{۳}{۲},\ ۲\right)$

۳. $|[x-۲[x]]|=۲$

حل: $[x]\in z\Rightarrow|[x-۲[x]]|=|[x]-۲[x]|=|[x]|$

$=۲\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow x\in[۲,\ ۳)$ یا

$[x]=-۲$ یا $[-۲,\ -۱)\Rightarrow$

مجموعهٔ جواب $x\in[-۲,\ -۱)\cup[۲,\ ۳)$

۴. مجموع xهای متعلق به مجموعهٔ Z که در معادلهٔ $\left[\frac{x}{۳}-x+۱\right]=۱$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۴-

حل: گزینهٔ دوم صحیح است؛ زیرا:

$\left[\frac{x}{۳}-x+۱\right]=\left[-\frac{۲x}{۳}\right]+۱=۱$ یا $\left[\frac{-۲x}{۳}\right]=۰\Rightarrow$

$۰\le\frac{-۲x}{۳}<۱$ یا $\frac{-۳}{۲}<x\le۰,\ x\in\{-۱,\ ۰\},\ -۱+۰=-۱$

۵. مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[۲x-۱]+[۶+۲x]=۱$ کدام است؟

۱) $[-۲,\ ۱)$ ۲) $\left[\frac{-۳}{۲},\ \frac{۱}{۲}\right)$

۳) $[-۱, ۱)$ ۴) $\left[-۱, \frac{-۱}{۲}\right)$

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است ؛ زیرا :

$$[۲x]-۱+[۲x]+۶=۱ \text{ یا } ۲\times[۲x]=-۴$$

$$\Rightarrow -۲ \le ۲x < -۱ \Rightarrow x \in \left[-۱, -\frac{۱}{۲}\right)$$

۶. مجموعهٔ جواب معادلهٔ $\left[۱+\log_۲^x\right]+\left[۲+\log_۲^x\right]=۵$ کدام است؟

۱) $[۲, ۴)$ ۲) $\left[\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}\right)$

۳) $\left[\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}\right)$ ۴) $[۱, ۳)$

حل: گزینهٔ اوّل صحیح است ؛ زیرا :

$$۲\left[\log_۲^x\right]=۲ \text{ یا } \left[\log_۲^x\right]=۱ \Rightarrow \quad ۱ \le \log_۲^x < ۲$$

$$\Rightarrow ۲ \le x < ۴ \text{ یا } x \in [۲, ۴)$$

۷. مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\left[\frac{x}{۴}-۲\right]=۶$ در مجموعهٔ Z چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است ؛ زیرا :

$$\left[\frac{x}{۴}\right]=۸ \Rightarrow ۸ \le \frac{x}{۴} < ۹ \text{ یا } ۳۲ \le x < ۳۶, \ x \in z$$

$\Rightarrow$ (تعداد xهای صحیح) $n = ۳۶-۳۲=۴,$

$x \in \{۳۲, ۳۳, ۳۴, ۳۵\}$

۸. از مجموعه‌های زیر، کدام‌یک در معادلهٔ $\left|[۱-x]\right|=۳$ صدق می‌کند؟

۱) $(-۱, ۳]$ ۲) $(۲, ۳]$

۳) $(۳, ۴]$ ۴) هیچکدام

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است ؛ زیرا :

$$[۱-x]=۳ \text{ یا } ۳ \le ۱-x < ۴ \text{ یا } -۳ < x \le -۲$$

$$[۱-x]=-۳ \text{ یا } -۳ \le ۱-x < -۲ \text{ یا } ۳ < x \le ۴$$

۹. مجموعهٔ جواب معادلهٔ دترمینانی $\begin{vmatrix} [۱-۲x] & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۲$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{۱}{۲}, ۱\right)$ ۲) $\left(\frac{۱}{۲}, ۱\right]$

۳) $[۱, ۲)$ ۴) $(۱, ۲]$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است ؛ زیرا :

$$۲\times[۱-۲x]-۱\times۰=-۲ \text{ یا } [-۲x]=-۲$$

$$\Rightarrow -۲ \le -۲x < -۱ \Rightarrow x \in \left(\frac{۱}{۲}, ۱\right]$$

۱۰. اگر $f(x)=\begin{vmatrix} \left[x+\frac{۴}{۳}\right] & \left[x-\frac{۷}{۳}\right] \\ -۲x+۱ & ۳ \end{vmatrix}$، آن‌گاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) −۱۲

حل: گزینهٔ اوّل صحیح است.

$$f(x)=۳\times\left[x+\frac{۴}{۳}\right]-(۱-۲x)\times\left[x-\frac{۷}{۲}\right]$$

$$\Rightarrow f(۳)=۳\times\left[\frac{۱۳}{۳}\right]-(-۵)\left[-\frac{۱}{۲}\right]=۳\times۴+۵\times-۱=۷$$

۱۱. در تساوی $\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۳ & ۲[x] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۳ & [x+۱] \end{bmatrix}$ مجموعهٔ جواب x کدام است؟

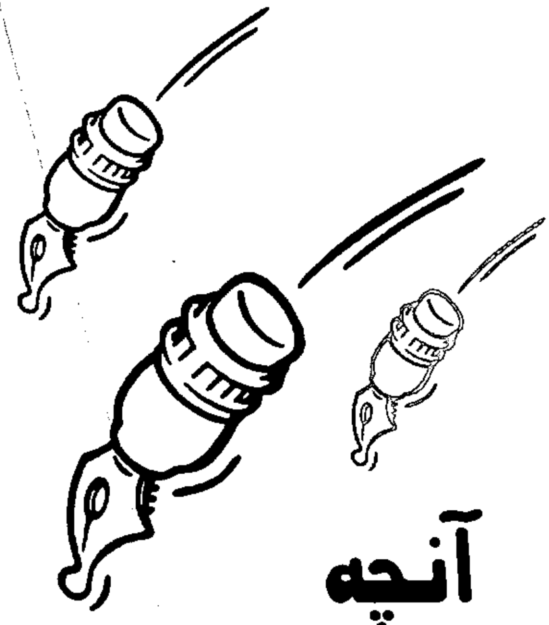
۱) $[۱, ۰)$ ۲) $[۱, ۲)$

۳) $[-۲, -۱)$ ۴) $[-۱, ۰)$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$$[x+۱]=۲[x] \text{ یا } [x]+۱=۲[x] \text{ یا } [x]=۱$$

$$\Rightarrow ۱ \le x < ۲ \text{ یا } x \in [۱, ۲)$$



آنچه از دوست رسد ...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان

دوستان گرامی! هر روز، نامه‌های پُرمحتوا و مقاله‌ها و مسأله‌های شما در دفتر مجلّه به دستمان می‌رسد. از این که مجلّه را با دقت و حوصله مطالعه می کنید و پیشنهادها و انتقادهای سازندهٔ خود را برای ما ارسال می کنید، بسیار سپاسگزاریم. از همگی شما عزیزان تقاضا داریم که با ارائهٔ نقطه‌نظرها و طرحهای خود، ما را در هرچه کاملتر شدن و بهتر شدن مجلّهٔ خودتان، یاری فرمایید. در شماره‌های ۲۹ و ۳۰ مسائل کتابهای ریاضی دورهٔ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی را با حلّ تشریحی و در شماره‌های ۳۱ و ۳۲ پرسشهای چهارگزینه‌ای این کتابها را با حلّ تشریحی ملاحظه خواهید کرد. لازم به تذکر است که از این به بعد، پاسخ مسائل و پرسشهای چهارگزینه را به شمارهٔ بعد، ارجاع نمی‌دهیم و آنها را یک جا به چاپ می‌رسانیم.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجلّه ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان : علی فدایی (بندرعباس)، کامران مرادی (کرمانشاه)، کاوه شهیم (کرج)، مسعود امیرکبیری (تبریز)، مجید علی‌مدد (تهران)، مصطفی فولادوند (مشهد مقدس)، مصطفی فولادکاد (مشهد مقدس)، وحید طاهری (تبریز)، پیروز رفیعی (تهران)، محمود قلی‌پور (رودسر)، همکار محترم جناب آقای ابراهیم رضایی (بهشهر)، آرش دبیرزاده (اصفهان)، بهروز بایرامی (آذربایجان غربی)، سیدمصطفی صفوی (تهران)، محمدحسین دائمی (بهشهر)، علی سقائیان (مشهد مقدس) و خانم‌ها : حمیده ابوالقاسمی (تهران)، آسیه جعفری (بجنورد)، سعیده بخشی (شیراز).

از همهٔ شما عزیزان به پاس ارسال مقاله و مسائل همراه با حل سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجلّه استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریّه، چاپ خواهیم کرد.

همکار محترم جناب آقای قاسم علیپور از پیشنهادات سازندهٔ شما سپاسگزاریم، ان‌شاءا.. از این پیشنهادها جهت کاملتر شدن مجلّه، استفاده خواهیم کرد.

آقای مجتبی دلیری (مشهد مقدس) ؛ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{۲}$ است، که داریم : $\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$ و فرمول شما با فرض این که $\alpha=\frac{n}{۲}-۱$ و $\beta=\frac{n}{۲}$ ، می‌توان به فرمول بالا رسید :

$$n\times(\frac{n}{۲}-۱)+\frac{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$$

و این فرمول ساده‌تری است.

آقای پیمان علیجانی (رامسر) ؛ قضیهٔ زیر را می‌توان بدون استفاده از استقرای ریاضی و ساده‌تر اثبات کرد :

قضیه: فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و $a\in\mathbb{Z}-\{۰,۱\}$ ، آن‌گاه $a^n\overset{a-۱}{\equiv}۱$.

می‌دانیم که : $q\in\mathbb{Z}$ ؛ $a^n-۱=(a-۱)\times q$.

بنابراین داریم :

$(a-۱)|a^n-۱ \Rightarrow a^n \overset{a-۱}{\equiv} ۱$

آقای رضا خواجوی‌نیا (اصفهان) ؛ در برهان ۲۸ دبیرستان مقالهٔ «تفکر الگوریتمی، هنر برنامه‌نویسی»، نوشتهٔ آقای عبدالحسین مصحفی آمده است، که تقریباً منطبق با مقاله‌ای که جنابعالی ارسال کرده‌اید، می‌باشد.

آقای محمدحسین دائمی (بهشهر) ؛ امتناع تثلیث زاویه به کمک خط‌کش غیر مدرّج و پرگار، ثابت شده است.

آقای کمال ظاهری (سردشت) ؛ از آن‌جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند، مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به ریاضی قرار گیرد، بنابراین، یکی از آنها را در زیر می‌آوریم :

مسأله. عبارت $۳۲^x+۲^x+۱$ را تجزیه کنید.

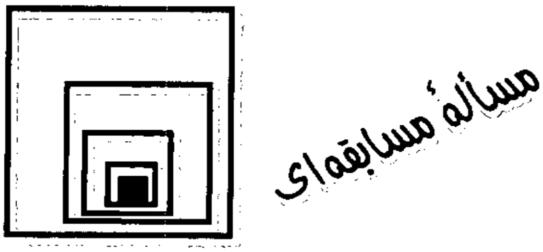
$$۳۲^x+۲^x+۱=(۲^x)^۵+۲^x+۱$$

با فرض $y=۲^x$ ، داریم :

$$\begin{aligned} y^۵+y+۱ &= y^۵+y+۱+y^۲-y^۲=(y^۵-y^۲)+(y^۲+y+۱) \\ &= y^۲(y^۳-۱)+(y^۲+y+۱) \\ &= (y^۲+y+۱)\left[y^۲(y-۱)+۱\right] \\ &= (y^۲+y+۱)(y^۳-y^۲+۱) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم :

$$\begin{aligned} ۳۲^x+۲^x+۱ &= \left[(۲^x)^۲+۲^x+۱\right]\left[(۲^x)^۳-(۲^x)^۲+۱\right] \\ &= (۴^x+۲^x+۱)(۸^x-۴^x+۱) \end{aligned}$$



باقیمانده تقسیم عدد زیر را بر ۵ به دست آورید :

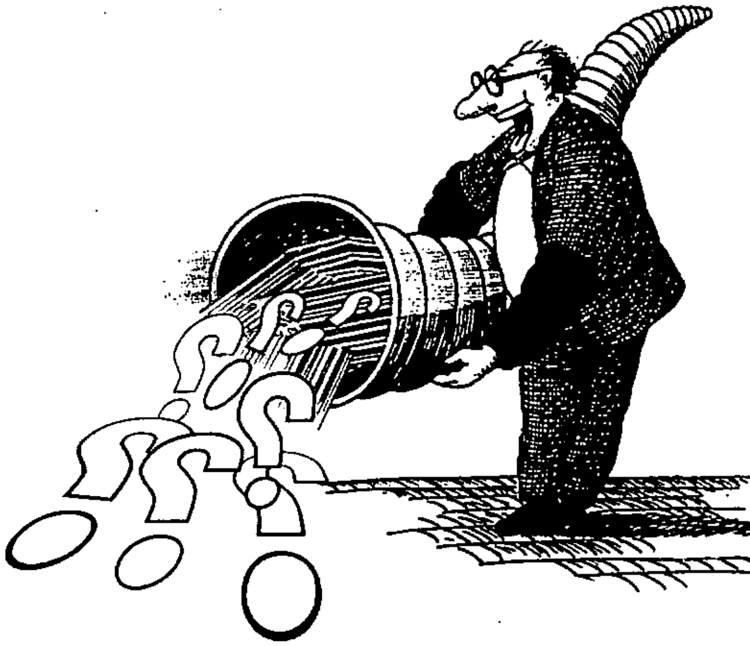
$$S=۱^n+۲^n+۳^n+۴^n+۵^n+۶^n+۷^n+۸^n$$



در اواخر قرن نوزدهم، هنگامی که جمعی بنای عظیم ریاضی را تکمیل می‌کردند، جمع دیگری درصدد بودند اساس آن را بکلّی تغییر دهند ؛ زیرا این علم نیز از حمله و هجوم عاملان خرابی و نابودی برکنار نمانده بود.

دانشمندان ریاضی، از اوایل قرن نوزدهم، بدون ملاحظه پیش‌رفته و نتایج بسیاری گرد آورده بودند. آن‌گاه از زمان کوشی به بعد، جانشینان ایشان شروع به دقت در نتایج سابق‌الذکر کردند. بدیهی‌ترین مفاهیم را با نهایت عدم اطمینان مورد موشکافی دقیق قرار دادند و ادراکاتی را که فقط حاصل مکاشفه بود، از زیر ذرّه‌بین انتقاد و امتحان گذراندند. اصول موضوع و متعارفی را تجزیه و تحلیل کامل کردند و آنها را تا قلمرو اعداد خالص پیش بردند، و به این ترتیب، ملاحظه کردند بسیاری از مفاهیم که واضح و مبرهن فرض می‌شوند، متّکی بر شهرتهای غلط گذشته‌اند و بنای باعظمت هندسه و آنالیز، در بسیاری از نقاط، متّکی بر فن است و درنتیجه، لازم دیدند آن را از نو بنیاد نهند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو - حسن صفّاری



مسائل برای حل

□ احمد قندهاری
□ محمد هاشم رستمی
□ حمید رضا امیری
□ میرشهرام صدر
□ سید محمدرضا هاشمی موسوی

❖ ریاضیات ۱

۱. در صورتی که مجموعه‌های A، B و M (مرجع) به صورت زیر باشند:

$A=\{۲,۴,۶,۸\}\ ,\ B=\{۳,۴,۶,۸\}\ ,\ M=\{۱,۲,۳,...,۹\}$

حاصل هر یک از عبارتهای $A\cap B$، $A\cup B$، $A-B$ و $A\cap B'$ را بیابید و نشان دهید و درستی برابری $A-B=A\cap B'$ را تحقیق کنید.

۲. از رابطهٔ زیر، مقدار عددی x را بیابید.

$۵^{x+۲}=۲۰\times ۵^x+۵\times ۵^۲\times ۵^۳\times ۵^۴\times ۵^۵$

۳. بین $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ چهار عدد گویا بنویسید.

۴. اگر $A=x^۲-x+۳$، $B=x+۲$ و $C=۳(x-۱)^۲$، حاصل $A-B+C$ را بیابید.

۵. باقیماندهٔ تقسیم $(۸x^۲-۴+۲x^۳+۶x):(x-۲)$ را بیابید.

۶. حاصل عبارتهای زیر را بیابید:

۱) $p=(x+۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)(x^۸+۱)$

۲) $q=(x+y+z)\left[(x+y)^۲+z^۲-xz-yz\right]$

۷. عبارتهای زیر را تجزیه کنید:

۱) $a^۳b^۲(a^۲+b)+a^۳b^۳+a^۲b^۵$

۲) $x^۵-x^۴+x^۳-x^۲-x+۱$

۸. بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عبارت $a^۴+a^۳+a^۲b+ab$ و $a^۳+۳a^۲+۲a$ را بیابید.

۹. اگر $a+b=۱$ و $ab=-۱$، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

۱) $p=(a^۳+b^۳)(a^۲+b^۲)$

۲) $q=(a-b)^۴$

۱۰. کسرهای زیر را ساده کنید. $(x \notin \{-1,0,1\})$

۱) $A=\dfrac{-x^2+2x-1}{1-x^2}$

۲) $B=\dfrac{(x^3-1)^2(x+1)^2x^4}{(x^4-x^2)^2}$

❖ ریاضیات ۳

۱. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}<2$ را بیابید.

۲. بـه ازای چـه مـقـادیـری از m عـبـارت: $p=(m^2-1)x^2-2mx-1$ ، همیشه منفی است؟

۳. معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\dfrac{x^3-x^2-x}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x}{x-1}$

۲) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{6x-3}=1$

۴. حاصل عبارتهای زیر را بیابید و گنگ یا گویا بودن هر یک را مشخص کنید.

۱) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$

۲) $(8-2\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{1304}\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{1306}$

۵. نمودار تابع با قانون زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & x\ge 1\\ x-1 & x<1\end{cases}$$

۶. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{18-2x^2}$ را بیابید.

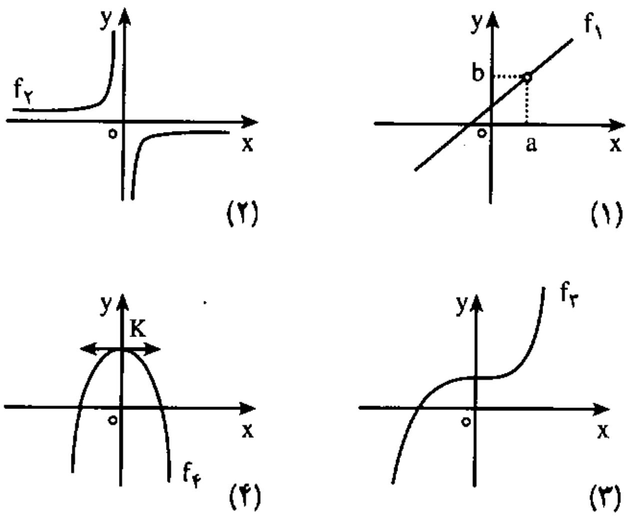
۷. در تابع با قانون زیر، اگر $f(-1)=2$ و $f(1)=-1$ ، حاصل $f[f(2)]$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & x\ge 1\\ ax+b+2 & x<1\end{cases}$$

۸. ابتدا $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را برای تابع با ضابطهٔ $y=f(x)=x^3-4$ محاسبه کرده و سپس با صرف نظر از جمله‌های شامل Δx ، صعودی یا نزولی بودن تابع f را مشخص کنید.

۹. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که قرینهٔ نقطهٔ $A(p+2,4q)$ نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(3,-8)$ باشد.

۱۰. تعیین کنید از نمودارهای زیر، کدام یک تابع پوشا در IR را نشان می‌دهد؟ (با ذکر دلیل)



۱۱. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

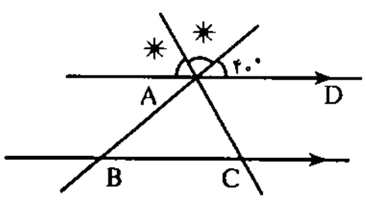
$$\log 2x+\log(2x+1)=\log\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\log 2$$

۱۲. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را بیابید.

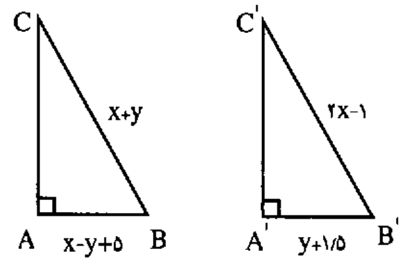
$$\log\frac{x+2}{3}>-1$$

❖ هندسه ۱

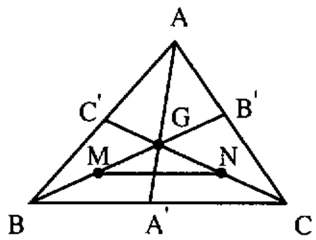
۱. در شکل پیکانهای همجهت خطهای موازی و علامت * زاویه‌های همنهشت را نشان می‌دهند. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را بیابید.



۲. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ و $A'B'C'$ $(\hat{A'}=90^\circ)$، $A'B' \cong AB$ است. اندازهٔ x و y را بیابید.

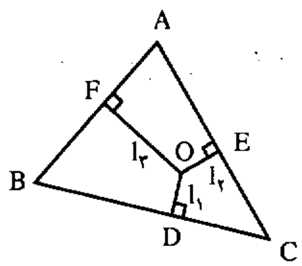


۳. G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC است. اگر نقطه‌های M و N بترتیب، وسطهای GB و GC باشند، نسبت مساحت مثلث GMN به مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



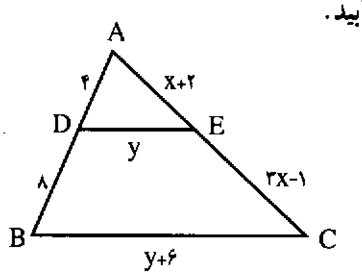
۴. مربعی معادل مستطیلی است که نسبت طول به عرضش، برابر ۵ است؛ اگر قطر این مستطیل برابر $2\sqrt{13}$ باشد، اندازهٔ ضلع مربع را بیابید.

۵. فاصلهٔ نقطهٔ O واقع در درون مثلث ABC از سه ضلع BC، AC و AB را بترتیب l_1، l_2 و l_3 می‌نامیم. ثابت کنید:



$$\frac{l_1}{h_a}+\frac{l_2}{h_b}+\frac{l_3}{h_c}=1$$

۶. در مثلث ABC، $DE \parallel BC$ است. با توجه به شکل، اندازهٔ x و y را بیابید.



۷. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند. اگر $\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{3}{4}$ باشد، نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید (ضلعهای AB، AC و BC بترتیب متناظر ضلعهای $A'B'$، $A'C'$ و $B'C'$ می‌باشند).

۸. قاعدهٔ یک متوازی‌السطوح مایل لوزی به قطرهای ۲۴ و ۱۰ سانتیمتر است. اندازهٔ هر یال جانبی آن ۴۰ سانتیمتر و زاویهٔ هر یال با صفحهٔ قاعده ۶۰ درجه است. اندازهٔ حجم این متوازی‌السطوح را بیابید.

❖ ریاضی ۵

۱. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R}, x>-2\}$،

$B=\{x|x\in\mathbb{R}, -3<x<5\}$ و $C=\{x|x\in\mathbb{R}, x<-3\}$

باشد، بازه‌های $A\cup B\cup C$ و $(A\cap C)\cup B$ را مشخص کنید.

۲. دو تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+2}$ و $g(x)=2x^2+x+1$ داده شده‌اند. اندازهٔ a و b را چنان بیابید که نمودار تغییرات این دو تابع در دو نقطه به طولهای ۰ و ۱– متقاطع باشند.

۳. دامنهٔ تعریف هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\log_{x-2}(9-x^2)$

ب) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{3-x}$

۴. اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد:

الف. دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ را با استفاده از تعریف، به دست آورید.

ب. ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ را بیابید.

پ. اندازهٔ $(fog)(4)$ را تعیین کنید.

۵. اگر $f\left(\frac{x+۱}{x-۲}\right)=\sqrt{\frac{۳}{x-۲}}$ باشد، $\lim_{x\to ۵} f(x)$ را محاسبه کنید.

۶. حدّ هر یک از تابعهای زیر را به ازای مقدار داده شده، به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳+۵x^۲+۸x+۴}{x^۴+۴x^۳+۳x^۲-۴x-۴}$

ب) $\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-} \frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{۱+\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})}$

پ) $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۷}-۳}{۲x-۴}$

۷. اندازهٔ a و b را چنان بیابید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+b\ , & x>۳ \\ ۲x+a\ , & x<۳ \\ ۴\ , & x=۳ \end{cases}$$

در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته باشد.

۸. مشتق هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=(x^۲+x)^۳(\sqrt{x}+۱)^۲$

ب) $f(x)=\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})\cos x^۲$

۹. جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^۳+۳x^۲$ را رسم کنید.

۱۰. آهنگ تغییرات نسبی حجم و سطح کل مکعب مستطیل به ابعاد x، $x+۱$ و $x-۱$ را وقتی x از ۲ تا ۲/۵ تغییر کند، تعیین کنید. همچنین آهنگ تغییرات آنی حجم و سطح کل این مکعب مستطیل را در $x=۴$ به دست آورید.

❖ حسابان ۱

۱. دو تابع به معادله‌های $y^۲-۲xy+۲x^۲-۲=۰$ مفروضند. دامنه و برد هر یک را بیابید.

۲. اگر $f(x)=x^۲-۳x+۱$ و $g(x)=-۲x+۱$، a را چنان بیابید تا داشته باشیم $f(g(a))=g(f(a))$

۳. صفرهای تابع به معادلهٔ $f(x)=x^۲\cos^۲\alpha-x+\sin^۲\alpha$

را بیابید.

۴. اگر باقیماندهٔ تقسیم f(x) بر $۳-۲x$ و $x+۱$ به ترتیب ۱ و ۴- باشد، باقیماندهٔ تقسیم f(x) را بر $۲x^۲-x-۳$ بیابید.

۵. تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$ مفروض است. اولاً ثابت کنید f در IR یک به یک است، ثانیاً ثابت کنید:

$$f^{-۱}(f(x))=f\left(f^{-۱}(x)\right)$$

۶. ثابت کنید:

$$\frac{\sin x+\sin ۷x+\sin ۱۳x}{\cos x+\cos ۷x+\cos ۱۳x}=\tan ۷x\left(x\neq\frac{k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۹}\right)$$

۷. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos x}{۱-\sin x}$

ب) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲-۴x}+x-۱)$

۸. ثابت کنید اگر $f(x)=\sin ۲x$، آنگاه $f'(x_۰)=۲\cos ۲x_۰$.

۹. تابع به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، $(b<۰)$ مفروض است. a، b و c را چنان بیابید تا منحنی تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و ۱- مقدار می‌نیمم تابع باشد و منحنی تابع بر خط به معادلهٔ $y=۲x-۶$ مماس باشد.

۱۰. جدول تغییرات و منحنیهای دو تابع به معادله‌های $y_۱=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}$ و $y_۲=x^۲-۲x-۳$ را در یک صفحهٔ محورهای مختصات رسم کنید.

❖ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. ثابت کنید قرینهٔ قرینهٔ هر عدد حقیقی، خود آن حقیقی است؛ یعنی: $-(-x)=x$ (اگر $x\in IR$).

۲. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ که در آن $a_۱=\sqrt{۳}$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۳+۲a_n}$ همگرا است.

۳. اگر $\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n-۱}{۲n+۳}=\frac{۱}{۲}\right.$، $n\in N$، از کدام مرتبه به بعد

. $\left|\frac{n-1}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{440}$

۴. نوع سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1})$ را با اثبات کامل مشخص کنید.

۵. حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-3}}{2^{3k-2}}$ را بیابید.

۶. ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin\frac{1}{x-4}$، در $x=4$ حد ندارد.

۷. تابع به معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases}2\lfloor 2\sin x\rfloor+a & x>\frac{\pi}{3}\\ b\left\lfloor x-\frac{\pi}{3}\right\rfloor & x<\frac{\pi}{3}\\ \lfloor 3\cos x-\sqrt{3}\rfloor+2 & x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

در $x=\frac{\pi}{3}$ پیوسته است. a و b را بیابید.

۸. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^4-4x & x>1\\ bx^2+1 & x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

۹. اگر $f(x)=x^3+x$، آنگاه $(f^{-1})'(2)$ را بیابید.

۱۰. استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتیمتر و ارتفاع ۲۰ سانتیمتر مفروض است. اگر ارتفاع استوانه با سرعت $\frac{2}{5}$ سانتیمتر در ثانیه افزایش و حجم استوانه با سرعت 120π سانتیمتر مکعب در ثانیه کاهش یابد، شعاع قاعده با چه سرعتی تغییر می‌کند.

❖ هندسه تحلیلی پیش دانشگاهی

۱. بردار $a=(4,3,2)$ را به دو مؤلفه در راستاهای دو بردار $b=(-2,1,2)$ و $c=(5,0,-2)$ تجزیه کرده‌ایم. این دو مؤلفه را مشخص کنید.

۲. بردارهای $a=(3,-4,2)$ و $b=(-2,2,5)$ داده شده‌اند.

الف. حاصلضرب درونی این دو بردار را تعیین کنید.

ب. زاویهٔ بین این دو بردار را به دست آورید.

پ. اندازهٔ جبری تصویر بردار $a-b$ روی بردار $a+b$ را بیابید.

ت. $|a\times b|$ را تعیین کنید.

۳. معادله‌های پارامتری خطی را بنویسید که از نقطهٔ برخورد دو خط $D_1:\frac{x-2}{2}=y-1=\frac{z+3}{-3}$ و $D_2:\begin{cases}x=3t\\ y=t\\ z=-2t\end{cases}$ موازی بردار $v=2i+3j-k$ رسم می‌شود.

۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ برخورد صفحهٔ $P: 2x-y-z+2=0$ با محور zها به موازات دو بردار $v_1=3i+j-2k$ و $v_2=-i+2j+k$ رسم می‌شود.

۵. خط $D:\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x-y=3\end{cases}$ و نقطهٔ $M=(1,2,0)$ داده شده‌اند.

الف. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ M بر خط D عمود رسم می‌شود. (این صفحه را P می‌نامیم.)

ب. مختصات H نقطهٔ برخورد صفحهٔ P با خط D را تعیین کنید.

پ. طول پاره خط MH را به دست آورید.

با استفاده از مسألهٔ بالا یک روش کلی برای تعیین فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در فضا بیان کنید.

❖ جبر خطی پیش دانشگاهی

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&-1&0\\3&5&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\2&3&2\end{bmatrix}$ ثابت کنید $|A^TB^2|=24$.

۲. بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

۳. اگر $A^3-3A^2+4A-I=\bar{0}$ در این صورت ثابت کنید

A وارون‌پذیر است و وارون آن را (بر حسب A) بیابید.

۴. ثابت کنید مجموعهٔ $K=\{(x,y,z)|2x+z=0\}$ یک زیر فضای برداری $\mathbb{R}^3$ است.

۵. معادلهٔ دوران یافتهٔ دایره به معادلهٔ $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ را حول مبدأ و به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ بیابید.

۶. اگر f نگاشتی خطی و داشته باشیم $f(1,2)=(1,1,2)$ و $f(0,1)=(0,1,-1)$ در این صورت حاصل $f(2,4)$ را بیابید.

۷. آیا نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x,2y,y+z)$ پوشا است؟ چرا؟

۸. نگاشت خطی ص $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x-y,2y+z)$ مفروض است، هستهٔ f و بُعد آن را تعیین کنید.

۹. نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(5x-2y,4x-y)$ مفروض است. مقادیر ویژهٔ این نگاشت و بردارهای متناظر با آنها را بیابید.

❖ ریاضی عمومی ۱ (تجربی) پیش دانشگاهی

۱. فرض کنید برای طول قدّ ۲۰ دانش‌آموز دبیرستانی، داده‌های زیر به‌دست آمده باشد:

۱۵۵, ۱۶۸ , ۱۵۴/۵ , ۱۷۲/۵ , ۱۶۲/۵ , ۱۵۱ , ۱۴۸/۵
۱۶۶ , ۱۶۷ , ۱۵۸/۵ , ۱۵۸ , ۱۷۰, ۱۶۷, ۱۵۶/۵
۱۵۲ , ۱۷۱ , ۱۶۹ , ۱۶۳/۵ , ۱۴۷/۵ , ۱۷۰

الف . جدول فراوانی داده‌های بالا را تشکیل دهید.

ب . میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات داده‌های بالا را به‌دست آورید.

ج . چند بر فراوانی و نمودار دایره‌ای را برای نمونهٔ بالا، رسم کنید.

۲. کیسه‌ای محتوی ۷ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سبز است. از این کیسه به تصادف ۱ مهره، خارج می‌کنیم. سپس دوباره بدون جایگذاری مهرهٔ اوّل، مهرهٔ دیگری به تصادف، از کیسه خارج می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که هر دو مهره، قرمز باشند.

۳. احتمال درمان یک بیماری، با دارویی خاص برابر ۰/۷ است. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که از ۸ نفر بیماری که این دارو را استفاده می‌کنند، ۶ نفر درمان شوند.

۴. با استفاده از اصل استقرای ریاضی؛ برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$3^1+3^2+3^3+\dots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

۵. اگر مجموع ضرایب بسط دو جمله‌ای $(\sqrt[7]{x^6}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}})^n$ ۹۹۲ واحد کمتر از مجموع ضریبهای بسط $(\sqrt[9]{x}+\sqrt[7]{x})^{2n}$ باشد، مقدار n را بیابید.

۶. مقدار m را چنان تعیین کنید، که دو خط به معادله‌های $y=mx+4$ و $y-2x=6$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم یکدیگر را قطع کنند.

۷. نمودار سهمی $y=x^2-2x-2$ را رسم کنید و با استفاده از آن، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|x^2-2x-2|$ را رسم کنید.

۸. معادله‌های زیر را در $\mathbb{R}$ حل کنید.

الف) $(125^x)^{x+2}-\frac{1}{25}=0$

ب) $\log(2x+5)+\log x=\log 6-\log 2$

۹. بررسی کنید که، آیا دنبالهٔ $\{u_n\}$ با جملهٔ عمومی $u_n=\frac{3n^3+9n^2+9n}{(n+1)^3}$ صعودی است یا نزولی؟ سپس بررسی کنید که، دنبالهٔ $\{u_n\}$ از بالا کراندار است یا از پایین کراندار؟

۱۰. برای جلوگیری از آلودگی هوا به‌طور معمول، به بنزین موادی اضافه می‌کنند تا رفع آلودگی کند و این مواد، با قانون $p(t)=p_0(0/8)^t$ رو به زوال می‌رود، در چه زمانی مادهٔ افزوده شده به سوخت به ربع مقدار اوّلیهٔ خود می‌رسد.

۱۱. همهٔ مجانبهای منحنی، به معادلهٔ $y=\frac{x^4+2x^3-1}{2x^3-3x^2+x}$ را به‌دست آورید.

❖ ریاضی پایهٔ پیش دانشگاهی

۱. آیا حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

حاصلضرب دو عدد گنگ چه‌طور؟

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع دو عدد گویا، همواره یک عدد گویا است؟

۳. با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

(الف $\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$=\frac{n}{3n+1}$$

(ب $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

۴ـ توپی را از ارتفاع ۱۶ متری رها می‌کنیم. اگر این توپ، پس از هربار برخورد با زمین، $\frac{1}{2}$ بار قبلی به بالا بیاید:

الف . دنبالهٔ حاصل از پایین آمدن توپ را بنویسید.

ب . این توپ در مجموع چند متر به پایین آمده است.

۵ـ اگر مجموع یازده جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی ۱۱۰ و مجموع هفت جملهٔ ابتدایی آن ۱۴ باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۶ـ در یک دنبالهٔ هندسی که چهار جمله دارد، مجموع دو جملهٔ اوّل ۱۹ و مجموع دو جملهٔ آخر ۷۶ است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۷ـ جملهٔ هشتم دنبالهٔ فیبوناتچی، جملهٔ چندم دنبالهٔ مثلثی است؟

۸ ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $\log_2(x^2-3x-1)=\frac{1}{3}\log^2_{\sqrt[2]{2}}$ را به‌دست آورید.

۹ـ با استفاده از قضیه‌های لگاریتم، عبارت $\log(\frac{a+2b}{a^2b^3})$ را به ساده‌ترین صورت، تبدیل کنید.

۱۰ـ یک شرکت تولیدی، پس از تحقیق و بررسی دربارهٔ یک کالای جدید در هفته، x واحد از این کالا را تولید می‌کند و به فروش می‌رساند. معادله‌های هزینه و تقاضای هفتگی به صورت زیر داده شده است:

معادلهٔ هزینه : $c(x)=72000+60x$

معادلهٔ تقاضا : $x=6000-30p$

الف . معادلهٔ درآمد این شرکت را به‌دست آورید.

ب . بیشترین درآمد این شرکت در هفته، چقدر است.

ج . چند واحد کالا در هفته، تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد.

۱۱ـ از ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها معیوب است، ۳ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که هیچ کدام از لامپها معیوب نباشند، چقدر است؟

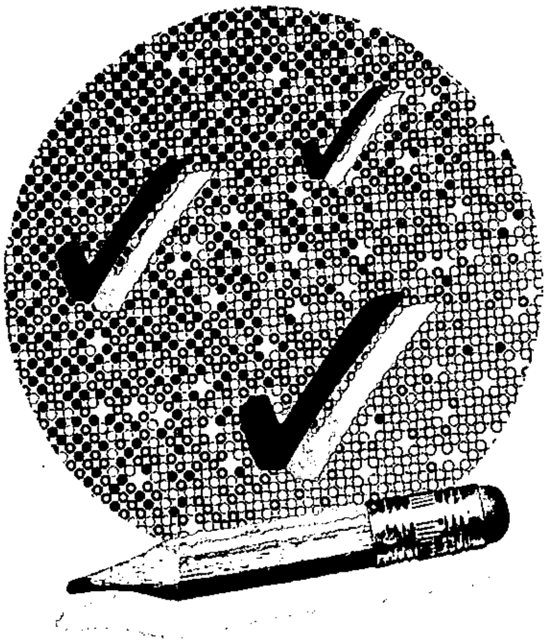
۱۲ـ سه افسر و پنج سرباز در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. احتمال آن که افسرها کنار هم باشند، چقدر است؟



داوید هیلبرت، به اتفاق تمام مورّخان معاصر، بزرگترین ریاضیدان نیمهٔ اوّل قرن بیستم و در عِداد بزرگترین ریاضیدانان تمام تاریخ بشر محسوب می‌شود. ابداعات این ریاضیدان نامی در تمام شعبه‌های ریاضی، اعمّ از جبر، هندسه، آنالیز، توپولوژی، حساب و غیره، آن‌قدر اساسی و مهم است که شاید تا صدها سال دیگر نیز ریاضیدانان، از گنجینه‌های آن بهره‌برداری کنند. متأسفانه این دانشمند نامی که یهودی هَم نبود، در ۸۱ سالگی به واسطهٔ زجر و شکنجهٔ عُمّال هیتلر، در یکی از اردوگاه‌های اسیران جنگی درگذشت؛ چرا که وی نیز قطعنامهٔ متعصّبان آلمانی را که اظهار می‌داشت «دانشی غیر از دانش آلمانی وجود ندارد» مانند اینشتاین و پلانک امضا نکرده بود.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفّاری

حلّ مسائل برهان ۳۹



ریاضیات ۱

۱. $A=\{2,4,6,8\}\ ,\ B=\{3,4,6,8\}\ ,\ M=\{1,2,3,\dots,9\}$

$A\cap B=\{2,4,6,8\}\cap\{3,4,6,8\}=\{4,6,8\}$

$A\cup B=\{2,4,6,8\}\cup\{3,4,6,8\}=\{2,3,4,6,8\}$

$A-B=\{2,4,6,8\}-\{3,4,6,8\}=\{2\}$

$B'=\{1,2,5,7,9\}$

$A\cap B'=\{2,4,6,8\}\cap\{1,2,5,7,9\}=\{2\}$

بنابراین: $A-B=A\cap B'=\{2\}$

۲.

$5^{x+2}=20\times5^x+5\times5^2\times5^3\times5^4\times5^5$;

$5^2\times5^x=20\times5^x+5^{15}$

$25\times5^x-20\times5^x=5^{15}$;

$(25-20)5^x=5^{15}$;

$5\times5^x=5^{15}\ ;\ 5^{x+1}=5^{15}$;

$x+1=15\ ;\ x=14$

۳. $\frac{1+1}{3+4}=\frac{2}{7}\ ,\ \frac{1+2}{3+7}=\frac{3}{10}\ ,\ \frac{1+3}{3+10}=\frac{4}{13}\ ,\ \frac{1+4}{3+13}=\frac{5}{16}$

۴.

$A-B+C=x^2-x+3-(x+2)+3(x-1)^2$

$=x^2-x+3-x-2+3(x-1)^2$

$=x^2-2x+1+3(x-1)^2$

$=(x-1)^2+3(x-1)^2=4(x-1)^2=(2x-2)^2$

۵. روش اوّل (با استفاده از عمل تقسیم):

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+8x^2+6x-4 & -x+2 \\ \hline
-(2x^3-4x^2) & -2x^2-12x-30 \\
12x^2+6x-4 & \\
-(12x^2-24x) & \\
30x-4 & \\
-(30x-60) & \\
56 &
\end{array}
$$
(باقیمانده)

روش دوم (بدون استفاده از تقسیم). در این روش، کافی است حاصل عبارت مقسوم را به‌ازای ریشهٔ مقسوم‌علیه به دست آوریم:

باقیماندهٔ تقسیم: $2-x=0\ ;\ x=2$

(باقیمانده) $56=6(2)+2(2)^3-4+8(2)^2$

۶.

$1)\ p=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$;

$(x-1)p=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$;

$(x-1)p=(x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)$;

$(x-1)p=(x^8-1)(x^8+1)=x^{16}-1$

$p=\frac{x^{16}-1}{x-1}$

$2)\ q=(x+y+z)\left[(x+y)^2+z^2-z(x+y)\right]$

$=\left[(x+y)+z\right]\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]$

$=(x+y)^3+z^3\ ;\ q=(x+y)^3+z^3$

۷. $1)\ a^3b^2(a^2+b)+a^4b^4+a^2b^5$

$=a^3b^2(a^2+b)+a^2b^4(a^2+b)$

$=a^2b^2(a^2+b)(a+b^2)$

$2)\ x^5-x^4+x^3-x^2-x+1$

$=x^4(x-1)+x^2(x-1)-(x-1)$

$=(x-1)(x^4+x^2-1)$

۸. ابتدا دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$a^4+a^3+a^2b+ab$

$=a^3(a+1)+ab(a+1)$

$=a(a+1)(a^2+b)$

$a^3+3a^2+2a=a(a^2+3a+2)$

$=a\left[a^2+2a+a+2\right]$

$=a\left[a(a+2)+(a+2)\right]$

$=a(a+2)(a+1)$

ب.م.م $=a(a+1)=a^2+a$

ک.م.م $= a(a+۱)(a+۲)(a^{۲}+b)$

۹. ۱) $p=(a^{۳}+b^{۳})(a^{۲}+b^{۲})$

$=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})\left[(a+b)^{۲}-۲ab\right]$

$=(a+b)\left[(a+b)^{۲}-۳ab\right]\left[(a+b)^{۲}-۲ab\right]$

$a+b=۱\ ,\ ab=-۱:$

$p=(۱)\left[(۱)^{۲}-۳(-۱)\right]\left[(۱)^{۲}-۲(-۱)\right]$

$=۴\times ۳=۱۲$

$q=(a-b)^{۴}=\left[(a-b)^{۲}\right]^{۲}$

$=(a^{۲}-۲ab+b^{۲})^{۲}=\left[(a+b)^{۲}-۴ab\right]^{۲}$

$a+b=۱\ ,\ ab=-۱:$

$q=\left[(۱)^{۲}-۴(-۱)\right]^{۲}=۵^{۲}=۲۵$

۱۰.

۱) $A=\dfrac{-x^{۲}+۲x-۱}{۱-x^{۲}}=\dfrac{-(x^{۲}-۲x+۱)}{-(x^{۲}-۱)}$

$=\dfrac{(x-۱)^{۲}}{(x-۱)(x+۱)}$

$x\neq \pm ۱:\ A=\dfrac{x-۱}{x+۱}$

۲) $B=\dfrac{(x^{۳}-۱)^{۲}(x+۱)^{۲}x^{۴}}{(x^{۴}-x^{۲})^{۲}}$

$=\dfrac{\left[(x-۱)(x^{۲}+x+۱)\right]^{۲}(x+۱)^{۲}x^{۴}}{\left[x^{۲}(x-۱)(x+۱)\right]^{۲}}$

$=\dfrac{(x-۱)^{۲}(x^{۲}+x+۱)^{۲}(x+۱)^{۲}x^{۴}}{x^{۴}(x-۱)^{۲}(x+۱)^{۲}}$

$x\notin\{-۱,۰,۱\}:\ B=(x^{۲}+x+۱)^{۲}$

ریاضیات ۳

۱. $\dfrac{۲\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}>۲\ ;\ \dfrac{۲\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}-۲>۰\ ;$

$\dfrac{۲\sqrt{x}-۲\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}>۰\ ;\ \dfrac{۱}{\sqrt{x}-۱}>۰\ ;$

$\sqrt{x}-۱>۰\ ;\ \sqrt{x}>۱\ ;\ \boxed{x>۱}$

مجموعه‌جواب $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>۱\}$

۲. $p=(m^{۲}-۱)x^{۲}-۲mx-۱\ ,$

$\begin{cases}\Delta\le ۰\\ m^{۲}-۱<۰\end{cases}\Rightarrow p<۰$

$\Delta=۴m^{۲}+۴(m^{۲}-۱)=۴m^{۲}+۴m^{۲}-۴$

$=۸m^{۲}-۴\le ۰\ ;\ ۲m^{۲}-۱\le ۰$

$\begin{cases}۲m^{۲}-۱\le ۰\\ m^{۲}-۱<۰\end{cases}\ ;\ \begin{cases}m^{۲}\le \frac{۱}{۲}\\ m^{۲}<۱\end{cases}\ ;$

$\begin{cases}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le m\le \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ -۱<m<۱\end{cases}\ ;\ \boxed{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le m\le \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

۳. ۱) $\dfrac{x^{۳}-x^{۲}-x}{x^{۲}-۱}+\dfrac{۲x}{x+۱}=\dfrac{x}{x-۱}\ ;$

$\dfrac{x^{۳}-x^{۲}-x}{x^{۲}-۱}+\dfrac{۲x}{x+۱}-\dfrac{x}{x-۱}=۰\ ;$

$\dfrac{x^{۳}-x^{۲}-x+۲x(x-۱)-x(x+۱)}{x^{۲}-۱}=۰\ ;$

$\dfrac{x^{۳}-x^{۲}-x+۲x^{۲}-۲x-x^{۲}-x}{x^{۲}-۱}=۰\ ;$

$\dfrac{x^{۳}-۴x}{x^{۲}-۱}=۰\ ;\ x^{۳}-۴x=۰\ ;\ x(x^{۲}-۴)=۰\ ;$

$\boxed{x=۰}\ ;\ x^{۲}-۴=۰\ ;\ x^{۲}=۴\ ;\ \boxed{x=\pm ۲}$

مجموعه جوابهای معادله $=\{-۲,۰,۲\}$

۲) $\sqrt{۴x+۸}-\sqrt{۶x-۳}=۱\ ;$

$\sqrt{۴x+۸}=۱+\sqrt{۶x-۳}$

با فرض $۶x-۳>۰$ یا $x>\frac{۱}{۲}$ ؛ دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$۴x+۸=۱+۶x-۳+۲\sqrt{۶x-۳}\ ;$

$۱۰-۲x=۲\sqrt{۶x-۳}\ ;\ ۵-x=\sqrt{۶x-۳}$

با فرض $۵-x>۰$ یا $x<۵$ ؛ دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$\frac{۱}{۲}<x<۵\ :\ (۵-x)^{۲}=۶x-۳\ ;$

$۲۵-۱۰x+x^{۲}=۶x-۳\ ;$

$x^{۲}-۱۶x+۲۸=۰\ ;$

$(x-۲)(x-۱۴)=۰\ ;\ \boxed{x=۲}\ ;\ x=۱۴$

با توجه به شرط $\frac{۱}{۲}<x<۵$ ؛ فقط جواب $x=۲$ مورد قبول است و $x=۱۴$ ، ریشهٔ خارجی معادله است و مورد قبول نمی‌باشد.

۴. ۱) $\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}\times\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}$

$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}\times\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}$

$=\sqrt[۶]{۳-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}$

$=\sqrt[۶]{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}$

$=\sqrt[۶]{۹-۸}=\sqrt[۶]{۱}=۱$ (گویا)

۲) $(۸-۲\sqrt{۱۵})(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})^{۱۳۰۴}$

$\times(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})^{۱۳۰۶}$

$=(۸-۲\sqrt{۱۵})(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})^{۲}$

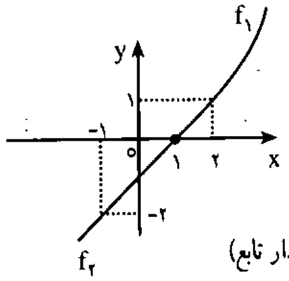
$\left[(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})\right]^{۱۳۰۴}$

$=(۸-۲\sqrt{۱۵})(۸+۲\sqrt{۱۵})(۲)^{۱۳۰۴}$

$=(۴)(۲^{۱۳۰۴})=۲^{۱۳۰۶}$ (گویا)

۵. $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲x+۱ & x\ge ۱\\ x-۱ & x<۱\end{cases}\ ;$

$f(x)=\begin{cases}(x-۱)^{۲} & x\ge ۱\\ x-۱ & x<۱\end{cases}$



(نمودار تابع)

$x\ge ۱\ :\ f_{۱}(x)=(x-۱)^{۲}$ (نیم‌سهمی)

x	۱	۲	۳	۴
y	۰	۱	۴	۹

$x<۱\ :\ f_{۲}(x)=x-۱$ (نیم‌خط)

x	۰	-۱	-۲
y	-۱	-۲	-۳

.۶ $f(x)=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{18-2x^2}$

$\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ 18-2x^2\geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x^2\geq 9 \\ x^2\leq 9 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2=9 \; ; \; x=\pm 3$

$D_f=\{-3,3\}$

.۷ $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & x\geq 1 \\ ax+b+2 & x<1 \end{cases}$

$f(-1)=a(-1)+b+2$

$=-a+b+2=2 \; ; \; a=b \;\; (1)$

$f(1)=a(1)^2+b=-1 \; ; \; a+b=-1 \;\; (2)$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) :

$a+a=-1 \; ; \; 2a=-1 \; ; \; \boxed{a=b=-\frac{1}{2}}$

پس : $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & x\geq 1 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x<1 \end{cases}$

$f(2)=-\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{2}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

$f[f(2)]=f(-\frac{5}{2})=-\frac{1}{2}(-\frac{5}{2})+\frac{3}{2}$

$=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{11}{4}$

.۸ $y=f(x)=x^3-4$,

$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3-4$

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$=(x+\Delta x)^3-4-(x^3-4)$

$=(x+\Delta x)^3-x^3=[(x+\Delta x)-x]$

$[(x+\Delta x)^2+x(x+\Delta x)+x^2]$

بنابراین :

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left[3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2\right]}{\Delta x}$

$=3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2$

با صرف‌نظر از Δx ، خواهیم داشت :

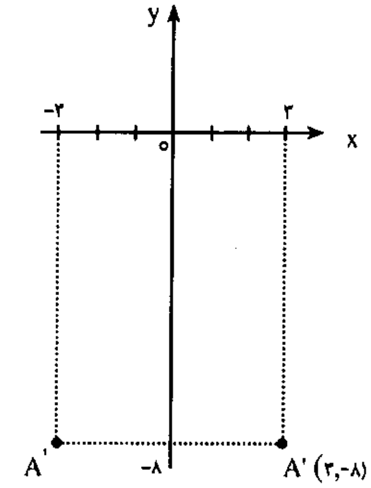
$\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx 3x^2>0$

چون به ازای هر x حقیقی، همیشه $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ ؛ در نتیجه، تابع صعودی است.

.۹ $A(p+2 \,,\, 4q) \;,\; A'(3,-8)$

$p+2=-3 \; ; \; \boxed{p=-5}$

$4q=-8 \; ; \; \boxed{q=-2}$



.۱۰ فقط نمودار (۳)، نمودار تابع پوشاست ؛ زیرا به ازای هر $y\in\mathbb{R}$ ، لااقل یک $x\in\mathbb{R}$ وجود دارد. همچنین اگر خطی موازی با محور xها را در امتداد منحنی، به‌طور فرضی حرکت دهیم، درهرحال، منحنی را لااقل در یک نقطه قطع خواهد کرد.

نمودار (۱) در نقطهٔ (a,b) منفصل است و برد آن $R_{f_1}=\mathbb{R}-\{b\}$ است.

نمودار (۲) نیز منفصل است و برد آن $R_{f_2}=\mathbb{R}-\{0\}$ است.

در نمودار (۳)، به ازای هر y>k ، هیچ x نظیری موجود نیست.

پس، چون برد تابع f_3 برابر $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی) است ؛ تابع f_3 در $\mathbb{R}$ پوشاست.

.۱۱

$\log 2x+\log(2x+1)=\log\sqrt[3]{2}+\frac{2}{3}\log 2$

$\log 2x(2x+1)=\log\sqrt[3]{2}+\log\sqrt[3]{4}$

$=\log\sqrt[3]{2\times 4}=\log\sqrt[3]{8}$

$\log(4x^2+2x)=\log 2$;

$4x^2+2x=2 \; ; \; 2x^2+x-1=0$;

$\Delta=1+8=9 \;,\; x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$;

$x_1=\frac{-4}{4}=-1 \; ; \; x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

چون $2x>0$ یا $x>0$ ؛ بنابراین فقط جواب $x=\frac{1}{2}$ ، مورد قبول است.

.۱۲

$\log\frac{x+2}{3}>-1 \; ; \; \log\frac{x+2}{3}>\log\frac{1}{10}$;

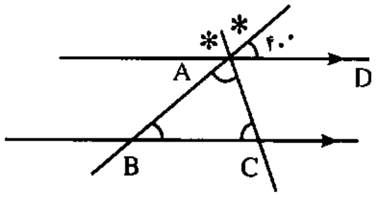
$\frac{x+2}{3}>\frac{1}{10} \; ; \; x>\frac{3}{10}-2$;

مجموعه جواب $=\{x\in\mathbb{R} | x>-1/7\}$

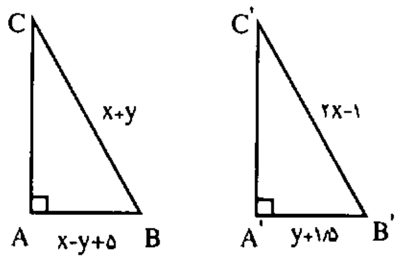
$\boxed{x>-1/7}$

هندسه ۱

۱. با توجه به این که AC نیمساز زاویهٔ BAD و AD∥BC است، زاویه‌های مثلث ABC برابرند با : $\hat{A}=70^\circ \;,\; \hat{B}=40^\circ \;,\; \hat{C}=70^\circ$



۲. دو مثلث قائم‌الزاویه، به دلیل برابری وتر و یک ضلع همنهشت می‌باشند ؛ یعنی :



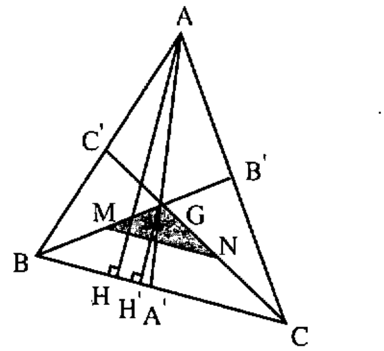
$\hat{A}=\hat{A}'=۹۰^\circ$, $BC=B'C'$, $AB=A'B'$

در نتیجه داریم :

$$\begin{cases}x+y=۲x-۱\\x-y+۵=y+۱/۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=-۱\\x-۲y=-۳/۵\end{cases}$$

$\Rightarrow x=۵/۵C$, $y=۴/۵$

۳. مساحت مثلث GBC یک سوم مساحت مثلث ABC است ؛ زیرا این دو مثلث در قاعدهٔ BC مشترکند و نسبت ارتفاعهای نظیر این ضلع مشترک در دو مثلث $GH':AH=۱:۳$ است (در مثلث قائم $AA'H$ ، $GH'\|AH$ است. بنابراین $GH':AH=GA':AA'=\frac{۱}{۳}$). از طرفی، مساحت مثلث GMNیک چهارم مساحت مثلث GBC است ؛ زیرا این دو مثلث متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۱}{۲}$ است.



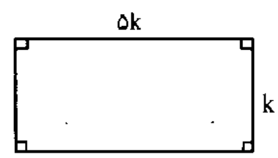
بنابراین مساحت مثلث GMN برابر $\frac{۱}{۱۲}$ مساحت مثلث ABCاست ؛ زیرا :

$S_{GBC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}$ (۱) ,

$S_{GMN}=\frac{۱}{۴}S_{GBC}$ (۲)

$(۱).(۲)\Rightarrow S_{GMN}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}S_{ABC}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}$

۴. عرض مستطیل را k فرض می کنیم، طول آن ۵k و از آن جا اندازهٔ قطرش برابر است با :



$d=\sqrt{k^۲+۲۵k^۲}=\sqrt{۲۶}k$, $d=۲\sqrt{۱۳}$

$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۳}=\sqrt{۲۶}k$

$۲=\sqrt{۲}k\Rightarrow k=\sqrt{۲}\Rightarrow$

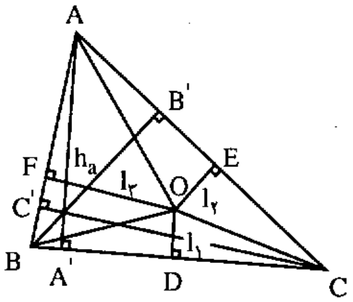
$۵\sqrt{۲}=$ طول و $\sqrt{۲}=$ عرض

عرض × طول = مساحت مستطیل $\Rightarrow$

$=\sqrt{۲}.۵\sqrt{۲}=۱۰$

$\sqrt{۱۰}=$ ضلع مربع $\Leftarrow S=۱۰$ مستطیل $=S$ مربع

۵. از O به A، B و C وصل می کنیم و ارتفاعهای AA' ، BB' و CC' را رسم می‌نماییم. برای دو مثلث OBC و ABCکه در قاعدهٔ BC مشترکند، داریم :



$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{OD}{AA'}=\frac{l_۱}{h_a}$ (۱)

به همین ترتیب، برای مثلثهایOAC و OAB داریم :

$\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}=\frac{l_۲}{h_b}$ (۲)

$\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{l_۳}{h_b}$ (۳)

از جمع کردن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم :

$$\frac{S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{l_۱}{h_a}+\frac{l_۲}{h_b}+\frac{l_۳}{h_c}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=۱=\frac{l_۱}{h_a}+\frac{l_۲}{h_b}+\frac{l_۳}{h_c}$$

$$\Rightarrow\frac{l_۱}{h_a}+\frac{l_۲}{h_b}+\frac{l_۳}{h_c}=۱$$

۶. از تشابه دو مثلث ADE و ABC داریم :

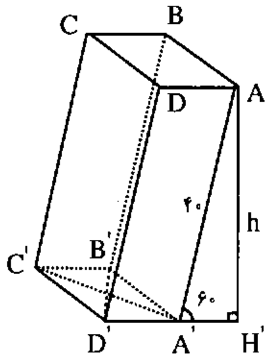
$\frac{۴}{۸}=\frac{x+۲}{۳x-۱}=\frac{y}{y+۶}\Rightarrow x=۵$, $y=۶$

۷. با توجه به تناظر ضلعهای دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ می‌توان نوشت :

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k\Rightarrow\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a}{a'}=k\Rightarrow$

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{S}{S'}=(\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۹}{۱۶}$

۸. ارتفاع متوازی السطوح برابر است با :



$h=۴۰\sin۶۰=۴۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲۰\sqrt{۳}$,

$S=\frac{۱}{۲}\times۲۴\times۱۰=۱۲۰cm^۲$ قاعدهٔمتوازی‌السطوح

از آن‌جا :

ارتفاع× سطح قاعده = حجم متوازی‌السطوح

$=۱۲۰\times۲۰\sqrt{۳}=۲۴۰۰\sqrt{۳}cm^۳$

ریاضیات ۵

۱. داریم : $A\cup B\cup C=R-\{-۳\}$

$(A\cup C)\cup B=B=]-۳,۵[$

۲. نقطه‌های برخورد دو منحنی$M(۰,۱)$ و $N(-۱,۲)$ است ؛ زیرا

$x=۰\to g(۰)=۲(۰)^۲+(۰)+۱=۱$

$x=-۱\to g(-۱)=۲(-۱)^۲+(-۱)+۱=۲$

از آن‌جا داریم :

$۱=\frac{a(۰)+b}{۰+۲}\Rightarrow b=۲$

$۲=\frac{a(-۱)+b}{-۱+۲}\Rightarrow -a+b=۲\Rightarrow a=۰$

۳. الف. با توجه به تعریف لگاریتم داریم :

$$\begin{cases}۹-x^{۲}>۰\\ x-۲>۰\\ x-۲\neq ۱\end{cases}\Rightarrow ۲<x<۳$$

ب. داریم :

$$\begin{cases}x-۲\geq ۰\\ ۳-x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow ۲\leq x\leq ۳$$

۴. الف. بنا به تعریف داریم :

$$D_{(gof)(x)}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$$

از آن‌جا :

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow D_f:R-\{۱\}, g(x)=\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow D_g:x\geq ۰$$

$$\Rightarrow D_{(gof)(x)}=\{x|x\in R-\{۱\}, \frac{x+۱}{x-۱}\geq ۰\}$$

$$\Rightarrow D_{(fog)(x)}=\{x|x\in R, x\leq -۱, x>۱\}$$

ب.

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{\frac{x+۱}{x-۲}}$$

پ.

$$g(۴)=\sqrt{۴}=۲, (fog)(۴)=f(۲)=\frac{۲+۱}{۲-۱}=۳$$

۵. داریم :

$$f(\frac{x+۱}{x-۲})=\sqrt{\frac{۳}{x-۲}},$$

$$\frac{x+۱}{x-۲}=t\Rightarrow tx-۲t=x+۱$$

$$\Rightarrow x(t-۱)=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}$$

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{۳}{\frac{۲t+۱}{t-۱}-۲}}$$

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{t-۱}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۱}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۵}f(x)=\lim_{x\to ۵}\sqrt{x-۱}=۲$$

۶. الف.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۳}+۵x^{۲}+۸x+۴}{x^{۴}+۴x^{۳}+۳x^{۲}-۴x-۴}=\frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۲}\frac{x^{۳}+۵x^{۲}+۸x+۴}{x^{۴}+۴x^{۳}+۳x^{۲}-۴x-۴}=$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x^{۲}+۳x+۲)}{(x+۲)(x^{۳}+۲x^{۲}-x-۲)}=$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۳x+۲}{x^{۳}+۲x^{۲}-x-۲}=\frac{۰}{۰}=$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x+۱)}{(x+۲)(x^{۲}-۱)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۱}{x^{۲}-۱}=\frac{-۱}{۳}$$

ب.

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-}\frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{۱+\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})}=\frac{۰}{۰}=$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-}\frac{۲\sin(x-\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۶})}{۲\cos^{۲}(x-\frac{\pi}{۶})}=$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{\cos(x-\frac{\pi}{۶})}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۷}-۳}{۲x-۴}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۷}-۳}{۲x-۴}=$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۷-۹}{۲(x-۲)(\sqrt{x+۷}+۳)}=$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲(\sqrt{x+۷}+۳)}=\frac{۱}{۱۲}$$

۷. می‌دانیم شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x=۳$ آن است که :

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}f(x)=f(۳)$$

بنابراین داریم :

$$\begin{cases}a(۳)^{۲}+b=۴\\ ۲(۳)+a=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۹a+b=۴\\ a=-۲\end{cases}\Rightarrow b=۲۲$$

۸. با استفاده از دستورهای محاسبهٔ مشتق داریم :

الف) $f'(x)=۳(۲x+۱)(x^{۲}+x)^{۲}(\sqrt{x}+۱)^{۲}$

$$+۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x}+۱)(x^{۲}+x)^{۳}$$

ب) $f'(x)=۲\cos(۲x+\frac{\pi}{۶})\cos x^{۲}$

$$+۲x(-\sin x^{۲}).\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})$$

۹. داریم :

$$y=x^{۳}+۳x^{۲}\Rightarrow y'=۳x^{۲}+۶x,$$

$$y'=۰\Rightarrow ۳x^{۲}+۶x=۰$$

$$\Rightarrow x=۰, x=-۲$$

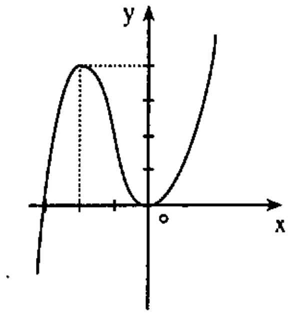
$$x=۰\Rightarrow y=۰, x=-۲\Rightarrow y=۴$$

$$y=۰\Rightarrow x^{۲}(x+۳)=۰\Rightarrow x=۰, x=-۳$$

$$x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\pm\infty$$

x	y
$y'=۰\begin{cases}۰\\ -۲\end{cases}$	۰ ۴
۰, −۳	۰
$\pm\infty$	$\pm\infty$

x	$-\infty$		−۳		−۲		۰		$+\infty$
y′			+		۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۴	↘	۰	↗	$+\infty$
					Max		Min		



۱۰. با توجه به ابعاد داده شده داریم :

حجم $V(x)=x(x+۱)(x-۱)=x^{۳}-x$,

سطح کل $S(x)=۲x(x+۱)+$,

$$۲(x+x+۱)(x-۱)=۶x^{۲}-۲$$

$$V(۲)=۸-۲=۶,$$

$$V(۲/۵)=۱۵/۶۲۵-۲/۵=۱۳/۱۲۵$$

$$\text{آهنگ تغییرات نسبی حجم}=\frac{V(۲/۵)-V(۲)}{۲/۵-۲}$$

$$=\frac{۱۳/۱۲۵-۶}{۰/۵}=۱۴/۲۵$$

$$S(۲)=۲۴-۲=۲۲,$$

$$S(۲/۵)=۳۷/۵-۲=۳۵/۵$$

$$\text{آهنگ تغییرات نسبی سطح کل}=\frac{S(۲/۵)-S(۲)}{۲/۵-۲}$$

$$=\frac{۳۵/۵-۲۲}{۰/۵}=۲۷$$

$V'(x)=۳x^{۲}-۱ \Rightarrow V'(۴)=۴۷$

آهنگ تغییرات آنی حجم در $x=۴$.

$S'(x)=۱۲x \Rightarrow S'(۴)=۴۸$

آهنگ تغییرات آنی سطح کل در $x=۴$.

حسابان ۱

۱.

$y^{۲}-۲xy+(۲x^{۲}-۲)=۰$

$y=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}$

$=x\pm\sqrt{x^{۲}-۲x^{۲}+۲}=x\pm\sqrt{۲-x^{۲}}$

$y_{۱}=x+\sqrt{۲-x^{۲}}$

$y_{۲}=x-\sqrt{۲-x^{۲}}$

$۲-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۲ \Rightarrow -\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲} \Rightarrow$

$D_{y_{۱}}=D_{y}=\left[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right]$

محاسبهٔ برد تابع $y_{۱}$:

$y_{۱}-x=\sqrt{۲-x^{۲}} \Rightarrow y_{۱}-x\geq ۰ \Rightarrow y_{۱}\geq x$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $y_{۱}^{۲}+x^{۲}-۲xy_{۱}=$

$۲-x^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}-۲y_{۱}x+y^{۲}-۲=۰$

$\Delta'=b'^{۲}-ac\geq ۰ \Rightarrow y_{۱}^{۲}-۲y^{۲}+۴\geq ۰$

$\Rightarrow y_{۱}^{۲}\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq y_{۱}<۲$

برد تابع $y_{۱}$:

$$\begin{cases} y_{۱}\geq x \\ -\sqrt{۲}<x\leq\sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲}\leq y_{۱}\leq ۲ \\ -۲\leq y_{۱}\leq ۲ \end{cases}$$

محاسبهٔ برد تابع $y_{۲}$:

$y_{۲}=x-\sqrt{۲-x^{۲}}$

$y_{۲}-x=-\sqrt{۲-x^{۲}} \Rightarrow y_{۱}-x\leq ۰ \Rightarrow y_{۱}\leq x$

برد تابع $y_{۲}$:

$$\begin{cases} y_{۲}\leq x \\ -\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲} \Rightarrow -۲\leq y_{۲}\leq\sqrt{۲} \\ -۲\leq y_{۲}\leq ۲ \end{cases}$$

۲.

$f(g(a))=g(f(a))$

$(-۲a+۱)^{۲}-۳(-۲a+۱)+۱$

$=-۲(a^{۲}-۳a+۱)+۱$

$۴a^{۲}-۴a+۱+\cancel{۶a}-۲=-۲a^{۲}+\cancel{۶a}-۱$

$۶a^{۲}-۴a=۰ \Rightarrow a=۰\ ,\ \dfrac{۲}{۳}$

۳.

$f(x)=x^{۲}\cos^{۲}\alpha-x+\sin^{۲}\alpha$

$f(x)=۰ \Rightarrow x^{۲}\cos^{۲}\alpha-x+\sin^{۲}\alpha=۰$

مجموع ضرایب صفر است $\Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۱ \\ x_{۲}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\tan^{۲}\alpha \end{cases}$

۴.

$f(\frac{۳}{۲})=۱\ ,\quad f(-۱)=-۴$

باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $۲x^{۲}-x-۳$ را $mx+n$ می‌گیریم، پس می‌توان نوشت :

$۲x^{۲}-x-۳=(x+۱)(۲x-۳)$

$f(x)=(x+۱)(۲x-۳)Q(x)+mx+n$

$x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=۰+m(\frac{۳}{۲})+n=۱$

$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۰-m+n=-۴$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{۳m}{۲}+n=۱ \\ -m+n=-۴ \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} \dfrac{۳}{۲}m+n=۱ \\ m-n=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}m=۵ \Rightarrow \boxed{m=۲} \quad \boxed{n=-۲}$$

$\Rightarrow$ باقیماندهٔ تقسیم $۲x-۲$

۵.

$f(x)=\sqrt[۳]{x}+۱ \qquad D_{f}=\mathbb{R}$

تابع f یک‌به یک است ؛ زیرا :

$f(x_{۱})=f(x_{۲})$

$\Rightarrow \sqrt[۳]{x_{۱}}+۱=\sqrt[۳]{x_{۲}}+۱$

$\Rightarrow \sqrt[۳]{x_{۱}}=\sqrt[۳]{x_{۲}} \Rightarrow x_{۱}=x_{۲}$

جای x و y را عوض می‌کنیم :

$y=\sqrt[۳]{x}+۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x}=y-۱ \Rightarrow x=(y-۱)^{۳}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=y=(x-۱)^{۳}$

$f^{-۱}(f(x))=f^{-۱}(\sqrt[۳]{x}+۱)=(\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^{۳}$

$=(\sqrt[۳]{x})^{۳}=x$

$f(f^{-۱}(x))=f((x-۱)^{۳})=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}}+۱$

$=x-۱+۱=x$

$\Rightarrow f^{-۱}(f(x))=f(f^{-۱}(x))$

۶.

$$\frac{\overbrace{\sin۱۳x+\sin x}+\sin۷x}{\underbrace{\cos۱۳x+\cos x}+\cos۷x}$$

$$=\frac{۲\sin\frac{۱۳x+x}{۲}\cos\frac{۱۳x-x}{۲}+\sin۷x}{۲\cos\frac{۱۳x+x}{۲}\cos\frac{۱۳x-x}{۲}+\cos۷x}$$

$$=\frac{۲\sin۷x\cos۶x+\sin۷x}{۲\cos۷x\cos۶x+\cos۷x}$$

$$=\frac{\sin۷x\cancel{(۲\cos۶x+۱)}}{\cos۷x\cancel{(۲\cos۶x+۱)}}=\frac{\sin۷x}{\cos۷x}=\tan۷x$$

۷.

الف) توجه: $x\to\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin x\to ۱^{-}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۱+۰}{۱-۱^{-}}=\frac{۱}{۰^{+}}\to+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x}+x-۱)=+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x}+(x-۱))\times\frac{\sqrt{x^{۲}-۴x}-(x-۱)}{\sqrt{x^{۲}-۴x}-(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۲}-۴x-(x-۱)^{۲}}{\sqrt{x^{۲}-۴x}-(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۲}-۴x-x^{۲}+۲x-۱}{\sqrt{x^{۲}(۱-\frac{۴}{x})}-x+۱}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x-۱}{-x\sqrt{۱-\frac{۴}{x}}-x+۱}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(-۲-\frac{۱}{x})}{-\cancel{x}(\sqrt{۱-\frac{۴}{x}}+۱+\frac{-۱}{x})}$$

$$=\frac{-۲-۰}{-(\sqrt{۱-۰}+۱-۰)}=\frac{-۲}{-۲}=۱$$

۸.

$$f(x)=\sin ۲x$$

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to x_۰}\frac{\sin ۲x-\sin ۲x_۰}{x-x_۰}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}\frac{۲\cos(x+x_۰).\sin(x-x_۰)}{x-x_۰}$$

$$=\lim_{x\to x_۰}۲\cos(x+x_۰)\times\frac{\sin(x-x_۰)}{x-x_۰}$$

$$=۲\cos(x_۰+x_۰)=۲\cos ۲x_۰$$

۹.

$$y=ax^۲+bx+c\Big|^{۰}_{۳}\, y_{min}=-۱\ ,\ y=۲x-۶$$

در معادلهٔ تابع

$$\Big|^{۰}_{۳}\Rightarrow ۳=۰+۰+c\Rightarrow c=۳$$

$$y_{min}=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=-۱\Rightarrow\frac{۱۲a-b^۲}{۴a}=-۱$$

$$\Rightarrow ۱۲a-b^۲=-۴a$$

$$\Rightarrow b^۲=۱۶a\Rightarrow a=\frac{b^۲}{۱۶}\qquad(۱)$$

$$\begin{cases}y=ax^۲+bx+۳\\ y=۲x-۶\end{cases}\Rightarrow ax^۲+bx+۳=۲x-۶$$

$$\Rightarrow ax^۲+(b-۲)x+۹=۰$$

چون خط و منحنی بر هم مماسند ؛ پس $\Delta=۰$

$$\Delta=(b-۲)^۲-۳۶a=۰\Rightarrow(b-۲)^۲=۳۶a$$

$$\Rightarrow(b-۲)^۲=۳۶(\frac{b^۲}{۱۶})\Rightarrow b-۲=\pm\frac{۶}{۴}b$$

$$b-۲=\pm\frac{۳}{۲}b\Rightarrow b\mp\frac{۳}{۲}b=۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲b-۳b=۴\Rightarrow b=-۴\\ ۲b+۳b=۴\Rightarrow b=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

چون در مسأله گفته شد $b<۰$ ، پس $b=-۴$ درست است ؛ درنتیجه $a=۱$.

$$\Rightarrow a=۱, b=-۴,$$

$c=۳\Rightarrow y=x^۲-۴x+۳$ معادلهٔ تابع

۱۰.

$$y_۱=\frac{۲x+۱}{۲x-۱}$$

مجانب قائم: $y_۱\to\pm\infty\Rightarrow ۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

مجانب افقی: $x\to\pm\infty\Rightarrow y=۱$

$$y'=\frac{-۴}{(۲x-۱)^۲}<۰$$

$$x=۰\Rightarrow y=-۱\ ,\ y=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

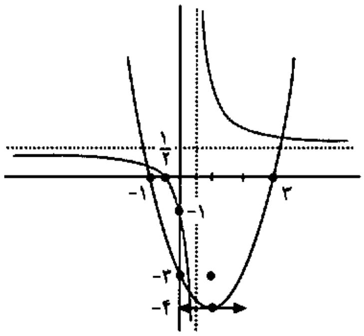
x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$y'_۱$		−		−		−	‖	−	
$y_۱$	۱	↘	۰	↘	−۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱

$$y_۲=x^۲-۲x-۳$$

$$y'_۲=۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱$$

$$x=۰\Rightarrow y=-۳$$

$$y=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=۳\end{cases}$$



x	$-\infty$		−۱		۰		۱		۳		$+\infty$
$y'_۲$		−		−		−	۰	+		+	
$y_۲$	$+\infty$	↘	۰	↘	−۳	↘	−۴	↗	۰	↗	$+\infty$

⑤ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. فرض می‌کنیم x عدد حقیقی دلخواهی باشد.

داریم: $x+(-x)=۰$ (۱) و $(-x)+(-(-x))=۰$

به کمک تعویض‌پذیری جمع می‌توان نوشت :

$(-(-x))+(-x)=۰$ (۲)

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم :

$$x+(-x)=(-(-x))+(-x)$$

که بنا به قاعدهٔ حذف (یا اسقاط) نتیجه می‌شود $x=-(-x)$.

۲. ابتدا فرض می‌کنیم دنباله، همگرا به l باشد، می‌دانیم :

$$a_{n+۱}=\sqrt{۳+۲a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+۱}=\lim_{n\to\infty}a_n=l$$

$$\Rightarrow l=\sqrt{۳+۲l}\Rightarrow l^۲=۳+۲l\Rightarrow l^۲-۲l-۳=۰$$

$$\Rightarrow(l+۱)(l-۳)=۰\Rightarrow$$

$$\begin{cases}l=-۱ & \text{غیرقابل قبول}\quad(\forall n\in N:a_n>۰)\\ l=۳ & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

حال ثابت می‌کنیم برای هر $n\in N$ ، $a_n<۳$ ؛ یعنی عدد ۳ کران بالای دنباله است.

داریم $a_۱=\sqrt{۳}<۳$ و $a_k<۳$ ، باید ثابت کنیم $a_{k+۱}<۳$.

$$a_{k+۱}=\sqrt{۳+۲a_k}<\sqrt{۳+۲(۳)}=۳\Rightarrow a_{k+۱}<۳$$

درنتیجه، این دنباله از بالا کراندار است یا کران بالا دارد.

اینک ثابت می‌کنیم، این دنباله صعودی است. برای این کار باید ثابت کنیم $\forall n\in N$:

$$a_{n+۱}\geq a_n\Rightarrow\sqrt{۳+۲a_n}>a_n$$

$$\Rightarrow ۳+۲a_n>a_n^۲\Rightarrow a_n^۲-۲a_n-۳<۰$$

$$\Rightarrow(a_n+۱)(a_n-۳)<۰$$

$a_n+۱$ که مثبت است، پس باید $a_n-۳<۰$ یا $a_n<۳$ که قبلاً داشتیم، بنابراین این دنباله صعودی است.

حال می‌گوییم دنبالهٔ صعودی که کران بالا داشته باشد، همگراست. پس دنباله همگراست. به عبارت دیگر، می‌توان گفت، چون برای هر $n\in N$ ، $a_n>۰$ و برای هر $n\in N$ ، $a_n<۳$ ؛ پس این دنباله کراندار است. در ضمن، دنباله یک نوا هم هست بنابر قضیهٔ : (هر دنباله، یک نوای کراندار همگراست) پس دنباله همگرا خواهد بود.

۳.

$$\left|\frac{n-۱}{۲n+۳}-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۱}{۴۴۰}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{۲n-۲-۲n-۳}{۲(۲n+۳)}\right|<\frac{۱}{۴۴۰}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-۵}{۲(۲n+۳)}\right|<\frac{۱}{۴۰۰}\Rightarrow\frac{۵}{۲(۲n+۳)}<\frac{۱}{۴۴۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۲n+۳}<\frac{۱}{۲۲۰}$$

$\Rightarrow \frac{2n+3}{5} > 220 \Rightarrow 2n+3 > 1100$

$\Rightarrow 2n > 1097 \Rightarrow n > 548/5 \Rightarrow n = 549$

از مرتبهٔ ۵۴۹ به بعد، مسأله برقرار است.

۴.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

واگرا است (سری همساز است): $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

با فرض: $f(k)=\frac{1}{k}$ $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(f(k)-f(k+1)\right) = f(1)-f(n+1)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=S_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow$ سری همگرا است

حال می‌گوییم مجموع یک سری واگرا و یک سری همگرا، سری واگرا است.

۵.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-3}}{2^{3k-2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{2^k}{8}}{\frac{2^{3k}}{4}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2(2^{3k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2(8^k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{8}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

سری: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ یک سری هندسی است که جملهٔ اوّل آن $\frac{1}{4}$ و $r=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\times\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}$$

۶. ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin\frac{1}{x-4}$ در $x=4$ حد ندارد. دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به فرم زیر در نظر می‌گیریم که حدّ هر دو ۴ باشد.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi}+4\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 4\,,$$

$\forall n\in N: a_n \neq 4$

$$\Rightarrow \{f(a_n)\} = \left\{\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}+4-4}\right\} = \{\sin 2n\pi\}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi = 0 = L_1$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}+4\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 4\,,$$

$\forall n\in N: b_n \neq 4$

$$\Rightarrow \{f(b_n)\} = \left\{\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}+4-4}\right\}$$

$$= \left\{\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \left\{\sin\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = L_2$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ پس تابع فوق در $x=4$ حد ندارد.

۷.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x) = 2\left\lfloor 2\sin\frac{\pi}{3}\right\rfloor + a = 2\lfloor\sqrt{3}\rfloor + a$$

حدّ راست $=2+a$

حدّ چپ $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x) = b\lfloor 0^-\rfloor = -b$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\lfloor 3\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right\rfloor + 2$$

مقدار تابع $=\left\lfloor\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right\rfloor + 2 = -1+2 = 1$

چون تابع در $x=\frac{\pi}{3}$ پیوسته است، پس باید حدّ راست مساوی حدّ چپ و مساوی مقدار تابع باشد.

$\Rightarrow 2+a=1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$-b=1 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

۸.

$$f(x)=\begin{cases} ax^4-4x & x>1 \\ bx^2-1 & x\leq 1\end{cases}$$

اولاً: باید مشتق راست و مشتق چپ تابع در $x=1$ برابر باشند.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{ax^4-4x-a+4}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{a(x^4-1)-4(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)(x+1)(x^2+1)-4(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(a(x+1)(x^2+1)-4)}{x-1}$$

$$= 4a-4 = f'_+(1)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{bx^2-1-b+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-}\frac{b(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{b(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= 2b = f'_-(1)$$

$\Rightarrow 4a-4=2b \Rightarrow 2a-2=b$ (۱)

ثانیاً: تابع در $x=1$ باید حد داشته باشد (و پیوسته باشد).

$\lim_{x\to1^+} f(x) = a-4\,,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = b-1$

$\Rightarrow a-4=b-1 \Rightarrow a-3=b$ (۲)

با مقایسهٔ (۲) و (۱) $\Leftarrow$

$2a-2=a-3 \Rightarrow \boxed{a=-1}\,,\ \boxed{b=-4}$

۹. داریم:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$A\begin{vmatrix}x\\f(x)\end{vmatrix}$ روی منحنی تابع f و $A'\begin{vmatrix}f(x)\\2\end{vmatrix}$ روی منحنی تابع f^{-1}

$x^3+x=2 \Rightarrow x^3+x-1-1=0$

$\Rightarrow x^3-1+x-1=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)=0$

$\Rightarrow (x-۱)(\underbrace{x^۲+x+۲}_{\Delta<۰})=۰ \Rightarrow \boxed{x=۱}$

$f'(x)=۳x^۲+۱ \Rightarrow f'(۱)=۴$

$(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۴}$

.۱۰

ارتفاع × سطح قاعده = حجم استوانه

$V=\pi R^۲.h$

$V'_t=۲\pi RR'_t.h+\pi R^۲.h'_t$

$-۱۲۰\pi=۲\pi(۱۰)R'_t(۲۰)+\pi(۱۰۰).\frac{۲}{۵}$

$-۱۲۰\pi=۴۰۰\pi R'_t+۴۰\pi$

$\Rightarrow ۴۰۰\pi R'_t=-۱۶۰\pi$

$\Rightarrow R'_t=\frac{-۱۶۰\pi}{۴۰۰\pi}=-\frac{۲}{۵}$

$\frac{۲}{۵}$ متردرثانیه کاهش می‌یابد.

هندسهٔ تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱. مؤلفه‌های بردار a در دو راستای b و c را بترتیب $a_۱$ و $a_۲$ می‌نامیم. در این‌صورت داریم:

$a=a_۱+a_۲$

با توجه به این که بردار a با دو بردار b و c موازی نیست (چرا؟)، دو عدد جبری α و β را باید چنان تعیین کنیم که $a_۱=\alpha b$ و $a_۲=\beta c$ یا $a=\alpha b+\beta c$ باشد. در این‌صورت باید داشته باشیم:

$(۴,۳,۲)=\alpha(-۲,۱,۲)+\beta(۵,۰,-۲)$

$\Rightarrow (۴,۳,۲)=(-۲\alpha+۵\beta,\alpha,۲\alpha-۲\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases}-۲\alpha+۵\beta=۴\\ \alpha=۳\\ ۲\alpha-۲\beta=۲\end{cases} \Rightarrow \alpha=۳,\beta=۲$$

$\Rightarrow a_۱=۳(-۲,۱,۲) \Rightarrow a_۱=(-۶,۳,۶)$

$a_۲=۲(۵,۰,-۲) \Rightarrow a_۲=(۱۰,۰,-۴)$

سؤال. آیا همواره می‌توان یک بردار در فضا را به دو مؤلفه در دو راستای داده شده تجزیه کرد؟ به سه مؤلفه در سه راستای داده شده چه‌طور؟

۲. با توجه به $a=(۳,-۴,۲)$ و $b=(-۲,۲,۵)$ داریم:

الف. $a.b=(۳)(-۲)+(-۴)(۲)+(۲)(۵)$

$\Rightarrow a.b=-۶-۸+۱۰=-۴$

ب. $\cos(a,b)=\frac{a.b}{|a|.|b|}$

$=\frac{-۴}{\sqrt{۹+۱۶+۴}.\sqrt{۴+۴+۲۵}}$

$\Rightarrow \cos(a,b)=\frac{-۴}{\sqrt{۲۹}.\sqrt{۳۳}} \Rightarrow (a,b)$

$=\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-۴}{\sqrt{۹۵۷}}\right)$

پ. نخست بردارهای $a-b$ و $a+b$ را مشخص می‌کنیم.

$a-b=(۳,-۴,۲)-(-۲,۲,۵)$

$=(۳+۲,-۴-۲,۲-۵)$

$\Rightarrow a-b=(۵,-۶,-۳)$

$a+b=(۳,-۴,۲)+(-۲,۲,۵)$

$=(۳-۲,-۴+۲,۲+۵)$

$\Rightarrow a+b=(۱,-۲,۷)$

حال داریم:

$\Pr_{a+b} a-b=\frac{(a-b).(a+b)}{|a+b|}$

$=\frac{-۵+۱۲-۲۱}{\sqrt{۱+۴+۴۹}}=\frac{-۱۴}{\sqrt{۵۴}}$

$\Rightarrow \Pr_{a+b} a-b=\frac{-۱۴}{۳\sqrt{۶}}=\frac{-۱۴\sqrt{۶}}{۱۸}=\frac{-۷\sqrt{۶}}{۹}$

ت. نخست تصویرهای بردار $a\times b$ را به‌دست می‌آوریم:

$a=(۳,-۴,۲)$

$b=(-۲,۲,۵)$

$a\times b=(-۲۰-۴,-۴-۱۵,۱۵+۴)$

$=(-۲۴,-۱۹,+۱۹)$

از آن‌جا:

$|a\times b|=\sqrt{۵۷۶+۳۶۱+۳۶۱}=\sqrt{۱۲۹۸}$

۳. با قرار دادن معادله‌های پارامتری خط $D_۲$ در معادله‌های متقارن خط $D_۱$، مختصات نقطهٔ برخورد دو خط $D_۱$ و $D_۲$ را به‌دست می‌آوریم (در صورت متقاطع بودنِ دو خط، دستگاه دو معادلهٔ یک‌مجهولی حاصل می‌شود).

$D_۱:\frac{x-۲}{۲}=y-۱=\frac{z+۳}{-۳}$

$D_۲:x=۳t\ ,\ y=t\ ,\ z=-۲t$

$\Rightarrow \frac{۳t-۲}{۲}=t-۱=\frac{-۲t+۳}{-۳}$

$$\Rightarrow \begin{cases}۳t-۲=۲t-۲ \Rightarrow t=۰\\ -۳t+۳=-۲t+۳ \Rightarrow t=۰\end{cases} \Rightarrow$$

نقطهٔ برخورد دو خط $D_۱$ و $D_۲$، $t=۰ \Rightarrow O=(۰,۰,۰)$

با معلوم بودن بردار هادی خط که موازی بردار $V=۲i+۳j-k$ است، معادلهٔ خط را می‌توان نوشت:

$V_D=(۳,۱,-۲)$

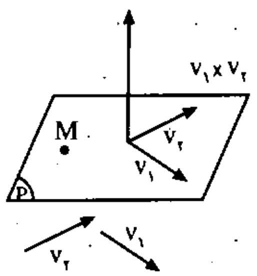
$\Rightarrow \frac{x-x_۱}{a}=\frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}$

$\Rightarrow \frac{x-۰}{۲}=\frac{y-۰}{۳}=\frac{z-۰}{-۱} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{-۱}$

.۴ $P:۲x-y-z+۲=۰ \Rightarrow M(۰,۰,۲)$

نقطهٔ برخورد صفحهٔ P با محور zها

از طرفی بردار نرمال صفحهٔ خواسته شده با حاصلضرب برونی دو بردار $V_۱$ و $V_۲$ موازی است. بنابراین:



$V_۱=(۳,۱,-۲)$

$V_۲=(-۱,۲,۱)$

$\Rightarrow V_۱\times V_۲=(۱+۴,۲-۳,۶+۱)$

$=(۵,-۱,۷)$

$\Rightarrow V_{P'}=(۵,-۱,۷)\ ,$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 5(x-0)-1(y-0)+7(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 5x-y+7z-14=0$$

معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده

۵. معادله‌های متقارن خط D را به‌دست می‌آوریم :

$$D:\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x-y=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x+3z=3 \Rightarrow x+z=1$$

$$\Rightarrow x=y+3\ ,\ x=-(z-1)$$

$$\Rightarrow D: x=y+3=\frac{z-1}{-1}$$

از آن‌جا :

الف.

$$M=(1,2,0)\ ,\ V_P=V_D=(1,1,-1)$$

$$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 1(x-1)+1(y-2)-1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow x+y-z-3=0$$ معادلهٔ صفحهٔ P

ب.

$$\begin{cases}x+y-z-3=0\\ x=y+3=\frac{z-1}{-1}=t\Rightarrow\end{cases}$$

$$x=t\ ,\ y=t-3\ ,\ z=-t+1$$

$$\Rightarrow t+t-3+t-1-3=0 \Rightarrow t=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow H=\left(\frac{7}{3},\frac{-2}{3},\frac{-4}{3}\right)$$

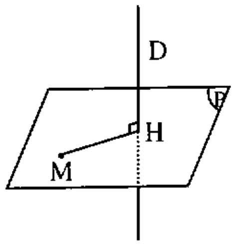
پ.

$$M=(1,2,0)\ ,\ H=\left(\frac{7}{3},\frac{-2}{3},\frac{-4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow MH=\sqrt{\left(1-\frac{7}{3}\right)^2+\left(2+\frac{2}{3}\right)^2+\left(0+\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{96}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

به‌طور کلی، یک روش برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، معادلهٔ صفحه‌ای را که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود، می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن با خط را تعیین می‌کنیم. آن‌گاه طول پاره‌خط وصل شده بین این نقطه و نقطهٔ داده شده را که همان فاصلهٔ نقطه از خط است، محاسبه می‌کنیم.



جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱.

$$A^T=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&-1&5\\2&0&4\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\2&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\18&3&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^TB^2=\begin{bmatrix}54&9&12\\90&14&20\\74&12&16\end{bmatrix}\Rightarrow |A^TB^2|$$

$$=|A^T|\times|B^2|=|A|\times|B|^2$$

$$|A|=3\times\begin{vmatrix}0&-1\\2&0\end{vmatrix}=6$$ (برحسب سطر اوّل)

$$|B|=2\times-1\times1=-2$$

(حاصلضرب درآیه‌های قطر اصلی)

$$\Rightarrow |B|^2=4\Rightarrow |A^TB^2|=6\times4=24$$

۲. ابتدا قرینهٔ سطر اوّل را به دو سطر دیگر اضافه می‌کنیم، که در این‌صورت داریم :

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}=$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c-a\end{vmatrix}$$

حال قرینهٔ سطر دوم را به سطر سوّم اضافه می‌کنیم :

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&0&c-b\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\times(c-b)\times1\times1$$

$$=-(a-b)\times-(b-c)(c-a)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

۳. طبق فرض داریم :

$$A^3-3a^2+4A-I=\bar{0}$$

که در این‌صورت خواهیم داشت :

$$A(A^2-3A+4I)=I$$

$$\Rightarrow (A^2-3A+4I)=A^{-1}$$

(از این قضیه استفاده شده است که وارون A منحصر به فرد بوده و اگر AB=I در این‌صورت باید $B=A^{-1}$ باشد.)

۴. روش اول: برای اثبات زیر فضا بودن، طبق قضیه باید ثابت کنید که مجموعهٔ K نسبت به دو عمل جمع و ضرب اسکالر در بسته است :

$$\text{I)}\ (x_1,y_1,z_1)\ ,\ (x_2,y_2,z_2)\in K$$

$$\Rightarrow 2x_1+z_1=0\ ,\ 2x_2+z_2=0$$

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$$

$$=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in K$$

زیرا : $2(x_1+x_2)+(z_1+z_2)$

$$=\underbrace{(2x_1+z_1)}_{0}+\underbrace{(2x_2+z_2)}_{0}=0+0=0$$

$$\text{II)}\ r\in\mathbb{R}\ ,\ (x,y,z)\in K\Rightarrow 2x+z=0$$

$$r(x,y,z)=(rx,ry,rz)\in K$$

زیرا : $2(rx)+(rz)=r\underbrace{(2x+z)}_{0}=r0=0$

پس K زیر فضای برداریِ $\mathbb{R}^3$ است.

روش دوم: واضح است که $K\subseteq\mathbb{R}^3$ پس K یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ و چون $(0,0,0)\in K$، پس K زیرفضای برداری $\mathbb{R}^3$ است.

(البته توجه دارید که زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^3$ با شامل بودنِ صفر، می‌توانند زیر فضای برداریِ $\mathbb{R}^3$ باشند که به شکل خط یا صفحه مطرح شده باشند.)

۵. می‌دانیم دوران یافتهٔ دایره تحت هر زاویه‌ای، یک دایره است و طول شعاع آن در تبدیل دورانی تغییر نمی‌کند، پس کافی است مرکز دایره را تحت تأثیر تبدیل دورانی تبدیل کرده و با در دست داشتن مرکز جدید، معادلهٔ دایره را بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

معادلهٔ تبدیل‌یافته:

$$(x+۳\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(y-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=۴$$

۶. چون بردارهای $(۱،۲)$ و $(۰،۱)$ در $\mathbb{R}^۲$ مستقل خطی‌اند، پس یک پایه تشکیل می‌دهند و می‌توانیم بردار $(۲،۶)$ را برحسب ترکیب خطی این دو بردار بنویسیم:

$$(۲,۶)=x(۱,۲)+y(۰,۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ ۲x+y=۶ \end{cases} \Rightarrow y=۲$$

$$\Rightarrow f(۲,۶)=f[۲(۱,۲)+۲(۰,۱)]$$

$$=۲f(۱,۲)+۲f(۰,۱)$$

$$=۲(۱,۱,۲)+۲(۰,۱,-۱)=(۲,۴,۲)$$

$$\Rightarrow f(۲,۶)=(۲,۴,۲)$$

۷. می‌دانیم برای نگاشتهای از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ شرط پوشایی و یک به یکی معادل یکدیگرند، پس یک به یک بودن نگاشت مفروض را بررسی می‌کنیم که برای این‌منظور، هستهٔ نگاشت f را مشخص می‌کنیم.

$$K_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(۰,۰,۰)\}$$

$$=\{(x,y,z)|(x,۲y,y+z)=(۰,۰,۰)\}$$

$$\Rightarrow K_f=\{(x,y,z)|x=y=z=۰\}=\{(۰,۰,۰)\}$$

بنابراین f یک به یک و درنتیجه، پوشاست.

۸. طبق فرض $f(x,y,z)=(x-y,۲y+z)$ پس با توجه به تعریف هسته داریم:

$$K_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(۰,۰)\}$$

$$=\{(x,y,z)|(x-y,۲y+z)=(۰,۰)\}$$

$$=\{(x,y,z)|x-y=۰,۲y+z=۰\}$$

$x-y=۰$ و $۲y+z=۰$ در $\mathbb{R}^۳$ صفحه‌هایی را مشخص می‌کنند که از مبدأ عبور کرده و K_f فصل مشترک این دو صفحه است که یک خط بوده و بُعد آن یک است.

$$\left.\begin{matrix} x-y=۰\Rightarrow x=y \\ ۲y+z=۰\Rightarrow y=\frac{z}{-۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y=\frac{z}{-۲}$$

(معادلهٔ هستهٔ f)

۹. با توجه به فرض یعنی:

$f(x,y)=(۵x-۲y,۴x-y)$ داریم:

$A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس نگاشت

$$\Rightarrow \lambda^۲-(۵+(-۱))\lambda+\underbrace{(-۵+۸)}_{|A|}=۰$$

(معادلهٔ مشخصه)

$$\lambda^۲-۴\lambda+۳=۰\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_۱=۱ \\ \lambda_۲=۳ \end{matrix}$$

معادلهٔ راستاهای ویژه

$$(۵-\lambda)x+(-۲)y=۰$$

$$\lambda_۱=۱\Rightarrow(۵-۱)x-۲y=۰\Rightarrow ۲y=۴x$$

$$\Rightarrow y=۲x\to\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\lambda_۲=۳\Rightarrow(۵-۳)x-۲y=۰\Rightarrow y=x\to\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

ریاضی عمومی ۱ (تجربی)

پیش دانشگاهی

۱. الف-

دامنهٔ تغییرات $=۱۷۲/۵-۱۴۷/۵=۲۵$

$$\text{طول دسته‌ها}=\frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

	f_i	x_i	f_ix_i	$f_i(x_i-\overline{X})^۲$
۱۴۷/۵−۱۵۲/۵	۴	۱۵۰	۶۰۰	۵۲۹
۱۵۲/۵−۱۵۷/۵	۳	۱۵۵	۴۶۵	۱۲۶/۷۵
۱۵۷/۵−۱۶۲/۵	۲	۱۶۰	۳۲۰	۴/۵
۱۶۲/۵−۱۶۷/۵	۵	۱۶۵	۸۲۵	۶۱/۲۵
۱۶۷/۵−۱۷۲/۵	۶	۱۷۰	۱۰۲۰	۴۳۳/۵
	n=۲۰		۳۲۳۰	۱۱۵۵

ب-

$$\overline{X}=\frac{\sum f_ix_i}{n}=\frac{۳۲۳۰}{۲۰}=۱۶۱/۵$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{X})^۲}{n}=\frac{۱۱۵۵}{۲۰}=۵۷/۷۵$$

واریانس

انحراف معیار $\sigma=\sqrt{۵۷/۷۵}\cong ۴/۶$

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{۴/۶}{۱۶۱/۵}\cong ۰/۰۵$$

ج-

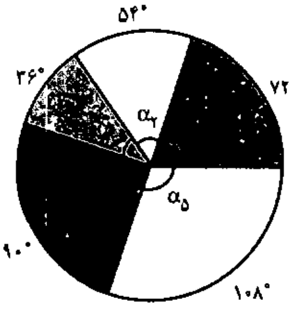
$$\alpha_۱=\frac{f_۱}{n}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۴}{۲۰}\times ۳۶۰^\circ=۷۲^\circ$$

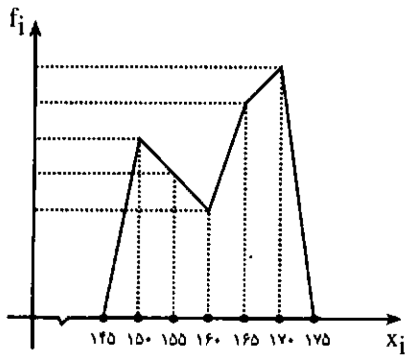
$$\alpha_۲=\frac{f_۲}{n}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۳}{۲۰}\times ۳۶۰^\circ=۵۴^\circ$$

$$\alpha_۳=\frac{f_۳}{n}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۲}{۲۰}\times ۳۶۰^\circ=۳۶^\circ$$

$$\alpha_۴=\frac{f_۴}{n}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۵}{۲۰}\times ۳۶۰^\circ=۹۰^\circ$$

$$\alpha_۵=\frac{f_۵}{n}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۶}{۲۰}\times ۳۶۰^\circ=۱۰۸^\circ$$





در چند بر فراوانی دو دسته با فراوانیهای صفر به ابتدا و انتهای دسته‌ها اضافه می‌کنیم، همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، نشانه‌های این دو دسته ۱۴۵ و ۱۷۵ هستند.

۲. پیشامد قرمز بودن مهرهٔ اوّل = A

پیشامد قرمز بودن مهرهٔ دوم = B

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B|A)$$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$$

۳.

$$P=(x=k)=\binom{n}{k}\times P^k\times(1-P)^{n-k}$$

$$P(x=6)=\binom{8}{6}\times(0/7)^6\times(0/3)^2=0/062$$

۴. $n=1: 3^1=\frac{3}{2}(3^1-1)\Rightarrow 3=3$

(فرض استقرا) $n=k$:

$$3^1+3^2+3^3+...+3^k=\frac{3}{2}(3^k-1)$$

(حکم استقرا) $n=k+1$:

$$3^1+3^2+3^3+...+3^k=\frac{3}{2}+3^{k+1}$$

$$=\frac{3}{2}(3^{k+1}-1)$$

به دو طرف فرض، استقرای 3^{k+1} را می‌افزاییم:

$$3^1+3^2+3^3+...+3^k+3^{k+1}$$

$$=\frac{3}{2}(3^k-1)+3^{k+1}$$

$$=\frac{3}{2}\left[(3^k-1)+2\times3^{k+1}\right]=\frac{3}{2}(3^{k+1}-1)$$

پس حکم استقرا برای هر $n\in N$ برقرار است.

۵. برای محاسبهٔ مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ کافی است به‌جای a و b عدد ۱ را قراردهیم.

$$(\sqrt[7]{1^6}+\frac{1}{\sqrt[7]{1^5}})^n+992=(\sqrt[9]{1}+\sqrt[7]{1})^{2n}$$

$$2^n+992=2^{2n}\Rightarrow(2^n)^2-2^n-992=0$$

$$2^n=A\Rightarrow A^2-A-992=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=32\\A=-31\end{cases}$$ غ ق ق

$$2^n=32;2^n=2^5\Rightarrow n=5$$

۶.

$$\begin{cases}y=mx+4\\y=2x+6\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x+6\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ تقاطع یعنی $a(-2,2)$ باید در معادلهٔ $y=mx+4$ صدق کند:

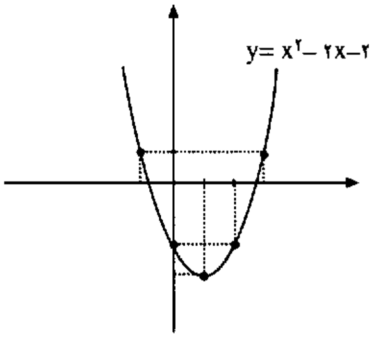
$$A(-2,2)\ ,\ y=mx+4\Rightarrow 2=m(-2)+4$$

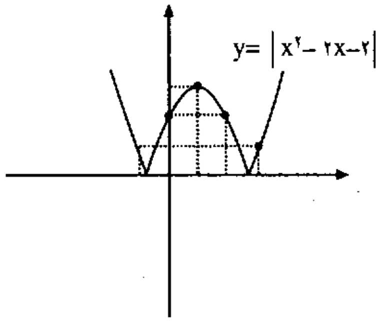
$$\Rightarrow m=1$$

۷. طول رأس سهمی را از رابطهٔ $x=\frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$$

x	-1	0	1	2	3
y	1	-2	-3	-2	1





برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|f(x)|$ کافی است قسمتهایی از نمودار تابع $y=|f(x)|$ که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۸. الف-

$$(125^x)^{x+2}-\frac{1}{25}=0\Rightarrow\left[(5^3)^x\right]^{x+2}=5^{-2}$$

$$\Rightarrow 5^{3x^2+6x}=5^{-2}$$

$$\Rightarrow 3x^2+6x+2=0\Rightarrow x=-1$$

ب-

$$\log(2x+5)+\log x=\log 6-\log 2$$

$$\log(2x+5)\times x=\log\frac{6}{2}\Rightarrow 2x^2+5x=3$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x-3=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x=-3\end{cases}$$ غ ق ق

۹.

$$u_n=\frac{3n^3+9n^2+9n}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{3n^3+9n^2+9n+3-3}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{3(n^3+3n^2+3n+1)-3}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{3(n+1)^3}{(n+1)^3}-\frac{3}{(n+1)^3}$$

$$\Rightarrow u_n=3-\frac{3}{(n+1)^3}$$

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن دنباله کافی است دو جملهٔ u_n و u_{n+1} را با یکدیگر مقایسه کنیم:

$$3-\frac{3}{(n+1)^3}<3-\frac{3}{(n+2)^3}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{3}{(n+1)^3}<-\frac{3}{(n+2)^3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^3}>\frac{1}{(n+2)^3}$$

$$\Leftrightarrow(n+1)^3<(n+2)^3$$

درنتیجه برای هر $n\in N$ داریم: $u_n<u_{n+1}$

بنابراین دنبالهٔ $\{u_n\}$ صعودی است.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\text{Lim}\frac{3n^3+9n^2+9n}{(n+1)^3}=3$$

چون حد دنباله عدد ۳ است، بنابراین دنباله از بالا کراندار است، از طرفی با توجه به جملات دنباله:

۳ و ... و $\frac{۱۸۹}{۶۴}$ و $\frac{۷۸}{۲۷}$ و $u_n: \frac{۲۱}{۸}$

ملاحظه می‌کنیم که دنباله از پایین کراندار است.

.۱۰

$$p(t)=\frac{۱}{۴}p_{\circ} \Rightarrow \frac{۱}{۴}p_{\circ}=p_{\circ}(۰/۸)^t$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}=(۰/۸)^t \Rightarrow t=\log_{۰/۸}^{\frac{۱}{۴}}$$

.۱۱

مجانب قائم:

$$\begin{cases} y\to\pm\infty \\ ۲x^۳-۳x^۲+x=۰ \Rightarrow x(۲x^۲-۳x+۱)=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$ معادله‌های مجانبهای قائم

$$\begin{array}{l|l} x^۴+۲x^۳-۱ & ۲x^۳-۳x^۲+x \\ \hline -x^۴+\frac{۳}{۲}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲ & \frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۴} \\ \hline \frac{۷}{۲}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲-۱ & \\ -\frac{۷}{۲}x^۳+\frac{۲۱}{۴}x^۲-\frac{۷}{۴}x & \\ \hline \frac{۱۹}{۴}x^۲-\frac{۷}{۴}x-۱ & \end{array}$$

معادلهٔ مجانب مایل $y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۴}$.

ریاضی پایهٔ پیش‌دانشگاهی

۱. خیر، زیرا: $x=\sqrt{۲}\ ,\ y=-\sqrt{۲}$

$$x+y=\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\in Q$$

خیر، زیرا: $x=\sqrt{۵}\ ,\ y=\sqrt{۵}$

$$x\times y=\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=۵\in Q$$

۲. $x=\frac{m_۱}{n_۱}\ ,\ y=\frac{m_۲}{n_۲}$

$$x+y=\frac{m_۱}{n_۱}+\frac{m_۲}{n_۲}=\frac{m_۱n_۲+m_۲n_۱}{n_۱n_۲}$$

$$=\frac{m_۳}{n_۳}\in Q$$

۳. الف- $n=۱:\ \frac{۱}{۱\times۴}=\frac{۱}{۳\times(۱)+۱}$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

فرض استقرا $n=k:\ \frac{۱}{۱\times۴}+\frac{۱}{۴\times۷}+\frac{۱}{۷\times۱۰}+\cdots+\frac{۱}{(۳k-۲)(۳k+۱)}=\frac{k}{۳k+۱}$

حکم استقرا $n=k+۱:\ \frac{۱}{۱\times۴}+\frac{۱}{۴\times۷}+\frac{۱}{۷\times۱۰}+\cdots+\frac{۱}{(۳k-۲)(۳k+۱)}+\frac{۱}{(۳k+۱)(۳k+۴)}=\frac{k+۱}{۳k+۴}$

به دو طرف فرض استقرا، عبارت $\frac{۱}{(۳k+۱)(۳k+۴)}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱\times۴}+\frac{۱}{۴\times۷}+\frac{۱}{۷\times۱۰}+\frac{۱}{(۳k-۲)(۳k+۱)}+\frac{۱}{(۳k+۱)(۳k+۴)}$$

$$=\frac{k}{۳k+۱}+\frac{۱}{(۳k+۱)(۳k+۴)}$$

$$=\frac{k(۳k+۴)+۱}{(۳k+۱)(۳k+۴)}$$

$$=\frac{۳k^۲+۴k+۱}{(۳k+۱)(۳k+۴)}$$

$$=\frac{(۳k+۱)(k+۱)}{(۳k+۱)(۳k+۴)}$$

$$=\frac{k+۱}{۳k+۴}$$

ب- $n=۱:\ ۱=\frac{۱\times(۳\times(۱)-۱)}{۲}\Rightarrow ۱=۱$

فرض استقرا $n=k: ۱+۴+۷+\cdots+(۳k-۲)=\frac{k(۳k-۱)}{۲}$

حکم استقرا $n=k+۱: ۱+۴+۷+\cdots+(۳k-۲)+(۳k+۱)=\frac{(k+۱)(۳k+۲)}{۲}$

به دو طرف فرض استقرا، عبارت $(۳k+۱)$ را اضافه می‌کنیم:

$$۱+۴+۷+\cdots+(۳k-۲)+(۳k+۱)$$

$$=\frac{k(۳k-۱)}{۲}+۳k+۱$$

$$=\frac{۳k^۲-k+۶k+۲}{۲}=\frac{۳k^۲+۵k+۲}{۲}$$

$$=\frac{(k+۱)(۳k+۲)}{۲}$$

۴. الف- $۱۶,۸,۴,۲,۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\ldots$

ب- $S=۱۶+۸+۴+۲+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots$

$$S=۱۶+\frac{۱}{۲}\underbrace{(۱۶+۸+۴+۲+۱+\frac{۱}{۲}+\ldots)}_{S}$$

$$S=۱۶+\frac{۱}{۲}S\Rightarrow\frac{۱}{۲}S=۱۶\Rightarrow S=۳۲$$

.۵

$$\begin{cases} S_{۱۱}=۱۱۰ \\ S_۷=۱۴ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{۱۱}{۲}(۲a+۱۰d)=۱۱۰ \\ \frac{۷}{۲}(۲a+۶d)=۱۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+۵d=۱۰ \\ a+۳d=۲ \end{cases}\Rightarrow d=۴$$

.۶ $a_۱=a\ ,\ a_۲=aq\Rightarrow$

$$a_۱+a_۲=a+aq=۱۹$$

$$a_۳=aq^۲\ ,\ a_۴=aq^۳\Rightarrow a_۳+a_۴$$

$$=aq^۲+aq^۳=۷۶$$

$$\Rightarrow\frac{aq^۲(۱+q)}{a(۱+q)}=\frac{۷۶}{۱۹}=۴\ ,\ q^۲=۴\Rightarrow q=\pm۲$$

۷. جملهٔ عمومی دنبالهٔ مثلثی برابر با $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=F_۸=۲۱\Rightarrow n^۲+n-۴۲=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=۶\in N \\ n=-۷\notin N \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

.۸

$$\log_۳(x^۲-۳x-۱)=\log_{\sqrt[۳]{۳}}^{۳^{\frac{۱}{۳}}}=\log_{\sqrt[۳]{۳}}^{\sqrt[۳]{۳}}=۱$$

$$\log_۳(x^۲-۳x-۱)=\log_۳^۳$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۱=۳$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow\begin{cases} x=-۱ \\ x=۴ \end{cases}$$

.۹

$$\log\left(\frac{a+۲b}{a^۲b^۳}\right)=\log(a+۲b)-\log a^۲b^۳$$

$$=\log(a+۲b)-(\log a^۲+\log b^۳)$$

$$=\log(a+۲b)-۲\log a-۳\log b$$

۱۰. الف ـ

$x = 6000 - 30P \Rightarrow P = 200 - \frac{1}{30}x$

معادلهٔ درآمد : $R(x) = x \times P \Rightarrow R(x)$

$= x(200 - \frac{1}{30}x) = 200x - \frac{1}{30}x^2$

ب ـ $R(x) = 200x - \frac{1}{30}x^2$

$\Rightarrow$ ماکزیمم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-\frac{2}{30}} = 3000$

$R(3000) = 200(3000) - \frac{1}{30}(3000)^2$

$= 3 \times 10^5$

ج ـ سود = درآمد − هزینه

$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$

$\Rightarrow P(x) = -\frac{x^2}{30} + 140x - 72000$

ماکزیمم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-140}{-\frac{2}{3}} = 2100$

۱۱. $n(S) = \binom{15}{3} = 455$;

(سالم، معیوب)

$n(A) = \binom{10}{3} \times \binom{5}{0} = 120$

$P(A) = \frac{120}{455}$

۱۲. سه افسر و پنج سرباز می‌توانند به ۸! حالت کنار یکدیگر در یک ردیف بنشینند :

$n(S) = 8!$

سه افسر در کنار یکدیگر به !۳ حالت می‌توانند قرار گیرند ؛ بنابراین اگر این سه افسر را در یک بسته قرار دهیم ؛ خواهیم داشت :

$n(A) = 3! \times 6!$

و سرباز ۵ و سرباز ۴ و سرباز ۳ و سرباز ۲ و سرباز ۱ و سه افسر

بنابراین :

$P(A) = \frac{3! \times 6!}{8!} = \frac{3}{28}$



جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

اگر او آخرین ۵ ریال را در مغازهٔ پنجم خرج نمی‌کرد، برایش ۵ ریال بیشتر از هنگام خروجش از این مغازه باقی می‌ماند، و این، نصف آن مبلغی است که او به هنگام ورود به مغازهٔ پنجم داشته است. پس اگر از آخرین مغازه شروع کنیم که پس از آن دیگر مهرداد هیچ پولی نداشته است، خواهیم داشت:

۲(۰+۵) = ۱۰

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ پنجم داشته است.

۲(۱۰+۵) = ۳۰

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ چهارم داشته است.

۲(۳۰+۵) = ۷۰

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ سوم داشته است.

۲(۷۰+۵) = ۱۵۰

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ دوم داشته است.

۲(۱۵۰+۵) = ۳۱۰

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ اوّل داشته است.

پس پولی که مهرداد قبل از خرید داشته، ۳۱۰ ریال بوده است.

پاسخ ۲:

با هر E که در گوشه‌های شکل (منتهی‌الیه سمت چپ، سمت راست، پایین و بالای شکل) قرار دارد، یک بار کلمهٔ ECU را می‌توان خواند. پس: ۴ = ۱×۴ و با هر E که در کنار شکل واقع است، دوبار کلمهٔ ECU خوانده می‌شود. پس: ۸ = ۲×۴ بار. لذا در مجموع به ۱۲ صورت می‌توان کلمهٔ ECU را از روی شکل داده شده خواند. زیرا:

۴+۸=۱۲

پاسخ ۳:

۲+۲−(۲+۲) = ۰

(۲÷۲)×(۲÷۲) = ۱

(۲÷۲)+(۲÷۲) = ۲

(۲+۲+۲)÷۲ = ۳

(۲+۲+۲)−۲ = ۴

(۲+۲)+(۲÷۲) = ۵

(۲×۲×۲)−۲ = ۶

(۲×۲×۲)+۲ = ۱۰

(۲+۲+۲)×۲ = ۱۲

پاسخ ۴:

نخست تعداد زاویه‌های قائمهٔ تشکیل شده در ۱۲ ساعت اوّل را حساب می‌کنیم. اوّلین انطباق دو عقربه بعد از شروع حرکت، بین ساعت ۱ و ۲ می‌باشد. دومین انطباق بین ساعت ۲ و ۳، و آخرین انطباق دو عقربه در ساعت ۱۲ است.

بنابراین در ۱۲ ساعت اوّل، ۱۱ بار دو عقربه بر هم منطبق می‌شوند و در فاصلهٔ هر دو انطباق متوالی، عقربه‌ها دو بار با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند. پس تعداد زاویه‌های قائمه‌ای که دو عقربه در ۱۲ ساعت می‌سازند ۲۲ = ۲×۱۱ می‌باشد. در نتیجه در مدت ۲۴ ساعت تعداد زاویه‌های قائمه ۴۴ = ۲×۲۲ خواهد بود.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

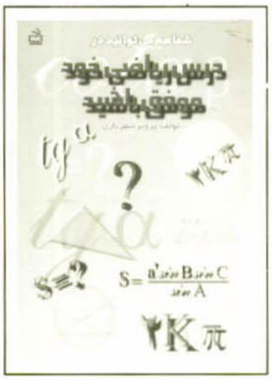


اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی

مؤلّف: دکتر محمّد جهانشاهی / ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب، سعی بر این دارد که تا حدّ امکان، دبیران و دانشجویان و دانش آموزان ریاضی را با مفاهیم اساسی و روشهای اثبات احکام و حلّ مسائل ریاضی آشنا کند و قدرت تجزیه و تحلیل در قضایا و مسائل ریاضی را تقویت کند.

مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ معلّمان و دانشجویان رشتهٔ ریاضی دانشگاه های تربیت معلم توصیه می کنیم.



شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید

مؤلّف: پرویز شهریاری / ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب که در آستانهٔ سال ۲۰۰۰ میلادی، سال جهانی ریاضیات منتشر می شود و مؤلّف آن را به کمیتهٔ برگزاری سال جهانی ریاضیات در ایران تقدیم کرده است، شامل اساسیترین موضوعهای مربوط به ریاضیات است. در این کتاب، از روش حلّ مسأله های ریاضی گرفته تا تاریخ ریاضیات و رابطهٔ ریاضیات با هنر و زندگی، در همهٔ زمینه ها بحث شده است و می تواند وسیله ای برای موفّقیت دانش آموزان ریاضی و در ضمن، راهنمایی برای دبیران ریاضی باشد.



داستانواره های ریاضی

مترجم: عبدالحسین مصحفی / ناشر: انتشارات مدرسه

معمّاهایی به صورت داستانهای بسیار جالب و جذّاب، و در قالب نثری بسیار روان و شیرین برای دانش آموزان بیان شده، که از منطق ریاضی برخوردار هستند. هر داستانواره از دو بخش تشکیل می شود؛ در بخش نخست، یک مسأله معمّاگونهٔ ریاضی به صورت یک داستان بیان می شود و در بخش دوم که با نشانهٔ *** از بخش نخست جدا می شود، راه حلّ سادهٔ آن مسأله، به زبان ساده باز گو می شود. همان گونه که مؤلّفان کتاب در پیشگفتار یادآوری کرده اند، خواننده پس از خواندن بخش نخست هر داستانواره، بهتر است کتاب را ببندد و برای یافتن راه حل، اندیشهٔ خود را به کار اندازد. پیشگفتار و گفتار پایانی کتاب نیز هرکدام مسأله های جالبی را دربردارد.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ است:

۱ـ نابرابریها و نامعادله ها / میرشهرام صدر ۲ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری

۳ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۴ـ آمار و مدل سازی / دکتر عین ا . . . پاشا

۵ـ ورودی به نظریه اعداد / حمیدرضا امیری

ابوعلی حبوبی

ابوعلی حسن بن حارث حبوبی خوارزمی

فقیه و دانشمند مسلمان ایرانی که به ریاضیات نیز می پرداخت (نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم).

قاضی و فقیه و از دانشمندان نیمهٔ دوم قرن چهارم و معاصر با ابونصر عراقی و بوزجانی و بیرونی بوده و با آنان دربارهٔ مطالب علمی مکاتبه می کرده و در ریاضیات دست داشته است.

ابونصر عراق در رسالهٔ *معرفة القسی الفلکیة* از وی یاد کرده و بیرونی در کتاب *استخراج الاوتار*، حلّ دو مسألهٔ هندسی را از وی آورده است؛ و کاشانی نیز در کتاب *مفتاح الحساب*، روشی را که وی برای حل مسائل «حساب فرایض» به کار می برده در ضمن سه مثال، آورده است.

ابوعلی حبوبی از بوزجانی، دستوری برای محاسبهٔ مثلث بر حسب اضلاع آن، خواسته بوده و بوزجانی جواب او را طی رسالهٔ مختصری داده است. این دستور با رمزها و اصطلاحات کنونی چنین نوشته می شود: به فرض آن که طولهای اضلاع مثلث a ، b و c باشد، مساحت مثلث مساوی است با:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{c-b}{۲}\right)-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]}$$

متن عربی این جواب و شرح آن، در مجلهٔ *تاریخ علوم* به چاپ رسیده است.

اثر ریاضی موجود وی

کتاب *الاستقصاء و التجنیس فی علم الحساب*

در این کتاب، کاربرد حساب خطأین و جبر در حلّ مسائل مربوط به وصایا، مورد بحث قرار گرفته است. از این کتاب، چند نسخه در مشهد و اروپا موجود است.

تبصره. مؤلف جلد سوّم فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نوشته است که ابوعلی حسن بن حارث خوارزمی حبوبی کتاب *استقصاء* را در زمان آتسز خوارزمشاه تصنیف کرده و این اشتباه است و بروکلمان هم همین اشتباه را تکرار کرده است. آتسز خوارزمشاه در ۵۲۱ تا ۵۵۱ یعنی در نیمهٔ دوم قرن ششم هجری بوده و حال آن که ابوعلی حبوبی در حدود دویست سال پیش از آن تاریخ با بیرونی و بوزجانی مکاتبه می کرده است.

از طرف دیگر، مؤلف جلد هشتم فهرست کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نسبت «حبوبی» را به زعم خود، غلط انگاشته و نسبت او را «خیوقی» پنداشته و این نیز اشتباه است.

باید متذکر شوم که «سوتر» نیز از تاریخ زندگی ابوعلی حبوبی اطلاع نداشته و چون یک نسخه از کتاب *استقصاء* که در آکسفورد موجود است تاریخ کتابتش در سال ۶۳۹ هجری بوده، سوتر نوشته است که ابوعلی حبوبی پیش از تاریخ ۶۳۹ می زیسته (که البته درست است).

* برگرفته از کتاب زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی ـ ابوالقاسم قربانی ـ مرکز نشر دانشگاهی

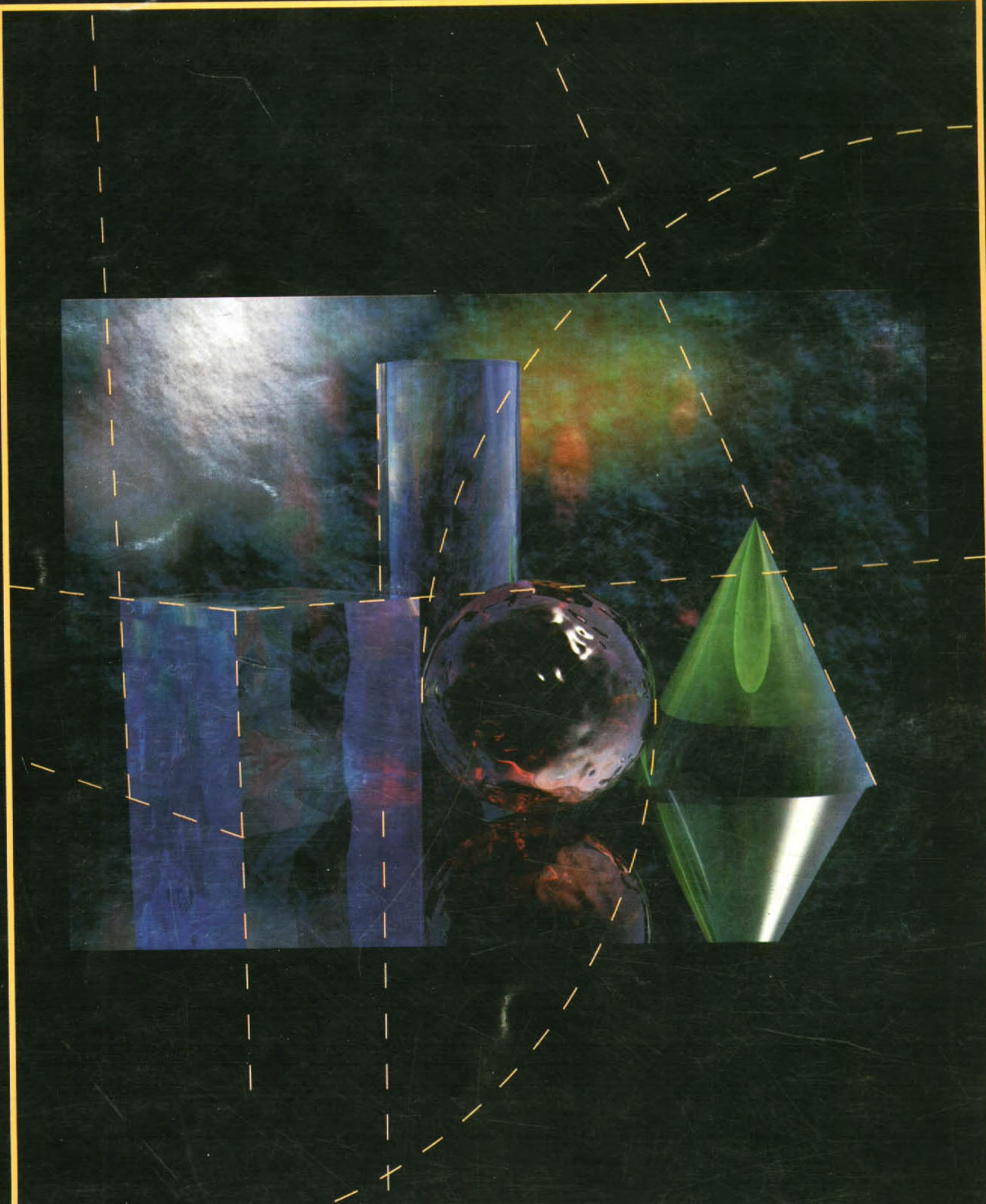
مجله ریاضی

برهان

۳۰

برای دانش آموزان دبیرستان

سال نهم، شماره دوم ، پائیز ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❏ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❏ مدیر مسؤول: محمود ابراهیمی
❏ سردبیر: حمیدرضا امیری ❏ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❏ اعضای هیأت تحریریه: آقایان: ❏ حمیدرضا امیری ❏ محمدهاشم رستمی ❏ احمد قندهاری ❏ میرشهرام صدر
❏ هوشنگ شرقی ❏ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❏ غلامرضا یاسی پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
❏ مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی ❏ طراح گرافیک: امیر بابایی ❏ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

■ سال نهم، پاییز ۱۳۷۸، شمارهٔ دوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقاله ها آزاد است.
■ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
■ مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
■ مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸
تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱_۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹
تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

حرف اوّل

ریاضیات علمی است مادر، که تقریباً در همهٔ علوم و حتی علوم اجتماعی و اقتصادی رخنه کرده و کاربرد دارد و به دلیل اشاعه و همه گیر شدن ریاضیات در تمام موضوعهای مرتبط با زندگی علمی بشر امروزی و اهمیتی که این علم داراست، سال ۲۰۰۰ میلادی از طرف یونسکو «سال جهانی ریاضیات» نام گذاری شده است.

به راستی ریاضیات چه ویژگیهای بارزی دارد و این ویژگیها آیا در ریاضیدان یا حتی در علاقه مندان به علم ریاضی تأثیر می گذارد؟

شاید یکی از اهداف «عمومی کردن ریاضیات» که ستاد ملّی برگزاری سال جهانی ریاضیات به آن پرداخته، همین تأثیراتی باشد که علم ریاضی بر مخاطبان خود خواهد گذاشت. یکی از ویژگیهای ریاضیات «دقّت» است، کم یا زیاد شدن یک صفر، + یا - در نظر گرفتن یک رقم، پس و پیش کردن یک نماد، اضافه یا حذف کردن یک کلمه و ... هر کدام می تواند مسأله ای را به جوابی دیگر رساند یا صورتِ مسأله را عوض کند.

آیا این ویژگی بر اشخاصی که با ریاضیات سر و کار دارند، تأثیر می گذارد؟ بر شما چطور؟ از ویژگیهای دیگر ریاضیات خلاصه گویی و استفاده از مطالب، قضیه ها و مسأله های اثبات شده به عنوان ابزارهایی برای حل مسأله های جدید است و این که همواره به دنبال راه های صحیح و کوتاه باشیم. آیا می توانیم از این ویژگی در زندگی و در برخورد با مسائل و مشکلات احتمالی که ممکن است برای هر شخصی به وجود آید، استفاده کنیم؟ آیا ویژگیهای دیگری از ریاضیات که بتواند بر مخاطبان اثرگذار باشد، سراغ دارید؟

نظر شما راجع به نظم منطقی که بین اجزا و بخشهای مختلفِ هر شاخه از ریاضیات، مانند هندسه یا آنالیز یا نظریهٔ اعداد وجود دارد و ارتباط آن با نظم و هماهنگی موجود بین اجزای تشکیل دهندهٔ طبیعت و به طور کلّی جهان هستی، چیست؟ نظرها و یافته های خود را برای ما ارسال کنید تا از بین آنها، بهترینها را انتخاب و در مجلّهٔ خودتان، چاپ کنیم.

والسلام ـ سردبیر

از تاریخ بیاموزیم (۴)



گامهای نخستین در تکامل شمار
(از بوریس گنه دِنکو)

● پرویز شهریاری

یکی از کهن‌ترین و در ضمن اساسی‌ترین مفهومها در ریاضیات، مفهوم عدد مثبت و درست، یعنی مفهوم عدد طبیعی است و تا زمانی که انسان وجود دارد، از اهمیت این مفهوم چیزی کم نمی‌شود. مفهوم عدد هم، همچون همهٔ مفهومهای دیگر ریاضیات، در جریان برخورد انسان با طبیعت و در جریان کار و فعالیت انسان برای زندگی، قوام گرفته است.

از زمانهای کهن تا سدهٔ نوزدهم میلادی، بسیاری از نویسندگان، اختراع عدد را به یک نابغه و فیلسوف بزرگ یا در جایی بجز قلمرو انسان نسبت می‌دادند. این جملهٔ کرونکر، دانشمند بزرگ جبر مشهور است که: «به جز عددهای طبیعی که ساختهٔ ذهن بشر نیست، بقیهٔ عددها را انسان آفریده است.»

با بخش اخیر نظر کرونکر موافقیم؛ ولی ناچاریم بخش اوّل سخن او را درست کنیم؛ چرا که عددهای طبیعی هم، نتیجه‌ای از کار عملی و ذهنی انسان است.

نوشته‌های قدیمی ریاضی، کم و بیش تا سدهٔ هجدهم، اختراع حساب را به «عقل یک فیلسوف قدیمی» یا «فیثاغورس حکیم، نابغهٔ یونان باستان» و غیره نسبت می‌دادند. از جملهٔ ماگنیتسکی، نویسندهٔ نخستین کتابهای درسی در روسیه، در کتاب خود به نام «حساب» از فیثاغورس به عنوان مخترع و پایه‌گذار این دانش نام می‌برد. در افسانه‌های زیبای یونان باستان، اختراع عدد درست به پرومته نسبت داده شده است. در این باره، بویژه در تراژدی «آشیل» به نام «پرومته در زنجیر» سخن رفته است. در مجلس دوم تراژدی، پرومته خطاب به «اوکه آیند» پیر، که با او همدردی می‌کند، می‌گوید:

«... از رنجهای آدمیان فانی بشنوید که در آغاز،
گروهی درمانده بودند،
به آنان آموختم که بیندیشند و خرد را به‌کار گیرند ...



۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات

و سپس کاربرد عددها را که سرآمد دانستنیهاست ...
به آنها نمودم ... .»

همهٔ این افسانه‌ها زیبا و دلنشینند و اگر آن را درست بینداریم، از هرگونه پژوهش و جست‌وجوی علمی دربارهٔ نخستین گامهایی که انسان در راه پیشرفت مفهوم عدد برداشته است، آزاد می‌شویم؛ ولی ما راه دیگری را برمی‌گزینیم؛ راهی که پیمودن آن دشوارتر است؛ اما ما را به حقیقت نزدیک می‌کند. در آغاز، ریشه و بنیان مفهومهای ریاضی را در کارهای روزانهٔ انسان نخستین جست‌وجو می‌کنیم. در این باره، با دشواریهای زیادی رو به رو می‌شویم؛ زیرا از دورانی که مفهوم عدد درست شکل می‌گرفت، هیچ نوشته‌ای به ما نرسیده است؛ آن زمانی هم که دیگر انسان، برای آیندگان نوشته‌هایی باقی گذاشت، از نظر هنر شمردن، به اندازهٔ کافی به کمال رسیده بود.

به این ترتیب، دانش ناچار است برای نتیجه‌گیری، از مدرکهای غیرمستقیم استفاده کند. این مدرکها کدامند؟ پیش از همه باید از نژادشناسی نام برد؛ زیرا با بررسی فرهنگ ملتهایی که در دوران پیش از تاریخ به‌سر می‌برند، می‌توان دربارهٔ دوره‌های تکامل ملتهای دیگر هم داوری کرد. سرچشمهٔ دیگر پژوهش، زبان است که نه تنها وسیلهٔ بستگی انسانها به یکدیگر است؛ بلکه بازمانده‌ای از فعالیتهای معنوی قومهای کهن هم می‌باشد. در زبان و در ویژگیهای دستوری آن، آگاهیهای گرانبهایی نگهداری شده است که تا اندازه‌ای، به روش شمردن مردم آن زمان، و این که چگونه به شمارش امروزی رسیده‌ایم، راهنمایی می‌کند.

جای افسوس است که لشکرکشیها و سیاست به آتش کشیدن، نوشته‌های محلّی و ملّی مردم شمال و جنوب امریکا، افریقا و استرالیا را، کم و بیش به طور کامل، نابود کرد. معلوم شده است که در بسیاری حالتها، تمامی یک قوم را به طور کامل نابود کردند. مهاجمان، که مبلّغان مسیحی سده‌های میانه هم درمیان آنها بودند، اغلب دستور می‌داند تمامی اثرهای مادی فرهنگ قومها نابود شود. مردم را ناچار می‌کردند از اعتقادهای خود دست بردارند و صفحه‌هایی از نوشته‌های آنها را که به تاریخ نیاکان آنها مربوط می‌شد، از بین می‌بردند. در نتیجه، امروز تنها آگاهی‌هایی ناقص و پراکنده از این دوران بسیار جالب تاریخی در اختیار داریم. با این همه، آگاهیهایی که به وسیلهٔ جهانگردان در جریان سده‌های ۱۸ و ۱۹ جمع‌آوری شده است (و البته، چندان زیاد نیست)، اهمیت زیادی دربارهٔ تاریخ دانش دارد و زمینهٔ اصلی کار را برای ترسیم طرح تاریخی و پیدایش مفهوم عدد درست در اختیار ما می‌گذارد.

روشن شده است که بسیاری از قبیله‌ها، می‌توانستند «حساب» کنند؛ بدون این که نامهای ویژه‌ای برای عددها داشته باشند. بنابر آگاهیهایی که به وسیلهٔ «ایاسماپار» کاشف معروف قطب (۱۷۹۰ ـ ۱۸۵۵) به ما رسیده است، در آن زمان، اسکیموها، اگر بیش از سه فرزند داشتند، نمی‌توانستند آنها را بشمارند. با وجود این، اگر یکی از فرزندانشان غایب بود، متوجه می‌شدند؛ یعنی بدون این که برای هرکدام از آنها، نشان ویژهٔ جداگانه‌ای داشته باشند، می‌توانستند حساب آنها را نگه دارند.

همین‌طور، آنها سگهای زیادی داشتند؛ البته نمی‌توانستند تعداد آنها را نام ببرند؛ ولی می‌توانستند شرح کاملی دربارهٔ هر یک از آنها بدهند؛ سگی که در زمستان قحطی به‌دنیا آمد، سگ سفید با لکّه‌های سیاه و غیره.

از قبیله‌های «آبی‌پون» که بین دو رودخانه «ریوبرمه خور» و «ریوسالادو» زندگی می‌کردند و در نتیجه سیاست مستعمراتی اسپانیا، به کلی نابود شده‌اند، داستانهای زیادی از زبان جهانگردان باقی مانده است. یکی از این جهانگردان می‌نویسد، در زبان این قوم، تنها برای عددهای یک، دو و سه، نامی وجود داشته است، با وجود این، وقتی یک «آبی‌پون» بر زین می‌نشست و سگهای متعدد خود را برای شکار جمع می‌کرد، اگر متوجه غیبت یکی از سگها می‌شد، بی‌درنگ به جست و جوی آن می‌پرداخت.

در این مرحله از تکامل، عدد به خودی خود و به عنوان یک مفهوم مستقل درک نمی‌شود؛ بلکه همراه با سایر ویژگیها است و به کیفیت چیزهایی مربوط می‌شود که مجموعه را تشکیل داده‌اند.

طبیعی است، شمردن چیزها و مقایسهٔ تعداد عضوهای مجموعه‌های مختلف، کار دشواری است. آگاهیهای پراکنده‌ای که در نوشته‌های مؤلّفان تمدنهای نخستین وجود دارد، این ادّعا را ثابت می‌کند که عمل شمارش برای قومهای اولّیه، مسألهٔ بغرنجی بوده است که هروقت به آن می‌پرداختند، برایشان بی‌اندازه خسته‌کننده و ملال‌آور بود.

سال ۰

«ک. شتای‌نن» جهانگرد و نژادشناس، نمونهٔ جالبی در این باره نقل می‌کند. او حدود سالهای هشتاد سدهٔ نوزدهم، در عمق جنگلهای آمازون، به قبیلهٔ «باکاایر» برخورد که از نظر تکامل، در سطح پایینی بودند. او بارها از بومیان خواسته بود ده دانه را بشمارند. «آنها به کندی، ولی درست، تا شش دانه را می‌شمردند؛ ولی برای شمردن دانه‌های هفتم و هشتم با ناراحتی متوقف می‌شدند، نشاط خود را از دست می‌دادند، هاج و واج به دور و بر خود نگاه می‌کردند، از دردسری که گرفتارشان کرده بود، غرغر می‌کردند و سرانجام هم یا از پاسخ طفره می‌رفتند و یا پا به فرار می‌گذاشتند.»

در یادداشتهای روزانه و نوشته‌های «میکلو خو ـ ماکلای» مشاهده‌های جالبی دربارهٔ شمار، در میان بومیان گینهٔ نو وجود دارد. وقتی بومیها پرسیدند کشتی کی می‌آید، ماکلای نتوانست پاسخی بدهد؛ ولی «فکر کردم موقع آن است، ببینم بومیها چگونه می‌شمارند. چند نوار کاغذ برداشتم، آنها را از طرف عرض بریدم و به تکّه‌های کوچکتری تقسیم کردم. خودم نفهمیدم چند تکّه بریدم. ولی مشتی از آنها را به یکی از بومیها دادم و گفتم هر کاغذ، به معنای ۲ روز است. همهٔ جمعیت بومی را دوره کرد و او به یاری انگشتانش شمردن را آغاز کرد؛ ولی مثل این که ناراحت بود، یا دست کم دیگران این‌طور گمان کردند که او نمی‌تواند بشمارد. تکّه کاغذها را از او گرفتند و به دیگری دادند. کسی که کاغذهای بریده را گرفت، با غرور خاصی، جایی نشست، یک نفر را هم به یاری خواست و شمردن را آغاز کرد. اوّلی تکّه‌های کاغذ را روی زانویش می‌چید و برای هرکدام تکرار می‌کرد. «ناره، ناره»، (یعنی یکی)؛ دومی واژهٔ «ناره» را تکرار می‌کرد و همراه با آن، یکی از انگشتان خود را می‌بست؛ اوّل انگشتان یک دست و سپس انگشتان دست دوم را. وقتی به ۱۰ رسید و همهٔ انگشتان دو دست او بسته شد، دو مشت بسته خود را تا زانو پایین آورد و با صدای بلند گفت «دو دست». در همین موقع، نفر سوّم به یاری آمد و یکی از انگشتان خود را خم کرد، سپس برای ده تکّه کاغذ دوم، یک انگشت دیگر و برای دههٔ سوّم، انگشت سوّم خود را هم بست. تعداد بقیهٔ تکّه کاغذها به ده نمی‌رسید و آنها را به کناری گذاشتند. به‌نظر می‌رسید کار شمردن تمام شده است؛ ولی من آرامش آنها را به هم زدم؛ یک تکّه کاغذ برداشتم، دو انگشت خود را نشان دادم و گفتم: «بوم، بوم»، (روز، روز). همهمه‌ای درگرفت؛ ولی مسأله را به این ترتیب حل کردند که تکّه‌های کاغذ را با دقت در برگ درخت نان پیچیدند تا در روستا دوباره آنها را بشمارند.»

می‌بینیم، مهارت در شمردن مربوط به وجود نام ویژه‌ای برای عددها یا وجود نمادهایی برای رقمها نیست.

شکل گرفتن عددها را باید از مرحله‌های بالای تکامل شمار دانست. مدتها پیش از آن که نامهای ویژه‌ای برای عددها پیدا شود، برای بیان تعداد چیزها، نامهایی وجود داشت. معلوم شده است نزد برخی از قبیله‌های افریقایی، برای هر یک از حالتهای ۳ گاو، ۳ درخت، ۳ جنگ و غیره نام ویژه‌ای دارند یا برخی از قبیله‌های غرب کانادا که نامی برای عدد ۳ ندارند، برای ۳ چیز از نامهای گوناگونی استفاده می‌کنند. «تخه» ـ سه چیز، «تخانه» ـ سه برگ، «تخات» ـ سه مرتبه، «تخاتوئن» ـ در سه جا و غیره. بومیان فلوریدا برای ۱۰ تخم‌مرغ می‌گویند «نانکوآ» و برای ۱۰ سبد «نا ـ بانارا»؛ ولی به طور جداگانه برای عدد ۱۰ (که به چیزی مقیّد نباشد) از واژهٔ «نا» استفاده نمی‌کنند و برای عدد ۱۰ هیچ واژه‌ای ندارند.

گمان می‌رود، ویژگیهای شمار که سرانجام منجر به نامگذاریهای خاص شده است، کم و بیش به چیزهایی مربوط می‌شود که به یاری آنها شمار انجام می‌گرفته است. روشن است این چیزها، یعنی وسیله‌های کمکی شمار، از بین چیزهایی انتخاب می‌شد که به انسان نزدیکتر است؛ مثل عضوهای بدن. همین حقیقت را در مطلبی که از «میکلوخو ـ ماکلای» آوردیم، دیدیم. در آن‌جا بومیها از انگشتان دست خود استفاده می‌کردند. و این، منحصر به آنها نیست و در جاهای دیگر هم می‌توان با آن برخورد کرد. نویسنده «ضددوریگند» دراین باره می‌گوید: «مفهومهای عدد و شکل، از جایی جز جهان واقعی، گرفته نشده است. ده انگشت که انسان شمردن، یعنی نخستین عمل حساب را روی آنها یاد گرفت، همه چیز هست جز محصولی که زاییدهٔ اندیشهٔ خالص باشد. برای شمردن، نه تنها باید چیزهایی داشته باشیم که آنها را بشماریم؛ بلکه باید این استعداد را هم داشته باشیم که، ضمن بررسی این چیزها، هر ویژگی دیگری جز شمار را، از آن جدا کنیم و این استعداد هم، در نتیجهٔ تکامل تاریخی طولانی که متّکی بر تجربه باشد، به‌دست می‌آید».



۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

برای نمونه یادآور می‌شویم، بین قبیله‌های جزیرهٔ مارولاگ در تنگهٔ تورِس، این نامها برای عددهای مضرب ۵ وجود دارد :

۵ ـ«دست»، ۱۰ـ دست‌دست، ۱۵ـ پا، ۲۰ـ پا و دست. درضمن، برای ۵ می‌گویند «نابی‌گت» که به معنای «به اندازهٔ انگشتان دست» است ؛ نه نام عدد ۵.

میکلوخو ـ ماکلای، دربارهٔ عدد شماری بومیان گینهٔ نو می‌نویسد :

«بومیان، روش جالبی برای شمردن دارند ؛ آنها انگشتان خود را یکی پس از دیگری می‌بندند و صدای معینی را تکرار می‌کنند. وقتی به پنج می‌رسند، می‌گویند «دست». بعد، آغاز به بستن انگشتان دست دیگر خود می‌کنند ... تا به «دو دست» برسند... و برای ۱۵ «یک پا» و برای ۲۰ «دوپا». اگر لازم باشد باز هم بعد از آن را بشمارند، از انگشتان دست و پای دیگری استفادهٔ می‌کنند.»

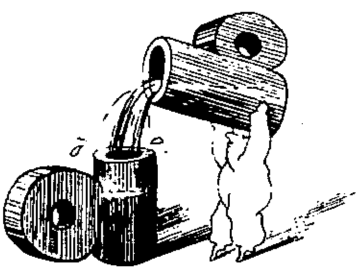
شتای‌نن، در کتابی که دربارهٔ قبیله‌های «باکاایر» نوشته است، دربارهٔ استفاده از اندامهای بدن برای شمار می‌نویسد : «وقتی باکاایرها آغاز به شمردن می‌کنند، انگشت کوچک دست چپ خود را می‌گیرند و می‌گویند «توکاله». بعد انگشت میانهٔ کوچکتر خود را به آن اضافه می‌کنند و می‌گویند «آخاگه». سپس انگشت میانهٔ بزرگتر را و می‌گویند «آخاگه ـ توکاله» بعد با اضافه کردن انگشت نشانه می‌گویند «آخاگه ـ آخاگه». سرانجام با اضافه کردن انگشت شست می‌گویند «آخاگه ـ آخاگه ـ توکاله» بعد نوبت به انگشتان دست راست می‌رسد و هربار می‌گویند «مه‌را» (این). به همین‌ترتیب به انگشتان پای چپ و بعد پای راست خود می‌رسند و هر بار واژهٔ «مه را» را تکرار می‌کنند. اگر به بیش از آن نیاز به شمردن داشته باشند، موهای خود را می‌گیرند و به این ور و آن ور می‌کشند».

توجه به این مطلب جالب است که قبیله‌های باکاایر، برای نامگذاری عددها، تنها از دو واژه استفاده می‌کنند : «توکاله» و «آخاگه». در بسیاری زبانها نامگذاری نخستین عددها با نامهای اندامهای انسان یا حیوان، بستگی نزدیک دارد و اغلب این نامها هنوز هم وجود دارد. برای نمونه، در زبان چینی، هم به عدد ۲ و هم به گوش‌ها «یو» می‌گویند. در تبت، واژهٔ «پات شا» هم به معنای ۲ و هم به معنای بال است و بین «گوتن توت‌ها» واژهٔ «تکوآم» هم به معنای ۲ و هم به معنای دست است.

نباید گمان کرد، گواهی نژادشناسی از این گونه، می‌تواند ما را به واقع، به زمانهای گذشته ببرد ؛ چرا که زندگی مردم امروزی در آگاهیهای ریاضی بومیها بی‌اثر نبوده است.



تفریح اندیشه ۱



ظرف A یک لیتر آب و ظرف B یک لیتر شیر دارد.

مهرداد ۰/۵ لیتر از آب ظرف A را در ظرف B می‌ریزد و آن را به آرامی هم می‌زند. آن‌گاه $\frac{1}{4}$ لیتر از این مخلوط را در ظرف می‌ریزد، به آرامی ظرف A را هم می‌زند و از این مخلوط $\frac{1}{4}$ لیتر را در ظرف B خالی می‌کند. پس از هم زدن محتوی ظرف، ۰/۵ لیتر از آن را در ظرف A می‌ریزد.

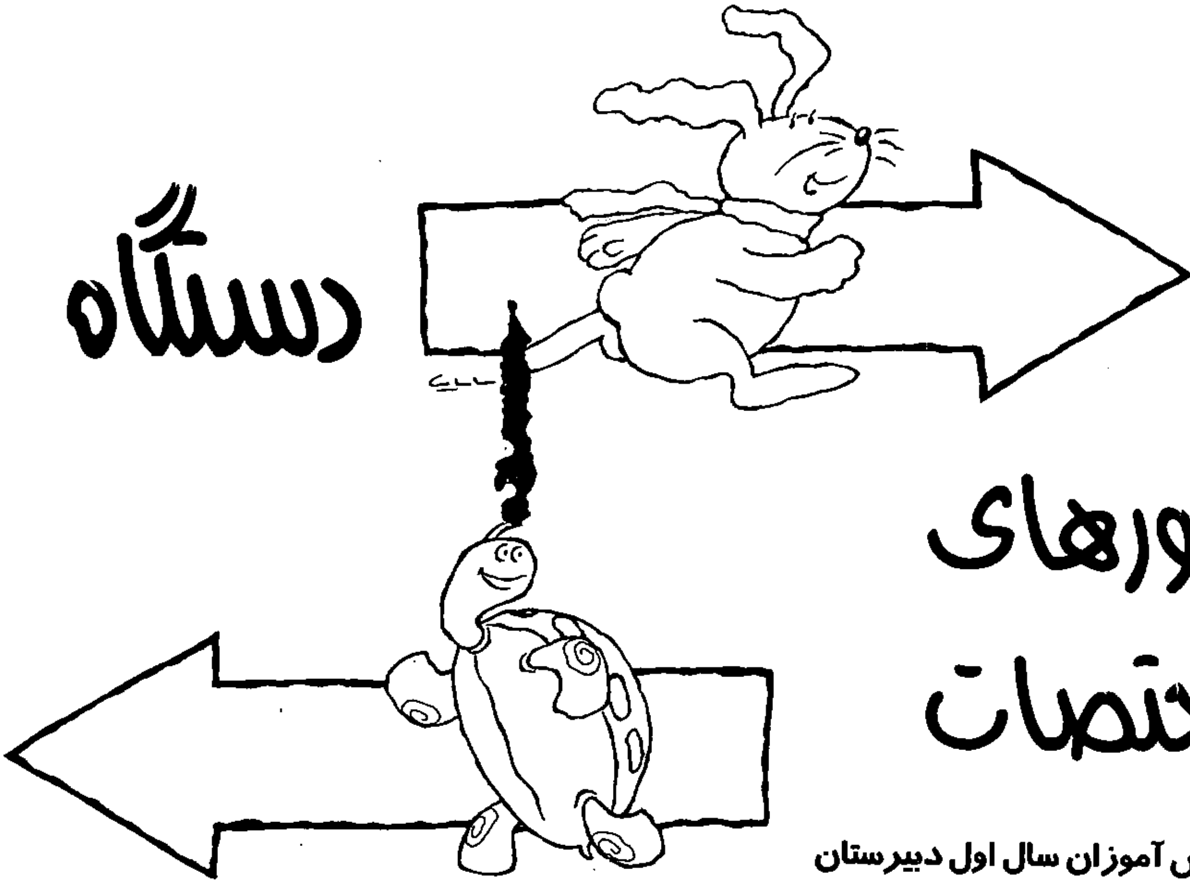
مشخص کنید پس از انجام این اعمال مقدار شیر موجود در ظرف A بیشتر است یا مقدار آب موجود در ظرف B ؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

● احمد قندهاری

دستگاه محورهای مختصات

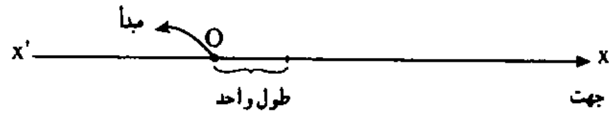


برای دانش آموزان سال اول دبیرستان

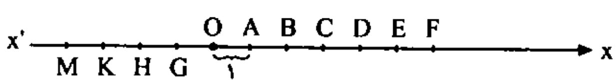
۱ـ۱ تعریف محور

خطّی است جهت‌دار که روی آن نقطه‌ای به‌نام مبدأ و طولی به‌نام واحد اندازه‌گیری درنظر گرفته شده باشد. پس یک محور، سه مشخصه دارد :

۱ـ جهت، ۲ـ نقطه‌ای به‌نام مبدأ، ۳ـ طولی به‌نام واحد.



محور زیر را با نقاط روی آن درنظر می‌گیریم.



با توجه به شکل می‌توان نوشت :

$\overline{OA} = +۱$ | $\overline{OF} = +۶$

$\overline{OB} = +۲$ | $\overline{OG} = -۱$

$\overline{OC} = +۳$ | $\overline{OH} = -۲$

$\overline{OD} = +۴$ | $\overline{OK} = -۳$

$\overline{OE} = +۵$ | $\overline{OM} = -۴$

بنا به تعریف، $\overline{OA}$ را x_A، $\overline{OB}$ را x_B، $\overline{OC}$ را x_C و... می‌نامیم. پس :

$x_A = +۱$ | $x_F = +۶$

$x_B = +۲$ | $x_G = -۱$

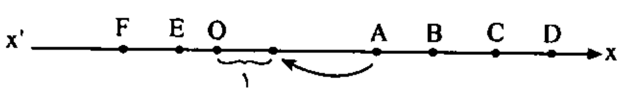
$x_C = +۳$ | $x_H = -۲$

$x_D = +۴$ | $x_K = -۳$

$x_E = +۵$ | $x_M = -۴$

توجه: محورهای فوق را $x'Ox$ می‌نامیم.

محور زیر را درنظر می‌گیریم.



می‌توان نوشت :

$\overline{OA} = x_A$ | $\overline{OD} = x_D$

$\overline{OB} = x_B$ | $\overline{OE} = x_E$

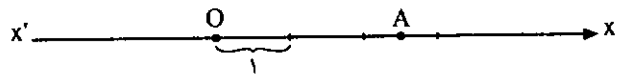
$\overline{OC} = x_C$ | $\overline{OF} = x_F$

پس هر نقطه که روی محور $x'Ox$ واقع باشد، دارای (x)ای است. این x را در اصطلاح، طول نقطه گوییم.

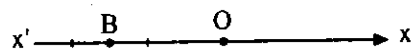
بنابراین، هر نقطه که روی محور ($x'Ox$) باشد، دارای طول است، که این طول، یک عدد حقیقی است و بعکس، هر عدد حقیقی می‌تواند یک نقطه را روی محور نشان دهد، که طول آن نقطه برابر همان عدد حقیقی است.

مثلاً روی محور

$x_A = +۲/۵$



و اگر عدد $(-\frac{۳}{۲})$ را درنظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم که این عدد، نقطه‌ای مانند B را روی

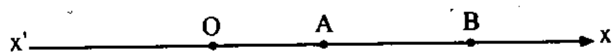


مشخص می‌کند.

۱ـ۲ اندازهٔ جبری پاره‌خط AB

اندازهٔ جبری پاره‌خط AB را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم و طول پاره‌خط AB را با AB نشان می‌دهیم ؛ یعنی : $|\overline{AB}| = AB$.

فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B روی محور ($x'Ox$) شکل زیر داشته باشیم ؛



می‌توانیم بنویسیم :

$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

$\Rightarrow x_A + \overline{AB} = x_B$

$\Rightarrow \boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$

مثال: اگر $x_A = ۲$ و $x_B = ۵$ باشد، اندازهٔ جبری $\overline{AB}$ را بیابید.

$\overline{AB} = x_B - x_A$

$\overline{AB} = ۵ - ۲$

$\boxed{\overline{AB} = +۳}$

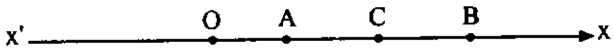
مثال: اگر $\overline{AB} = ۵$ و $x_B = ۷$ ، طول نقطهٔ A را بیابید.

$\overline{AB} = x_B - x_A$

$۵ = ۷ - x_A \Rightarrow +x_A = ۷ - ۵ \Rightarrow \boxed{x_A = ۲}$

۱ـ۳ طول نقطهٔ C وسط AB

فرض می‌کنیم نقطهٔ C وسط AB روی محور $x'Ox$



باشد،داریم : $\overline{AC} = \overline{CB}$.

با توجه به شکل می‌توان نوشت :

$$\begin{cases}\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}\\ \overline{OC} = \overline{OB} - \overline{CB}\end{cases}$$

جمع می‌کنیم $\Rightarrow ۲\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$

$\Rightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_C = \frac{x_A + x_B}{۲}}$

مثال: اگر $x_A = ۵$ و $x_B = -۷$ ، آن‌گاه طول نقطهٔ C وسط AB چه‌قدر است؟

$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_C = \frac{۵ - ۷}{۲} \Rightarrow \boxed{x_C = -۱}$

مسأله: اگر نقطهٔ C وسط AB باشد و داشته باشیم $x_C = ۴$ و $\overline{AB} = ۱۰$ ، x_A و x_B را بیابید.

حل:

$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow \boxed{x_A + x_B = ۸}$

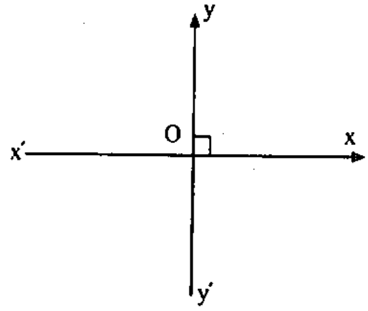
$\overline{AB} = x_B - x_A \Rightarrow ۱۰ = x_B - x_A \Rightarrow \boxed{x_B - x_A = ۱۰}$

$$\begin{cases}x_A + x_B = ۸\\ x_B - x_A = ۱۰\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲x_B = ۱۸ \Rightarrow \boxed{x_B = ۹}$$

$x_A + x_B = ۸ \Rightarrow x_A + ۹ = ۸ \Rightarrow \boxed{x_A = -۱}$

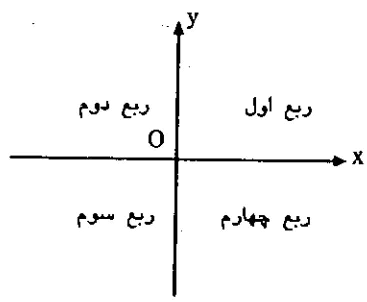
۴ـ۱ صفحهٔ محورهای مختصات

هرگاه دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ در نقطهٔ O بر یکدیگر عمود باشند، آنها را محورهای مختصات یا صفحهٔ محورهای مختصات گوییم. معمولاً محور $x'Ox$ را افقی (موازی سطرهای همین مجلهٔ برهان) رسم می‌کنیم.



محور $x'Ox$ را محور xها یا محور طولها و محور $y'Oy$ را محور yها یا محور عرضها گوییم. این دو محور را به‌صورت (xOy) نشان می‌دهیم.

این دو محور، صفحهٔ کتاب یا دفتر را به چهار ناحیه یا چهار ربع تقسیم می‌کند، که به ربع اول، ربع دوم، ربع سوم و ربع چهارم معروف است.

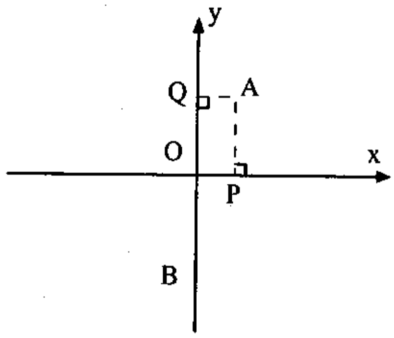


هر نقطه که در صفحهٔ محورهای مختصات واقع باشد، دارای طول و عرض است و بعکس، هر نقطه که دارای طول و عرض باشد، یک نقطه از صفحهٔ محورهای مختصات را مشخص می‌کند.
اگر نقطه‌ای مانند A در صفحهٔ محورها داشته باشیم، چنانچه از نقطهٔ A عمودی بر محور xها رسم کنیم و پای عمود را P بنامیم، داریم:

$\overline{OP} = x_A$ (شکل زیر)

و اگر از نقطهٔ A خطی بر محور yها عمود کنیم و پای عمود را Q بنامیم، داریم:

$\overline{OQ} = y_A$ (شکل زیر)



طول و عرض نقطهٔ A را مختصات نقطهٔ A گوییم. اگر طول A مساوی (۳) و عرض A مساوی (۲) باشد، می‌نویسیم:

$A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ یا $A(۳,۲)$ یا $A\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$

اگر $A\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$ باشد و بخواهیم جای نقطهٔ A را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص کنیم، باید روی محور xها (۳) واحد مثبت جدا کنیم و روی محور yها (۲) واحد مثبت جدا کنیم. از این نقاط، خطوطی عمود بر محورها رسم کنیم، نقطهٔ برخورد این دو عمود، نقطهٔ A را نشان می‌دهد.

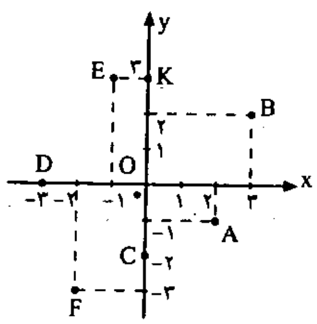
توجه: هر نقطه که روی محور xها باشد، عرض آن صفر است؛ مانند:

$A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix}\right.$

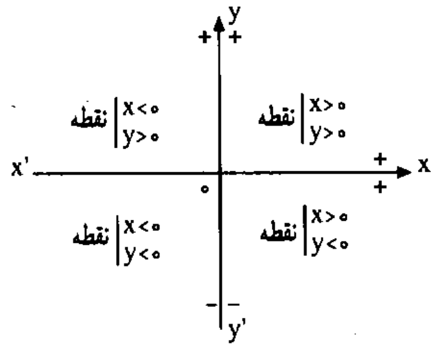
و هر نقطه که روی محور yها باشد، طول آن صفر است؛ مانند:

$B\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۳ \end{matrix}\right.$

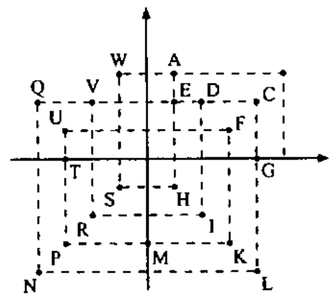
مثال: جای نقاط $A\left|\begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix}\right.$، $B\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$، $C\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۲ \end{matrix}\right.$، $D\left|\begin{matrix} -۳ \\ ۰ \end{matrix}\right.$، $E\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۳ \end{matrix}\right.$، $F\left|\begin{matrix} -۲ \\ -۳ \end{matrix}\right.$ و $K\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۳ \end{matrix}\right.$ را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص کنید.



به دستگاه مختصات زیر توجه کنید.
مثبت و منفی بودن مختصات یک نقطه در چهار ربع، مشخص است.



تمرین: مختصات نقاط شکل زیر را بنویسید.



مسأله: نقطهٔ $A\begin{vmatrix} ۲m-۶ \\ m-۲ \end{vmatrix}$ مفروض است، m را چنان بیابید تا

۱ـ نقطهٔ A روی محور xها باشد.
۲ـ نقطهٔ A روی محور yها باشد.
۳ـ نقطهٔ A در ربع اوّل باشد.
۴ـ نقطهٔ A در ربع دوم باشد.
۵ـ نقطهٔ A در ربع سوم باشد.
۶ـ نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

حلّ ۱ : $y_A = ۰ \Rightarrow m-۲=۰ \Rightarrow m=۲$

حلّ ۲ : $x_A = ۰ \Rightarrow ۲m-۶=۰ \Rightarrow m=۳$

حلّ ۳ : $\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶>۰ \\ m-۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۳ \\ m>۲ \end{cases} \Rightarrow m>۳$

حلّ ۴ :

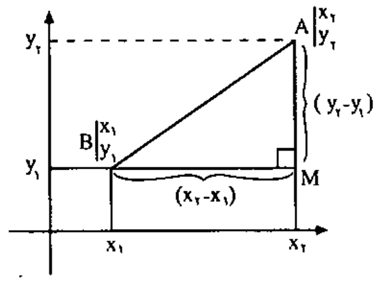
$\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶<۰ \\ m-۲>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<۳ \\ m>۲ \end{cases} \Rightarrow ۲<m<۳$

حلّ ۵ : $\begin{cases} x_A < ۰ \\ y_A < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶<۰ \\ m-۲<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<۳ \\ m<۲ \end{cases} \Rightarrow m<۲$

حلّ ۶ : $\begin{cases} x_A > ۰ \\ y_A < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۶>۰ \\ m-۲<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>۳ \\ m<۲ \end{cases}$ غیر ممکن

۱ـ۵ طول پاره‌خط AB

شکل زیر را درنظر می‌گیریم.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\hat{M}B$ می‌توان نوشت :

$$AB^۲ = BM^۲ + AM^۲$$

$$AB = \sqrt{BM^۲ + AM^۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_۲-x_۱)^۲ + (y_۲-y_۱)^۲}}$$

مثال: اگر $A\begin{vmatrix} ۵ \\ ۱ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۱ \\ -۲ \end{vmatrix}$ باشد. مطلوب است تعیین طول پاره‌خط AB.

$$A\begin{vmatrix} ۵=x_۲ \\ ۱=y_۲ \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} ۱=x_۱ \\ -۲=y_۲ \end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_۲-x_۱)^۲ + (y_۲-y_۱)^۲} = \sqrt{(۵-۱)^۲ + (۱+۲)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} \Rightarrow AB = ۵$$

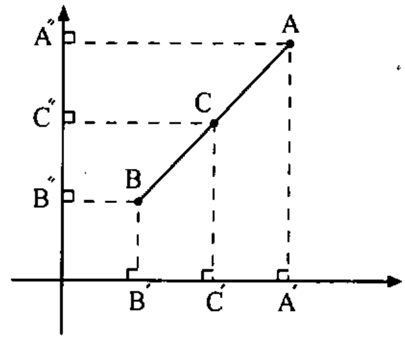
مثال: نقطهٔ A به طول (۶) روی محور xها و نقطهٔ B به عرض (۸) روی محور yها واقع است. طول پاره‌خط AB را بیابید.

$$A\begin{vmatrix} ۶=x_۲ \\ ۰=y_۲ \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} ۰=x_۱ \\ ۸=y_۱ \end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_۲-x_۱)^۲ + (y_۲-y_۱)^۲} = \sqrt{(۶-۰)^۲ + (۰-۸)^۲}$$
$$= \sqrt{۳۶+۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

۱ـ۶ مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB

شکل زیر را درنظر می‌گیریم و نقطهٔ C وسط AB است.



چون نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است، به‌سادگی ثابت می‌شود که C' وسط $A'B'$ و C'' وسط $A''B''$ است.

$$x_{C'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_C = \frac{x_A + x_B}{۲}}$$

$$y_{C''} = \frac{y_{A''} + y_{B''}}{۲} \Rightarrow \boxed{y_C = \frac{y_A + y_B}{۲}}$$

مثال: اگر $A\begin{vmatrix}۲\\۵\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۴\\۳\end{vmatrix}$ باشد، مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB را بیابید.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲+۴}{۲} = ۳$$
$$y_C = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۵+۳}{۲} = ۴ \quad \Rightarrow C\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}$$

مثال: اگر $M\begin{vmatrix}۱\\۴\end{vmatrix}$ نقطهٔ وسط پاره‌خط KF باشد ؛ به‌طوری که $K\begin{vmatrix}۰\\۳\end{vmatrix}$، آن‌گاه مختصات نقطهٔ F را بیابید.

$$x_M = \frac{x_K + x_F}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۰ + x_F}{۲} \Rightarrow x_F = ۲$$

$$y_M = \frac{y_K + y_F}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۳ + y_F}{۲} \Rightarrow ۳ + y_F = ۸$$

$$\Rightarrow y_F = ۵ \Rightarrow F\begin{vmatrix}۲\\۵\end{vmatrix}$$

تمرین: نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۲m+۶\\-m+۱\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات xOy مفروض است. m را چنان بیابید که ۱ـ نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد. ۲ـ نقطهٔ A در ربع اوّل باشد. ۳ـ نقطهٔ A در ربع دوم باشد. ۴ـ نقطهٔ A در ربع سوّم باشد. ۵ـ نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

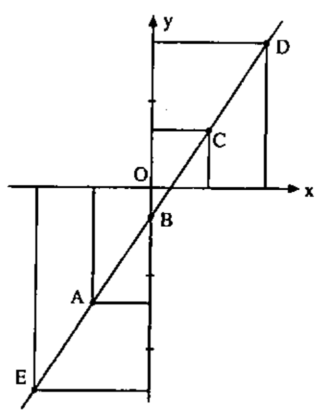
تمرین: نقطهٔ $A\begin{vmatrix}m^۲-۵m+۴\\m^۲-۳m+۲\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض است. m را چنان بیابید تا ۱ـ نقطهٔ A روی محور xها باشد. ۲ـ نقطهٔ A روی محور yها باشد. ۳ـ نقطهٔ A روی مبدأ مختصات باشد. ۴ـ نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد.

۷ـ۱ معادلهٔ خط

هر رابطهٔ درجهٔ اوّل بین x و y مانند : $y = ۲x - ۱$ ، $y = x + ۲$ و $۲x + ۴y = ۸$ را معادلهٔ خط گویند.

ممکن است معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + n$ یا $ax + by + c = ۰$ باشد که m، n، a، b و c اعداد حقیقی‌اند (a، b و c با هم صفر نیستند). حال می‌خواهیم خط $y = ۲x - ۱$ را رسم کنیم. به x چند عدد دلخواه نسبت می‌دهیم و y آنها را پیدا می‌کنیم. زوج مرتبهایی به‌دست می‌آید که هرکدام، مختصات یک نقطهٔ متعلق به خط است. جای این نقاط را در صفحهٔ محورها مشخص می‌کنیم و سپس آنها را به هم وصل می‌کنیم.

x	y	(x,y)
−۱	−۳	(−۱,−۳):A
۰	−۱	(۰,−۱) : B
۱	۱	(۱,۱) : C
۲	۳	(۲,۳) : D
−۲	−۵	(−۲,−۵):E

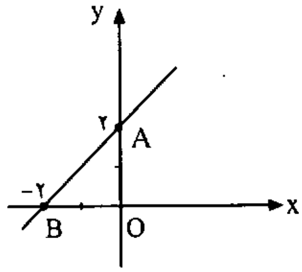


توجه: برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از آن را پیدا کنیم سپس جای این دو نقطه را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص کرده، آنها را به هم وصل کنیم و امتداد دهیم.

مثال: خط $y = x + ۲$ را رسم کنید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰,۲)$

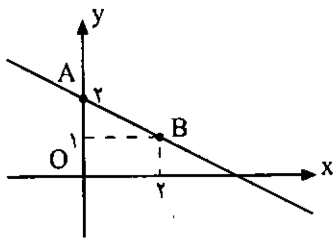
$x = -۲ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow B(-۲,۰)$



مثال: خط $۲x + ۴y = ۸$ را رسم کنید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰,۲)$

$x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow B(۲,۱)$

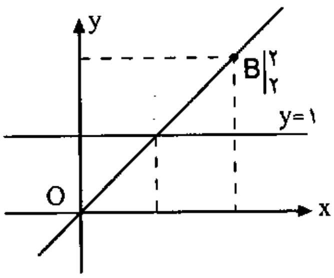


مثال: نمودار به معادلهٔ $xy - y^۲ - x + y = ۰$ را رسم کنید.

$xy - y^۲ - x + y = ۰$

$y(x - y) - (x - y) = ۰$

$(x - y)(y - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = ۱ \end{cases}$ یا $\Rightarrow O\Big|_{۰}^{۰}$ و $B\Big|_{۲}^{۲}$



۱ـ۸ شیب یک خط

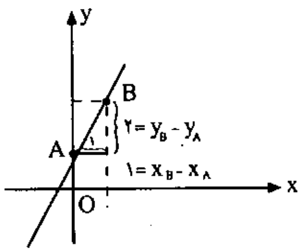
بنا به تعریف : $\dfrac{\text{تفاضل عرضهای دو نقطه از خط}}{\text{تفاضل طولهای همان دو نقطه}}$ را شیب‌خط گوییم.

مثال: شیب خط $y = ۲x + ۱$ را بیابید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow A\Big|_{۱}^{۰}$

$x = ۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow B\Big|_{۳}^{۱}$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳ - ۱}{۱ - ۰} = \frac{۲}{۱} = ۲$$



تمرین: شیب خطهای زیر را بیابید.

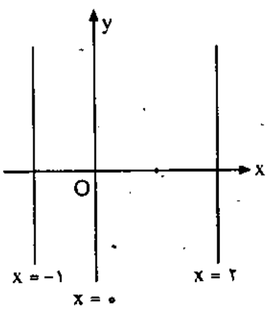
$y = -x$ $y = ۴x + ۱$

$y = \frac{۱}{۲}x - ۵$

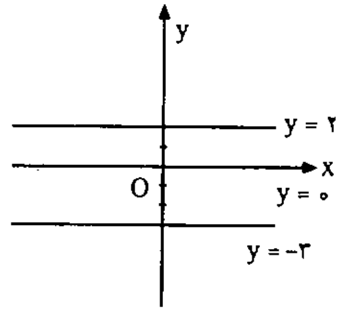
۱ـ۹ انواع خط

خط نوع اوّل: به‌صورت x=a است ؛ مانند : x=۲، x=۰ و x = -۱ . شیب این خطها تعریف نشده است و نمودار آنها راستایی است عمود بر محور xها.

مثال: خطهای x=۲، x=۰ و x = -۱ را رسم کنید.



خط نوع دوم: به‌صورت $y=b$ است ؛ مانند : $y=۲$، $y=۰$ و $y=-۳$. شیب این خطها صفر است و نمودار آنها راستایی است موازی محور xها.



مثال: خطهای $y=۲$ ، $y=۰$ و $y=-۳$ را رسم کنید.

خط نوع سوم: به‌صورت $y=mx$ است ؛ مانند : $y=۲x$، $y=-x$ و $y=\frac{۱}{۲}x$.

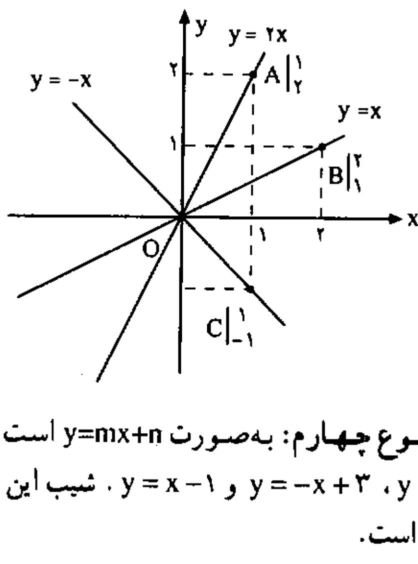
شیب این خطها عدد (m) است. برای رسم این خطها یک نقطه از خط را پیدا می‌کنیم، سپس آن را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

مثال: خطهای مقابل را رسم کنید.

$$y=۲x \qquad A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$$

$$y=-x \qquad C\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.$$

$$y=\frac{۱}{۲}x \qquad B\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$$



خط نوع چهارم: به‌صورت $y=mx+n$ است ؛ مانند : $y=۲x+۲$ ، $y=-x+۳$ و $y=x-۱$. شیب این خطها هم عدد (m) است.

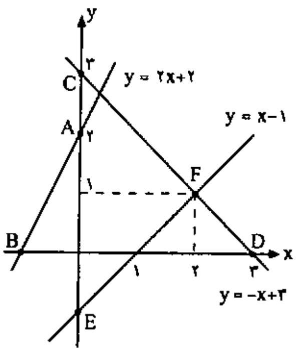
برای رسم آنها باید مختصات دو نقطهٔ آنها را پیدا کرد، سپس آنها را به هم وصل نمود و امتداد داد.

مثال: سه خط فوق را رسم کنید.

$$y=۲x+۲ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. , \ B\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$$

$$y=-x+۳ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right. , \ D\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$$

$$y=x-۱ \Rightarrow E\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. , \ F\left|\begin{matrix}+۲\\۱\end{matrix}\right.$$



توجه: اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax+by+c=۰$، آن‌گاه شیب خط $(-\frac{a}{b})$ است.

۱۰-۱ مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط

در شکل فوق نقطهٔ $F\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ نقطهٔ تقاطع دو خط $y=-x+۳$ و $y=x-۱$ است. برای تعیین مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط، معادله‌های آنها را مانند دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی حل می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y=-x+۳$ و $y=x-۱$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases}y=-x+۳\\y=x-۱\end{cases} \Rightarrow x-۱=-x+۳$$

$$\Rightarrow x+x=۳+۱ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

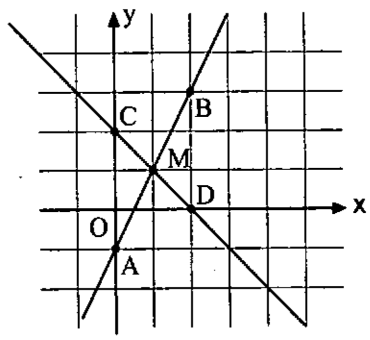
$$y=x-۱ \Rightarrow y=۲-۱ \Rightarrow \boxed{y=۱}$$

$\Rightarrow F\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ مختصات نقطه تقاطع دو خط است.

اگر بخواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط را به‌وسیلهٔ رسم پیدا کنیم، باید نمودارهای دو خط را در یک صفحهٔ شطرنجی (اگر دقیقتر بخواهیم باید در یک صفحهٔ میلیمتری) رسم کنیم، سپس مختصات نقطهٔ تقاطع آنها در شکل دیده می‌شود، مانند مثال زیر.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط زیر را به کمک شکل بیابید.

$$\begin{cases} y=۲x-۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. \\ y=-x+۲ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. ,\quad D\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$

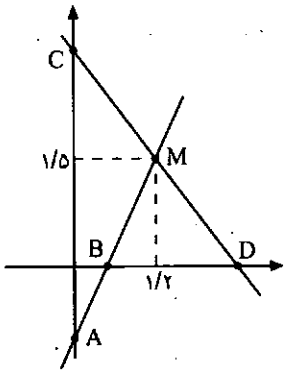


به‌طوری که در نمودار مشخص شده است، نقطهٔ M نقطهٔ تقاطع آنهاست که مختصات آن (۱، ۱) است ؛ پس : $M\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y=۲x-۱$ و $y=-۲x+۴$ را به روش ترسیم بیابید.

$$y=۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \\ y=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow B\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$

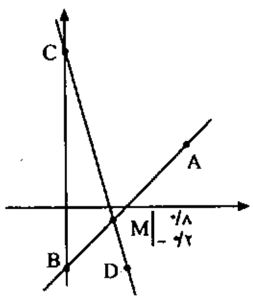
$$y=-۲x+۴ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right. \\ y=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$



مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط به معادله‌های $y=x-۱$ و $y=-۴x+۳$ را بیابید.

$$y=x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. \\ x=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow B\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$y=-۴x+۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right. \\ x=۱ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow D\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right. \end{cases}$$



مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط به معادله‌های زیر را بیابید.

$$\begin{cases} y=x-۳ \\ y=-۲x \end{cases} \Rightarrow x-۳=-۲x$$

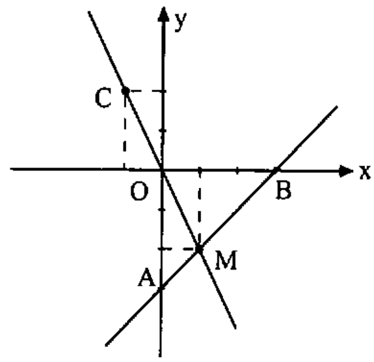
$$\Rightarrow x+۲x=۳ \Rightarrow ۳x=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=-۲$$

$$\Rightarrow M\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$$ نقطهٔ تقاطع

و نمودارهای آنها چنین است :

$$y=x-۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۳ \Rightarrow A(۰,-۳) \\ y=۰ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow B(۳,۰) \end{cases}$$

$$y=-2x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow O(0,0) \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(-1,2) \end{cases}$$

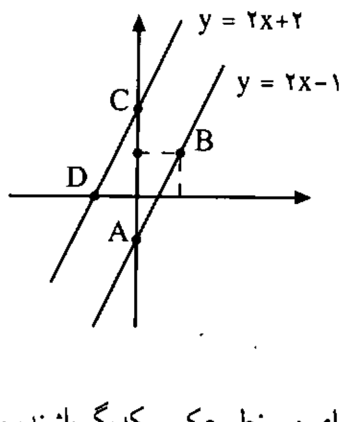


۱۱ـ۱ مطالبی دربارهٔ شیبهای دو خط

۱ـ اگر شیبهای دو خط برابر باشند، آن‌گاه آن دو خط موازیند و نقطهٔ تقاطع ندارند؛ مانند دو خط: $y=2x-1$ و $y=2x+2$.

$$y=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(0,-1) \\ x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow B(1,1) \end{cases}$$

$$y=2x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(0,2) \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow D(-1,0) \end{cases}$$

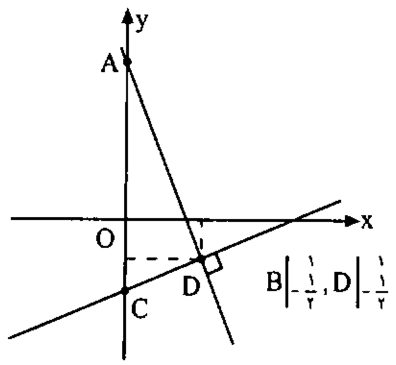


۲ـ اگر شیبهای دو خط، عکس یکدیگر باشند، ولی علامتهای آنها یکی مثبت و دیگری منفی باشند، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند و یک نقطهٔ تقاطع دارند (دو خط در نقطهٔ تقاطع بر هم عمودند).

مثال: دو خط به معادله‌های $y=-2x+\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}x-1$ بر هم عمودند، زیرا شیب اوّلی ۲- و شیب دومی $(\frac{1}{2})$ است.

$$y=-2x+\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2} \Rightarrow A(0,\frac{3}{2}) \\ x=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow B(1,-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2}x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow C(0,-1) \\ x=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow D(1,-\frac{1}{2}) \end{cases}$$



به‌طوری که ملاحظه می‌شود، نقطهٔ D و نقطهٔ B هر دو یکی هستند و مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط است.

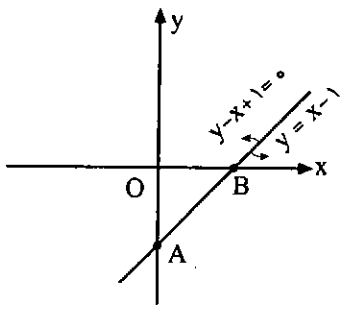
۳ـ اگر شیبهای دو خط مساوی نباشند، دو خط متقاطعند. (چنانچه شیبهای دو خط عکس یکدیگر با علامت مخالف باشند، هم متقاطعند و هم بر هم عمودند.) مانند دو خط به معادله‌های $y=x-3$ و $y=-2x$ که متقاطعند.

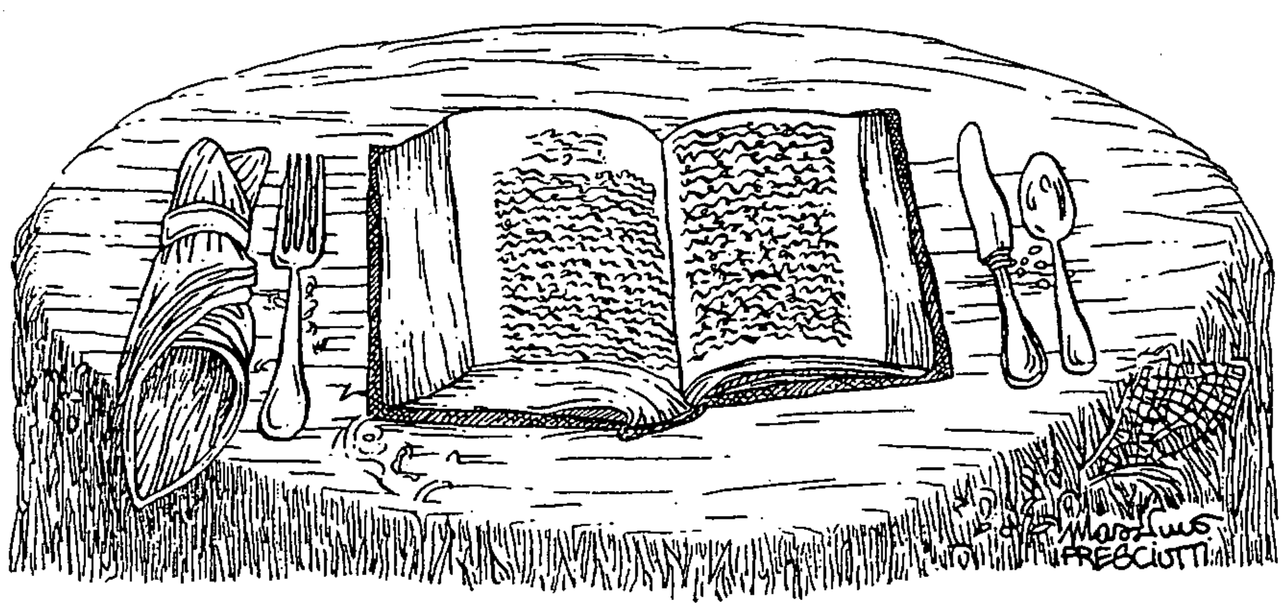
۴ـ اگر هم شیبهای دو خط مساوی و هم عدد ثابت آنها مساوی باشند، آن‌گاه دو خط بر هم منطبقند و بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند؛ مانند:

$$y-x+1=0 \;,\; y=x-1$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(0,-1)$$

$$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow B(1,0)$$





مسألهٔ حلّ مسأله های ریاضی (۵)

● عبدالحسین مصحفی

تمرین آزمونهای با پرسشهای چندگزینه‌ای

به کامیابی در یک آزمون، آن‌گاه می‌توانید امیدوار باشید که برای آن هم مجهز شده و هم خود را ورزیده کرده باشید. آنچه را آموخته‌اید، بویژه با توجه به نکته‌های درآمیخته با آنها را، اگر خوب فهمیده و خوب به خاط سپرده باشید، و مسأله‌هایی هر چه بیشتر را در زمینهٔ آن آموخته‌ها اگر حل کرده باشید، خود را مجهز کرده‌اید. برای آن‌که ورزیده هم باشید، یک روش نتیجه‌بخش آن است که آزمونهایی همسان آن آزمون را که بناست در آن شرکت کنید، تمرین کنید. این تمرین را از هر راه که انجام دهید، آن‌گاه ورزیدگی شما را در پی خواهد داشت که ذهن شما را به کنشها و واکنشهای لازم وادارد. برای این کار، لازم است که هر تمرین در دو مرحلهٔ *خودآزمایی* و *خودورزی* انجام گیرد. در مرحلهٔ خودآزمایی، به سان آن‌که در جلسهٔ آزمون هستید، عمل می‌کنید و جمع امتیازی را که به‌دست می‌آورید، حساب می‌کنید. در مرحلهٔ خودورزی، با مراجعه به کتابهای درسی و کمک درسی، و به یادداشتهایی که در آن زمینه‌ها داشته‌اید، معلوم می‌کنید آن پرسشهایی را که پاسخ درست نداده‌اید، به چه علت بوده است و چه نکته یا نکته‌هایی را متوجه نبوده‌اید. پس از این مرحله، بار دیگر مرحلهٔ خودآزمایی را تکرار می‌کنید و این بار معلوم می‌کنید چند امتیاز بیشتر از بار قبل به‌دست می‌آورید. فرایند دو مرحله‌ای خودآزمایی و خودورزی را اگر لازم بدانید، تکرار می‌کنید تا این‌که امتیازی را در خودآزمایی به‌دست آورید که خوشایندتان باشد.

خودآزمایی

برای هر مجموعه، پرسشهای ریاضی (یا درسی دیگر) از آزمونهای انجام گرفته که در دسترس دارید، به ترتیب زیر عمل کنید:

۱. جدولی به شکل صفحهٔ بعد را، که آن را *جدول ارزشیابی* می‌نامیم، رسم کنید و آماده داشته باشید:

تعداد پرسشها برابر با ۶۰ فرض شده است.

۲. یک ساعت را روبه‌روی خود بگذارید، فرض کنید در

شمارهٔ پرسش	گزینه‌ها				ارزش	
	الف	ب	ج	د	درست	نادرست
۱						
۲						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۵۹						
۶۰						
جمع ارزشها :						

جلسهٔ آزمون هستید، زمانی را که ساعت نشان می‌دهد، در نظر بگیرید و کار را آغاز کنید.

۳. پرسشها را بترتیب و بدقّت از نظر بگذرانید و هر کدام را که می‌بینید جوابش ساده است و آن را می‌دانید، در جدول آماده شده در برابر شمارهٔ آن پرسش و در ستون گزینه‌ها زیر کد آن پرسش (الف، ب، ج یا د) یک نشانه بگذارید. خود را روی هیچ‌یک از پرسشها زیاد معطّل نکنید. به آخرین پرسش که رسیدید، به آغاز آنها برگردید و آنهایی را که پاسخ نداده‌اید، باز هم هر کدامشان را که آسانتر می‌یابید، بار دیگر مرور کنید و گزینهٔ پذیرفتنی آن را که شناختید، در جدول نشانه بگذارید. این فرایند را تکرار کنید و آن‌گاه که لحظهٔ پایان مدت زمان آن آزمون (که اگر ۲ ساعت باشد، لحظهٔ پایان ۲ ساعت) فرا رسید، دست از کار بکشید.

۴. جدول خود را با جدول پاسخنامهٔ آزمون بسنجید و در برابر شمارهٔ هر پرسش، بنابر آن‌که انتخاب شما درست باشد یا نادرست، در ستون ارزش، زیر درست یا نادرست نشانه بگذارید. به آخرین شماره که رسیدید، در هر یک از ستونهای درست و نادرست، تعداد نشانه‌ها را بشمارید و عدد به‌دست آمده را زیر آن ستون یادداشت کنید.

۵. تعداد پاسخهای درست را در ۳ ضرب کنید و از حاصلضرب، تعداد پاسخهای نادرست را کم کنید. عدد به‌دست‌آمده، اگر صفر یا منفی باشد، به معنای آن است که هیچ امتیازی به‌دست نیاورده‌اید، و اگر مثبت باشد، آن را در ۱۰۰، ضرب و بر ۱۸۰ تقسیم کنید. حاصل برابر است با درصد امتیازی که در این خودآزمایی به‌دست آورده‌اید. برای مثال، اگر ۳۶ پرسش را پاسخ درست داده باشید، ۱۴ پرسش را یا پاسخ نادرست داده‌اید یا اصلاً پاسخ نداده‌اید و درصد امتیاز شما می‌شود :

$$\frac{(۳۶ \times ۳ - ۱۴) \times ۱۰۰}{۱۸۰} = ۵۲/۲۲ \rightarrow \%۵۲/۲۲$$

خودورزی

امتیازی را که به‌دست آورده‌اید، خوشایند نمی‌یابید ؛ دلیلی است بر این که به گونهٔ شایسته و بایسته آمادگی نداشته‌اید و برای بهتر آماده شدن، باید تلاش کنید. پرسشهای آزمون آزمایشی، بویژه آنهایی که نمرهٔ مثبت نیاورده‌اند، راهنمای خوبی برای جهت دادن به تلاش شما و ابزار کارامدی برای فراهم کردن آمادگی شما به‌شمار می‌آیند. در هر فرصت مناسب و در هر موقع که خسته نباشید و فکرتان به چیزی دیگر مشغول نباشد، پرسشها را از آغاز و بترتیب، یکی یکی انتخاب کنید. پرسش انتخابی یا سؤالی دربارهٔ یک موضوع از متن یکی از درسهاست یا یک مسألهٔ ساده به نظر می‌رسد و یا می‌توان آن را به صورت یک مسألهٔ ساده بیان کرد. این مسأله هم در زمینهٔ یکی از موضوعهای درسی است ؛ بنابراین، با انتخاب هر پرسش، دست‌کم با یکی از موضوعهای درسی سروکار خواهید داشت. در کتابهای درسی و کمک‌درسی، و در یادداشتهایی که دارید، آن موضوع درسی را بیابید، آن را با دقت مطالعه کنید، تمرینها و مسأله‌های مربوط به آن و حلّ آنها را از نظر بگذرانید و سرانجام معلوم کنید پاسخ پرسش انتخابی چیست یا چگونه به‌دست می‌آید و آن را به‌دست آورید. این کار، گونه‌ای بازآموزی و بازشناخت درسها برای شما خواهد بود و برای آن‌که هم در ذهنتان بماند و هم در هر بار دیگر بتوانید به آن مراجعه کنید، در یک دفترچه پس از نوشتن شمارهٔ پرسش، پاسخ و راه‌حلّ آن را یادداشت کنید. دربارهٔ هر پرسش دیگر هم به همین گونه عمل کنید.

در زمینهٔ آمادگی برای آزمونهای با پرسشهای چند گزینه‌ای، کلاسهای حضوری یا مکاتبه‌ای نیز وجود دارد. استفادهٔ از این کلاسها آن‌گاه اثربخش است که کارشان به آزمونهای آزمایشی و محاسبهٔ امتیازها محدود نباشد ؛ بلکه دربارهٔ موضوع هر پرسش و چگونگی دستیابی به پاسخ درست آن نیز توضیح کافی بدهند. یادداشت کردن این توضیحها و کار دوبارهٔ با آنها در خانه نیز،

گونه‌ای خودورزی است.

در بررسی پرسشهایی که در آزمون آزمایشی از آنها نمرهٔ مثبت نیاورده‌اید، گاه به پرسشهایی برخورد می‌کنید که باز هم گمان می‌کنید بدرستی پاسخ داده‌اید و از این‌که در مراجعهٔ به پاسخنامه پاسخ خود را نادرست می‌یابید، تعجب می‌کنید ؛ بویژه که پس از مراجعه به کتاب درسی و مطالعهٔ موضوع آن پرسش، باز هم نمی‌فهمید چرا پاسخ شما نادرست است. در این گونه پرسشها، نکته یا نکته‌هایی در کار است که ممکن است در کتاب درسی در جایی دیگر، و بیشتر در تعریفها، به آن اشاره شده باشد. از این‌رو، در مراجعهٔ به کتابهای درسی در زمینهٔ یک موضوع، به مطالعهٔ قاعده‌ها و فرمولها بسنده نکنید ؛ بلکه تعریفها و یادآوریهای مربوط به آن موضوع را نیز با دقت مطالعه و بررسی کنید.

چند مثال

۱ـ برای آن‌که سه جمله‌ای درجهٔ دوم

$$(a-1)x^2-2bx-1$$

به‌ازای هر مقدار x، برابر با مقداری مثبت باشد، لازم است که :

الف) $b^2+a>1\ ,\ a<1$

ب) $b^2+a>1\ ,\ a>1$

ج) $b^2+a<1\ ,\ a>1$

د) $b^2+a<1\ ,\ a<1$

این پرسش را نخست به صورت یک مسأله بیان می‌کنید : در سه جمله‌ای داده شده، ضریبهای a و b چگونه باشند تا مقدار سه‌جمله‌ای همواره مثبت باشد؟ این را می‌دانید که این موضوع، از آن درسهایی است که سالهای پیش آموخته‌اید. پس به کتابهای درسی آن سالها مراجعه کنید و در فهرست یکی از آنها به‌عنوان «علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم» برمی‌خورید ؛ عنوان را در متن کتاب می‌یابید و از نظر می‌گذرانید. می‌بینید برای علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم، سه حالت بیان شده است. این سه حالت را در دفتر یادداشتهای خود می‌نویسید تا به خاطر داشته باشید و در ضمن، درمی‌یابید برای آن‌که سه جمله‌ای همواره مثبت باشد، باید جواب نداشته باشد و ضریب جملهٔ درجهٔ دوم آن مثبت باشد. در سه جمله‌ای داده شده در پرسش، ضریب جملهٔ درجهٔ دوم برابر $a-1$ است، که باید مثبت باشد و مبین معادله هم $\Delta'=b^2+a-1$ است، که باید منفی باشد ؛ بنابراین :

$$\begin{cases}a-1>0\\ b^2+a-1<0\end{cases}\Rightarrow a>1\ ,\ b^2+a<1$$

و گزینهٔ (ج) پذیرفتنی است.

۲ـ x برابر با چه مقدار باشد تا کسر زیر، برابر با صفر شود :

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+6x-3}$$

الف) $x=1$ یا $x=2$ — ب) تنها آن‌گاه که $x=2$

ج) تنها آن‌گاه که $x=1$ — د) $x=-2$ یا $x=-1$

در رویه‌رویی با این پرسش، بر این باور بوده‌اید که یک کسر آن‌گاه برابر با صفر است که صورت آن صفر باشد. پس سه‌جمله‌ای صورت کسر را برابر صفر قرار داده و معادله را حل کرده، جوابهای $x=1$ و $x=2$ را به‌دست آورده‌اید و بر پایهٔ آن، گزینهٔ (الف) را نشانه زده‌اید. اما هنگام کنترل جوابها در پاسخنامه دیده‌اید که گزینهٔ (ب) پذیرفتنی اعلام شده است. در کتابهای درسی هم که موضوع حلّ معادله‌های کسری را یافته و بررسی کرده‌اید، به علت اختلاف پی نبرده‌اید.

در این‌باره، به یک نکته توجه نداشته‌اید ؛ یک کسر *اگر معین باشد*، آن‌گاه برابر صفر است که صورتش صفر باشد و هرگاه مخرج یک کسر صفر باشد، آن کسر نامعین است. در کسر داده شده در پرسش بالا، آن‌گاه که $x=1$ هم صورت و هم مخرج صفر می‌شوند و کسر نامعین است و از این‌رو $x=1$ پذیرفته نیست و آن‌گاه که $x=2$، صورت کسر صفر می‌شود ؛ اما مخرج کسر صفر نمی‌شود و کسر معین است. بنابراین $x=2$ پذیرفته است.

۳ـ هرگاه α زاویه‌ای باشد که اندازه‌اش بین صفر و ۹۰ درجه است، کدام‌یک از برابریهای زیر می‌تواند درست باشد :

الف) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$

ب) $\sin\alpha.\cos\alpha=-2$

ج) $tg\alpha+cotg\alpha=-1$

د) $\sin\alpha+\cos\alpha=2$

در این پرسش، برابریها را معادله‌هایی دانسته‌اید که باید حل شوند و چون دیده‌اید وقتگیر است، پرسش را رها کرده‌اید و به

پرسشهای دیگر پرداخته‌اید. در مراجعه به متن مثلثات و به موضوع حلّ معادله‌های مثلثاتی، به جایی نرسیده‌اید. اما اگر تعریف هر یک از تابعهای sin x، cos x، tgx و cotgx و تغییرهای آنها را در متن کتاب می‌یافتید و می‌خواندید، و بار دیگر به یاد می‌آوردید که اگر زاویه‌ای حاده باشد، هر یک از تابعهای مثلثاتی چهارگانهٔ بالا مثبت است و همچنین باز به یاد می‌آوردید که sin یک زاویهٔ حاده و cos آن بین صفر و یک واقعند، متوجه می‌شدید که در گزینه‌های (ب) و (ج) طرف اوّل برابری مثبت است و نمی‌تواند با یک مقدار منفی برابر باشد. در گزینهٔ (د) هم، چون $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هر دو نمی‌توانند یک باشند، مجموع آنها از ۲ کوچکتر است و نمی‌تواند برابر با ۲ باشد. بدون آن‌که محاسبه‌ای یا حلّ معادله‌ای لازم باشد، سه گزینهٔ (ب)، (ج) و (د) رد می‌شوند و گزینهٔ (الف) پذیرفته است.

همیاری و پرس‌وجو

خودورزی، که لازم است کامل و صحیح انجام گیرد، در موردهایی لنگ می‌ماند؛ از راه مراجعه به کتابهای درسی و به یادداشتهایی که داشته‌اید، به نکته‌های مربوط به چندتایی از پرسشها نمی‌توانید پی ببرید. برای چاره‌جویی، چند راه در پیش دارید:

ـ کتاب یا جزوه‌ای را به‌دست آورید که راهنمای حل و پاسخگویی به آن پرسشهایی را در برداشته باشد که دربارهٔ آنها مشکل دارید.

ـ در کلاسی شرکت کنید که آن پرسشها و پاسخهایشان تشریح و موشکافی می‌شوند.

ـ دربارهٔ آن پرسشها و پاسخ درست آنها، از دوستان، همکلاسیها و دبیر ریاضی خود پرس‌وجو کنید و راهنمایی بخواهید.

ـ خودورزی را با همکاری و همیاری یکی یا دو نفر از همکلاسیها انجام دهید؛ نه به‌گونه‌ای که یکی گوینده و دیگری شنونده باشد؛ بلکه روی هر پرسش بحث و تبادل نظر داشته باشید. با این روش، در وقت هم صرفه‌جویی کرده‌اید و نتیجه‌ای بهتر را به‌دست می‌آورید.

خودآزمایی مرحلهٔ دوم

خودورزی را که به پایان رساندید و به چون و چرای گزینهٔ پذیرفتنی هر پرسش پی بردید و همه را بترتیب یادداشت کردید، نوبت تکرار خودآزمایی است. همان خودآزمایی قبلی را با همان مجموعهٔ پرسشها و به همان گونه انجام می‌دهید؛ تنها با این تفاوت که مدت آزمون را سه چهارم مدت دفعهٔ قبل می‌گیرید؛ اگر آن بار دو ساعت بوده است، این بار یک‌ساعت‌ونیم باشد. پس از پایان مدت، این بار هم درصد امتیاز خود را حساب می‌کنید. هر چند ممکن است بعضی پرسشها را که آن بار پاسخ درست داده بودید، این بار غیر از آن باشد؛ اما خواهید دید که امتیاز به‌دست آمده، افزایشی چشمگیر داشته است. این امتیاز، خوشایندتان باشد یا نباشد، یک بار دیگر خودورزی و پس از آن باز هم خودآزمایی را با همان شیوه انجام دهید. خودورزی این بار، مطالعهٔ یادداشتهایی خواهد بود که در دفعهٔ قبل فراهم آورده‌اید. این از سرگیری دوباره، هم موجب می‌شود آن نکته‌های تازه‌ای را که دریافته‌اید، بخوبی در ذهنتان جای گیرند و هم این‌که برای سرعت در عمل تمرین کرده‌اید.

فرایندهای خودآزمایی و خودورزی را می‌توانید به همین شیوه که یادآوری شد، روی هر مجموعهٔ پرسشها به‌کار ببرید و آمادگی و ورزیدگی همه جانبه‌ای را برای کامیابی در آزمونی که در پیش دارید، فراهم آورید.

تمرین سرعت عمل

مدت زمان هر آزمون محدود است و سرعت در عمل، یکی از عاملهای تضمین‌کنندهٔ کامیابی، بویژه در آزمونهای با پرسشهای چند گزینه‌ای محسوب می‌شود. خیلی از پرسشهای چنین آزمونهایی، مسأله‌های ساده‌ای هستند که فوری می‌شود به آنها پاسخ داد. هر کدام از آنها نکته‌ای را دربردارد و به یک ویژگی یا یک تعریف مربوط می‌شود و کافی است دانستنیهای شما آن اندازه باشند که بتوانید به آن نکته و ویژگی پی‌ببرید یا آن تعریف را باز شناسید. پرسشهای زیر از این گونه‌اند.

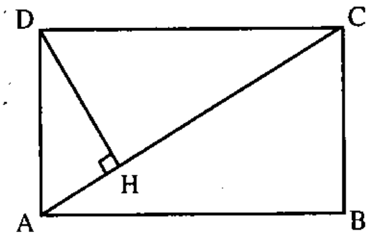
سعی کنید هر پرسش را فوری پاسخ دهید

۱ـ معادلهٔ $(x-r)(x-s)=0$ چه موقع ریشهٔ دوگانه (= ریشهٔ مضاعف) دارد؟

۲ـ گنجایش مخزن B لیتری دو برابر مخزن A لیتری، و گنجایش مخزن C لیتری برابر با مجموع گنجایشهای مخزنهای B لیتری و A لیتری است. مجموع گنجایشهای این سه مخزن، برابر با ۱۴۰۳۲۵۰ لیتر می‌تواند باشد یا نه؟

۳ـ متمّم مجموعهٔ A را با A' نشان می‌دهیم. هرگاه عضو a وجود داشته باشد که: $a \in B \cap A'$، آیا مجموعهٔ B می‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد یا نه؟ چرا؟

۴ـ در مستطیل ABCD، عمود DH بر قطر AC رسم شده است. دو حاصلضرب $AB.BC$ و $AC.DH$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

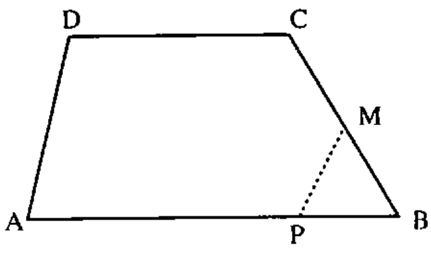


۵ـ دو نقطهٔ A به طول r و B به طول $-r$ روی محور $x'x$ واقعند و r عددی حقیقی و مخالف صفر است. جهت از A به B آیا در جهت مثبت محور است یا در جهت منفی آن؟

۶ـ معادلهٔ $\sin x.\cos ۲x = \sqrt{۲}$ جواب دارد یا نه؟

۷ـ در صفحهٔ دو محور عمود بر هم، فاصلهٔ دو نقطهٔ $M(a\,,\,k)$ و $N(b\,,\,k)$ از یکدیگر چه مقدار است؟

۸ ـ در چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و CD با هم موازی‌اند. از M وسط BC، خطی موازی با AD رسم شده که با AB در P برخورد کرده است. اگر $AB = a$ و $CD = b$ و $AP = x$، بین a، x و b چه رابطه‌ای برقرار است؟



۹ـ به فرض $x \neq ۰$ کدام نقطه از محور $x'x$ به طول $\frac{|x|}{x}$ است؟

۱۰ـ هرگاه $P(x)$ یک چند جمله‌ای و k یک عدد ثابت مخالف صفر باشد، دو معادلهٔ $P(x)+k=۰$ و $P(x)-k=۰$ ریشهٔ مشترک دارند یا نه؟

۱۱ـ به فرض آن‌که x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، نابرابری زیر، چه موقع برقرار است؟

$b^۲ - ۴ac \neq a^۲(x'-x'')^۲$

۱۲ـ نمودار تابع $y=\sin x$ چند مرکز تقارن و چند محور تقارن دارد؟

۱۳ـ تعداد جایگشتهای حرفهای واژهٔ «کنکور» برابر با چه عددی است؟

۱۴ـ در صفحهٔ دو محور عمود برهم $x'x$ و $y'y$، دایرهٔ به معادلهٔ

$$(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۲۵$$

از مبدأ مختصها می‌گذرد و با دو محور، بترتیب در A و B برخورد می‌کند. درازای پاره‌خط AB برابر با چه عددی است؟

۱۵ـ در صفحهٔ دو محور عمود برهم $x'x$ و $y'y$ دو منحنی C و C' نسبت به محور $y'y$ قرینه‌اند. اگر منحنی C نمودار تابع $y=ax^۲+bx+c$ باشد، منحنی C' نمودار کدام تابع است؟

۱۶ـ چهار مهرهٔ سفید، سه مهرهٔ قرمز و پنج مهرهٔ آبی درون کیسه‌ای ریخته می‌شوند. پس از آن‌که این مهره‌ها را خوب به‌هم می‌زنند، یکی از آنها را از کیسه بیرون می‌کشند. احتمال آن‌که این مهره سفید نباشد، چه‌قدر است؟

۱۷ـ عدد حقیقی a چگونه باشد تا معادلهٔ $\cos x.\cos(-x) = -a^۲$ جواب داشته باشد؟

۱۸ـ نقطهٔ M در کجای صفحهٔ دایره‌ای داده شده واقع باشد تا از آن بتوان بیش از یک خط را عمود بر دایره رسم کرد؟

۱۹ـ طول کمانی از دایرهٔ به شعاع ۷ سانتیمتر که اندازه‌اش $\frac{\pi}{۷}$ رادیان باشد، چند سانتیمتر است؟

۲۰ـ ده برابر کدام عدد را چون در پایهٔ ۲ لگاریتم بگیرید، عدد ۵ به‌دست می‌آید؟

۲۱ـ هر گاه داشته باشید:

$$P(x)=x(۲x-۱)^۲(۳x-۲)^۳(۴x-۳)^۴\ldots[nx-(n-1)]^n$$

و $P(x)$ را به‌صورت یک چند جمله‌ای مرتّب کنید، مجموع ضریبهای همهٔ جمله‌های آن، برابر با چه عددی می‌شود؟

۲۲ـ حاصل جمع کدام سه کسر برابر است با $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ ؟

۲۳ـ به فرض $f(x)=f(x-1)+4x^2$ و $f(0)=0$، مقدار $f(1)$ با چه عددی برابر است؟

پاسخها

۱ـ آن‌گاه که $r=s$.

۲ـ مجموع گنجایشهای سه مخزن مضربی از ۶ است و عدد داده شده، این ویژگی را دارد.

۳ـ مجموعهٔ B نمی‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد ؛ زیرا a که عضو B هست، عضو A نیست.

۴ـ دو حاصلضرب با هم برابرند ؛ زیرا هر کدام با مساحت مستطیل برابر است.

۵ـ اگر r مثبت باشد، جهت از A به B، مخالف جهت مثبت محور است و اگر r منفی باشد، جهت از A به B، همان جهت مثبت محور است.

۶ـ زاویهٔ x هر اندازه که باشد $-1 \le \sin x \le 1$ و $-1 \le \cos 2x \le 1$ و طرف نخست معادله، عددی کوچکتر از یک است و با $\sqrt{2}$ برابر نیست و معادله جواب ندارد.

۷ـ فاصلهٔ دو نقطه برابر است با $|a-b|$ و نوشتن آن به یکی از دو صورت $a-b$ یا $b-a$ اشتباه است ؛ مگر آن‌که بترتیب با قید $a>b$ و $a<b$ همراه باشند.

۸ ـ اگر N وسط AD باشد، AP با MN و با $\frac{a+b}{2}$ برابر است.

۹ـ بنابر آن‌که $x \ge 0$ یا $x<1$ طول نقطه ۱ یا ۱− است.

۱۰ـ ریشهٔ مشترک دو معادله، ریشهٔ معادلهٔ حاصل از تفاضل و همچنین مجموع دو معادله نیز هست. تفاضل دو معادلهٔ داده شده $2k=0$ است و چون k مخالف صفر فرض شده، رابطه‌ای نامکن است و جواب ندارد. بنابراین، دو معادله نمی‌توانند ریشهٔ مشترک داشته باشند.

۱۱ـ آن‌گاه که معادله جواب حقیقی نداشته باشد، در این صورت، طرف نخست، رابطهٔ منفی است و با مقدار نامنفی طرف دوم برابر نیست.

۱۲ـ دامنهٔ تابع همهٔ محور $x'x$ است و هر نقطهٔ به طول $x=k\pi$ و به عرض صفر، مرکز تقارن منحنی و هر خط به معادلهٔ $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، محور تقارن منحنی است.

۱۳ـ واژهٔ کنکور دارای پنج حرف است که دو تای آنها ـ «ک» ـ تکراری است و تعداد جایگشتها می‌شود :

$$\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$$

۱۴ـ زاویهٔ AOB قائمه، AB قطر دایره و برابر با ۱۰ است.

۱۵ـ در تابع $y=ax^2+bx+c$ چون x به $-x$ تبدیل شود، تابع $y=ax^2-bx+c$ به‌دست می‌آید.

۱۶ـ تعداد همهٔ مهره‌ها ۱۲ و تعداد مهره‌هایی که سفید نیستند ۸ و احتمال خواسته شده $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ است.

۱۷ـ طرف اول معادله $\cos^2 a$ و مثبت است و طرف دوم نامنفی است و معادله آن‌گاه ممکن است که $a=0$.

۱۸ـ یک خط آن‌گاه بر دایره عمود است که از مرکز آن بگذرد. بر نقطهٔ M و مرکز دایره، تنها یک خط می‌گذرد ؛ مگر آن‌که M بر مرکز دایره واقع باشد.

۱۹ـ محیط دایره که به اندازهٔ 2π رادیان است، به درازای 14π سانتیمتر است، پس کمان به اندازهٔ $\frac{\pi}{7}$ رادیان به درازای π سانتیمتر است.

۲۰ـ از معادلهٔ $\log_2^{10x}=5$ به‌دست می‌آید $10x=2^5$ و بنابراین $x=\frac{32}{10}=3/2$.

۲۱ـ مجموع ضریبهای چندجمله‌ای $P(x)$ به این ترتیب به‌دست می‌آید که در آن x با عدد یک جانشین شود. در عبارت داده شده، اگر $x=1$ ، حاصل عبارت برابر $1\times1\times1\times...\times1=1$ می‌شود.

۲۲ـ

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}$$

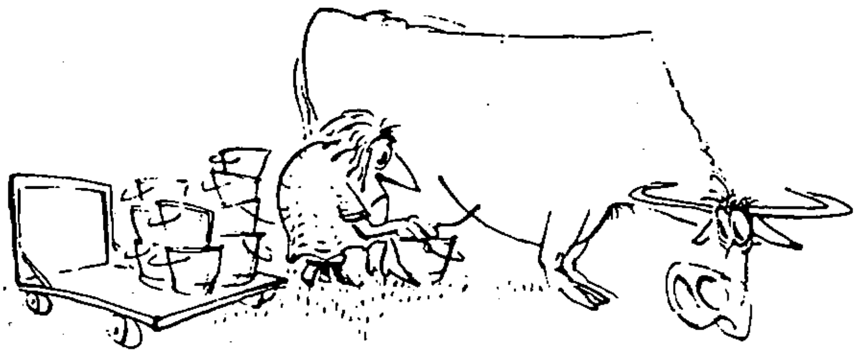
$$=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$$

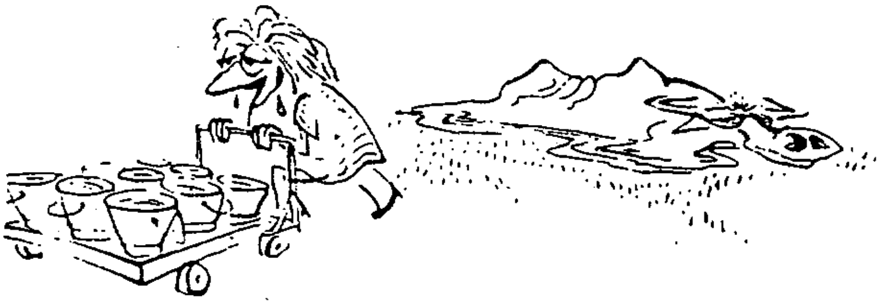
۲۳ـ بنابر رابطهٔ داده شده : $f(1)=f(0)+4=4$.

بخش پذیری

$x^n - y^n$ بر $x - y$

(یک مثال ساختاری)





● ترجمه: میرشهرام صدر

MATHEMATICS TEACHER
APRIL 1998
Volume 91 Number 4 (NCTM)

Francis G. French

در این مقاله با روش استدلال استقرایی، بخش‌پذیری $x^n - y^n$ را بر $x - y$ ($x \neq y$ و $n \in \mathbb{N}$) مورد بررسی و تحقیق قرار می‌دهیم. در این مقاله، مثالهایی را مطرح می‌کنیم که به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا درک بهتری از ماهیت استدلال استقرایی و اثباتهای استقرایی داشته باشند و بتوانند دربارهٔ این موضوع حداقل در فضای سه‌بعدی تحقیق، فرضیه‌سازی و آزمایش کنند و مدلهای فیزیکی و تصویری بسازند. دانش‌آموزان من مرکّب از معلّمان دورهٔ راهنمایی و دبیرستان در دوره‌های ضمن خدمت بودند. بیشتر آنها با کاربرد مدلهای فیزیکی و دست‌ساز آشنا نبودند، که این کاربردها برای معلّمان و دانش‌آموزان هدفدار هستند. در هریک از فعّالیتهای زیر، آنها معلّم بودن خود را به شوخی می‌گرفتند و وانمود می‌کردند که دانش‌آموز دبیرستانی هستند.

استدلال خود را با دوره بر مطالبی مربوط به مفهومهای تئوری اعداد، شروع می‌کنیم. همچنین از ویژگیهای توانها، روشهای تشخیص فاکتورهای صحیح مثبت و قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه. اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به‌طوری که عدد صحیح c هر دوی آنها را بشمارد، آن‌گاه c عدد a+b را می‌شمارد. ($c|a, c|b \Rightarrow c|a+b$).

موضوع مقاله را در پنج قسمت، شرح و بسط می‌دهیم: (۱) تحقیق عددی با استفاده از ماشین حساب (۲) پایهٔ حدس اصلی در این تحقیق (۳) آزمایش عددی حدس یا فرضیه، یافتن مثال نقض و فرصت تصحیح این فرضیه (۴) مدل‌سازی (۵) اثبات، با

استفاده از اصل استقرای ریاضی.

x	y	x − y	$x^2 - y^2$	$\frac{x^2 - y^2}{x - y}$	$x^3 - y^3$	$\frac{x^3 - y^3}{x - y}$	$x^4 - y^4$	$\frac{x^4 - y^4}{x - y}$
۱۲	۷	۵	۹۵	۱۹	۱۳۸۵	۲۷۷	۱۸۳۳۵	۳۶۶۷
۱۹	۲	۱۷	۳۵۷	۲۱	۶۸۵۱	۴۰۳	۱۳۰۳۰۵	۷۶۶۵

شکل ۱. صفحه کار برای آزمایش بخش‌پذیری $x^n - y^n$ بر $x - y$

قسمت اوّل: تحقیق با استفاده از صفحهٔ کار یا ماشین‌حساب

صفحهٔ کار را مطابق با شکل (۱) به دانش‌آموزان داده و از آنها می‌خواهیم که با انتخاب دو عدد صحیح برای x و y آن را کامل کنند. دانش‌آموزانی که در این فعالیّت به کامپیوتر و ماشین‌حساب دسترسی ندارند، یک صفحهٔ چرک‌نویس بزرگ برای آنها مفید خواهد بود.

ابتدا دو مقدار x=۱۲ و y=۷ را درنظر بگیرید. سپس با تکمیل یک سطر از جدول به کمک این دو عدد صحیح، نتیجه می‌گیریم که عددهای مختلف $x^2 - y^2$ ، $x^3 - y^3$ و $x^4 - y^4$ بر $x - y$ بخش‌پذیر هستند. دانش‌آموزان با آزمایش بر روی دو عدد صحیح دیگر، همین نتیجه را گرفتند. هیچ یک از دانش‌آموزان دو عدد x و y را یکسان انتخاب نکردند. در این بحث، x=y را یک حالت خاص درنظر می‌گیریم.

قسمت دوم: فرضیه‌سازی

بعد از بیان نتیجهٔ بالا، گمان می‌کنیم که بتوان قاعده یا دستوری برای این نتیجه پیدا کنیم. دانش‌آموزان باهوش، بسرعت توانستند حدس زیر را بزنند:

اگر x و y دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(x - y)|(x^n - y^n)$.

عقیدهٔ من و معلّمان این بود که ممکن است، نیاز به مثالهای بیشتری باشد تا این که دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند چنین حدسی را بزنند.

همان‌طور که در این حدس ملاحظه می‌کنید، به این مطلب اشاره نشده است که n باید عددی طبیعی و $x \neq y$. ما در روند اثبات، این مطالب را تصحیح می‌کنیم.

قسمت سوّم: آزمایش کردن

به دانش‌آموزان گفتیم که این فرضیه را آزمایش می‌کنیم، برای این کار آنها می‌توانند از صفحهٔ کار در شکل (۱) استفاده کنند. بعضی از معلّمان تصور کردند که این آزمایش، ممکن است یک تکلیف زیاد و تکراری برای دانش‌آموزان آنها باشد و اثبات این مطلب در جلسهٔ دیگری کامل گردد؛ امّا از آزمایش کردن، دو هدف را دنبال می‌کنیم: **اوّل؛ یافتن مثال نقض، دوم؛ یافتن راه‌هایی برای تصحیح فرضیه.** سرانجام، دانش‌آموزان را تشویق کردم که مثالهای زیادی را آزمایش کنند، و آنها امیدوار شدند که قدرت فکر کردن روی فرضیهٔ ناموفق را دارند. آنها به تذکّرهای من توجه می‌کردند و با شور و شوق پاسخ می‌دادند.

برای آزمایش، ده دقیقه وقت درنظر گرفتیم؛ که برای اثبات، وقت کافی بود. مطالبی که در زیر آمده است، نشان‌دهندهٔ مشاهدات دانش‌آموزان دربارهٔ این فرضیه است:

۱. مقدار x نمی‌تواند با مقدار y برابر باشد.

۲. توان n باید عدد صحیح نامنفی باشد.

۳. اگر x و y دو عدد غیرصحیح باشند، نتیجه بی‌معنا می‌شود.

۴. با توجه به مطالبی که در مشاهدات ۱، ۲و ۳ عنوان شد، فرضیه برای همه عددهای آزمایش شده، برقرار است.

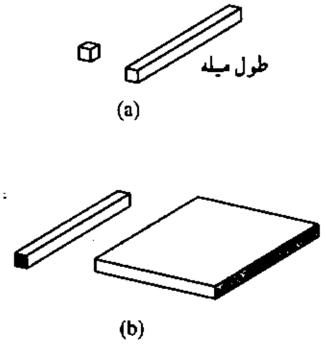
بر اساس این نتایج، فرضیه را به این صورت بیان می‌کنیم: اگر x و y دو عدد صحیح باشند و $x \neq y$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه $(x - y)|(x^n - y^n)$.

قسمت چهارم: مدل‌سازی

ما از ده قطعه اصلی برای مدل‌سازی فرایندی که منجر به اثبات شهودی می‌شود، استفاده می‌کنیم. به‌طور یقین، هر مجموعهٔ *مقایسه‌پذیر*[1] از مدلهای جبری تشکیل شده است. ده قطعهٔ اصلی شامل، یک مکعب کوچک که *واحد*[2] نامیده می‌شود؛ مکعبهایی که از ۱۰ واحد تشکیل شده‌اند و *میله*[3] نامیده می‌شوند؛ مربعهای ۱۰۰ واحدی که *تخت*[4] نامیده می‌شوند؛ و مکعبهای بزرگی که از ۱۰۰۰ واحد تشکیل شده‌اند و *مکعب*[5] نامیده می‌شوند. هر گروه باید مجموعه‌ای از این وسایل کارگاهی را داشته باشند.

دانش‌آموزان با استفاده از ابعاد میله و قطعاتی شبیه به رشته‌های ماکارونی، مجموعه‌ای از پاره‌خطها با دو طول مختلف را ساختند. مجموعهٔ اوّل، پاره‌خطهایی که اندازهٔ آنها برابر با یک ضلع مکعب واحد است و مجموعهٔ دیگر، پاره‌خطهایی که اندازهٔ آنها برابر طول میله است. (**شکل ۲a** را ملاحظه کنید.)

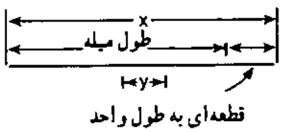
دانش‌آموزان باید با کاغذ یا مقوای نازک، مجموعه‌ای از سه نوع سطح را بسازند. مجموعهٔ اوّل، سطحی مانند وجه کوچک میله ؛ مجموعهٔ دوم، سطحی مانند وجه بزرگ میله و مجموعهٔ سوّم، سطحی مانند بزرگترین وجه تخت. (**شکل ۲b** را ملاحظه کنید.)



شکل ۲

در هر مرحله، کار گروهی که باید دانش‌آموزان انجام دهند، کار با پروژکتور اُورهد است، به‌طوری که نتیجه‌ها روی پردهٔ سفیدی پدیدار گردد تا این‌که نقطهٔ اصلی بحث، تفهیم شود.

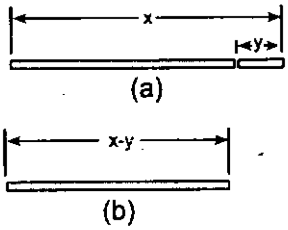
ما باید مدلهای متفاوتی را برای اثبات حالتهای n=۱، n=۲ و n=۳ به‌کار ببریم. همچنان‌که کار پیش می‌رفت، ما از نتیجه‌هایی که در هر مرحله به‌دست می‌آوردیم، برای اثبات درستی قسمت بعدی استفاده می‌کردیم. از مدلهای طولی استفاده می‌کنیم، یک قطعه به اندازهٔ طول میله و دو قطعه به اندازهٔ طول ضلع مکعب واحد برمی‌داریم. قطعه‌ای به طول واحد را در قسمت انتهایی قطعه‌ای به طول میله قرار می‌دهیم، سپس طول قطعه به‌دست آمده را x می‌نامیم. به‌علاوه قطعهٔ دیگر به طول واحد را y می‌نامیم. از این دو قطعه به طولهای x و y در روند اثبات، به‌عنوان خط‌کش استفاده می‌کنیم.



شکل ۳.خط کشها

مرحلهٔ اوّل: n =۱

یک قطعه به اندازه طول میله و قطعه‌ای به طول واحد برمی‌داریم. قطعهٔ به طول واحد را در قسمت انتهایی قطعهٔ به طول میله قرار می‌دهیم و اندازهٔ طول قطعهٔ به‌دست آمده را x درنظر می‌گیریم. اکنون قطعهٔ به طول واحد را از این قطعهٔ جدید برمی‌داریم. (اندازهٔ طول قطعهٔ واحد را y درنظر بگیرید.) عبارتی جبری برای اندازهٔ میلهٔ باقیمانده بنویسید. (**شکل ۴** را ملاحظه کنید.)



شکل ۴.مدل فضای یک بعدی

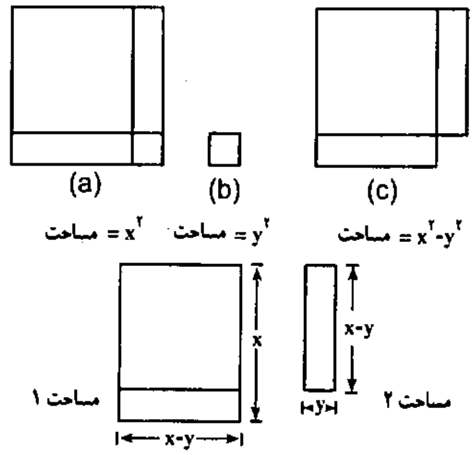
دانش‌آموزان کلاس خیلی سریع به عبارت $x - y$ برای اندازهٔ میلهٔ باقیمانده رسیدند. می‌دانیم که :

$$(x-y)|(x-y)$$

مرحلهٔ دوم: n =۲

در این مرحله، باید نتیجه‌هایی را که از مدل فضای یک‌بعدی به‌دست آوردیم، برای مدل فضای دوبعدی مورد استفاده قرار دهیم. مدلهای سطحهای مختلف در **شکل ۲b** را به کار ببرید و مربعی شبیه به **شکل ۵a** بسازید. با استفاده از اندازهٔ طول قطعه‌های **شکل ۴**، یک عبارت برای مساحت مربع بنویسید. اکنون مربع کوچک را از روی مدل برمی‌داریم. یک عبارت برای مساحت این مربع کوچک بنویسید. (**شکل ۵b**) سرانجام یک عبارت برای مساحت مدل باقیمانده بنویسید. (**شکل ۵c** را ملاحظه کنید.)

مدل **شکل ۵c** را به دو قسمت تقسیم کنید، به‌طوری که هر قسمت، یک ضلع به اندازهٔ طول مدل **شکل ۴b** داشته باشد. اندازه اضلاع هر قسمت را بیابید، سپس برای مساحت هر قسمت، یک عبارت جبری بنویسید. در صورت نیاز از خط‌کشها استفاده کنید.



شکل ۵. مدل فضای دو بعدی

در این مرحله، دانش‌آموزان با اندکی تأمل توانستند، عبارتهایی جبری برای مساحتهای این دو قسمت مشخص کنند. مساحت ۱ با حاصلضرب $x(x-y)$ و مساحت ۲ با حاصلضرب $y(x-y)$ محاسبه می‌شود. چون هر دو قسمت شامل عامل $x-y$ است، درنتیجه $x-y$ مجموع این دو عبارت را می‌شمارد، بنابراین داریم :

$$x(x-y)+y(x-y)=x^2-xy+xy-y^2$$
$$=x^2-y^2$$

و $x-y$ عبارت x^2-y^2 را می‌شمارد.

مرحلهٔ سوم: n =۳

در این مرحله، باید نتیجه‌هایی را که از مدل فضای دوبعدی به‌دست آوردیم، برای مدل فضای سه‌بعدی مورد استفاده قرار دهیم. برای این کار، یک مکعب بزرگ، سه تخت، سه میله و یک مکعب واحد را بردارید. سپس با استفاده از همهٔ آنها یک مکعب بسازید و عبارتی برای حجم این مکعب بنویسید. اکنون مکعب واحد را از این مدل بردارید و یک عبارت جبری برای حجم آن بنویسید. سپس یک عبارت جبری برای حجم مدل باقیمانده بنویسید. اکنون این مدل را به دو حجم ۱ و ۲ تفکیک کنید، به‌طوری که یکی از قسمتها، سطحی مانند مدل **شکل 5c** داشته باشد. سرانجام، ابعاد هر دو قسمت را مشخص کنید و عبارتهای جبری برای حجمهای هر قسمت بنویسید. در صورت نیاز، از خط‌کشها استفاده کنید. (**شکل ۶** را ملاحظه کنید.)

در این مرحله، دانش‌آموزان باید نسبت به دو مرحلهٔ قبل، مقدار بیشتری تلاش می‌کردند. سرانجام آنها مشخص کردند که حجم ۱ با حاصلضرب $x^2(x-y)$ و حجم ۲ با حاصلضرب $y(x^2-y^2)$ محاسبه می‌شود. به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^2(x-y)+y(x^2-y^2)=x^3-x^2y+x^2y-y^3$$
$$=x^3-y^3$$

به‌علاوه، حجم ۱ شامل عامل $x-y$ است. حجم ۲ شامل عامل x^2-y^2 است که در مدل فضای ۲ـ بعدی نشان دادیم : $(x-y)|(x^2-y^2)$. درنتیجه، حجم هر دو قسمت شامل عامل $x-y$ است، بنابراین $x-y$ عبارت x^3-y^3 را می‌شمارد، یعنی : $(x-y)|(x^3-y^3)$.

مرحلهٔ چهارم: n =۴

اگرچه تصور فضای ۴ـ بعدی بیش از ظرفیّت ذهن ماست ؛ امّا سعی می‌کنیم، نتیجه‌هایی را که برای n=۱، n=۲ و n=۳ به‌دست آوردیم، برای فضای ۴ـ بعدی به‌کار ببریم. به یاد بیاورید که x^3-y^3 را به دو قسمت تفکیک کردیم. یک قسمت، شامل عامل $x-y$ و قسمت دیگر، شامل نتیجه‌های مدل فضا ۲ـ بعدی دربارهٔ x^2-y^2 است. با دقت، به عبارتهایی که برای حجمهای این دو قسمت به‌دست آمد ؛ توجه کنید و به‌طور مشابه برای x^4-y^4 بحث کنید.

بعد از چند دقیقه، بعضی از گروه‌های کاری توانستند اتحاد زیر را بیابند :

$$x^4-y^4=x^3(x-y)+y(x^3-y^3)$$

به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^3(x-y)+y(x^3-y^3)=x^4-x^3y+x^3y-y^4$$
$$=x^4-y^4$$

با توجه به این اتحاد ملاحظه می‌کنیم که (۱) $x-y$ عبارت x^4-y^4 را می‌شمارد و (۲) قرارداد می‌کنیم که نتیجه‌های مشابهی را برای مقادیر صحیح بزرگتر از n به‌دست می‌آوریم.

این قرارداد را آزمایش می‌کنیم، دانش‌آموزان کلاس نتیجه را برای n=۵ به‌صورت زیر مشخص کردند :

$$x^5-y^5=x^4(x-y)+y(x^4-y^4)$$

به اتحاد زیر توجه کنید :

$$x^4(x-y)+y(x^4-y^4)=x^5-x^4y+x^4y-y^5$$
$$=x^5-y^5$$

مرحلهٔ پنجم: برهان

این فرضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، بنابراین لازم است که :

۱) نشان دهیم که فرضیه برای مرحلهٔ اوّل برقرار است.

۲) نشان می‌دهیم که اگر فرضیه برای عدد صحیح و مثبت n برقرار باشد، آن‌گاه فرضیه برای عدد n+۱ برقرار است.

ثابت می‌کنیم که x و y دو عدد صحیح باشند به‌طوری که $x \neq y$ و n عدد صحیح مثبتی باشد آن‌گاه $x-y$ عبارت x^n-y^n را می‌شمارد. روند اثبات به‌صورت زیر است :

۱) در این‌جا، لازم است که نشان دهیم، n=۱ در فرضیه صدق می‌کند.

۲) فرض می‌کنیم که $x-y$ عبارت x^k-y^k را بشمارد. آیا می‌توانیم با استفاده از این فرض، ثابت کنیم که $x-y$ عبارت $x^{k+1}-y^{k+1}$ را می‌شمارد؟

با استفاده از قرارداد کلی، قادر خواهیم بود که این‌کار را انجام دهیم. فرض کنیم که $x-y$ عبارت x^k-y^k را می‌شمارد، اکنون الگویی را که برای $n=1,2,3,4$ ملاحظه کردید، بسط دهید و یک اتحاد بسازید. دانش‌آموزان با یک کار گروهی نسبتاً سریع، توانستند اتحاد زیر را بیابند :

$$x^{k+1}-y^{k+1}=x^k(x-y)+y(x^k-y^k)$$

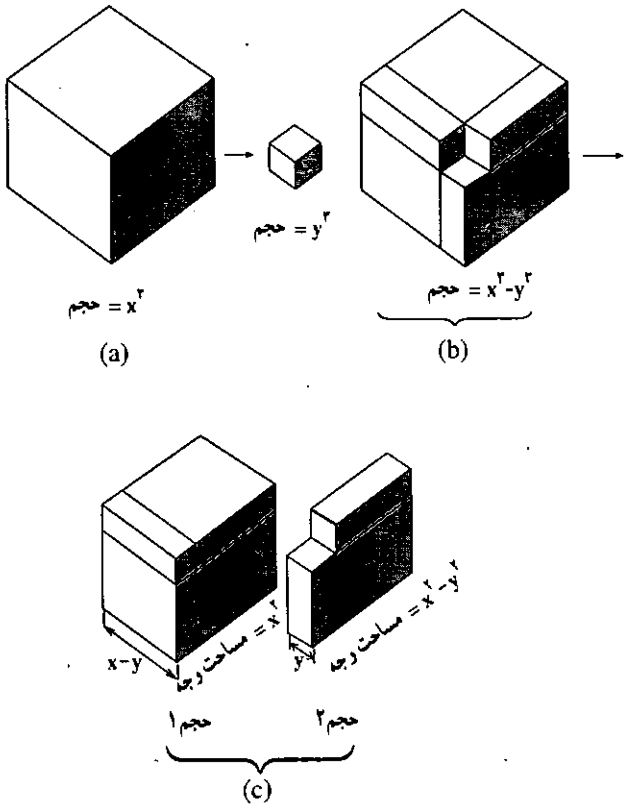
واضح است که $x-y$ عبارت $x^k(x-y)$ را می‌شمارد و $x-y$ طبق فرض استقرا عبارت x^k-y^k را می‌شمارد، بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{l}(x-y)\mid x^k(x-y)\\(x-y)\mid y(x^k-y^k)\end{array}\right\}\Rightarrow (x-y)\mid x^k(x-y)+y(x^k-y^k)$$

در نتیجه، $(x-y)\mid x^{k+1}-y^{k+1}$. بنابراین حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است و در این مرحله اثبات کامل می‌گردد.

نتیجه

تعداد زیادی از دانش‌آموزان، اطمینان کامل داشتند که استدلال استقرایی و اثبات استقرایی را فهمیده‌اند. به‌طورکلی آنها موافق بودند که استفاده از مدلهای دست‌ساز، بسیار مناسب است و آنها نشان دادند که می‌توانند از مدلهای دست‌ساز استفاده کنند.



شکل ۶.مدل فضای سه بعدی

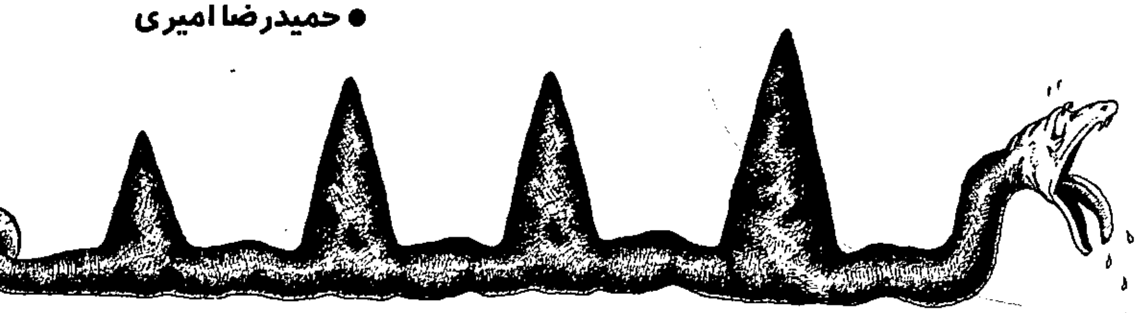
یادداشتها :

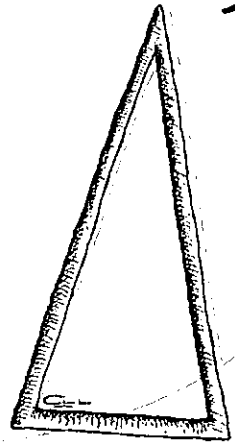
۱. دو مجموعهٔ A و B را مقایسه‌پذیر گویند، هرگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.
۲. units
۳. rod
۴. flat
۵. cube

در حاشیهٔ مثلثات
(قسمت دوم)

دایرهٔ مثلثاتی و رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی

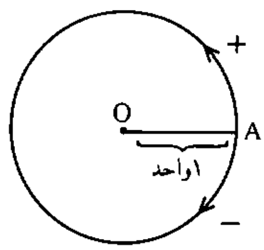
● حمیدرضا امیری





تعریف دایرهٔ مثلثاتی و محورهای نسبتهای مثلثاتی روی آن:

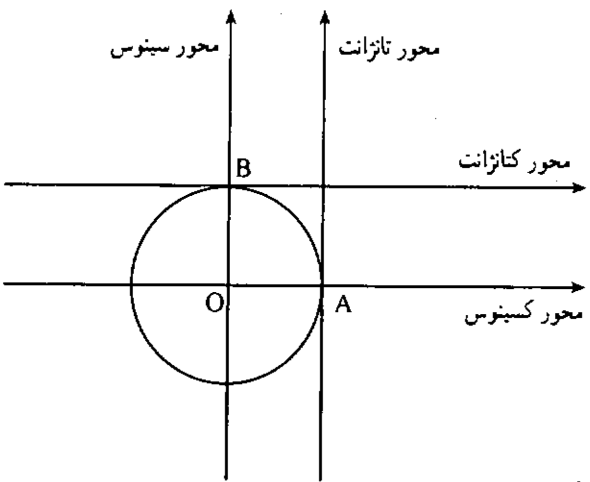
تعریف: دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای است **جهت‌دار** با شعاع واحد، که جهت مثبت روی دایرهٔ مثلثاتی، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل ۵). نقطهٔ O را مرکز دایرهٔ مثلثاتی و نقطهٔ A را مبدأ دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم. حال روی



شکل۱

دایرهٔ مثلثاتی و مطابق با شکل (۲) محورهای نسبتهای مثلثاتی را به‌صورت زیر تعریف می کنیم :

الف) محور سینوسها: محور عمودی که از مرکز دایرهٔ مثلثاتی



شکل۲

عبور می کند.

ب) محور کسینوسها: محور افقی که از مرکز دایرهٔ مثلثاتی عبور می کند.

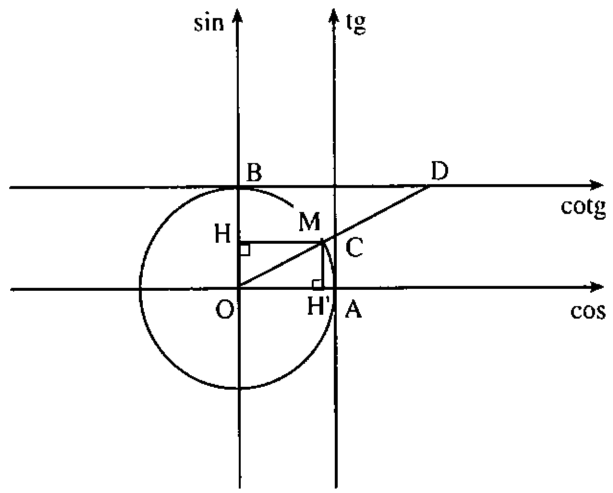
ج) محور تانژانتها: محور عمودی که از مبدأ دایرهٔ مثلثاتی (نقطهٔ A) عبور می کند.

د) محور کتانژانتها: محور افقی که برمحورهای سینوس و تانژانت عمود است و مطابق شکل، از نقطهٔ B عبور می کند.

تبصره: روی همهٔ این محورها، از مبدأ هر محور افقی به

سمت راست، مثبت و به سمت چپ را منفی قرارداد می‌کنیم و نیز روی محورهای عمودی، از مبدأ محور به سمت بالا را مثبت و به سمت پایین را منفی قرارداد می‌کنیم.

حال فرض کنیم α، زاویه‌ای دلخواه باشد، انتهای کمان این زاویه را M می‌نامیم و از نقطهٔ M مطابق شکل (۳) عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم، تا بترتیب این محورها را در نقاط H و H' قطع نمایند و نیز از نقطهٔ M به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل کرده و امتداد می‌دهیم، تا از یک سمت، محورهای تانژانت و کتانژانت را بترتیب در نقاط C و D قطع کند. حال ثابت می‌کنیم: $\cos\alpha = \overline{OH'}$ و $\sin\alpha = \overline{OH}$ و $tg\alpha = \overline{AC}$ و $cotg\alpha = \overline{BD}$.



شکل۳

در صورتی که روابط فوق اثبات شوند، با توجه به توضیحات بالا برای یافتن نسبتهای مثلثاتی یک زاویه، کافی است از انتهای کمان مربوط به آن زاویه، عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم کرده و اندازهٔ جبری $\overline{OH}$ و $\overline{OH'}$ را بترتیب، سینوس و کسینوس آن زاویه بنامیم و نیز از انتهای کمان به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل کرده، امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع نماید و اندازهٔ جبری $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ را تانژانت و کتانژانت آن زاویه بنامیم. حال، با توجه به شکل به اثبات روابط فوق می‌پردازیم:

الف) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH داریم: (OM شعاع دایرهٔ مثلثاتی) $\cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{۱} = OH$ ؛ پس $\cos\alpha = OH$، یعنی فاصلهٔ پای عمود تا مرکز دایرهٔ مثلثاتی.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه OMH داریم:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{\underbrace{OM}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{MH}{۱} \Rightarrow \sin\alpha = MH$$

و چون چهارضلعی $OHMH'$ مستطیل است، پس $MH = OH'$، لذا $\sin\alpha = OH'$ که OH' فاصلهٔ پای عمود بر محور سینوسها تا مرکز دایره مثلثاتی است.

ج) مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC را در نظر می‌گیریم، در این مثلث، داریم:

$$tg\alpha = \frac{AC}{\underbrace{OA}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{AC}{۱} = AC$$

پس $tg\alpha = AC$، که AC محل تقاطع امتدادِ انتهای کمان α با محور تانژانتها می‌باشد.

د) در مثلث قائم‌الزاویه ODB بنابر خاصیت خطوط موازی و مورّب، $\angle D = \alpha$ و داریم:

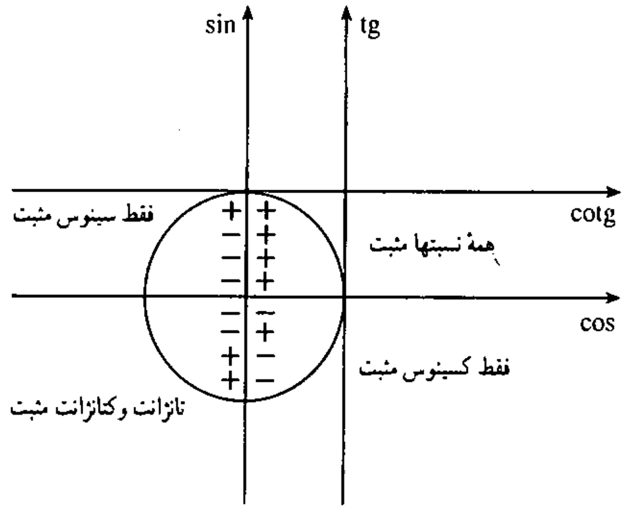
$$cotg\alpha = \frac{BD}{\underbrace{OB}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{BD}{۱} \Rightarrow cotg\alpha = BD$$

که BD محل تقاطع امتدادِ انتهای کمانِ α با محور کتانژانتها می‌باشد.

علامت جبری نسبتهای مثلثاتی در نواحی مختلف دایرهٔ مثلثاتی

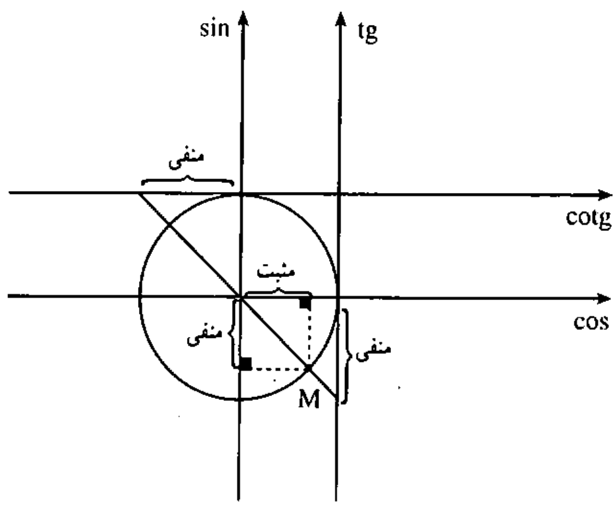
با توجه به تعریف دایرهٔ مثلثاتی، تعریف محورهای نسبتهای مثلثاتی روی این دایره و نحوهٔ محاسبهٔ سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت یک زاویهٔ دلخواه که قبلاً ذکر شد، علامت جبری نسبتهای مثلثاتی روی دایرهٔ مثلثاتی، مطابق شکل (۴) می‌باشد.

تبصره: در حالت کلّی، برای یافتن علامتهای جبری نسبتهای مثلثاتی در هر ناحیه، یک زاویهٔ دلخواه در آن ناحیه در نظر می‌گیریم و انتهای کمان مربوط به آن زاویه را مشخص کرده (مطابق شکل ۵) و از آن نقطه، عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم. سمت راست و بالا را مثبت، سمت چپ و پایین را منفی درنظر می‌گیریم، و اگر از انتهای کمانِ زاویهٔ دلخواه، به



شکل۴

مرکز، وصل و امتداد دهیم تا محور کتانژانتها و تانژانتها را قطع کند، بترتیب، مانند محورهای سینوس و کسینوس درنظر می گیریم.



شکل۵

حدود تغییرات نسبتهای مثلثاتی

الف) حدود تغییرات سینوس: با توجه به شکل (۶) تغییرات سینوس را از زاویهٔ صفر درجه تا ۳۶۰° بررسی می کنیم که به قرار زیر است (توجه داریم که شعاع دایرهٔ مثلثاتی ۱ واحد است) :

$\sin ۰ = ۰$

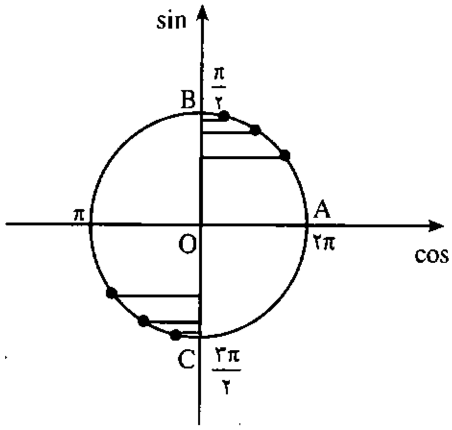
$\sin \frac{\pi}{۲} = OB = ۱$

$\sin \pi = ۰$

$\sin \frac{۳\pi}{۲} = OC = -۱$

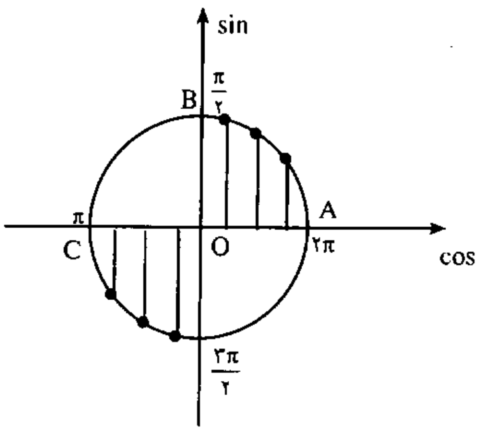
$\sin ۲\pi = ۰$

بطور کلّی اگر $۰ \leq \alpha \leq ۲\pi \Rightarrow -۱ < \sin\alpha \leq ۱$



شکل۶

ب) حدود تغییرات کسینوس: با توجه به شکل (۷) تغییرات کسینوس یک زاویه، به ازای تغییر آن زاویه از صفر درجه تا ۳۶۰ درجه، به‌صورت زیر می‌باشد :



شکل۷

$\cos ۰ = OA = ۱$

$\cos \frac{\pi}{۲} = ۰$

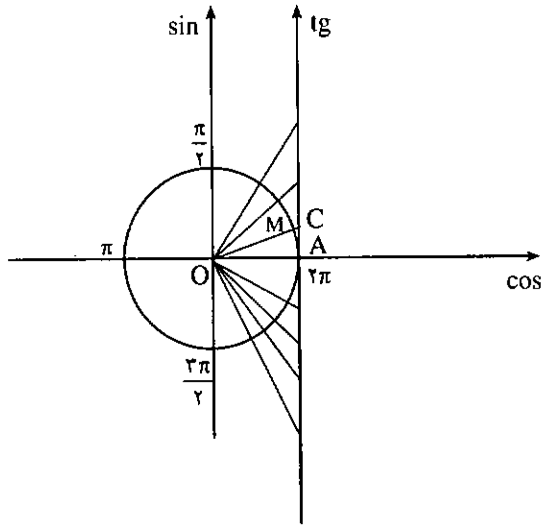
$\cos \pi = OC = -۱$

$\cos\frac{۳\pi}{۲} = ۰$

$\cos ۲\pi = OA = ۱$

اگر $۰ \le \alpha \le ۲\pi \Rightarrow -۱ \le \cos\alpha \le ۱$ پس

ج) حدود تغییرات تانژانت: با توجه به شکل (۸) تغییرات تانژانت یک زاویه به ازای تغییرات آن زاویه از صفر تا °۳۶۰ به‌صورت زیر است: هرگاه زاویه از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، تانژانت



شکل۸

آن زاویه، یعنی مثلاً اندازهٔ AC از صفر به سمت اعداد خیلی بزرگ مثبت تغییر می‌کند، و هرقدر زاویه به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیکتر می‌شود، مقدار AC بزرگتر خواهد شد و به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود؛ ولی در نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ چون امتداد OM محور تانژانتها را قطع نمی‌کند، تانژانت تعریف نمی‌شود (با توجه به فرمول $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، اگر $\cos\alpha = ۰$، آن گاه تانژانت تعریف نمی‌شود و داریم $\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$) و اگر تغییرات زاویه از $\frac{\pi}{۲}$ تا π ادامه یابد به محض این که زاویه به مقدار خیلی کم از $\frac{\pi}{۲}$ بیشتر شود و در ربع دوم قرار گیرد، مقدار AC از مقادیر خیلی کوچک و منفی (از $-\infty$) به طرف صفر تغییر می‌کند، و نیز در صورت تغییر زاویه از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$، مقادیر AC از صفر تا $+\infty$ تغییر کرده و در خود نقطهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شود ($\cos\frac{۳\pi}{۲} = ۰$) و اگر زاویه از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π تغییر کند، مقدار AC از $-\infty$ تا صفر تغییر خواهد کرد و به طور کلّی:

اگر $۰ \le \alpha \le ۲\pi \Rightarrow -\infty < tg\alpha < +\infty$

$tg\,۰ = ۰$ یا $tg\,۰ = \frac{\sin ۰}{\cos ۰} = \frac{۰}{۱} = ۰$

$tg\frac{\pi}{۲} =$ تعریف‌نشده یا $tg\frac{\pi}{۲} = \frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۰} =$ تعریف نشده

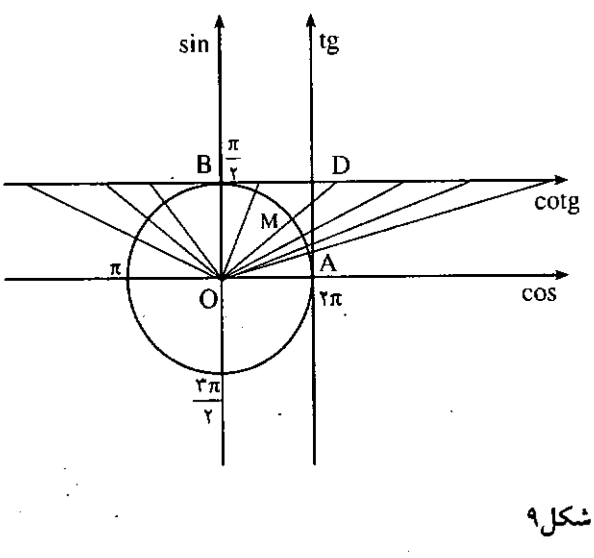
$tg\pi = ۰$ یا $tg\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{۰}{-۱} = ۰$

$tg\frac{۳\pi}{۲} =$ تعریف نشده یا $tg\frac{۳\pi}{۲} = \frac{\sin\frac{۳\pi}{۲}}{\cos\frac{۳\pi}{۲}}$

$= \frac{-۱}{۰} =$ تعریف نشده

$tg۲\pi = ۰$ یا $tg۲\pi = \frac{\sin ۲\pi}{\cos ۲\pi} = \frac{۰}{۱} = ۰$

د) حدود تغییرات کتانژانت: با توجه به شکل (۹) و مشابه



شکل۹

آنچه در مورد تانژانت ذکر شد، از زاویه از صفر تا $\pi/۲$ تغییر کند، کتانژانت آن زاویه، یعنی BD: از مقادیر خیلی بزرگ $(+\infty)$ به سمت صفر نزدیک خواهد شد، در خود نقطهٔ A یعنی صفر درجه کتانژانت تعریف نمی‌شود ؛ زیرا امتداد OM محور کتانژانتها را قطع نمی‌کند (با توجه به فرمول $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ اگر $\sin\alpha = ۰$، آن‌گاه کتانژانت تعریف نخواهد شد و توجه داریم، $\sin ۰ = ۰$) و اگر تغییرات زاویه از $\frac{\pi}{۲}$ تا π ادامه یابد، تغییرات کتانژانت زاویه یا تغییرات اندازهٔ BD از صفر تا $-\infty$ خواهد بود و در صورت تغییرات زاویه از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$، مقدار کتانژانت زاویه از $+\infty$ تا صفر و در صورت تغییر زاویه از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π اندازهٔ کتانژانت زاویه از صفر تا $-\infty$ تغییر خواهد کرد. (در نقاط π و ۲π نیز کتانژانت تعریف نشده است و به‌طور کلّی

اگر $۰ < \alpha < ۲\pi \Rightarrow -\infty < \cot g\alpha < +\infty$

$\cot g\,۰ = \frac{\cos ۰}{\sin ۰} = \frac{۱}{۰}$ یا تعریف نشده $= \cot g\,۰$

$\cot g\frac{\pi}{۲} = \frac{\cos\frac{\pi}{۲}}{\sin\frac{\pi}{۲}} = \frac{۰}{۱} = ۰$ یا $\cot g\frac{\pi}{۲} = ۰$

$\cot g\pi = \frac{\cos\pi}{\sin\pi} = \frac{-۱}{۰}$ یا تعریف نشده $= \cot g\pi$

$\cot g\frac{۳\pi}{۲} = \frac{\cos\frac{۳\pi}{۲}}{\sin\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۰}{-۱} = ۰$ یا $\cot g\frac{۳\pi}{۲} = ۰$

$\cot g۲\pi = \frac{\cos ۲\pi}{\sin ۲\pi} = \frac{۱}{۰}$ یا تعریف نشده $= \cot g۲\pi$

مسألهٔ ۱) ثابت کنید : تانژانت و کتانژانت هر زاویه، در هر یک از نواحی دایرهٔ مثلثاتی، همیشه هم علامتند.

می‌دانیم $tg\alpha.\cot g\alpha = ۱$ پس در صورتی می‌توانـد حاصل‌ضرب ۲ عدد حقیقی برابر با مقدار مثبتی باشد که علامت آنها یکی باشند ؛ یعنی یا هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

تبصره: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، خواهیم داشت :

اگر $a \times b < ۰ \Rightarrow$ b,a مختلف‌العلامه‌اند

اگر $a \times b > ۰ \Rightarrow$ b,a متحدالعلامه‌اند

اگر $a \times b = ۰ \Rightarrow a = ۰$ یا $b = ۰$

مسألهٔ ۲) اگر $\sin^۲\alpha \times \cot g\alpha < ۰$ معین کنید : انتهای کمان مربوط به α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی است؟ مسأله را به دو روش حل می‌کنیم :

روش اوّل: چون $\sin^۲\alpha \geq ۰$ پس تأثیری در جهت نامساوی ندارد، لذا برای برقراری نامساوی، می‌بایست $\cot g\alpha < ۰$ و این امکان‌پذیر نیست، مگر در ناحیه دوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی که $\cot g\alpha$ منفی می‌باشد.

روش دوم : $\sin^۲\alpha.\cot g\alpha < ۰ \Rightarrow \sin^۲\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < ۰$

$\Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha < ۰$

بنابراین، می‌بایست $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ علامتهای گوناگون داشته باشند، پس α، باید زاویه‌ای در ربع دوم دایره مثلثاتی ($\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی) یا در ربع چهارم ($\cos\alpha$ مثبت و $\sin\alpha$ منفی) واقع باشد.

مسألهٔ ۳) اگر $A = \frac{tg\alpha.\cot g^۲\alpha}{(۱-\cos\alpha)} < ۰$ معین کنید : α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی باید واقع باشد. ابتدا کسر فوق را ساده می‌کنیم.

$$A = \frac{\overbrace{tg\alpha.\cot g\alpha}^{۱}.\cot g\alpha}{(۱-\cos\alpha)} < ۰ \Rightarrow A = \frac{\cot g\alpha}{۱-\cos\alpha} < ۰$$

اولاً : با توجه به مخرج کسر $\cos\alpha \neq ۱$، پس $\alpha \neq ۲\pi$ و $\alpha \neq ۰$

و ثانیاً : با توجه به حدود تغییرات کسینوس $(-۱ \leq \cos\alpha \leq ۱)$ مخرج کسر فوق، یعنی : $۱-\cos\alpha$، همواره مثبت است، پس علامت کسر فقط به صورت آن بستگی پیدا می‌کند، پس باید $\cot g\alpha < ۰$ باشد و این ممکن نیست جز این‌که α در ناحیهٔ دوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد.

مسألهٔ ۴) هرگاه $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ و $\cos\alpha = ۲m-۱$، حدود تغییرات m را معین کنید.

طبق فرض داریم $\pi/۲ < \alpha < \pi \Rightarrow -۱ < \cos\alpha < ۰$

$\Rightarrow -۱ < ۲m-۱ < ۰$

(الف) $\text{۲}m-\text{۱}<\text{۰} \Rightarrow \text{۲}m<\text{۱} \Rightarrow m<\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

(ب) $\text{۲}m-\text{۱}>-\text{۱} \Rightarrow \text{۲}m>\text{۰} \Rightarrow m>\text{۰}$

$\Big\} \xrightarrow{\text{حدود تغییرات } m} \text{۰}<m<\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

مسألهٔ ۵) هرگاه $\frac{\pi}{\text{۴}}<\alpha<\frac{\pi}{\text{۲}}$ و $\cos \text{۴}\alpha=\frac{m-\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}$ حدود تغییرات m را معین کنید.

داریم : $\frac{\pi}{\text{۴}}<\alpha<\frac{\pi}{\text{۲}} \Rightarrow \pi<\text{۴}\alpha<\text{۲}\pi \Rightarrow -\text{۱}<\cos \text{۴}\alpha<\text{۱}$

$$\Rightarrow -\text{۱}<\frac{m-\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}<\text{۱}$$

(الف) $\frac{m-\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}<\text{۱} \Rightarrow \text{۱}-\frac{m-\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}>\text{۰}$

$$\Rightarrow \frac{\text{۴}m+\text{۲}-m+\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}>\text{۰} \Rightarrow \frac{\text{۳}m+\text{۳}}{\text{۴}m+\text{۲}}>\text{۰} \qquad (\text{۱})$$

m	$-\infty$		$-\text{۱}$		$-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$		$+\infty$
$\text{۳}m+\text{۳}$		−	۰	+		+	
$\text{۴}m+\text{۲}$		−		−	۰	+	
کسر		+	۰	−	تعریف نشده	+	

با توجه به نامساوی (۱) و جدول فوق برای حالت «الف»، حدود تغییرات m عبارت است از : $m>-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ یا $m<-\text{۱}$.

(ب) $\frac{m-\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}>-\text{۱} \Rightarrow \frac{m-\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}+\text{۱}>\text{۰}$

$$\Rightarrow \frac{m-\text{۱}+\text{۴}m+\text{۲}}{\text{۴}m+\text{۲}}>\text{۰} \Rightarrow \frac{\text{۵}m+\text{۱}}{\text{۴}m+\text{۲}}>\text{۰} \qquad (\text{۲})$$

m	$-\infty$		$-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$		$-\frac{\text{۱}}{\text{۵}}$		$+\infty$
$\text{۵}m+\text{۱}$		−		−	۰	+	
$\text{۴}m+\text{۲}$		−	۰	+		+	
کسر		+	تعریف نشده	−		+	

با توجه به نامساوی (۲) و جدول برای حالت «ب»، حدود تغییرات m عبارت است از : $m>-\frac{\text{۱}}{\text{۵}}$ یا $m<-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ که اشتراک جوابهای حالت «الف» و «ب» به قرار زیر است :

حدود تغییرات m ⟵ $\left\{m \mid m>-\frac{\text{۱}}{\text{۵}}\right\} \cup \left\{m \mid m<-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right\}$

(اگر $m>-\frac{\text{۱}}{\text{۵}}$ داریم $m>-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ و اگر $m<-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ داریم $m<-\text{۱}$)

مسألهٔ ۶) بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A=\frac{\text{۱}-\text{۲}\sin x}{\text{۳}}$ را معین کنید.

برای حل این گونه تمرینها که نسبتهای مثلثاتی از درجه ۱ می‌باشند، با توجه به حدود تغییرات نسبت مثلثاتی موجود، بیشترین و کمترین مقدار عبارت را محاسبه می‌کنیم.

کمترین مقدار A اگر $\sin x=\text{۱} \Rightarrow A=\frac{\text{۱}-\text{۲}}{\text{۳}}=-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$

بیشترین مقدار A ۱ اگر $\sin x=-\text{۱} \Rightarrow A=\frac{\text{۱}+\text{۲}}{\text{۳}}=\frac{\text{۳}}{\text{۳}}=\text{۱}$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این مسأله، بیشترین مقدار عبارت A به ازای کمترین مقدار sinx یعنی ۱− و کمترین مقدار عبارت A به ازای بیشترین مقدار sinx یعنی ۱ به‌دست آمد.

مسألهٔ ۷) بیشترین و کمترین مقدار عددی عبارت $A=\sin^{\text{۲}} x-\text{۲}\sin x+\text{۵}$ را محاسبه کنید.

برای حلّ این مسأله، از تبدیل به مربع کامل استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که عبارتهای درجهٔ دوم به شکل $x^{\text{۲}}+bx+c$ را با اضافه و کم کردن $(\frac{b^{\text{۲}}}{\text{۴}})$ می‌توان به مربع کامل تبدیل کرد.

$$x^{\text{۲}}+bx+c=x^{\text{۲}}+ax+\frac{b^{\text{۲}}}{\text{۴}}+c-\frac{b^{\text{۲}}}{\text{۴}}$$

$$=(x+\frac{b}{\text{۲}})^{\text{۲}}+\frac{\text{۴}c-b^{\text{۲}}}{\text{۴}}$$

داریم : $A=\sin^{\text{۲}} x-\text{۲}\sin x+\text{۵}$

$$=\sin^{\text{۲}} x-\text{۲}\sin x+\text{۱}+\text{۵}-\text{۱}=(\sin x-\text{۱})^{\text{۲}}+\text{۴}$$

$$\Rightarrow A=(\sin x-\text{۱})^{\text{۲}}+\text{۴}$$

حال، واضح است که اگر مقدار داخل پرانتز، صفر باشد ؛ یعنی: $\sin x=\text{۱}$ آنگاه عبارت A کمترین مقدار خود را خواهد داشت ؛ یعنی : $\min A=\text{۴}$ و اگر داخل پرانتز بیشترین مقدار را داشته باشد، A نیز بیشترین مقدار خود را خواهد داشت ؛ یعنی : اگر $\sin x=-\text{۱}$، داریم $\text{Max}A=\text{۸}$.

مسألهٔ ۸) فقط کمترین مقدار عددی عبارت $A = tg^۲x + ۴tgx - ۵$ را محاسبه کنید.

$$A = tg^۲x + ۴tgx - ۵ = tg^۲x + ۴tgx + ۴ - ۵ - ۴$$
$$= (tgx + ۲)^۲ - ۹$$

اگر داخل پرانتز مخالف صفر باشد (مثبت باشد یا منفی) چون از درجهٔ ۲ است، همواره مثبت خواهد بود و مقدار عددی A از ۹- بیشتر می‌شود. پس کمترین مقدار عددی A زمانی است که پرانتز صفر باشد ؛ یعنی $tgx = -۲$ که در این حالت $\min A = -۹$.

(با توجه به حدود تغییرات تانژانت که از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد، عبارت A دارای بیشترین مقدار یا Max نمی‌باشد. در حقیقت مقدار عددیِ A تا $+\infty$ پیش می‌رود.)

فرمول اساسی مثلثات و نتیجه‌های حاصل از آن (رابطه‌های تبدیل نسبتهای مثلثاتی به یکدیگر)

با توجه به فرمول اساسیِ مثلثات، یعنی $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ مشاهده کردیم که اگر مثلاً : سینوس زاویه‌ای مشخص باشد، می‌توان کسینوس، تانژانت و کتانژانت آن زاویه را با توجه به ناحیهٔ مثلثاتی که آن زاویه دارد، مشخص کرد.

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$$
$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}$$

مسألهٔ ۹) اگر $\cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ و α زاویه‌ای در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} \xrightarrow{\text{α در ربع چهارم}} \sin\alpha = -\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$$
$$= -\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = -\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}}$$
$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-۴/۵}{۳/۵} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = -\frac{۴}{۳}}$$

و داریم $cotg\alpha = \frac{۱}{tg\alpha} \Rightarrow \boxed{cotg\alpha = -\frac{۳}{۴}}$

حال، اگر تانژانت یا کتانژانت زاویه‌ای معلوم باشد و بخواهیم سایر نسبتهای مثلثاتی آن را محاسبه کنیم، می‌بایست به دنبال روابطی بین تانژانت و کتانژانت با سینوس و کسینوس باشیم، که به‌ترتیب زیر، این روابط را با استفاده از فرمول اساسی مثلثات، محاسبه می کنیم.

رابطه‌های کسینوس برحسب تانژانت و کتانژانت:

داریم : $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را بر } \cos^۲\alpha} \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} + \frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}$

$$= \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow tg^۲\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

۲طرف تساوی معکوس می‌شود $\Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + tg^۲\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + tg^۲\alpha}}}$$

$tg^۲\alpha = \frac{۱}{cotg^۲\alpha}$ و داریم $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + \frac{۱}{cotg^۲\alpha}}}$

$$= \frac{۱}{\pm\sqrt{\frac{cotg^۲\alpha + ۱}{cotg^۲\alpha}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{\pm\frac{\sqrt{۱ + cotg^۲\alpha}}{cotg\ \alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{cotg\alpha}{\pm\sqrt{۱ + cotg^۲\alpha}}}$$

رابطه‌های سینوس برحسب تانژانت و کتانژانت

داریم: $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{۲ طرف را بر } \sin^۲\alpha} \frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha} + \frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}$

$$= \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + cotg^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

۲ طرف تساوی معکوس می‌شود $\Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + cotg^۲\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + cotg^۲\alpha}}}$$

$$\cot g^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha} \text{ و داریم } \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}}$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha}}} = \frac{1}{\pm\frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}} = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}}$$

تبصره: لازم به تذکر است، در حلّ مسائل و استفاده از فرمولهای فوق، عملاً می‌توان فقط از دو فرمول $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و $\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ استفاده کرد و سایر نسبتهای مثلثاتی مجهول را به‌دست آورد.

مسألهٔ ۱۰) اگر $\cot g\alpha=\frac{4}{5}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ α را محاسبه کنید.

$$\cot g\alpha=\frac{4}{5} \xrightarrow{tg\alpha=\frac{1}{\cot g\alpha}} tg\alpha=\frac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \boxed{tg\alpha=\frac{5}{4}}$$

$$\text{و داریم } \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} \xRightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}}$$

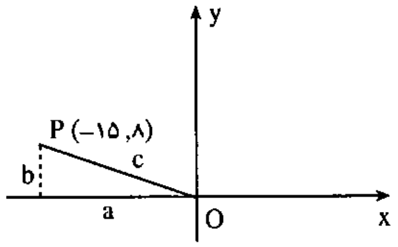
$$\cos\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{25}{16}}}=\frac{1}{-\sqrt{\frac{41}{16}}}=\frac{4}{-\sqrt{41}}$$

$$\text{گویا می‌کنیم } \Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\frac{-4\sqrt{41}}{41}}$$

$$\text{و داریم } tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{4}=\frac{\sin\alpha}{-\frac{4\sqrt{41}}{41}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{-20\sqrt{41}}{4\times41} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{-5\sqrt{41}}{41}$$

مسألهٔ ۱۱) در صفحهٔ مختصات دکارتی، اگر $P\Big|^{-15}_{8}$ و O مبدأ مختصات باشد و زاویه ای را که OP با محور x ها می سازد(زاویهٔ حاده) θ بنامیم، مطلوب است محاسبهٔ کلیهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه θ.



شکل ۱۰

$$c=\overline{OP}=\sqrt{(-15)^2+8^2}=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta=\frac{8}{17} & \cot g\theta=-\frac{15}{8} \\ \cos\theta=-\frac{15}{17} & \sec\theta=-\frac{17}{15} \\ tg\theta=-\frac{8}{15} & \operatorname{cosec}\theta=\frac{17}{18} \end{cases}$$

مسألهٔ ۱۲) اگر زاویه‌ای را که خط $y=3x$ با محور xها می‌سازد، θ بنامیم، بدون استفاده از رابطه‌های تبدیل نسبتهای مثلثاتی به یکدیگر، همهٔ نسبتهای مثلثاتیِ θ را بیابید.

ابتدا خط $y=3x$ را رسم می‌کنیم. برای رسم خط، به ۲ نقطهٔ آن نیازمندیم، که واضح است یک نقطهٔ آن $O\Big|^{0}_{0}$ ونقطهٔ دیگرراقرار دهیم $x=1$، خواهیم داشت $y=3$، پس $P\Big|^{1}_{3}$. حال، با توجه به این دو نقطه، خط را رسم می کنیم (شکل ۱۱).

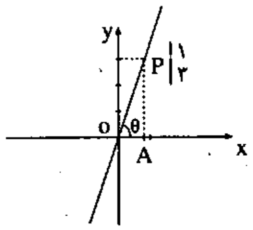
$$\overline{OP}=\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{10} \Rightarrow \overline{OP}=\sqrt{10}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAP داریم:

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

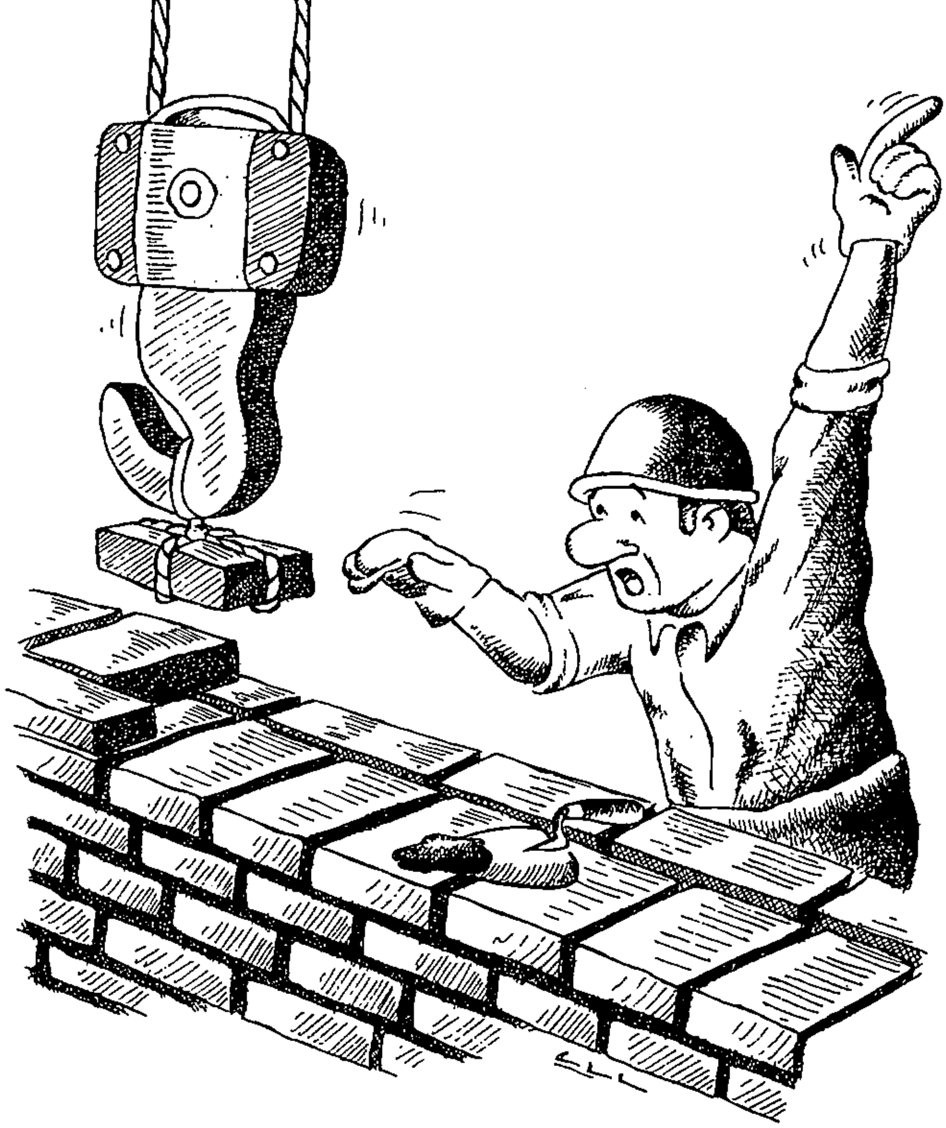
$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{10}$$

$$tg\theta=\frac{3}{1}=3 \qquad \cot g\theta=\frac{1}{3}$$



شکل ۱۱

گشت و گذاری در ریاضیات معاصر



تهیه و تنظیم: غلامرضا یاسی پور

نظریهٔ مجموعه‌ها

نظریهٔ مجموعه‌ها، سنگ اساس بنای ریاضیات جدید است. تعریفهای دقیق جمیع مفاهیم ریاضی، مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌هاست. گذشته از این روشهای استنتاج ریاضی، با استفاده از ترکیبی از استدلالهای منطقی و مجموعه ـ نظری تنظیم شده‌اند. مختصر بگوییم ؛ زبان نظریهٔ مجموعه‌ها، زبان مشترکی است که ریاضیدانان سراسر دنیا با آن صحبت کرده و آن را درک می‌کنند.

از مطالب فوق، چنین برمی‌آید که، اگر کسی بخواهد پیشرفتی در ریاضیات عالی یا کاربردهای عملی آن داشته باشد، باید با مفاهیم اساسی و نتایج نظریهٔ مجموعه‌ها و زبانی که در آن بیان شده‌اند، آشنا شود.

تعریف مجموعه، که در زیر ذکر شده است، این تصور را می‌دهد که درک مفهوم عامیانهٔ مجموعه، به علت وضوح ظاهری آن، آسان است ؛ اما در واقع، این تعریف در عمل، به مشکلات بسیاری می‌انجامد، که تنها با استفاده از دستاورد دستگاه‌های اصل موضوعی بر آنها فائق آمده‌اند.

زمانی که «**جورج کانتور**» Georg Cantor (۱۸۴۵ـ ۱۹۱۸)، مؤسّس نظریهٔ مجموعه‌ها، مفاهیم و استدلالهای جدید و متهورانهٔ خود را منتشر کرد، اهمیت آنها تنها توسط تعداد کمی از ریاضیدانان درک شد ؛ اما این نظریه در توسعهٔ بعدی‌اش، تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضیات نفوذ کرد و تأثیری عمیق بر گسترش آنها داشت ؛ به طوری که حتی باعث تغییر نظریه‌های تثبیت شده گردید. در واقع، توسعهٔ بعضی از نظامهای ریاضی، از قبیل توپولوژی، اساساً به ابزار نظریهٔ مجموعه‌ها وابسته است. از اینها مهمتر، نظریهٔ مجموعه‌ها نیرویی متحدکننده به دست داد که به تمام شاخه‌های ریاضیات مبنایی مشترک و مفاهیم آنها، وضوح و دقّتی تازه بخشیده است.

مفهوم مجموعه

عبارت «مجموعه» در کاربرد محاوره‌ای، معمولاً به معنای دسته‌ای از اشیا درنظر گرفته شده است که به مفهومی وابسته به یکدیگر یا شبیه هم باشند. دقیق ساختن جنبهٔ اخیر، مشکل است و بنابراین از مفهوم ریاضی حذف می‌شود.

> تعریف «کانتور» از مجموعه: یک مجموعه، نتیجهٔ جمع‌آوری اشیای خوش تشخیصی "well-determined" از برداشت یا تصورمان در یک کلّ منفرد است؛ این اشیا را عنصرهای آن مجموعه می‌نامیم.

این تعریف، به رغم فقدان دقّتش که در عمل به تناقضهایی منتهی می‌شود، برای معرفی چندین تعریف و مفهوم مهم کفایت می‌کند.

> اگر شیء a عنصری از مجموعهٔ S باشد، می‌نویسیم $a \in S$ (می‌خوانیم «a متعلق است به S» یا «S شامل a است».) در صورتی که a عنصری از S نباشد، می‌نویسیم $a \notin S$. اگر S مجموعهٔ عناصر a، b، c، ... باشد، می‌نویسیم: $S = \{a, b, c, ...\}$، به عنوان مثال، $\{۱, ۲, ۳, ...\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی مثبت است. اگر S تنها شامل یک عنصر a باشد، آن‌گاه S را *تک‌عنصری* "singleton" می‌نامیم، $S = \{a\}$. اگر S شامل دو عنصر متمایز a و b باشد، آن‌گاه S را جفت نامرتّب "unordered pair" می‌نامیم، $S = \{a, b\}$.

زیرمجموعه

T، **زیرمجموعهٔ** "Subset" هر مجموعهٔ S، هر مجموعه‌ای است که جمیع عناصرش متعلق به S باشند؛ این موضوع را با $T \subseteq S$ نمایش می‌دهیم. زیرمجموعه‌های Tای از S که با خود S متمایزند، به **زیرمجموعه‌های سره** "proper subsets" S موسومند؛ در این حالت می‌نویسیم $T \subset S$. مجموعهٔ تهی "empty set" مجموعه‌ای است که اصلاً عنصری ندارد. معرفی این مجموعه برای گردکردن "to round off" گزاره‌ها و استدلالهای نظریهٔ مجموعه‌ها مناسب به‌نظر رسیده است؛ درست همان‌طور که عدد ۰ (از لحاظ تاریخی اختراعی جدید) گزاره‌ها و محاسبه‌های حساب را گرد می‌کند. نماد معمول مجموعهٔ تهی $\varnothing$ است.

مجموعه‌هایی که عنصرهای آنها خود مجموعه‌اند، به **خانواده** "family" یا **دستگاه** "system" موسومند. به عنوان مثال، یک قوم یا ملت، مجموعه‌ای از اشخاص است و خود عنصری از خانوادهٔ اقوام یا ملتهاست. یکی از دستگاه‌های بسیارمهم، مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ S است؛ این دستگاه به **مجموعهٔ توانی** "power set" موسوم است و با p(S) نمایش داده می‌شود.

چهار اصل اساسی مشترک دستگاه‌های اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها $\{x \in N | x = y^۲ \text{ ، } y \in N \text{ به ازای هر}\}$

جمیع دستگاه‌های اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها، که در نیمهٔ اوّل این قرن (قرن بیستم میلادی) توسعه یافتند، چهار اصل اساسی مشترک دارند: اصلهای توسیع‌پذیری "principles of extensionality" اصل ساخت مجموعه‌ای "principle set constructions"، وجود مجموعه‌های نامتناهی، "existence of infinite sets" و اصل موضوع انتخاب "axiom of choice".

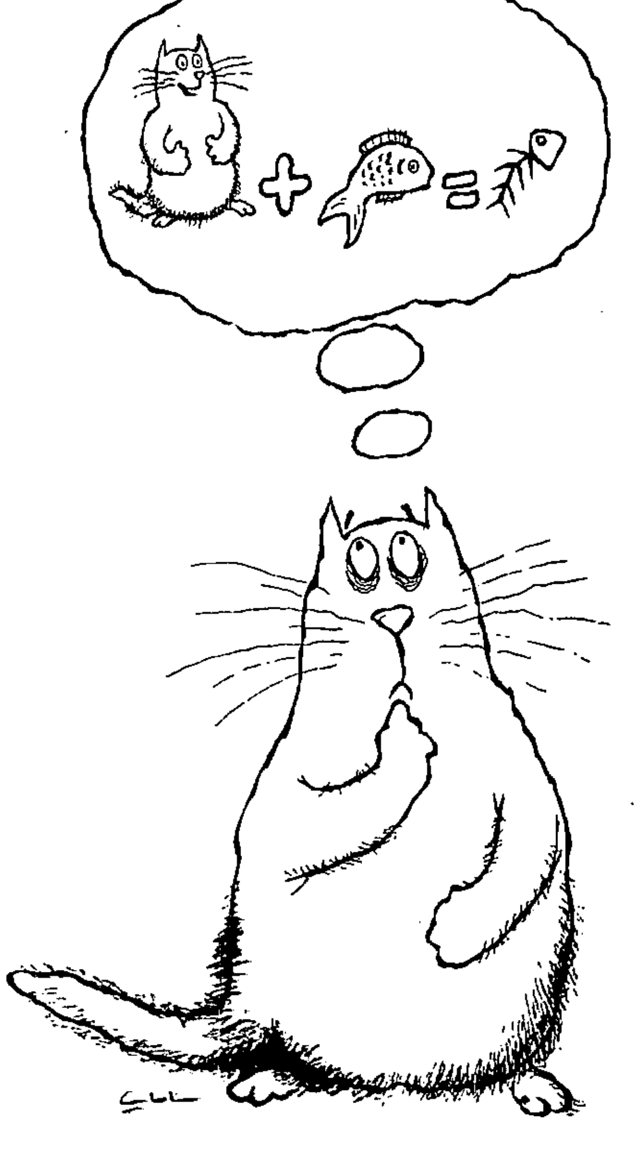
اصل **توسیع‌پذیری** بر این است که دو مجموعهٔ S و Tی دارای عنصرهای یکسان (یعنی، دو مجموعه‌ای که با یک توسیع باشند) همانندند $(S = T)$. کلمهٔ همانند "identical" را در این‌جا به مفهوم **لایب نیتز** "leibniz" گرفته‌ایم؛ یعنی در هر گزاره می‌توان T را به جای S قرار داد بی‌آن‌که صدق (راست بودن) یا کذب (دروغ بودن) گزاره تغییر کند.

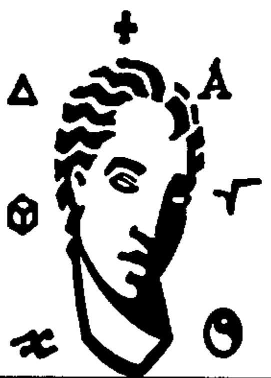
اصل **ساخت** بر این است که انواع محدود خاصی از گزاره‌ها مجموعه‌ها را تعریف می‌کنند؛ یکی از محدودیتهای معمول این است که گزاره تنها شامل نمادهای شیئی "object symbols"، نمادهای منطقی "logical symbols" و نماد $\in$ است.

وجود مجموعه‌های نامتناهی بیانگر همین مطلب است. البته معنای نامتناهی را باید دقیق کنیم. مشکل است که این اصل با استفاده از ارجاع مستقیم علت و انگیزه موضوعی شود؛ اما بدون آن قسمت اعظم ریاضیات وعلوم نظری "theoretical science" از قبیل حساب دیفرانسیل و انتگرال و مکانیک کلاسیک، بی معنا خواهد شد. بی‌آن حتی نمی‌توان اساس مجموعه نظری نظریهٔ اعداد طبیعی را به‌دست داد.

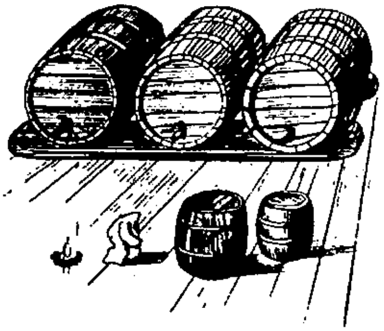
سرانجام، **اصل موضوع انتخاب** است که پایهٔ بسیاری از استدلالهای ریاضی است. با وجود این، بسیاری از مؤلفان به این اصل موضوع با تردیدی می‌نگرند ؛ مشابه موردی که اصل موضوع موازیهای اقلیدس در دوران اوّلیه با آن برخورد داشت.

اصل انتخاب : اگر S دستگاهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ Aای موجود است که به‌طور دقیق یک عنصر مشترک با هر مجموعهٔ S از S دارد.





تفریح اندیشه ۲



فروشنده‌ای سه ظرف، هر یک به گنجایش ۱۰۰ لیتر، و دو ظرف دیگر به گنجایش ۵۰ لیتر و ۲۵ لیتر در اختیار دارد.

سه ظرف اول پر هستند، اولی حاوی شیر پر چربی، دومی پر از شیر معمولی و سومی مملو از شیر کم چربی است. دو ظرف دیگر خالی می‌باشند. فروشنده برای اینکه سه نوع شیر مخلوط با نسبتهای مشخص در سه ظرف ۱۰۰ لیتری داشته باشد، فقط از ۵ ظرف بالا استفاده می‌کند. پس از انجام ۶ عمل ظرفهای ۱۰۰ لیتری همگی پر از شیر مخلوط با نسبتهای زیر می‌باشند :

اولی حاوی $\frac{۱}{۲}$ شیر پرچربی، $\frac{۱}{۴}$ شیر معمولی و $\frac{۱}{۴}$ شیر کم‌چربی

دومی حاوی $\frac{۱}{۲}$ شیر معمولی، $\frac{۱}{۴}$ شیر پرچربی، $\frac{۱}{۴}$ شیر کم‌چربی

سومی حاوی $\frac{۱}{۲}$ شیر کم‌چربی، $\frac{۱}{۴}$ شیر پرچربی، $\frac{۱}{۴}$ شیر معمولی.

فروشنده چگونه عمل کرده است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکیور

جواب در صفحه ۸۸

پلکان هندسی

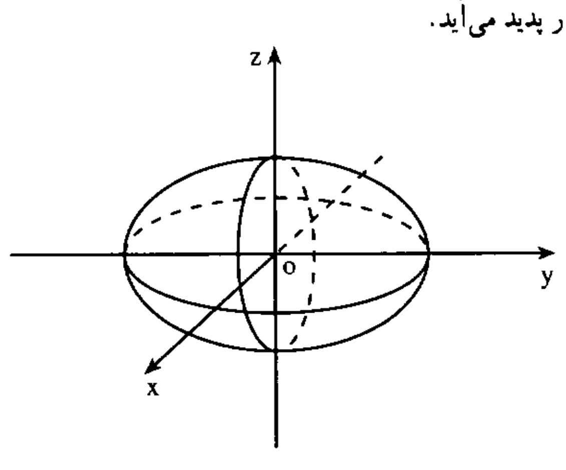
(قسمت نوزدهم)

● محمدهاشم رستمی

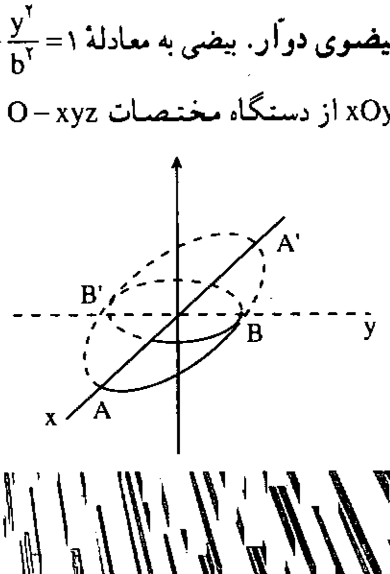
بیضوی دوّار

در ادامهٔ بحث مقاطع مخروطی، دراین مقاله، مطالبی را راجع به بیضوی دوار وهذلولی مطرح می‌کنیم.

۱۳. بیضوی دوّار. از دوران بیضی (E) به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a حول یکی از محورهای تقارنش، بیضوی دوّار پدید می‌آید.



معادلهٔ بیضوی دوّار. بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ واقع در صفحهٔ xOy از دستگاه مختصات O − xyz را در نظر



می‌گیریم. از دوران این بیضی حول محور xها یک بیضوی دوّار پدید می‌آید. برای تعیین معادلهٔ این بیضوی دوّار، بیضی (E) به

معادلهٔ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ را یک نصف‌النهار از آن در نظر می‌گیریم.

معادلهٔ یک مدار دلخواه از این بیضوی دوّار چنین است :

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=m\\ x=n\end{cases}$$

اکنون بین ۴ معادلهٔ دستگاه زیر x، y و z را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\\ x^2+y^2+z^2=m\\ x=n\end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2+y^2+0=m\Rightarrow y^2=m-n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{a^2}+\frac{m-n^2}{b^2}=1$$

اکنون به جای m و n مقدار می‌گذاریم تا معادلهٔ بیضوی دوّار به دست آید. داریم :

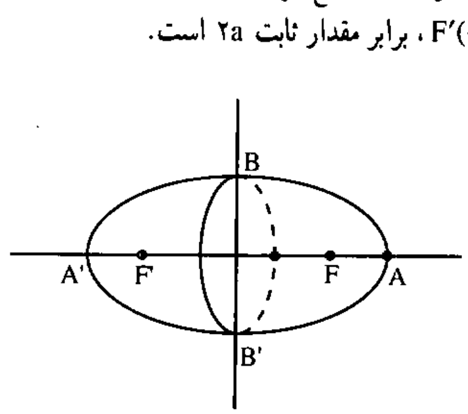
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

تبصره ۱. اگر بیضی (E) به معادلهٔ $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ را حول محور yها دوران دهیم، بیضوی به معادلهٔ $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ به‌دست می‌آید.

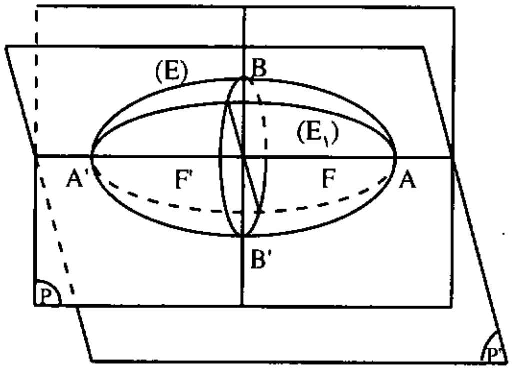
تبصره ۲. از دوران بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ حول محور zها بیضوی دوار به معادلهٔ $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ به‌دست می‌آید.

تبصره ۳. هرگاه در بیضوی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$، $b=c$ ، $c=a$ یا $a=b$ باشد، بیضوی بترتیب، به بیضویهای دوار به معادله‌های $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ ، $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ تبدیل می‌گردد.

تبصره ۴. اگر بیضی (E) به کانونهای F و F′ حول محور کانونی FF′ دوران کند، بیضوی دواری پدید می‌آید که مجموع فاصلهٔ هر نقطه واقع بر آن، از دو نقطهٔ ثابت $F(f,0,0)$ و $F'(-f,0,0)$ ، برابر مقدار ثابت $2a$ است.

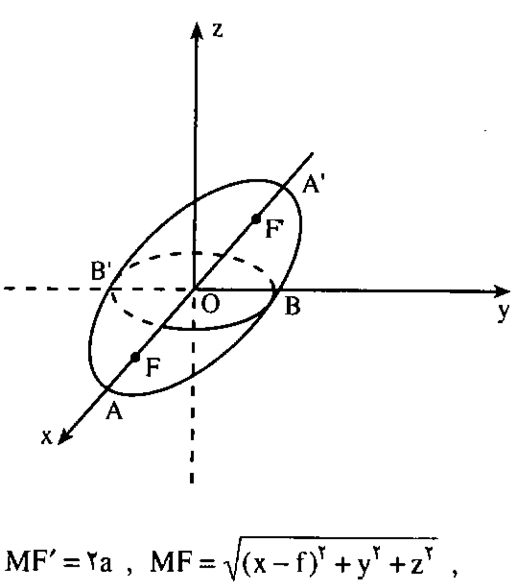


اثبات به روش هندسی: صفحه‌ای را که بیضی در آن قرار دارد، P می‌نامیم و این صفحه را حول محور کانونی FF′ دوران می‌دهیم. اگر یک موقعیت جدید صفحهٔ P را P_1 و موقعیت بیضی (E) در صفحهٔ P_1 را (E_1) بنامیم، مجموع فاصلهٔ هر نقطه واقع بر بیضی (E_1) از دو نقطهٔ ثابت F و F′ ، برابر $2a$ است؛



زیرا بیضی (E_1) همان بیضی (E) به کانونهای F و F′ و عدد ثابت $2a$ است. بنابراین، در هر موقعیتی از دوران، مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر بیضوی دوار از دو کانون F و F′ ، برابر $2a$ است. $FF'=2c$ فاصلهٔ کانونی و a و b نیمهٔ قطرهای این بیضوی دوار می‌باشند.

اثبات به روش تحلیلی. بیضی (E) به کانونهای $F(f,0,0)$ و $F'(-f,0,0)$ را در صفحهٔ xOy از دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x,y,z)$ نقطه‌ای از بیضوی دوار پدید آمده از دوران بیضی (E) حول محور FF′ باشد، داریم:



$$MF+MF'=2a\ ,\ MF=\sqrt{(x-f)^2+y^2+z^2}\ ,$$

$$MF'=\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-f)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}=2a$$

این معادله را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2+z^2}=2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow (x-f)^2+y^2+z^2 = 4a^2+(x-f)^2+y^2+z^2-4a\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow -4fx-4a^2=-4a\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f.x}{a}+a=\sqrt{(x+f)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f^2.x^2}{a^2}+a^2+2fx=x^2+f^2+2fx+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow (a^2-f^2)x^2+a^2(y^2+z^2)=a^2(a^2-f^2),$$

$$a^2-f^2=b^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2+a^2(y^2+z^2)=a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2(y^2+z^2)}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

بنابراین می‌توان گفت مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $F(f,0,0)$ و $F'(-f,0,0)$، مقدار ثابت $2a$ است. بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ است که $b^2=a^2-f^2$ است.

مثال ۱. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(4,0,0)$ و $F'(-4,0,0)$، برابر ۱۰ باشد.

حل. این مکان هندسی بیضوی دوّاری است که F و 'F کانونها و ۱۰، عدد ثابت آن است. بنابراین داریم:

$$FF'=2f=|x_F-x_{F'}|=|4-(-4)|=8\Rightarrow f=4$$

$$2a=10\Rightarrow a=5\Rightarrow b=\sqrt{a^2-f^2}=\sqrt{25-16}=3$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2+z^2}{9}=1$$

مثال ۲. روی خط $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$ نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(0,5,0)$ و $F'(0,-5,0)$ برابر ۲۶ باشد.

حل. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ داده شدهٔ F و 'F، برابر عدد ثابت ۲۶ است، یک بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2+z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ است. امّا:

$$2a=26\Rightarrow a=13,$$

$$FF'=2f=|y_F-y_{F'}|=|5-(-5)|=10$$

$$\Rightarrow f=5\Rightarrow b=\sqrt{a^2-f^2}=\sqrt{169-25}=12$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+z^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$$ معادلهٔ بیضوی

اکنون نقطه‌های برخورد خط D و این بیضوی دوّار را که جوابهای مسأله هستند، تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{x^2+z^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1\\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}=t\Rightarrow x=2t\ ,\ y=3t\ ,\ z=4t+1\end{cases}$$

$$\frac{4t^2+(4t+1)^2}{144}+\frac{9t^2}{169}=1$$

$$\Rightarrow \frac{20t^2+8t+1}{144}+\frac{9t^2}{169}=1$$

$$4676t^2+1352t-24167=0\Rightarrow\ t_1=...,t_2=...$$

این معادله دو جواب دارد؛ بنابراین دو نقطه، جواب مسأله است.

مثال ۳. معادلهٔ فصل مشترک بیضوی دوّار به معادلهٔ $\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ با صفحه‌های: الف. $x=3$ ؛ ب. $y=-2$ ؛ ج. $z=2$ به‌دست آورید.

حل. الف.

$$\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1\\ x=3\end{cases}\Rightarrow \frac{9+y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1-\frac{9}{25}\Rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{\frac{256}{25}}=1\\ x=3\end{cases}$$

فصل مشترک یک بیضی است.

ب.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=1\\ y=-2\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+4}{25}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{\frac{336}{25}}=1\\ y=-2\end{cases}$$

فصل مشترک یک بیضی است.

پ.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=1\\ z=2\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{25}+\frac{4}{16}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{25}=\frac{3}{4}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{75}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{75}{4}\\ z=2\end{cases}$$

این فصل مشترک، یک دایره است.

نکته. فصل مشترک این بیضوی دوّار :

الف. با هر صفحهٔ $x=k_1\ (-5<k_1<5)$ یک بیضی است.

ب. با هر صفحهٔ $y=k_2\ (-5<k_2<5)$ یک بیضی است.

پ. با هر صفحهٔ $z=k_3\ (-4<k_3<4)$ یک دایره است.

ت. با هر یک از صفحه‌های $x=5$ ، $x=-5$ ، $y=5$ ، $y=-5$ ، $z=4$ و $z=-4$ یک نقطه است.

مثال ۴. مختصات مرکز و نیمه قطرهای بیضوی دوّار به معادلهٔ $x^2+16y^2+z^2-4x+32y-5=0$ را تعیین کنید.

حل. داریم :

$$x^2-4x+16(y^2+2y)+z^2-5=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-4+16\left[(y+1)^2-1\right]+z^2-5=0$$

$$(x-2)^2+16(y+1)^2+z^2=25$$

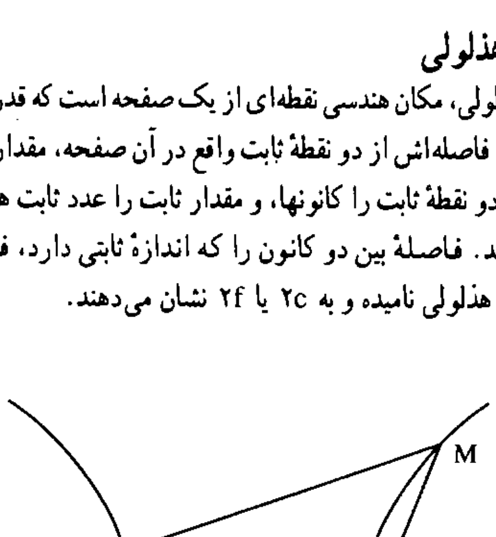
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{\frac{25}{16}}+\frac{z^2}{25}=1$$

$$\Rightarrow a^2=c^2=25\Rightarrow a=c=5\ ,$$

$b^2=\frac{25}{16}\Rightarrow b=\frac{5}{4}$ ، $O'(2,-1,0)$ مرکز تقارن

۱۴. هذلولی

هذلولی، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. دو نقطهٔ ثابت را کانونها، و مقدار ثابت را عدد ثابت هذلولی می‌نامند. فاصلهٔ بین دو کانون را که اندازهٔ ثابتی دارد، فاصلهٔ کانونی هذلولی نامیده و به 2c یا 2f نشان می‌دهند.



اگر M نقطه‌ای متعلق به هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت 2a باشد، $|MF'-MF|=2a$ یا $MF'-MF=\pm 2a$ است. MF و MF′ شعاع حاملهای نقطهٔ M نامیده می‌شوند.

هذلولی دو شاخهٔ متمایز دارد که یکی را شاخهٔ کانون F و دیگری را شاخهٔ کانون F′ می‌نامند.

تعریف هذلولی، نشان می‌دهد که هذلولی دارای نقطهٔ بی‌نهایت دور است.

خروج از مرکز هذلولی. اگر M نقطه‌ای دلخواه از هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت 2a باشد، داریم :

$$FF'>|MF'-MF|\Rightarrow 2c>2a\Rightarrow c>a\Rightarrow \frac{c}{a}>1$$

$\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی نامیده و به e نمایش می‌دهند ؛

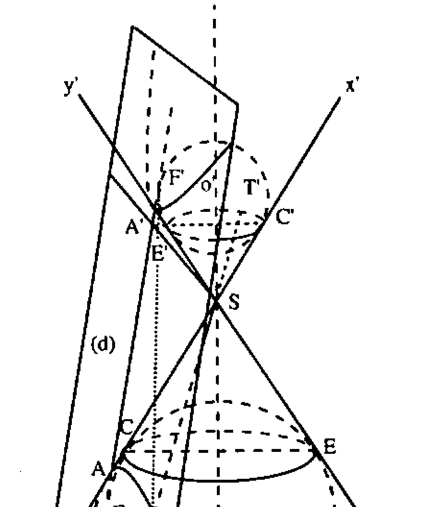
$e = \frac{c}{a} > ۱$. خروج از مرکز هذلولی، همواره از ۱ بزرگتر است.

در صورتی که ۱ = e باشد، $\frac{c}{a} = ۱$ یا c = a یا ۲c = ۲a خواهد بود. در این صورت، هذلولی به دو نیمخط Fx و F′x′ از خط راست FF′ تبدیل می‌شود (شکل).

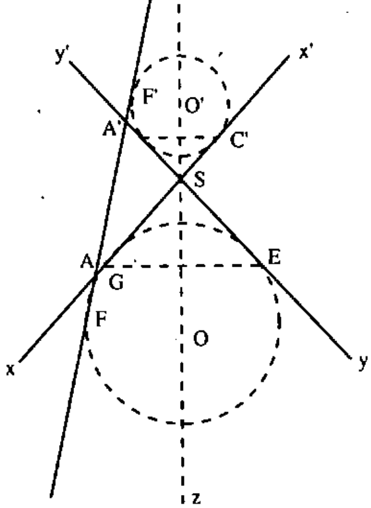


قضیهٔ داندلن. اگر صفحهٔ P، مولدهای سطح مخروطی دوّار به رأس S، مولد Δ و محور D را در دو طرف رأس قطع کند، فصل مشترک یک هذلولی است.

اثبات به روش هندسی. صفحهٔ Q را چنان بر محور سطح مخروطی دوّار مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ P عمود باشد و آن را صفحهٔ شکل می‌نامیم. آن‌گاه سطح مخروطی دوّار و صفحهٔ P را



بر صفحهٔ شکل تصویر می‌کنیم. تصویر صفحهٔ P بر صفحهٔ شکل و مقطع آن با صفحهٔ مذکور، خط d و تصویر سطح مخروطی دوّار بر صفحهٔ شکل و فصل مشترکش با آن صفحه، زاویهٔ xSy و زاویهٔ متقابل آن x′Sy′ می‌باشد.



چون صفحهٔ P سطح مخروطی دوّار را در دو طرف رأس S قطع کرده است، خط d ضلع Sx را در نقطهٔ A، و Sy′ امتداد ضلع Sy را در نقطهٔ A′ قطع می‌کند. دو دایره رسم می‌کنیم که بر خط d در نقطه‌های F و F′ بر ضلعهای زاویهٔ xSy و امتداد آنها، در نقطه‌های G ،E و E′ ، G′ مماس شوند. از دوران این دو دایره حول محور Sz، دو کره به‌وجود می‌آید که در نقطه‌های F و F′ بر صفحهٔ قاطع و در طول دو دایره به قطرهای EG و E′G′ بر سطح مخروطی دوّار مماسند. در مثلث ASA′ داریم :

$AF = AG = A'F' = A'E'$

اگر M یکی از نقطه‌های مقطع و T و T′ نقطه‌های برخورد مولد SM با دو دایرهٔ تماس باشند، MF = MT ؛ زیرا هر دو مماسهایی هستند که از M بر کرهٔ (O) رسم شده‌اند و MF′ = MT′ ، به دلیل آن که هر دو مماسهایی هستند که از M بر کرهٔ (O′) رسم شده‌اند ؛ پس :

$MF' - MF = MT' - MT = TT' = GG' =$

$AG' - AG = AF' - AF = AF' - A'F' = AA'$

و با فرض AA′ = ۲a ، خواهیم داشت :

$MF' - MF = ۲a$

بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M، یک هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a یا رأسهای A و A′ است.

نکته. فصل مشترک صفحهٔ دایرهٔ تماس کرهٔ (O) و صفحهٔ تماس کرهٔ (O′) با صفحهٔ P، دو خط راست δ و δ' می‌باشند که بترتیب خطهای هادی نظیر کانونهای F و F′ نامیده می‌شوند. خطهای هادی ویژگی زیر را دارند:

نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ هذلولی از یک کانون به فاصلهٔ آن نقطه از خط هادی نظیر آن کانون، مقدار ثابت $\frac{c}{a}$ است.

این ویژگی را، با توجه به این که در هذلولی $\varphi < \alpha$ است (φ زاویهٔ خط d با محور سطح مخروطی دوّار و α نصف زاویهٔ رأس سطح مخروطی دوّار است)، ثابت کنید.

اثبات به روش تحلیلی. می‌دانیم معادلهٔ سطح مخروطی دوّار حاصل از دوران خط $D: \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$ حول خط $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ به صورت

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\cos^2\alpha$$
$$=\left[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\right]^2$$

است، که در آن، α زاویهٔ بین دو خط D و Δ است. حال اگر صفحهٔ P به معادلهٔ $Ax+By+Cz+D=0$ را چنان اختیار کنیم که هر دو دامنهٔ سطح مخروطی دوّار را قطع کند، با تعیین معادلهٔ تقاطع، ثابت می‌شود که مقطع یک هذلولی است.

مطلب را برای مقطع سطح مخروطی دوّار حاصل از دوران خط $\begin{cases} y-2x=0 \\ z=0 \end{cases}$ حول محور xها و صفحهٔ $P: y=4$ ثابت می‌کنیم. نخست معادلهٔ این سطح مخروطی دوّار را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=m \\ x=n \\ y-2x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=2n \Rightarrow n^2+4n^2+0=m \Rightarrow m-5n^2=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-5x^2=0$$
$$\Rightarrow y^2+z^2-4x^2=0 \qquad \text{معادلهٔ سطح مخروطی دوّار}$$

حال مقطع این سطح مخروطی دوّار با صفحهٔ $P: y=4$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} y^2+z^2-4x^2=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow 4+z^2-4x^2=0$$

$$\Rightarrow 4x^2-z^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-\frac{z^2}{4}=1 \\ y=2 \end{cases}$$

معادلهٔ به‌دست آمده یک هذلولی را مشخص می‌کند.

ادب ریاضی

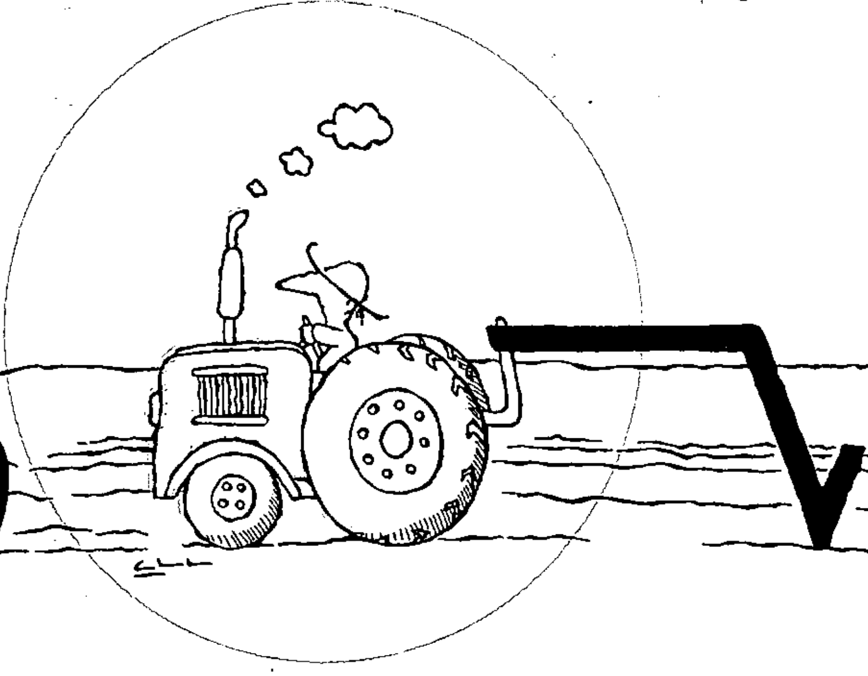
حساب احتمالات در واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب چیزی را که صاحبان فکر بدون آنکه متوجه باشند به غریزه درمی‌یابند، با دقت و صحت بیان می‌دارد. این علم که با ملاحظات مربوط به بازیهای شانسی و تصادف به وجود آمد، امروزه آنچنان اهمیتی یافته است که از مهمترین مسائل معرفت آدمی به شمار می‌آید.

پی‌یر سیمون لاپلاس

● سیّد محمّدرضا هاشمی موسوی

قسمت اوّل

رادیکال



عددهای گنگ

هر عددی که قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{۲}$ است ؛ که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که به‌طور دقیق، برابر $\sqrt{۲}$ باشد ؛ زیرا :

$$۱/۴^{۲} = ۱/۹۶ < ۲ < ۱/۵^{۲} = ۲/۲۵$$

$$۱/۴۱^{۲} = ۱/۹۸۸۱ < ۲ < ۱/۴۲^{۲} = ۲/۰۱۶۴$$

$$۱/۴۱۴^{۲} = ۱/۹۹۹۳۹۶ < ۲ < ۱/۴۱۵^{۲} = ۲/۰۰۲۲۲۵$$

$$۱/۴۱۴۲^{۲} = ۱/۹۹۹۹۶۱۶۴ < ۲ < ۱/۴۱۴۳^{۲} = ۲/۰۰۰۲۴۴۴۹$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به عددی دهدهی نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد.

به‌عبارت دیگر، اگر m و n عددهایی درست فرض شوند، نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در این‌جا این مطلب را با روش «برهان خلف» به اثبات می‌رسانیم : اگر $\frac{m}{n}$ را کسری ساده نشدنی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به هم، اوّل باشند. به بیان دیگر، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n، هردو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{۲}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم :

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n} ; ۲ = \frac{m^{۲}}{n^{۲}} ; m^{۲} = ۲n^{۲} \quad (۱)$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش پذیر است ؛ پس باید $m^{۲}$، یعنی m هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم :

$$m = ۲k \qquad (k \in z)$$

در برابری (۱)، ۲k را به جای m می‌گذاریم :

$$(۲k)^{۲} = ۲n^{۲} ; ۴k^{۲} = ۲n^{۲} ; ۲k^{۲} = n^{۲} \quad (۲)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش‌پذیر است.

ولی از آن جا که m و n را نسبت به هم اوّل گرفته بودیم، نتیجه

می‌گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بی نهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را، مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌نامند.

ریشهٔ دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمترمربع است، طول ضلع مربع چند سانتیمتر است؟ برای حلّ این مسأله، طول ضلع مربع را x سانتیمتر فرض می‌کنیم؛ در این صورت، مساحت مربع $x^۲$ خواهد بود:

$$x^۲ = ۱۶ \qquad (۱)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم که توان دوم آن ۱۶ باشد. با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که دو عدد ۴ و ۴- وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است؛ زیرا:

$$۴^۲ = ۱۶ \text{ و } (-۴)^۲ = ۱۶$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی‌تواند باشد، بنابراین طول ضلع مربع، یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می‌شود:

$$x = ۴$$

عددهای ۴ و ۴- را ریشهٔ دوم عدد ۱۶ می‌نامند.

ریشه‌های دوم عدد $\frac{۱}{۱۶}$، عددهای $\frac{۱}{۴}$ و $-\frac{۱}{۴}$ می‌باشند؛

زیرا:

$$(-\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱}{۱۶} \; , \; (\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱}{۱۶}$$

ریشهٔ دوم ۰ نیز ۰ است؛ زیرا:

$$۰^۲ = ۰$$

آیا عدد ۱۶- ریشهٔ دوم دارد؟

عدد ۱۶- ریشهٔ دوم ندارد؛ زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و ۴- یا هر عدد حقیقی دیگر، ریشهٔ دوم ۱۶- باشد، باید توان دوم این عددها (۴ و ۴- یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشهٔ دوم ۱۶- فرض می‌شود) برابر ۱۶- شود؛ ولی می‌دانیم که توان دوم هر عدد حقیقی، هیچ‌گاه عدد منفی نیست؛ از این رو عدد ۱۶- ریشهٔ دوم حقیقی ندارد و به همین دلیل:

عددهای منفی، ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

همان‌طور که گفته شد، ۴ و ۴- ریشه های دوم ۱۶ می‌باشند. ریشه‌های دوم ۱۶ را با $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ نشان می‌دهیم و بترتیب می‌خوانیم: رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.

ریشه‌های دوم ۰/۰۱ عبارت است از:

$$\sqrt{۰/۰۱} = ۰/۱ \text{ و } -\sqrt{۰/۰۱} = -۰/۱$$

زیرا:

$$(۰/۱)\times(۰/۱) = ۰/۰۱ \text{ و } (-۰/۱)\times(-۰/۱) = ۰/۰۱$$

ریشه های دوم ۲ عبارت است از $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ ($\sqrt{۲}$ همان جذر عدد ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی، می توان حساب کرد).

ریشه های دوم عدد a (a بزرگتر یا مساوی صفر) را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. $\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم مثبت و $-\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم منفی است.

به‌طورکلی، اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و $x^۲ = a$ باشد، داریم:

$$x = \sqrt{a} \text{ و } x = -\sqrt{a} \quad (a \geq ۰)$$

به بیان دیگر، اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد، b را ریشهٔ دوم عدد حقیقی a گویند؛ هرگاه: $b^۲ = a (a \geq ۰)$

مثال: ریشه‌های دوم عددهای ۳۶، ۹، ۱۰۰، ۰/۰۰۰۱، ۰/۸۱، $\frac{۹}{۱۶}$، $\frac{۴}{۸۱}$، ۱، ۲، ۴-، ۱۰۰- و $\frac{-۱}{۹}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\pm\sqrt{۳۶} = \pm۶ \; , \; \pm\sqrt{۹} = \pm۳ \; , \; \pm\sqrt{۱۰۰} = \pm۱۰ \; ,$$

$$\pm\sqrt{۰/۰۰۰۱} = \pm۰/۰۱ \; , \; \pm\sqrt{۰/۸۱} = \pm۰/۹ \; ,$$

$$\pm\sqrt{\frac{۹}{۱۶}} = \pm\frac{۳}{۴} \; , \; \pm\sqrt{\frac{۴}{۸۱}} = \pm\frac{۲}{۹} \; , \; \pm\sqrt{۱} = \pm۱ \; ,$$

$$\pm\sqrt{۲} \cong \pm۱/۴۱۴$$

عددهای ۴-، ۱۰۰- و $\frac{-۱}{۹}$، چون اعدادی منفی هستند، ریشهٔ دوم ندارند.

توجه: ریشهٔ دوم مثبت عدد $(-۲)^۲$ یا ۴، برابر ۲ است؛ یعنی:

$$\sqrt{(-۲)^۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

و ریشهٔ دوم منفی آن، برابر ۲- است؛ یعنی:

$-\sqrt{(-۲)^۲} = -\sqrt{۴} = -۲$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{(-۹)^۲}$ و $\sqrt{-۹^۲}$ یکی نیست ؛ زیرا :

$$\sqrt{(-۹)^۲} = \sqrt{۸۱} = ۹ \text{ و } \sqrt{-۹^۲} = \sqrt{-۸۱}$$

(عدد ۸۱− ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.)

یعنی ریشهٔ دوم مثبت $(-۹)^۲$ برابر ۹ است و $-۹^۲$ ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.

محاسبه $\sqrt{x^۲}$

برای مثال، عبارت $\sqrt{x^۲}$ را به‌ازای برخی از مقادیر مختلف x محاسبه می‌کنیم :

$x = ۴: \sqrt{x^۲} = \sqrt{۴^۲} = ۴$

$x = ۰/۲: \sqrt{x^۲} = \sqrt{۰/۲^۲} = ۰/۲$

$x = -۵: \sqrt{x^۲} = \sqrt{(-۵)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$

$x = \frac{-۲}{۳}: \sqrt{x^۲} = \sqrt{(\frac{-۲}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$

ریشهٔ nام یک عدد

به همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد،ریشهٔ دوم را تعریف کردیم، می‌توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان nام (n عدد طبیعی)، ریشه‌های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشهٔ nام را تعریف کرد.

مثال:

از $۱۲۵ = ۵^۳$ نتیجه می‌شود $۵ = \sqrt[۳]{۱۲۵}$ و می خوانیم «ریشهٔ سوم ۱۲۵ برابر ۵ است».

از $۱۶ = ۲^۴$ نتیجه می‌شود $۲ = \sqrt[۴]{۱۶}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ چهارم ۱۶ برابر ۲ است».

از $۲۴۳ = ۳^۵$ نتیجه می‌شود $۳ = \sqrt[۵]{۲۴۳}$ و می خوانیم «ریشهٔ پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است».

از $۶۴ = ۲^۶$ نتیجه می‌شود $۲ = \sqrt[۶]{۶۴}$ و می خوانیم « ریشهٔ ششم ۶۴ برابر ۲ است».

به‌طور کلی :

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲،$(n \geq ۲)$ و عددهای حقیقی a و b، اگر $a^n = b$ و n عددی فرد باشد :

$$a = \sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq ۰$:

$$|a| = \sqrt[n]{b}$$

برای مثال :

$-۲ = \sqrt[۳]{-۸}$ ؛ زیرا : $-۸ = (-۲)^۳$.

$۲ = \sqrt[۵]{۳۲}$ ؛ زیرا : $۳۲ = ۲^۵$.

$۲ = \sqrt[۶]{۶۴}$ ؛ زیرا : $۶۴ = ۲^۶$.

$\frac{۳}{۲} = \sqrt[۴]{\frac{۸۱}{۱۶}}$ ؛ زیرا : $\frac{۸۱}{۱۶} = (\frac{۳}{۲})^۴$.

عبارتهایی مانند :

$\sqrt[۶]{-۶۴}$، $\sqrt[۴]{-۱۶}$، $\sqrt[۸]{-۲^۸}$، $\sqrt[۱۰]{-۱۰^{۱۰}}$، $\sqrt{-۸۱}$، $\sqrt[۷۴]{-۲}$

و $\sqrt[۱۰۰]{-۱}$ عدد حقیقی نیستند ؛ زیرا **عددهای منفی، ریشهٔ زوج ندارند.**

مثال: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}$ ۲) $\sqrt{(-۳)(-۳)^۳} - \sqrt{۸۱}$

۳) $۲ + \sqrt[۳]{-۸}$ ۴) $۲\sqrt{۵^۲} - \sqrt[۴]{۸۱} - \sqrt[۴]{۶۲۵}$

حل:

۱) $\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}} = \sqrt[۵]{(-\frac{۱}{۲})^۵} = -\frac{۱}{۲}$

۲) $\sqrt{(-۳)(-۳)^۳} - \sqrt{۸۱} = \sqrt{(-۳)^۴} - ۹$
$= (-۳)^۲ - ۹ = ۹ - ۹ = ۰$

۳) $۲ + \sqrt[۳]{-۸} = ۲ + \sqrt[۳]{(-۲)^۳} = ۲ - ۲ = ۰$

۴) $۲\sqrt{۵^۲} - \sqrt[۴]{۸۱} - \sqrt[۴]{۶۲۵} = ۲ \times ۵ - \sqrt[۴]{۳^۴} - \sqrt[۴]{۵^۴}$
$= ۱۰ - ۳ - ۵ = ۲$

تعریف

هرگاه عدد حقیقی k توان nام عدد حقیقی a باشد، k را توان nام کامل a می‌نامند ؛ برای مثال : «۲۵ توان دوم کامل ۵+ یا ۵−»، «۸ توان سوم کامل ۲»، «۶۲۵ توان چهارم کامل ۵+ یا ۵−»، «۳۲ توان پنجم کامل ۲» و «۶۴ توان ششم کامل ۲+ یا

۲-» می‌باشد.

به همین ترتیب، اگر عبارت جبری D توان nام عبارت جبری A باشد، D را توان nام کامل A می‌نامند؛ برای مثال:
«$a^2+2ab+b^2$ یا $(a+b)^2$ توان دوم کامل $(a+b)$ یا «$-(a+b)$»، «$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ یا $(a-b)^3$ توان سوم کامل $(a-b)$»، «x^{74} توان هفتاد و چهارم کامل x یا $-x$» و «$a^{12}b^6c^{18}$ توان ششم کامل (a^2bc^3)» می‌باشد. بنابراین، هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجهٔ رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می‌آید؛ برای مثال:

$$\sqrt[3]{x^9}=\sqrt[3]{(x^3)^3}=x^3\ ,\ \sqrt[7]{5^7}=5\ ,\ \sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2\ ,$$

$$\sqrt[6]{7^6}=7\ ,\ \sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{35}}=\sqrt[5]{(a^2b^4c^7)^5}=a^2b^4c^7\ ,$$

$$\sqrt[75]{(x^3+1)^{75}}=x^3+1\ .$$

توجه:

۱) اگر فرجهٔ رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می‌آید، نمی‌تواند منفی باشد؛ برای مثال:

$\sqrt[10]{(-10)^{10}}=-(-10)=10$ و

$$\sqrt[74]{(-2)^{74}}=-(-2)=2$$

$$\sqrt[8]{(-2)^8}=-(-2)=2$$

$$\sqrt[2k]{(-5)^{2k}}=-(-5)=5 \quad (k\in\mathbb{N})$$

$$\sqrt[6]{(-4)(-4)^2(-4)^3}=\sqrt[6]{(-4)^6}=-(-4)=4$$

$$\sqrt[2k]{x^{4k}}=\sqrt[2k]{(x^2)^{2k}}=x^2$$

$$\sqrt[4k]{(-a)^{8k}}=\sqrt[4k]{((-a)^2)^{4k}}=\sqrt[4k]{(a^2)^{4k}}=a^2$$

$$\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{40}}=\sqrt[4]{(a^2b^4c^{10})^4}=a^2b^4c^{10}$$

$$\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1$$

۲) اگر عددها یا عبارتهای جبری زیر رادیکال، مضربی صحیح از فرجهٔ رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می‌نامند؛ برای مثال:

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[3]{9}\ ,\ \sqrt[5]{34}\ ,\ \sqrt{x^2+1}\ ,\ \sqrt[4]{(x^2+1)^3}\ ,\ \sqrt[74]{2^{75}}$$

۳) اگر فرجهٔ رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت، آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) بی‌معناست. برای مثال، تمام عددها و عبارتهای رادیکالی زیر، در مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) بی‌معنا هستند:

$$\sqrt{-4}\ ,\ \sqrt[6]{-64}\ ,\ \sqrt{\sqrt[5]{2\sqrt[3]{-4}}}\ ,\ \sqrt{-x^2-1},$$

$$\sqrt[78]{\frac{-1}{x^2}}\ ,\ \sqrt[3]{-\sqrt{-2}}$$

مثال: عبارتهای زیر، به ازای چه مقادیری از مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) معنا دارند؟

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $\sqrt{-x}$ ۳) $\sqrt{x^2}$ ۴) $\sqrt{-\sqrt[3]{x}}$ ۵) $\sqrt[4]{-x^2-1}$

حل: ۱) $\sqrt{x}$ به ازای هر $x\ge 0$ معنا دارد.

۲) $\sqrt{-x}$ به‌ازای هر $-x\ge 0$ یا $x\le 0$.

۳) $\sqrt{x^2}$ به‌ازای هر $x^2\ge 0$ یا $x\in\mathbb{R}$.

۴) $\sqrt{-\sqrt[3]{x}}$ به‌ازای هر $-\sqrt[3]{x}\ge 0$ یا $x\le 0$.

۵) $\sqrt[4]{-x^2-1}$ به ازای هر عدد حقیقی بی‌معناست، پس: $x\in\varnothing$ (x متعلق مجموعهٔ تهی است).

مثال: عبارت $\sqrt[74]{\dfrac{x+x^3}{x^2+1}}$ به‌ازای چه مقادیری از x، معنا دارد؟

حل:

$\sqrt[74]{\dfrac{x+x^3}{x^2+1}}$ به ازای هر $\dfrac{x+x^3}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x\ge 0$ معنا دارد.

قدرمطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی دارد و حمید ۲۰۰ ریال قرض دارد. در این جا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ درحالی که علی ۲۰۰+ ریال و حمید ۲۰۰- ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) مورد نظر نباشد، می‌گوییم با قدرمطلق عدد روبه‌رو هستیم. برای نشان دادن قدرمطلق، از دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی که در دو طرف عدد قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم؛ بنابراین:

$$|-200|=200\ ,\ |+200|=200$$

به بیان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد،

مقدار عددی آن، با علامت مثبت است ؛ زیرا وقتی می نویسیم ۲۰۰، منظور ما در واقع ۲۰۰+ است.

مثال ۱: قدرمطلق عددهای $-\sqrt{۲}$ ، $+\sqrt{۲}$ ، $۷-\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۵}$ را بیابید.

حل:

$$|-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲} \quad , \quad |+\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}$$

می‌دانیم $\sqrt{۵}<۷$ ؛ پس: $۷-\sqrt{۵}>۰$ ، بنابراین قدرمطلق عدد $۷-\sqrt{۵}$ با خودش برابر است:

$$|۷-\sqrt{۵}|=۷-\sqrt{۵}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{۲}<\sqrt{۳}$ ؛ پس: $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}>۰$ ، بنابراین قدرمطلق عدد $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ با خودش برابر است:

$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

و همین‌طور:

$$\sqrt{۵}>۲ \ ; \ \sqrt{۵}-۲>۰ \ ; \ |\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$$

با توجه به مثال (۱)، قدرمطلق عدد حقیقی a را می‌توان به شکل برابری زیر نشان داد:

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq ۰ \\ -a & a<۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

تعبیر برابری (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر است ؛ ولی اگر a عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینهٔ آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{۹}$ با ریشهٔ دوم ۹ فرق دارد:

ریشهٔ دوم عدد ۹، می‌تواند ۳+ یا ۳- باشد ؛ ولی $\sqrt{۹}$ همیشه برابر ۳ ؛ یعنی قدرمطلق ۳+ و ۳- می‌باشد:

$$\sqrt{۹}=\sqrt{(\pm۳)^۲}=|\pm۳|=۳$$

به این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^۲}=|a| \qquad (۲)$$

برابری (۲) نشان می‌دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت همیشه برابر یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید.

۱) $|-\sqrt{۲}|$ ۲) $\left|\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}\right|$

۳) $\left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|$ ۴) $|۷-\sqrt{۵۰}|$

۵) $\left|\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲}\right|$ ۶) $\left||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\right|$

۷) $\sqrt{(\sqrt{۳}-۴)^۲}$

حل: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

۱) $|-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}$

۲) $\left|\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}\right|=\left|\frac{۴-۹}{۶}\right|=\left|\frac{-۵}{۶}\right|=\frac{۵}{۶}$

۳) $\left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|=\left|\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^۲}\right|=\left|-\frac{۳}{۴}\right|=\frac{۳}{۴}$

۴) $|۷-\sqrt{۵۰}|=|-(\sqrt{۵۰}-۷)|=|\sqrt{۵۰}-۷|=\sqrt{۵۰}-۷$

۵) $\left|\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲}\right|=\left||-۳|-|-۵|\right|=|۳-۵|=|-۲|=۲$

۶) $\left||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\right|=\left||-(\sqrt{۱۰}-۳)|-(۴+\sqrt{۱۰})\right|$
$=\left||\sqrt{۱۰}-۳|-۴-\sqrt{۱۰}\right|$
$=|\sqrt{۱۰}-۳-۴-\sqrt{۱۰}|=|-۷|=۷$

۷) $\sqrt{(\sqrt{۳}-۴)^۲}=|\sqrt{۳}-۴|=|-(۴-\sqrt{۳})|$
$=|۴-\sqrt{۳}|=۴-\sqrt{۳}$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

۱) $\sqrt{(xy)^۲}=\sqrt{x^۲y^۲}=\sqrt{x^۲}.\sqrt{y^۲}\Rightarrow|x.y|=|x|.|y|$

۲) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^۲}=\sqrt{\frac{x^۲}{y^۲}}=\frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt{y^۲}}\Rightarrow\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \ (y\neq۰)$

۳) $\sqrt{x^{۲n}}=\sqrt{(x^n)^۲}=(\sqrt{x^۲})^n\Rightarrow|x^n|=|x|^n \ (n\in\mathbb{N})$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|-۵x^۲|$ و $\frac{|x|}{x}$ را پیدا کنید. $(x\neq۰)$

حل:

۱) $|-۵x^۲|=|-۵||x^۲|=۵x^۲$

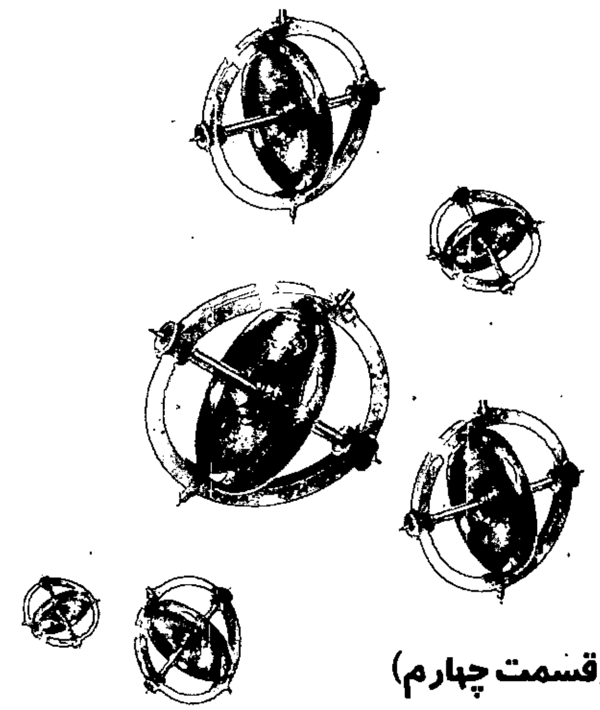
۲) $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>۰\\ \frac{-x}{x} & x<۰\end{cases}\Rightarrow\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$

اثبات نامساویها به کمک قضیهٔ

مقدار میانگین

(قسمت چهارم)

• محمدصادق عسگری



مثال ۲۳: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$|\cos a-\cos b|\le|a-b|$$

حل: بدون آن‌که کلیت مسأله از بین برود، می‌توان فرض کرد $a<b$. تابع $f(x)=\cos x$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم، f پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. پس بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین نقطهٔ c که $a<c<b$ وجود دارد که $\cos b-\cos a=(-\sin c)(b-a)$ یا

$$|\cos b-\cos a|=|-\sin c|\,|b-a|$$

چون $|\sin c|\le 1$ است، پس:

$$|\cos a-\cos b|\le|a-b|$$

مثال ۲۴: الف ـ برای هر دو عدد حقیقی a و b، ثابت کنید:

$$\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right)=\operatorname{Arc\,tg}b-\operatorname{Arc\,tg}a$$

ب ـ اگر $0<a<b$، ثابت کنید:

$$\frac{b-a}{1+a^2}<\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right)<\frac{b-a}{1+b^2}$$

حل: الف) قرار می‌دهیم $f(x)=\operatorname{Arc\,tg}x$ و $g(x)=\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)+\operatorname{Arc\,tg}a$ توابع f و g مشتق‌پذیرند و:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1+a^2}{(1+ax)^2}}{1+\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{1+a^2}{(1+ax)^2+(x-a)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{1+a^2}{a^2x^2+x^2+a^2+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

یعنی $f'(x)=g'(x)$ طبق نتیجهٔ ۳ عدد ثابت c وجود دارد، به‌طوری که $f(x)=g(x)+c$

$$\operatorname{Arc\,tg}x=\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right)+\operatorname{Arc\,tg}a+c$$

اگر در رابطهٔ بالا قرار دهیم $x=a$، در نتیجه داریم:

$$\text{Arc tg}(a) = \text{Arc tg}(0) + \text{Arc tg}a + c$$

یعنی $c = 0$ پس برای هر x داریم :

$$\text{Arc tg}x = \text{Arc tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right) + \text{Arc tg}a$$

$$\Rightarrow \text{Arc tg}\left(\frac{x-a}{1+ax}\right) = \text{Arc tg}x - \text{Arc tg}a$$

حال اگر قرار دهیم $x = b$ ، داریم :

$$\text{Arc tg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) = \text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a$$

ب) تابع $f(x) = \text{Arc tg}x$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. پس بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین وجود دارد : $a < c < b$ ؛ به‌طوری که $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f(x) = \text{Arc tg}x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a}{b-a} = \frac{1}{1+c^2}$$

حال با فرض $0 < a < c < b$ داریم :

$$a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{\text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arc tg}b - \text{Arc tg}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

حال بنابر قسمت الف، می‌توان نتیجه گرفت :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arctg}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

مثال ۲۵: اگر $x > 0$ ثابت کنید : $1 - \frac{1}{x} < \text{Ln}x < x - 1$.

حل: حالت اوّل : فرض کنیم $0 < x < 1$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. تابع $f(t) = \text{Ln}t$ را روی بازهٔ $[x,1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]x,1[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه $x < c < 1$ وجود دارد ؛ به‌طوری که

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$$

$$f(t) = \text{Ln}(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\text{Ln}(1) - \text{Ln}x}{1-x} \quad , \quad x < c < 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\text{Ln}x}{1-x} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\text{Ln}x}{x-1} = \frac{1}{c}$$

از $x < c < 1$ نتیجه می‌گیریم : $1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ و $x - 1 < 0$.

بنابراین :

$$\Rightarrow 1 < \frac{\text{Ln}x}{x-1} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \text{Ln}x < x-1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < \text{Ln}x < x-1$$

حالت دوم : فرض کنیم $x > 1$ باشد. در این صورت، تابع $f(t) = \text{Ln}t$ را روی بازهٔ $[1,x]$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $1 < c < x$ ؛ به‌طوری که $f'(c) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. یا $\frac{\text{Ln}x - \text{Ln}(1)}{x-1} = \frac{1}{c}$ از $1 < c < x$ داریم $1 > \frac{1}{c} > \frac{1}{x}$ ، درنتیجه : $\frac{1}{x} < \frac{\text{Ln}x}{x-1} < 1$ ؛ چون $x - 1 > 0$.

بنابراین $\frac{x-1}{x} < \text{Ln}x < x-1$ یا $1 - \frac{1}{x} < \text{Ln}x < x-1$.

مثال ۲۶: ثابت کنید برای هر $x \neq 0 , 1$ ، داریم $1 < \left(\frac{2^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} < 2$.

حل: فرض کنیم $x \neq 0 , 1$ دلخواه و پس از این، ثابت باشد. تابع $f:[1,2] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(t) = t^x$ را در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]1,2[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین، نقطهٔ $1 < c < 2$ وجود دارد ؛ به‌طوری که $f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ یا $f'(c) = 2^x - 1$.

$$f(t) = t^x \Rightarrow f'(t) = xt^{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(c) = xc^{x-1} \Rightarrow 2^x - 1 = xc^{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2^x-1}{x}=c^{x-1}\Rightarrow c=\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

چون $1<c<2$. درنتیجه داریم :

$$1<\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}<2$$

مثال ۲۷: اگر $0<a<b$ ثابت کنید : $\frac{b-a}{b}<Ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

حل: تابع $f(x)=Lnx$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین نقطهٔ $a<c<b$ وجود دارد ؛ به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(x)=Lnx\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{Lnb-Lna}{b-a}=\frac{1}{c}$$

حال با فرض $0<a<c<b$، داریم :

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{Lnb-Lna}{b-a}<\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b}<Lnb-Lna<\frac{b-a}{a}$$

$$\frac{b-a}{b}<Ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

مثال ۲۸: با فرض $x>-1$ ، ثابت کنید : $\frac{x}{x+1}<Ln(x+1)<x$.

حل: طبق مثال ۲۳ برای هر $x>0$ ، داریم $1-\frac{1}{x}<Lnx<x-1$.

حال فرض کنیم $x>-1$ دلخواه و پس از این ثابت باشد. قرار می‌دهیم $u=x+1$ ، در نتیجه داریم : $u>0$ و $1-\frac{1}{u}<Lnu<u-1$. با قرار دادن $u=x+1$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{x+1}<Ln(x+1)<x+1-1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}<Ln(x+1)<x$$

مثال ۲۹: فرض کنیم f تابعی حقیقی مشتق‌پذیر باشد و برای هر x و y داشته باشیم : $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$. ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

حل: فرض کنیم $x=a$ یک عدد حقیقی دلخواه و پس از این ثابت باشد. بنا به فرض داریم :

$$|f(x)-f(a)|\le(x-a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}\le|x-a|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\le|x-a|$$

$$\Rightarrow -|x-a|\le\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le|x-a|$$

چون $\lim\limits_{x\to a}|x-a|=0$ بنابر قضیهٔ ساندویچ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ ؛ یعنی $f'(a)=0$. چون a دلخواه است، درنتیجه برای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x)=0$. درنتیجه، طبق نتیجهٔ (۲)، f یک تابع ثابت است.

مثال ۳۰: با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، نشان دهید :

$$0<\int_0^1 Arc\,tg(\sqrt{x})dx<\frac{\pi}{4}$$

حل: تابع $f(t)=\int_0^t Arc\,tg(\sqrt{x})dx$ را روی بازهٔ $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]0,1[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه $0<c<1$ وجود دارد ؛ به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Rightarrow f'(c)=f(1)-f(0)$$

حال داریم :

$$f(t)=\int_0^t Arc\,tg(\sqrt{x})dx\Rightarrow f'(t)=Arc\,tg(\sqrt{t})$$

$$\Rightarrow Arc\,tg(\sqrt{c})=f(1)-f(0)$$

$$\Rightarrow Arc\,tg(\sqrt{c})=\int_0^1 Arc\,tg(\sqrt{x})dx-\int_0^0 Arc\,tg(\sqrt{x})dx$$

$\Rightarrow \mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{c}) = \int_0^1 \mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{x})dx$

از $1 > c > 0$، داریم : $1 > \sqrt{c} > 0$. در نتیجه،

$\mathrm{Arc\,tg}(0) < \mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{c}) < \mathrm{Arc\,tg}\ (1)$

بنابراین $0 < \mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{c}) < \frac{\pi}{4}$. $0 < \int_0^1 \mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{x})dx < \frac{\pi}{4}$.

تذکر: مثال ۲۷ را می‌توان به کمک خواص انتگرال معین نیز حل کرد.

مثال ۳۱: نشان دهید $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2)dx\right| \le \frac{\pi}{2}$.

حل: تابع $f(t) = \int_0^t \sin(x^2)dx$ را روی بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ مشتق‌پذیر است و $f'(t) = \sin(t^2)$ ؛ چون $|\sin(t^2)| \le 1$، بنابر نتیجهٔ (۱) داریم :

$$\left|f(\tfrac{\pi}{2}) - f(0)\right| \le \left|\tfrac{\pi}{2} - 0\right|$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2)dx - 0\right| \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2)dx\right| \le \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۲: برای هر $-1 < x < 1$، ثابت کنید : $\mathrm{Arc\,sin}\,x + \mathrm{Arc\,cos}\,x = \frac{\pi}{2}$.

حل: تابع $f(x) = \mathrm{Arc\,sin}\,x + \mathrm{Arc\,cos}\,x$ را روی بازهٔ $[-1,1]$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته است و روی بازهٔ $]-1,1[$ مشتق‌پذیر است و به علاوه

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

یعنی برای هر $-1 < x < 1$، داریم $f'(x) = 0$. پس طبق نتیجهٔ (۲)، f تابع ثابت است. بنابراین، عدد ثابت c وجود دارد ؛ به‌طوری که $f(x) = c$ یا $\mathrm{Arc\,sin}(x) + \mathrm{Arc\,cos}(x) = c$. اگر قرار دهیم $x = 0$، داریم :

$$\Rightarrow \mathrm{Arc\,sin}(0) + \mathrm{Arc\,cos}(0) = c$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc\,sin}\,x + \mathrm{Arc\,cos}\,x = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۳: برای هر $x \in \mathbb{R}$، نشان دهید : $\mathrm{Arc\,tg}x + \mathrm{Arc\,cotg}x = \frac{\pi}{2}$.

حل: تابع $f(x) = \mathrm{Arc\,tg}x + \mathrm{Arc\,cotg}x$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. f پیوسته و مشتق‌پذیر است. و به علاوه

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$$

یعنی برای هر x، داریم : $f'(x) = 0$. پس طبق نتیجهٔ (۲)، f تابع ثابت است. در نتیجه، $f(x) = c$ یا $\mathrm{Arc\,tg}x + \mathrm{Arc\,cotg}x = c$. اگر قرار دهیم $x = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc\,tg}(0) + \mathrm{Arc\,cotg}(0) = c$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = c$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc\,tg}x + \mathrm{Arc\,cotg}x = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۴: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ باشد. در این صورت، وجود دارد $a < c < b$ ؛ به‌طوری که $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

حل: تابع $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ را روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم.

F پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. همچنین $F'(t) = f(t)$. پس بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $a < c < b$ ؛ به‌طوری که $F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ یعنی

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx - 0}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

این مثال به نام قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال نیز معروف است.

مثال ۳۵: فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و f تابعی حقیقی مشتق‌پذیر باشد، با فرض $f(a) = a$ و $f(-a) = -a$ و به ازای هر x، داشته باشیم : $|f'(x)| \le 1$ نشان دهید $f(0) = 0$.

حل: *حالت اوّل* : تابع f بر فاصلهٔ $[0,a]$ پیوسته و بر بازهٔ $]0,a[$ مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود

دارد $0<c<a$ ؛ به‌طوری که $\frac{f(a)-f(0)}{a}=f'(c)$ ، چون $|f'(c)|\le 1$ ، درنتیجه :

$$\Rightarrow\left|\frac{f(a)-f(0)}{a}\right|\le 1\Rightarrow|f(a)-f(0)|\le a$$

$$\Rightarrow|a-f(0)|\le a$$

$$\Rightarrow -a\le a-f(0)\le a$$

$$\Rightarrow -2a\le -f(0)\le 0$$

$$\Rightarrow 0\le f(0)\le 2a\Rightarrow f(0)\ge 0 \qquad (*)$$

حالت دوم: تابع f روی بازهٔ $[-a,0]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین، وجود دارد $-a<c'<0$ ؛ به‌طوری که $\frac{f(0)-f(-a)}{a}=f'(c')$ ، چون $|f'(c')|\le 1$ ، درنتیجه :

$$\left|\frac{f(0)-f(-a)}{a}\right|\le 1\Rightarrow|f(0)-f(-a)|\le a$$

$$\Rightarrow|f(0)+a|\le a$$

$$\Rightarrow -a\le f(0)+a\le a$$

$$\Rightarrow -2a\le f(0)\le 0\Rightarrow f(0)\le 0 \qquad (**)$$

از روابط $(*)$ و $(**)$، داریم $f(0)=0$.

مثال ۳۶: فرض کنید f تابعی حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[a,b]$ باشد و عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد ؛ به طوری که برای هر x داشته باشیم $|f(x)|\le M$ ، نشان دهید :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M(b-a)$$

حل: تابع $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است ؛ چون $F'(t)=f(t)$ و $|F'(x)|=|f(x)|\le M$ ، پس طبق نتیجهٔ (۱) برای تابع F داریم :

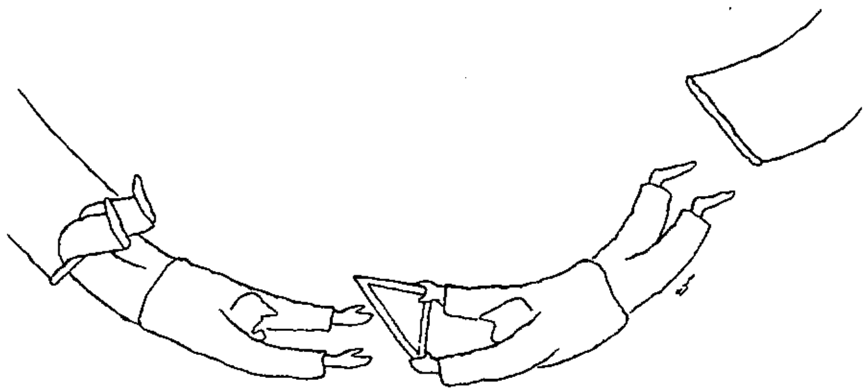
$$|F(b)-F(a)|\le M|b-a|\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx-0\right|\le M(b-a)$$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M(b-a)$$



قبل از اقلیدس هندسه عبارت بود از مجموعهٔ قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده‌اند و هیچ ارتباطی با یکدیگر نداشته‌اند و هیچ کس حتی حدس نمی‌زد که مجموعهٔ این قواعد را ممکن است از عدهٔ بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. امروزه استدلال ریاضی تا آن حد جزو اساس و مبنای این علم به شمار می‌رود که حتی تصور این موضوع نیز برای ما ممکن نیست که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است.

ای. تی. بل



دربارهٔ یک مسأله از کتاب هندسهٔ عملی ابوالوفاء بوزجانی

● دکتر احمد شرف‌الدین

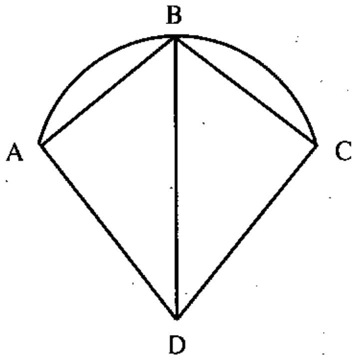
«ابوالوفاء بوزجانی» ریاضیدان و منجّم برجسته در قرن چهارم هجری است. «جورج سارتن» دانشمند بزرگ که تاریخ علم را به‌صورت علمی مستقل عرضه کرد و کرسی تاریخ علم را در جهان، برای اوّلین بار تأسیس نمود، در کتاب خود، «مقدمه‌ای بر تاریخ علم»، تاریخ علم را به عصرهای پنجاه ساله تقسیم می‌کند و در هر عصر، کوششهای علمی را که در جهان انجام گرفته، شرح می‌دهد. وی هفت عصر را به‌نام دانشمندان ایرانی نام نهاده است، بدین‌قرار :

عصر جابربن‌حیان (نیمهٔ دوم سدهٔ هشتم میلادی)، عصر خوارزمی (نیمهٔ اوّل سدهٔ نهم)، عصر رازی (نیمهٔ دوم سدهٔ نهم)، عصر مسعودی (نیمهٔ اوّل سدهٔ دهم)، عصر ابوالوفاء (نیمهٔ دوم سدهٔ دهم)، عصر بیرونی (نیمهٔ اوّل سدهٔ یازدهم)، عصر عمر خیّام (نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم).

از این‌که یک عصر از تاریخ علم، به ابوالوفاء نسبت داده شده است، شایستگی او را درمی‌یابیم. از جملهٔ آثار ابوالوفاء، کتاب «هندسهٔ عملی» اوست که در آن، ابتکارهای جالبی به‌کار برده است. در سطور زیر، یکی از مسائل کتاب ابوالوفاء و نکتهٔ جالبی را که در حلّ آن درنظر گرفته و مورد عنایت قرار نگرفته است، شرح می‌دهیم.

مسأله. تعیین مرکز یک کمان از دایره

حل. کمان AC از دایره را درنظر گرفته، وسط آن را B می‌نامیم. سپس از نقطهٔ A عمودی بر خط AB و از نقطهٔ C عمودی بر خط CB اخراج می‌کنیم. این دو عمود، در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع می‌کنند. وسط پاره‌خط DB مرکز مطلوب است.



استاد ارجمند، جناب آقای «ابوالقاسم قربانی» که با همکاری آقای «محمدعلی شیخان»، کتاب بوزجانی نامه را نوشته‌اند، در صفحهٔ ۳۴ کتاب مذکور، پس از ذکر مسألهٔ بالا تبصرهٔ مذکور در زیر را اضافه کرده‌اند.

تبصره ـ مؤلّف چنین نوشته ؛ ولی بهتر است نقطهٔ B را به‌طور دلخواه اختیار کرد.

توضیح دربارهٔ حلّ ابوالوفاء. این‌که ابوالوفاء نقطهٔ B را وسط کمان AC اختیار می‌کند، برای آن است که جای مرکز کمان، عملاً دقیقتر تعیین شود. ما در سطرهای زیر، دربارهٔ این ابتکار ابوالوفاء توضیح می‌دهیم :

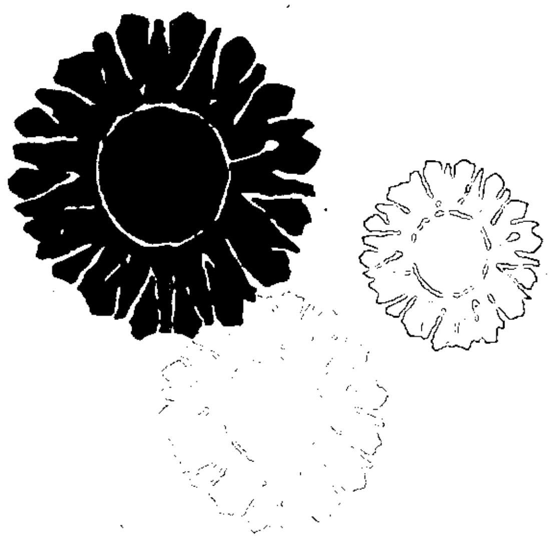
در حلّ مذکور در بالا، از نظر اینجانب، منظور ابوالوفاء از وسط کمان AC دقیقاً وسط کمان AC نیست ؛ بلکه منظور او، نقطه‌ای است از کمان AC که به‌نظر، وسط کمان AC می‌نماید. در این مورد توضیح می‌دهیم :

الف. اگر نقطهٔ B دقیقاً وسط کمان AC باشد، پس عمودمنصّف پاره‌خط AC معلوم است و لذا نقطهٔ D با رسم فقط عمود AD یا عمود CD معلوم می‌شود و احتیاج به رسم هر دو عمود نیست.

ب. اکنون بررسی کنیم که چرا ابوالوفاء نقطهٔ «وسط» کمان را برای شروع ترسیمها انتخاب نموده و نقطهٔ دیگری از کمان AC را برای شروع ترسیمها اختیار نکرده است.

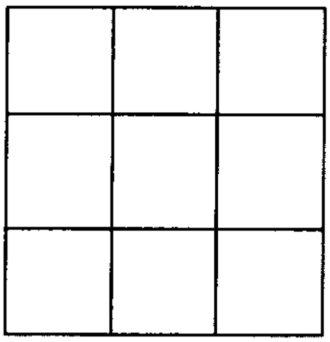
اگر به‌جای وسط کمان AC، نقطهٔ دیگری چون M بر کمان AC اختیار کنیم، طول یکی از دو پاره‌خط MA و MB از دیگری کوچکتر می‌شود؛ اما پاره‌خط کوچک خطی را که به آن متّکی است، به‌طور دقیق مشخص نمی‌کند (زیرا اگر از یک خط d دو نقطهٔ آن که به هم نزدیکند، در دسترس باشد، وضعیت آن خط، به‌طور دقیق مشخص نمی‌شود؛ بعکس، اگر از یک خط d دو نقطهٔ آن که از هم دورند معلوم باشد، وضعیت خط، دقیقتر معلوم می‌شود).

به اختصار آن‌که ابوالوفاء نقطهٔ وسط کمان (منظور نقطه‌ای است که به‌نظر وسط کمان می‌نماید) را برای شروع ترسیمها انتخاب می‌کند تا جای مرکز کمان، عملاً دقیقتر تعیین شود.





تفریح اندیشه ۳



آیا می‌توان مربع بالا را با اولین ۹ عدد اول:
۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ چنان پر کرد که مربع جادویی شود. یعنی مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر باشند؟

نکته ـ مؤلف کتاب ۱ را عدد اول دانسته است. حال اینکه می‌دانیم ۱ عدد اول نیست، و نخستین عدد اول ۲ می‌باشد. اما این مطلب، به درستی مسأله‌ها لطمه‌ای نمی‌زند. مترجم

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



جزء صحیح

(قسمت سوّم)

● علی حسن زاده ماکویی

ب ـ چند مثال، در مورد نابرابری جزء صحیح دار

۱. مجموعهٔ جواب نابرابری $1\le|2-[x+2]|$ در دامنهٔ Z چند عضو دارد؟

حل: $-1\le[x+2]-2\le1$ یا $-1\le[x]\le1$

$[x]\le1\Rightarrow x<2\ ,\ [x]\ge-1\Rightarrow x\ge-1\Rightarrow -1\le x<2$

$\Rightarrow n=2-(-1)=3\ ,\ x\in\{-1,0,1\}$

۲. مجموعهٔ جواب نابرابری $[2x+1]\le-4$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-3]$ ۲) $(-\infty,-2]$

۳) $(-\infty,-2)$ ۴) $(-\infty,-3)$

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است.

$[2x+1]\le-4\Rightarrow 2x+1<-3$ یا $x<-2\Rightarrow x\in(-\infty,-2)$

۳. در دامنهٔ $(0,\pi)$ مجموعهٔ جواب نابرابری $0\le[\cot x]<2$ کدام است؟

حل: $[\cot x]=0\Rightarrow 0\le\cot x<1\Rightarrow \frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$

$[\cot x]=1\Rightarrow 1\le\cot x<2\Rightarrow \mathrm{Arc}\cot 2<x\le\frac{\pi}{4}$

۴. مجموعهٔ جواب نابرابری $[|x-1|]<2$ کدام است؟

۱) $[-2,-1]$ ۲) $(-1,3)$

۳) $(-2,2)$ ۴) $[1,2)$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$|1-x|<2\Rightarrow -2<1-x<2$ یا $-3<-x<1$ یا $x\in(-1,3)$

۵. به ازای کدام مجموعهٔ m رابطهٔ $x^2-3x-[m]>0$ همواره برقرار است.

۱) $(-2,3)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(-\infty,2)$ ۴) $(-\infty,-2)$

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$\Delta<0$ یا $9+4[m]<0\Rightarrow[m]<-\frac{9}{4}$

$\Rightarrow m<-۲\Rightarrow m\in(-\infty,-۲)$

پ ـ حدّ تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند

یادآوری: تابع، $y=[f(x)]$ وقتی $x\to x_۱$ و $x_۱\in\mathbb{R}$ دارای حدّ است که $f(x_۱)\notin Z$ و یا $f(x_۱)\in\mathbb{R}-Z$. به‌عنوان مثال، تابع $\left[\frac{۲x+۴}{۵}\right]$ وقتی که $x\to ۳$ فاقد حد است؛ زیرا $f(۳)=[۲]=۲\in Z$.

به مثالهای زیر توجه کنید.

مقدار هریک از عبارتهای زیر را معین کنید.

۱. $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۳}}[۳x-۱]$

حل:

$$x\to\frac{۱}{۳}^-\ ,\ x=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\ ,$$

$$L_۱=\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-}[۳x-۱]=\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{۳}{n}\right]=-۱$$

$$x\to\frac{۱}{۳}^+\ ,\ x=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n}\ ,$$

$$L_۲=\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^+}[۳x-۱]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{۳}{n}\right]=۰$$

تابع $[۳x-۱]$ وقتی که $x\to\frac{۱}{۳}$ فاقد حد است. زیرا $L_۱\neq L_۲$.

۲. $L=\lim\limits_{x\to\frac{۲}{۳}}\left([x+۲].[۱-x]\right)$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}\left(۲+[x]\right).\left(۱+[-x]\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}[x]=۰ \text{ و } \lim_{x\to\frac{۲}{۳}}[-x]=-۱\Rightarrow L=(۲+۰)(۱-۱)=۰$$

۳. $\lim\limits_{x\to۵}\frac{([x])^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}$

حل:

$$L_۱=\lim_{x\to۵^-}\frac{([x])^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to۵^-}\frac{۴^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}$$

$$=\lim_{x\to۵^-}\frac{-۹}{x^۲-۲۵}=+\infty$$

$$L_۲=\lim_{x\to۵^+}\frac{([x])^۲-۲۵}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to۵^+}\frac{۲۵-۲۵}{x^۲-۲۵}=۰$$

تابع حد ندارد؛ زیرا $L_۱\neq L_۲$.

۴. $\lim\limits_{x\to۴}\frac{[x-۳]+x-۵}{x^۲-۱۶}$

حل:

$$L_۱=\lim_{x\to۴^-}\frac{[x-۳]+x-۵}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to۴^-}\frac{۰+x-۵}{x^۲-۱۶}=+\infty$$

$$L_۲=\lim_{x\to۴^+}\frac{[x-۳]+x-۵}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to۴^+}\frac{۱+x-۵}{x^۲-۱۶}$$

$$=\lim_{x\to۴^+}\frac{۱}{x+۴}=\frac{۱}{۸}$$

تابع مفروض، وقتی که $x\to۴$ فاقد حد است؛ زیرا، $L_۱\neq L_۲$.

۵. تحقیق کنید که:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}[\cos x]=-۱\ ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}[\cos x]=۰ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to۰^+}[\sin x]=۰\ ,\quad \lim_{x\to۰^-}[\sin x]=-۱ \qquad (۲)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}[\cot x]=-۱\ ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}[\cot x]=۰ \qquad (۳)$$

$$\lim_{x\to۱^+}[\log x]=۰\ ,\quad \lim_{x\to۱^-}[\log x]=-۱ \qquad (۴)$$

یادآوری می‌شود که هرگاه (ε) یک عدد حقیقی مثبت بسیارکوچکی فرض شود، داریم:

$$x=۱+\varepsilon\Rightarrow\ ۰<\log x<۱\Rightarrow[\log x]=۰$$

و

$$x=۱-\varepsilon\Rightarrow\ -۱<\log x<۰\Rightarrow[\log x]=-۱$$

$x=۱ \Rightarrow [\log x]=۰$

۶. مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^-}[۱-۲x]$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) موجود نیست

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$$x=۲-\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}[۱-۲x]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[۱-۴+۲\varepsilon]$$
$$=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[-۳+۲\varepsilon]=-۳$$

۷. مقدار $a>۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}(a^{[x]}-۲)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰^+}[x]=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}(a^{[x]}-۲)=(۱-۲)=-۱$$

۸. مقدار $L=\lim\limits_{x\to -۲^+}\big(|x|-[x]\big)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۱

حل: گزینهٔ اوّل صحیح است.

$$\lim_{x\to -۲^+}[x]=-۲\ ,\ \lim_{x\to -۲^+}|x|=۲\ ,\ L=۲-(-۲)=۴$$

۹. مقدار $L=\lim\limits_{x\to ۱^-}\big[x+۱-[۱-۲x]\big]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$$f(x)=\big[x+۱-[۱-۲x]\big]=[x+۱]-[۱-۲x]$$
$$=[x]-[-۲x]$$
$$L=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۰-(-۲)=۲$$

۱۰. مقدار $L=\lim\limits_{x\to \pi^+}[۲+\sin x]$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینهٔ سوم صحیح است.

$$L=\lim_{x\to \pi^+}\big(۲+[\sin x]\big)=۲-۱=۱$$

ت ـ پیوستگی تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند

تابع، $y=[f(x)]$ در دامنهٔ $f(x)\in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

چند مثال

پیوستگی تابعهای زیر را در نقطهٔ مفروض بررسی کنید.

۱. $n\in \mathbb{Z}$ و $y=[x+n]-[x]$ در نقطهٔ $x=x_۱\in\mathbb{R}$

حل: $n\in \mathbb{Z}\Rightarrow y=[x]+n-[x]\Rightarrow y=n$

تابع در دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲. $f(x)=\begin{cases}[x]\ , & x<۲\\ ۲x-۳\ , & x>۲\end{cases}$ و $f(۲)=-۳$ و $x=۲$

حل:
$$L_۱=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}[x]=۱\ ,$$
$$L_۲=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x-۳)=۱$$

$L_۱=L_۲\neq f(۲)\Rightarrow$ تابع پیوسته نیست.

۳. تابع $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn}(x+۱)\ , & x<۲\\ [mx+۲]\ , & x=۲\\ |x-۳|\ , & x>۲\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

مجموعهٔ m را چنان معین کنید که $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته باشد.

یادآوری: تابع $g(x)=\operatorname{Sgn}x$ که به تابع علامت مشهور است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$g(x)=\begin{cases}-۱\ , & x<۰\\ ۰\ , & x=۰\\ ۱\ , & x>۰\end{cases}$$

حل:
$$L_۱=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim \operatorname{Sgn}(۳)=۱\ ,$$
$$L_۲=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=|-۱|=۱$$

$f(۲)=[۲m]+۲=۱$ یا $[۲m]=-۱\Rightarrow -۱\le ۲m<۰$

$$\Rightarrow m\in\left[-\frac{۱}{۲},۰\right)$$

۴. تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x-[x]}$ در کدام مجموعه پیوسته است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-Z$

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$[x]\neq x \Rightarrow x\notin Z$ یا $x-[x]\neq ۰ \rightarrow$ شرط پیوستگی

۵. تابع $f(x)=x-[x]+\sin\left(\frac{\pi}{۲}[x]\right)$ را در نظر می‌گیریم.

الف. نمودار $f(x)$ را در بازهٔ $x\in[۰,۶]$ رسم و تحقیق کنید که $f(x)$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T=۴$ است.

ب. تعیین کنید $f(x)$ در بازهٔ $[۳,۶]$ در چند نقطه ناپیوسته است.

حل: الف. $۰\le x<۱\Rightarrow [x]=۰\Rightarrow f(x)=x$

$۱\le x<۲\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow f(x)=x-۱+\sin\frac{\pi}{۲}=x$

$۲\le x<۳\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow f(x)=x-۲+\sin\pi=x-۲$

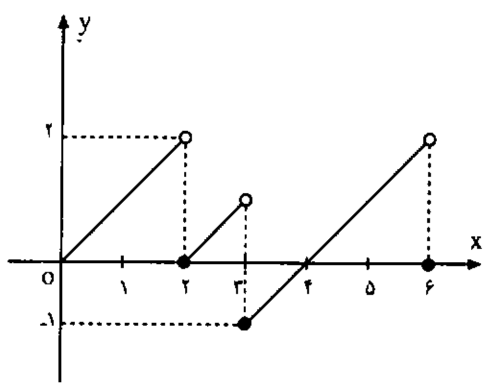
$۳\le x<۴\Rightarrow [x]=۳$,

$f(x)=x-۳+\sin\frac{۳\pi}{۲}=x-۴$

$۴\le x<۵\Rightarrow [x]=۴\Rightarrow f(x)=x-۴+\sin ۲\pi=x-۴$

$۵\le x<۶\Rightarrow [x]=۵\Rightarrow f(x)=x-۵+\sin\frac{۵\pi}{۲}=x-۴$

$x=۶\Rightarrow [x]=۶\Rightarrow f(x)=۰$



$f(x+۴)=x+۴-[x+۴]+\sin(\frac{\pi}{۲}[x+۴])$

$=x-[x]+\sin(\frac{\pi}{۲}[x])=f(x)$

ب. تابع در بازهٔ $[۳,۶]$ در نقطهٔ $x=۶$ ناپیوسته است. درنتیجه، در بازهٔ مزبور، فقط در یک نقطه ناپیوسته می‌باشد. توجه دارید که $f(x)$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوستگی راست دارد.

تمرین

۱. مقدار $\lim_{x\to ۲^+}[۳x+۱]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. مقدار $\lim_{x\to ۳^-}[۲x+۳]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۶

۳. مقدار $\lim_{x\to ۲^-}([۳-x]+x^۲+۲x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۴. مقدار $\lim_{x\to ۳^+}([۲-x]+۵x^۲+۳)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

۵. مقدار $\lim_{x\to ۳^+}\frac{[۲x-[x+۳]]}{x-۳}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۶. مقدار $\lim_{x\to ۳^+}([x]+Sgn(x-۲)+x)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) هیچ‌کدام

۷. مقدار $\lim_{x\to \frac{۱}{۴}}(۳x+[x]+Sgn(۲x-۱))$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸. در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، تابع $f(x)=\frac{۳x+۱}{[x]-۱}$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-[۱,۲)$ ۴) $[۱,۲)$

۹. تابع $f(x)=[x]-[x-۲]$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در کدام‌یک از مجموعه‌های صفحه بعد پیوسته است؟

۱) $\mathbb{R}-Z$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $\mathbb{R}^-$

۱۰. تابع $\begin{cases} Sgn(\sin x) & , x>\pi \\ [\sin x] & , x<\pi \\ 0 & , x=\pi \end{cases}$ در نقطهٔ $x=\pi$ چگونه است؟

۱) دارای حد است ۲) پیوستگی چپ دارد

۳) پیوستگی راست دارد ۴) پیوسته است

۱۱. مجموعه نقطه‌های ناپیوستگی تابع

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x)=[2x]-|x-2|$

کدام است؟

۱) $\{x|x\in Z\}$ ۲) $\{x|\frac{x}{2}\in Z\}$

۳) $\{x|2x\in Z\}$ ۴) $\{x|x\in R-Z\}$

۱۲. مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x)=\frac{2x-7}{[x]-3}$

کدام است؟

۱) $[3,4)$ ۲) $(3,4]$ ۳) $\{3\}$ ۴) $\{3,4\}$

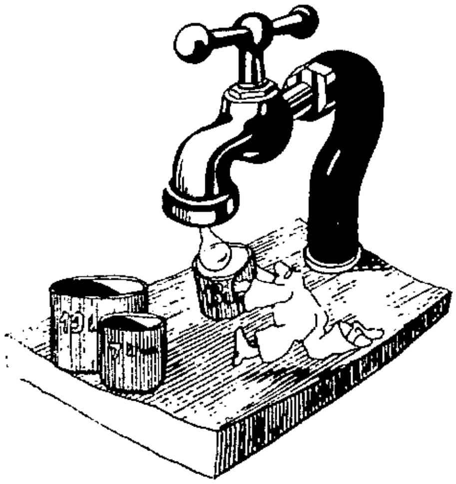
پاسخ تمرینها

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
پاسخ	۲	۱	۴	۴	۱	۳	۳	۳	۲	۲	۳	۱





تفریح اندیشه ٤



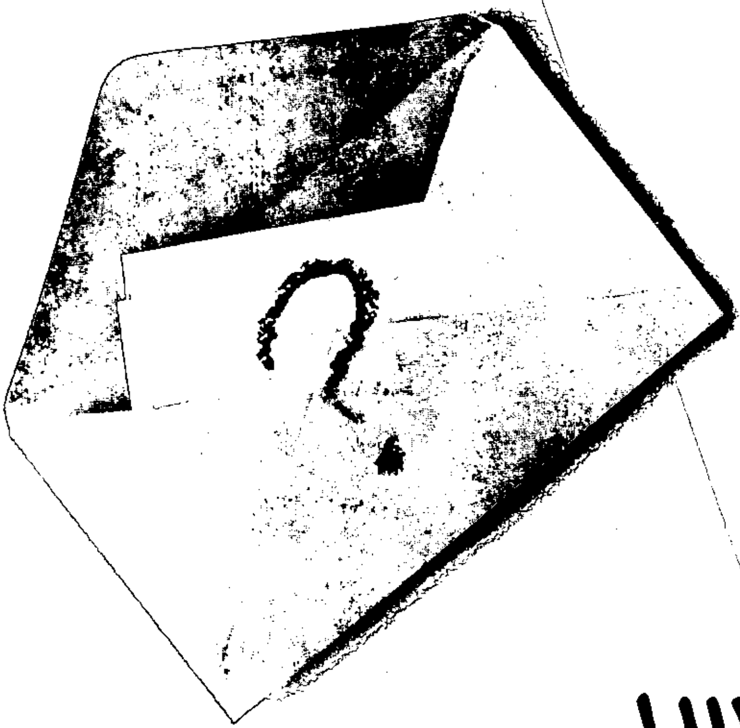
مهرداد جلوی یک شیر آب است. او سه ظرف خالی ۱۹ لیتری، ۱۳ لیتری و ۷ لیتری در اختیار دارد.

مهرداد می‌خواهد در هر یک از دو ظرف اول ۱۰ لیتر آب داشته باشد.

برای انجام این کار چند عمل لازم است؟ ضمن آنکه حتی یک قطره آب نباید به خارج از ظرفها بریزد.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلّهٔ برهان

نامه‌های محبّت‌آمیز و پرمحتوای شما را دریافت کردیم! خداوند بزرگ را بسیار سپاس می‌گوییم که توانسته‌ایم هر چند گامی کوچک در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما برداریم و تا اندازه‌ای شما را به ریاضیات علاقه‌مند سازیم. در این شمارهٔ مجلّه و پس از این، حلّ مسائل و پاسخ پرسشهای چهارگزینه‌ای را با هم در مجله چاپ می‌کنیم.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجلّهٔ ریاضی برهان که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: مجتبی دهقانی (میبد یزد)، قادر فرهودی (خلخال)، محمّدحسین شاهزمانیان (اصفهان)، حمزه علیزاده (قائم‌شهر)، عبدالعلی و ابوذر بازیاری (کازرون)، فریدون خسروی (بوکان)، مصطفی نبی‌پور (تهران)، احمد فضلی (شیراز)، سامان جهانی (تهران)، مهدی قربانی (ماهدشت کرج)، علیرضا قزلسفلو (مینودشت)، همکار محترم آقای بهمن رحمانی (زنجان)، محمدهادی بابایی (گیلان)، علی دولتی (شیراز)، رضا خواجوی‌نیا (اصفهان) و خانمها: مهسا همتی (سمنان) و زینب طاهری (مشهد مقدس).

از همهٔ شما عزیزان، به پاس ارسال مقاله، مسائل همراه با حل و پیشنهادها و انتقادهای سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان، از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجلّه استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه، چاپ خواهیم کرد.

آقای علی‌اصغر قائمی (بیجار)، امتناع تثلیث زاویه به کمک خط غیرمدرّج و پرگار اثبات شده است. جنابعالی می‌توانید به مقالهٔ تثلیث زاویه در برهان ۲۵ رجوع کنید.

آقای داود نبی‌زاده (لارستان) نشانی چند مجلّهٔ ریاضی معتبر در زیر آمده است:

1) The American Mathematical Monthly

Department of mathematics, Indiana university

Bloomington, TN 47405

John. Ewing, Editor

2) MATHEMATICS MAGAZINE

THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

1529 Eighreenth Street, NW

Washington, D. C. 20036

3) The Mathematical gazette

259 London Road, Leicester LE2 3BE,

telephone 0116 2703877

آقای امیرپاشا شیرازی‌نیا (مشهد مقدس)، از آن‌جا که مقالهٔ ترجمه شدهٔ شما تحت عنوان «۲ = ۱» می‌تواند مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به ریاضی قرار گیرد، بنابراین، قسمتهایی از آن را در زیر می‌آوریم. از خوانندگان محترم تقاضا می‌کنیم پس از مطالعهٔ هر قسمت، اشتباه اثبات را بیابند.

۱ـ اثبات به کمک جبر

فرض کنید $x=1$، پس $x^2-x=x^2-1$، بنابراین $x(x-1)=(x-1)(x+1)$، با تقسیم دو طرف برابری فوق بر $(x-1)$ خواهیم داشت: $x=x+1$ و در نتیجه $2=1$.

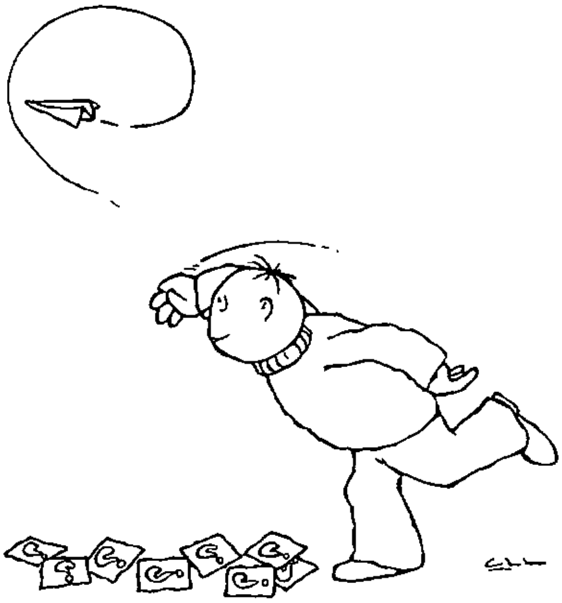
۲ـ اثبات به کمک لگاریتم

داریم $2\ge 1$، بنابراین داریم: $1\times\log_{10}^{(\frac{1}{2})}\le 2\times\log_{10}^{(\frac{1}{2})}$

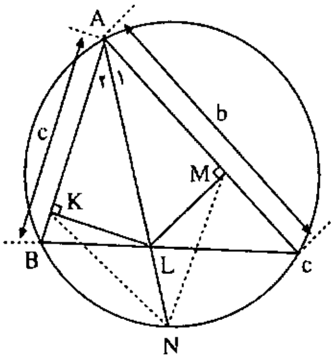
$$\Rightarrow \log_{10}^{(\frac{1}{2})}\le \log_{10}^{(\frac{1}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le\frac{1}{4}\Rightarrow 2\ge 4\Rightarrow 1\ge 2$$

در نتیجه $2=1$.



حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۸



فرض
$$AM=AK,\quad \hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{\hat{A}}{2}$$

برهان:

$$AL\times LN=BL\times LC$$

(خاصیت وترهای متقاطع)

$$\Rightarrow AL.AN=AL^2+BL.LC=bc$$

$$\Rightarrow AL.AN=bc \quad (1)$$

دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\cos\frac{A}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$AL.AN.\cos\frac{A}{2}=bc\cos\frac{A}{2}$$

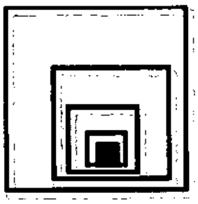
$$\Rightarrow AN.AM=bc\cos\frac{A}{2}$$

دو طرف را در $2\sin\frac{A}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$AN.AM.2\sin\frac{A}{2}=bc\sin A$$

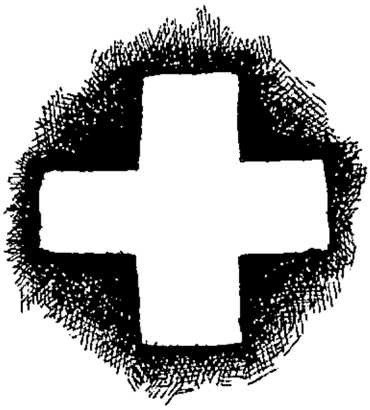
$$\Rightarrow 2S_{\overset{\Delta}{ABC}}=2S_{AKMN}\Rightarrow S_{ABC}=S_{AKMN}$$

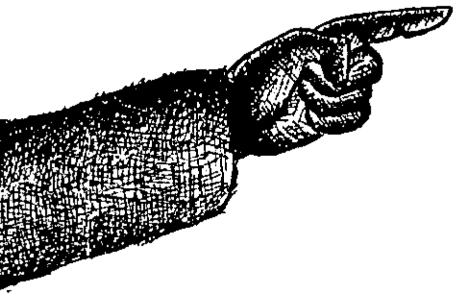
مسألهٔ مسابقه‌ای



اگر $b>1$ عددی طبیعی باشد و m و n نیز اعداد طبیعی، حکم زیر را در صورت درستی اثبات و یا در غیر این‌صورت با یک مثال نقض رَد کنید:

$$(b^m-1)\mid(b^n-1)\Rightarrow m\mid n$$





تعیین علامت عبارتهای جبری،

حلّ نامعادله ها

قسمت دوم

● هوشنگ شرقی

حلّ نامعادله‌های درجهٔ دوم، کسری و درجه‌های بالاتر

اکنون می‌توان کاربرد تعیین علامت را در حلّ نامعادله‌های کسری، درجهٔ دوم و بالاتر مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نامعادلهٔ $P(x) > ۰$ را حل کنیم. ($P(x)$ عبارتی جبری برحسب x می‌باشد) کافی است که $P(x)$ را تعیین علامت نموده و مجموعهٔ مقادیر x را که به‌ازای آنها $P(x)$ مثبت می‌شود، به‌عنوان جواب نامعادله درنظر گرفت.

نتیجه : برای حلّ نامعادلهٔ $P(x)>Q(x)$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ عبارتهایی جبری برحسب x هستند، کافی است همهٔ عبارتها را به یک طرف نابرابری ببریم ؛ یعنی یکی از دو صورت $P(x)-Q(x)>۰$ یا $Q(x)-P(x)<۰$ را بسازیم. اکنون می‌توانیم عبارت جبری $P(x)-Q(x)$ یا $Q(x)-P(x)$ را تعیین علامت نموده و مجموعهٔ مقادیر x را که خواستهٔ مسأله را برآورده می‌کند، به‌عنوان جواب نامعادله، درنظر بگیریم.

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x-۲}{x-۳} \geq \frac{x+۲}{x-۴}$ را حل کنید.

حل: ابتدا می‌نویسیم $\frac{x+۲}{x-۴}-\frac{x-۲}{x-۳} \geq ۰$، اکنون کافی است عبارت جبریِ سمت چپ نابرابری را ساده و به حاصلضرب تبدیل کنیم و آن را تعیین علامت نموده و مجموعه مقادیر x را که این عبارت به‌ازای آنها مثبت یا صفر می‌شود، انتخاب کنیم.

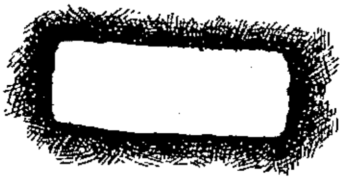
$$P=\frac{(x+۲)(x-۳)-(x-۴)(x-۲)}{(x-۴)(x-۳)}$$

$$=\frac{x^۲-x-۶-(x^۲-۶x+۸)}{(x-۴)(x-۳)}$$

$$P=\frac{۵x-۱۴}{(x-۴)(x-۳)} \geq ۰ \quad ۵x-۱۴=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۴}{۵},$$

$$x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \; ; \; x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

x	−∞		۱۴/۵		۳		۴		+∞
۵x−۱۴		−	۰	+		+		+	
x−۴		−		−		−	۰	+	
x−۳		−		−	۰	+		+	
P		−	۰	+	∥	−	∥	+	





اکنون از روی این جدول، مشخص است که به‌ازای xهای بزرگتر یا مساوی $\frac{14}{5}$ و کوچکتر از ۳ و یا xهای بزرگتر از ۴، P مثبت یا صفر است و این، همان مجموعهٔ جواب مسأله است (چون ما می‌خواهیم $P \ge 0$ باشد)؛ یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله، به‌صورت زیر است:

$$\frac{14}{5} \le x < 3 \text{ یا } x > 4$$

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^3 < 4x$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا می‌نویسیم $x^3 - 4x < 0$ و بعد از تجزیه عبارت سمت چپ، خواهیم داشت:

$$x(x^2-4) < 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) < 0$$

و با تعیین علامت عبارت $A = x(x-2)(x+2)$ می‌توان مجموعهٔ مقادیر x را که به‌ازای آنها $A < 0$ می‌شود، به‌عنوان مجموعهٔ جواب نامعادله درنظر گرفت:

$$x = 0 \quad x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x	−		−		+		+
x − ۲	−		−		−		+
x + ۲	−		+		+		+
A	−		+		−		+

با توجه به جدول، مجموعهٔ جواب نامعادله، به‌صورت زیر مشخص می‌شود: $x < -2$ یا $0 < x < 2$

مثال: نامعادلهٔ مضاعف $-1 \le \frac{x+2}{2x-3} \le 1$ را حل کنید.

حل: درواقع، باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2x-3} \le 1 \\ \frac{x+2}{2x-3} \ge -1 \end{cases}$$

برای حلّ این دستگاه، جواب هریک از نامعادله‌ها را به روش گفته شده، به‌ترتیب زیر می‌یابیم:

$$1)\ \frac{x+2}{2x-3} \le 1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-3} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{x+2-(2x-3)}{2x-3} \le 0$$

$\Rightarrow \frac{-x+5}{2x-3} \le 0$

$-x+5=0 \Rightarrow x=5$; $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$-x+5$		+		+		−	
$2x-3$		−		+		+	
P_1		−	0	+	0	−	

از روی این جدول، مشخص است که نابرابری $P_1 \le 0$ که موردنظر مسأله است، به‌ازای $x<\frac{3}{2}$ یا $x \ge 5$ به‌دست می‌آید، که همان مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ اوّل می‌باشد.

۲) $\frac{x+2}{2x-3} \ge -1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-3}+1 \ge 0 \Rightarrow \frac{x+2+2x-3}{2x-3} \ge 0$

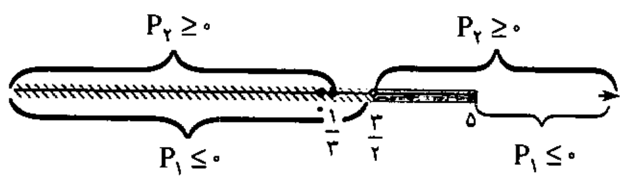
$\Rightarrow \frac{3x-1}{2x-3} \ge 0$

$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$; $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3x-1$		−		+		+	
$2x-3$		−		−		+	
P_2		+	0	−	∞	+	

از روی این جدول نیز معلوم است که نابرابری $P_2 \ge 0$ که موردنظر نامعادله می‌باشد، به‌شرط $x>\frac{3}{2}$ یا $x \le \frac{1}{3}$ حاصل می‌شود.

اکنون باید مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادلهٔ $P_1 \le 0$ و $P_2 \ge 0$ را به‌دست آوریم که این کار را می‌توانیم به کمک محور عددهای حقیقی و به‌صورت زیر انجام دهیم:



از روی این نمودار، مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادله، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$x \le \frac{1}{3}$ یا $x \ge 5$

روش دیگری که برای حلّ این نوع مسائل می‌تواند به کار رود و دقت بیشتری هم دارد، این است که دو جدول تعیین علامت را بدون این که علامتهای آنها را درهم ضرب کنیم، زیر هم و یکجا رسم کنیم و آن‌گاه مجموعهٔ جواب مشترک دو نامعادله را روی جدول به‌دست می‌آوریم. نمودار زیر، گویای این روش است:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$-x+5$		+		+		+		−	
$2x-3$		−		−		+		+	
P_1		−		−	∞	+		−	
$3x-1$		−		+		+		+	
$2x-3$		−		−		+		+	
P_2		+		−	∞	+		+	

با مشاهدهٔ علامتهای P_1 و P_2 در ستونهای مختلف، بروشنی دیده می‌شود، جایی که P_1 منفی یا صفر و P_2 مثبت یا صفر($P_1 \le 0$ و $P_2 \ge 0$) می‌باشند، دو فاصلهٔ $x \le \frac{1}{3}$ و $x \ge 5$ می‌باشد.

روش فوق بخصوص اگر با تعداد بیشتری نامعادله‌های توأم مواجه باشیم، مناسبتر می‌باشد.

تمرین:

۱ـ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $x^2-5x>0$

۲) $7x^2-x-6 \le 0$

۳) $\frac{x^2-4}{x^2-1} \ge 0$

۴) $\frac{(x^2-5x)(4-x^2)}{(x^2-9)(4-x)}<0$

۵) $\frac{x^2+1}{x} \ge 2$

۶) $\frac{2x+1}{3x-2} \ge \frac{3x+1}{4x-3}$

۷) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \ge \frac{4}{x^2-1}$

۸) $x^4+x^2<2$

۹) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1} \ge \frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$

۱۰) $\frac{x^4-1}{x^2-4} \le 16$

۲ـ مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های مضاعف زیر را به‌دست آورید :

۱) $\begin{cases} x^۲ - ۴x > ۵ \\ x^۲ + x < ۰ \end{cases}$

۲) $-۲ < \dfrac{x+۲}{x-۲} < ۲$

۳) $\begin{cases} \dfrac{x+۴}{x-۱} > \dfrac{x-۲}{x-۳} \\ \dfrac{x+۳}{x} < x+۱ \end{cases}$

روشهای سریع و ذهنی در حلّ نامعادله‌ها

برای آن‌که مجموعهٔ جواب یک نامعادله یا دستگاه نامعادله‌ها را با سرعت بیشتری به‌دست آوریم، روشهایی خاص وجود دارد که این موضوع، بخصوص در پاسخ‌گویی به پرسشهای چهارگزینه‌ای، حائز اهمیت ویژه‌ای است. در زیر، به تعدادی از این روشها اشاره می‌کنیم :

۱ـ تعیین علامت عبارتهای درجهٔ ۳ و بیشتر، و عبارتهای کسری در جدول یک سطری:

جدول تعیین علامت عبارتهای جبری درجهٔ سه و کسری را می‌توان در یک جدول کوچکتر خلاصه نمود و این، از حجم کار می‌کاهد و سرعت عمل را بیشتر می‌نماید. به این منظور، باید ریشه‌های کلیهٔ عبارتهای درجهٔ اوّل و دوم تشکیل‌دهندهٔ کسر یا عبارت جبری را که می‌خواهیم آن را تعیین علامت کنیم، به‌دست آوریم. آن‌گاه علامت کسر یا عبارت جبری را از ضرب علامتهای عبارتهای درجهٔ اوّل و دوم تشکیل‌دهندهٔ آن (که علامت ضریب بزرگترین درجهٔ هریک از آنها می‌باشد) به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه در یک جدول یک سطری، همهٔ ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی قرار می‌دهیم و در آخرین ستون سمت راست، علامتی موافق علامت کسر یا عبارت جبری قرار می‌دهیم و علامتها را یک در میان عوض می‌کنیم، تنها روی ریشه‌های مضاعف و تکراری از مرتبهٔ زوج (یعنی دو بار یا چهار بار یا... تکراری) تغییر علامت نمی‌دهیم. مطالب گفته شده را با یک مثال روشنتر می‌کنیم.

مثال: عبارت جبری $P = \dfrac{(x-۲)(۴-x^۲)(x^۲-x)}{(x^۲+x-۲)(x^۲-۱)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های همهٔ پرانتزها را به‌دست می‌آوریم :

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ ۴-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۲\ ,$

$x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰\ ,$

$x=۱\ ,\ x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۱\ ,$

$x=-۲ \quad x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$

ملاحظه می‌شود که ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ کسر P، عبارت است از ۰، ۲، ۲−، ۱ و ۱−، که ریشهٔ ۲، دو بار تکرار شده (یک‌بار در معادلهٔ $۴-x^۲=۰$ و بار دیگر در معادلهٔ $x-۲=۰$) و ریشهٔ ۲− نیز دو بار تکرار شده (یک‌بار در معادلهٔ $۴-x^۲=۰$ و بار دیگر در معادلهٔ $x^۲+x-۲=۰$) و ریشهٔ ۱ نیز سه بار تکرار شده است (یک‌بار در معادلهٔ $x^۲-x=۰$، بار دیگر در معادلهٔ $x^۲+x-۲=۰$ و مرتبهٔ سوّم در معادلهٔ $x^۲-۱=۰$) علامت کسر P نیز که از حاصلضرب علامتهای پنج عبارت در یکدیگر به‌دست می‌آید. (درواقع علامتهای ضرایب بزرگترین درجه‌های آنها)، منفی می‌باشد. بنابراین، مطابق آنچه گفته شد، جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر می‌باشد :

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
P		+	‖	+	‖	−	۰	+	‖	−	۰	−	

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، از سمت راست در جدول علامت کسر را که منفی است، گذاشته‌ایم و بعد از ۲ و ۲− که ریشه‌های دو بار تکراری هستند، تغییر علامت نداده‌ایم ؛ ولی روی ۱ که سه بار تکرار شده است، تغییر علامت داده‌ایم. همچنین روی ریشه‌های مخرج کسر (۱−، ۱ و ۲−) نیز کسر تعریف نشده می‌باشد که با علامت ∞ روی آنها مشخص شده است و روی سایر ریشه‌ها $P(۰,۲)$ مساوی صفر است.

مثال: کسر $A = \dfrac{(۴x-x^۲)(x^۲+۲x)}{(۲x^۲+x-۱۰)(۵-x)}$ را تعیین‌علامت کنید.

حل: به همان ترتیبی که گفته شده است، عمل می‌کنیم. علامت A مثبت است. (چرا؟)

$۴x-x^۲=۰ \quad x(۴-x)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۴$

$x^۲-۲x=۰ \quad x(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=-۲$

$۲x^۲+x-۱۰=۰ \quad \Delta=۱-۴(۲)(-۱۰)=۸۱ \Rightarrow x=\dfrac{-۱\pm ۹}{۴}$

$\Rightarrow x_۱ = -\frac{۵}{۲}\ ,\ x_۲ = ۲$

$۵ - x = ۰ \Rightarrow x = ۵$

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۲}$		-۲		۰		۲		۴		۵		$+\infty$
A		−	۰	+		−		−	۰	+		−	۰	+	

مرحله‌های حلّ مسأله را یک‌بار مرور کنید. (چرا در x=۰، A تغییر علامت نداده است؟)

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x+۲}{x-۲} \geq \frac{x+۳}{x-۳}$ را حل کنید.

حل: با آوردن همهٔ عبارتها به سمت چپ نتیجه می‌شود :

$$\frac{x+۲}{x-۲} - \frac{x+۳}{x-۳} \geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۲)(x-۳)-(x-۲)(x+۳)}{(x-۲)(x-۳)} \geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲ - x - ۶ - x^۲ - x + ۶}{(x-۲)(x-۳)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{-۲x}{(x-۲)(x-۳)} \geq ۰$$

اکنون عبارت $P = \frac{-۲x}{(x-۲)(x-۳)}$ را تعیین علامت می‌کنیم (ریشه‌های عبارتهای تشکیل دهندهٔ P به‌صورت ذهنی قابل محاسبه‌اند : ۲، ۳ و ۰ و علامت P نیز منفی است).

x	$-\infty$		۰		۲		۳		$+\infty$
P		+	۰	−		+		−	

اکنون از روی این جدول پاسخ مسأله، یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله $(P \geq ۰)$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

$x \leq ۰$ یا $۲ < x < ۳$

مثال: مجموعهٔ مقادیر x را که صادق در نامعادلهٔ $x^۴ > ۲x^۲$ هستند، به‌دست آورید.

حل: می‌توان نوشت :

$$x^۴ > ۲x^۲ \Rightarrow x^۴ - ۲x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲(x^۲-۲) > ۰$$

ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ $x^۲(x^۲-۲)$ عبارت است از صفر و $\pm\sqrt{۲}$ که ریشهٔ صفر، دوبار تکراری می‌باشد (چرا؟) بنابراین، در جدول زیر، تعیین علامت آن انجام می‌شود :

x	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		۰		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
$x^۲(x^۲-۲)$		+		−		−		+	

و لذا جواب نامعادله به‌صورت $x > \sqrt{۲}$ یا $x < -\sqrt{۲}$.

مثال: کسر $\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۳)(x-۴)}$ در کدام فاصلهٔ زیر، منفی است؟

۱) $(-\infty, ۱)$ ۲) $(۲, ۳)$

۳) $(۳, ۴)$ ۴) $(۲, +\infty)$

کنکور تجربی ۷۰

حل: ریشه‌های عبارتهای تشکیل‌دهندهٔ این کسر، بسادگی مساوی ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌دست می‌آیند و علامت کسر نیز مثبت است. پس بسرعت می‌توان آن را در جدول زیر تعیین علامت نمود.

x	$-\infty$		۱		۲		۳		۴		$+\infty$
P		+		−		+	۰	−	۰	+	

از روی این جدول، می‌توان دریافت که این کسر، در فاصله‌های (۳,۴) و (۱,۲) منفی می‌باشد، که درنتیجه، پاسخ صحیح تنها گزینهٔ ۳ می‌باشد.

۲ـ استفاده از نابرابریهای اتحادی زیر:

۱) $\left.\begin{array}{l} x^۲ < a^۲\ ,\ a > ۰ \\ |x| < a \end{array}\right\} \Rightarrow -a < x < a$

۲) $\left.\begin{array}{l} x^۲ > a^۲\ ,\ a > ۰ \\ |x| > a \end{array}\right\} \Rightarrow x > a$ یا $x < -a$

مثال: نامعادلهٔ $x^۲ < ۴$ را حل کنید.

حل: مطابق نابرابری شمارهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$-۲ < x < ۲$

مثال: نامعادلهٔ $|۳x - ۲| < ۳$ را حل کنید.

حل: مطابق نابرابری شمارهٔ (۱) می‌نویسیم :

$-۳ < ۳x - ۲ < ۳$

اکنون ۲ واحد به دو طرف اضافه می‌کنیم :

$-۱ < ۳x < ۵$

و با تقسیم دوطرف نابرابری بر سه، نتیجه می‌گیریم :

$-\frac{۱}{۳} < x < \frac{۵}{۳}$

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^۲ + ۲x > ۸$ را به‌دست آورید.

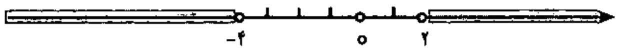
حل: ابتدا یک واحد به دوطرف نامعادله اضافه می‌کنیم :

$$x^2+2x+1>9 \Rightarrow (x+1)^2>9$$

حال، از نابرابری شمارهٔ (۲) استفاده می‌کنیم :

$$x+1>3 \text{ یا } x+1<-3 \Rightarrow x>2 \text{ یا } x<-4$$

این مجموعه، جواب نامعادله می‌باشد. به‌منظور آشنایی بیشتر، نمودار هندسی آن نیز در زیر رسم شده است :



تمرین : هریک از نامعادله‌ها و دستگاه‌های نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^2<16$ ۲) $x^2>9$

۳) $|x-2|<5$ ۴) $|x+1|>3$

۵) $|3x-1|>2$ ۶) $\begin{cases} x^2<4 \\ |x-1|>3 \end{cases}$

۳ـ توجه و شناسایی عبارتهای همیشه مثبت و همیشه منفی:

بسیاری از عبارتهای جبری، همواره مثبت یا همواره مثبت و صفر می‌باشند، مانند عبارتهای مربع کامل، قدرمطلقها، رادیکالهای با فرجهٔ زوج و... به نمونه‌هایی از این عبارتها که در زیر آمده‌اند، دقت کنید :

$$(x+2)^2 \ , \ (x^2-1)^4 \ , \ x^2+1 \ , \ x^4+x^2+3 \ ,$$
$$|x+2| \ , \ \sqrt{x+1}$$

همچنین، همان‌طور که می‌دانیم هر سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم که مبین آن منفی می‌باشد و ضریب x^2 آن مثبت باشد، همواره مثبت می‌باشد. نمونه‌هایی از این عبارتها نیز در زیر آمده است :

$$x^2+x+1 \ , \ 3x^2+2x+2 \ , \ 5x^2+10x+6$$

در موقع تعیین علامت و نیز حلّ نامعادله‌ها می‌توان عبارتهای همیشه مثبت را درنظر نگرفت و بدون درنظر گرفتن آنها بقیهٔ عبارت جبری را تعیین علامت کرد و این از حجم کار می‌کاهد. همچنین در موقع حلّ نامعادله‌ها می‌توان، عبارتهای همیشه مثبت را کنار گذاشت و برای مثبت یا منفی بودن عبارت جبری، سایر عبارتها را درنظر گرفت و اگر عبارتی همیشه منفی داشته باشیم (عبارت همیشه منفی از ضرب یک عبارت همیشه مثبت در یک علامت منفی حاصل می‌شود) می‌توانیم پس از درنظر گرفتن علامت آن، آن را کنار بگذاریم. با چند مثال، مسأله روشنتر می‌شود.

مثال: نامعادلهٔ $\dfrac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+x+1)} \le 0$ را حل کنید.

حل: x^2+1 همیشه مثبت است و مبین x^2+x+1 نیز، منفی است. $(\Delta=1-4<0)$ و لذا این عبارت نیز همواره مثبت است.

بنابراین، برای آن‌که کسر $\dfrac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+x+1)}$ منفی یا صفر باشد، لازم و کافی است که $x^2-4\le 0$ باشد و از آن‌جا $x^2 \le 4$ و درنتیجه $-2\le x\le 2$ است.

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^4+x^2<4x^2+4$ کدام است؟
(کنکور تجربی ۷۱)

۱) $-4<x<4$ ۲) $-2<x<2$

۳) $x>2$ یا $x<-2$ ۴) $x>4$ یا $x<-4$

حل: پس از آن‌که کلیهٔ عبارتها را به سمت چپ تساوی بردیم، نتیجه می‌شود :

$$x^4+x^2-4x^2-4<0 \Rightarrow x^4-3x^2-4<0$$
$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-4)<0$$

اکنون می‌بینیم که x^2+1، همواره مثبت است، پس باید $x^2-4<0$ باشد و از آن‌جا $x^2<4$ و درنتیجه : $-2<x<2$ و پاسخ صحیح گزینهٔ ۲ است.

مثال: به‌ازای کدام مجموعهٔ کسر $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ از ۲ کمتر است؟

۱) R ۲) $\varnothing$

۳) $\{x \mid -1<x<1\}$ ۴) $\{x \mid x<-1\}$

(کنکور پیش‌دانشگاهی ریاضی ۷۶)

حل: می توان نوشت :

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}<2 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}-2<0 \Rightarrow \frac{x^2-1-2x^2-2}{x^2+1}<0$$
$$\Rightarrow \frac{-x^2-3}{x^2+1}<0$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+3}{x^2+1}>0$$ (با ضرب دوطرف نابرابری در یک منفی)

صورت و مخرج کسر فوق همواره مثبت هستند و لذا کسر فوق، به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، همیشه مثبت است و پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ است.

تمرین: مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید:

۱) $\frac{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}{x^۲-۴} \leq ۰$

۲) $\frac{(x^۲+۳x+۱)(۱-x^۲)}{x^۲-۴x+۴} > ۰$

۳) $\frac{(x^۲+۱)(x^۴+۱)}{(x^۴-۸۱)} < ۰$

۴) $x^۴ < x^۲$

۵) $(x-۱)^۲ > (x-۱)^۲(x-۲)$

۶) $\frac{x^۲-۵x}{x^۲+۱} > ۱$

۴ـ عبارتهایی که تنها دو ریشهٔ حقیقی دارند، به‌صورت ذهنی قابل تعیین علامت کردن هستند و نیازی به رسم جدول ندارند.

مثال: عبارت جبری $x^۲ - ۴x$ را تعیین علامت کنید.

حل: ریشه‌های این عبارت به‌صورت ذهنی، قابل محاسبه می‌باشند. و بسادگی به‌دست می‌آیند:

$x^۲ - ۴x = ۰ \quad x(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۴$

اکنون بدون رسم جدول، می‌توان گفت بین این دو ریشه، علامت $x^۲ - ۴x$ منفی و خارج از فاصلهٔ این دو ریشه، عبارت منفی است؛ یعنی اگر $۰ < x < ۴$ باشد $x^۲ - ۴x < ۰$ و اگر $x > ۴$ یا $x < ۰$ باشد $x^۲ - ۴x > ۰$ است. به کمک این موضوع، می‌توان جواب نامعادله‌هایی را که دو ریشهٔ حقیقی دارند، بسرعت و به‌صورت ذهنی محاسبه نمود.

مثال: جواب نامعادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۴ < ۰$ چیست؟

حل: چون مجموع ضرایب سه جملهٔ فوق، مساوی صفر است $(۱-۵+۴=۰)$؛ بنابراین یک ریشهٔ آن مساوی ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ معادله است؛ یعنی $x' = ۱$ و $x'' = ۴$.

اکنون بین دو ریشهٔ فوق، علامت سه جمله‌ای، مخالف علامت ضریب $x^۲$، یعنی منفی است و خارج فاصلهٔ دو ریشه مثبت است. و ما می‌خواهیم این سه جمله‌ای، منفی باشد $(x^۲ - ۵x + ۴ < ۰)$ و بنابراین، بین دو ریشه جواب می‌باشد (یعنی: $۱ < x < ۴$).

مثال: نامعادلهٔ $\frac{x-۲}{۴-x} \geq ۰$ را حل کنید.

حل: ریشه‌های صورت و مخرج کسر ۲ و ۴ هستند و علامت کسر منفی است؟ (چرا؟)، بنابراین بین دو ریشه، علامت کسر، مثبت و خارج آن، علامت کسر، منفی است و ما می‌خواهیم کسر مثبت یا صفر باشد. پس بین دو ریشه، جواب می‌باشد؛ یعنی $۲ \leq x < ۴$. توجه کنید که علامت مساوی روی ۲ $(x \geq ۲)$ برای این است که کسر فوق می‌تواند صفر نیز باشد و چون ۴ ریشهٔ مخرج کسر می‌باشد، لذا $x \neq ۴$ است و علامت مساوی روی ۴ نیامده است. $(x < ۴)$

مثال: مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $|x|(x^۲ - ۳x + ۲) \leq ۰$ کدام است؟ (کنکور تجربی ۶۵)

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[۱,۲] \cup \{۰\}$

۳) $[-۲,-۱]$ ۴) $[-۲,-۱] \cup \{۰\}$

حل: $|x| \geq ۰$ می‌باشد و لذا کافی است $x^۲ - ۳x + ۲ \leq ۰$ باشد. ریشه‌های این معادله چون مجموع ضرایب آن، صفر است $(۱-۳+۲=۰)$ مساوی ۱ و $\frac{c}{a}$ معادله است و لذا $x' = ۱$ و $x'' = ۲$؛ اما چون علامت ضریب x مثبت است؛ بنابراین، بین این دو ریشه، سه‌جمله‌ای منفی و خارج از فاصلهٔ دو ریشه، سه‌جمله‌ای مثبت است و نامعادله می‌خواهد که سه‌جمله‌ای، منفی یا صفر باشد؛ پس لازم است که $۱ \leq x \leq ۲$ از طرفی چون $|x|$ نیز می‌تواند مساوی صفر باشد (به‌ازای $x=۰$) و اگر صفر شود، حاصل عبارت سمت چپ نابرابری، صفر می‌شود؛ پس $x=۰$ نیز یک جواب می‌باشد. بنابراین، جواب نهایی به‌صورت زیر است:

$x = ۰$ یا $۱ \leq x \leq ۲$

و این نشان می‌دهد که گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.

تمرین: هریک از نامعادله‌های زیر را با سریعترین روش حل کنید:

۱) $\frac{(x-۱)(x^۴+۱)}{x-۲} \leq ۰$

۲) $\frac{(x-۲)|x|}{x-۳} \geq ۰$

۳) $\frac{(x^۲+x+۱)(x-۱)}{(x+۱)|x+۱|} \leq ۰$

۴) $\frac{(3x^2 - x + 1)(x^2 - 4)}{|x + 2|} \ge 0$

۵) $\frac{(x^2 - 5x)(x^2 + 4x + 10)}{(x^2 + 4)} < 0$

کاربردهایی از نامعادله‌ها

حلّ نامعادله‌های مختلف، کاربردهای بسیاری در ریاضیات دارند و تقریباً می‌توان گفت جزو الفبای ریاضیات می‌باشند. بعضی از کاربردهای ابتدایی آنها در مثالهای زیر می‌آید :

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 + mx + m^3 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد.

حل: می‌دانیم برای آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم، دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، لازم و کافی است که مبین آن مثبت باشد ؛ پس : $\Delta > 0$ و از آن‌جا به‌صورت زیر، حدود m به‌دست می‌آید :

$$\Delta = m^2 - 4m^3 > 0 \Rightarrow m^2(m - 4) > 0$$

چون m^2 همواره مثبت یا صفر است، پس کافی است $m - 4 > 0$ باشد و لذا $m > 4$ و این، یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی m که بزرگتر از ۴ باشد، معادلهٔ فوق دارای دو ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

مثال: به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x عبارت جبری $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}}$ تعریف شده است؟

حل: می‌دانیم عبارتهای شامل رادیکالهای با فرجهٔ زوج، هنگامی تعریف شده هستند که زیر رادیکال آنها مثبت یا صفر باشد، پس درواقع باید ریشه‌های دستگاه نامعادله‌های زیر را به‌دست آوریم :

$$\begin{cases} \frac{x - 1}{x - 2} \ge 0 \\ 4 - x^2 \ge 0 \end{cases}$$

هر دو نامعادله‌ها را می‌توان با روشهای سریع و بدون تشکیل جدول حل کرد. نامعادلهٔ اوّل، دو ریشهٔ x=۱ و x=۲ دارد که بین آن دو علامت، کسر منفی و خارج از فاصلهٔ آنها کسر مثبت است (چرا؟)، پس لازم است که :

$x > 2$ یا $x \le 1$ (۱)

و برای حلّ نامعادلهٔ دوم نیز می‌نویسیم :

$4 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le x \le 2$ (۲)

و از اشتراک مجموعهٔ جوابهای (۱) و (۲) به‌دست می‌آید :

$$-2 < x \le 1$$

یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی متعلق به فاصلهٔ $[-2, 1)$ هر دو رادیکال فوق، تعریف شده می‌باشند.

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که نقطهٔ $A\begin{vmatrix} m^2 - 2 \\ m^2 - 4 \end{vmatrix}$ در دستگاه مختصات، همواره در ناحیهٔ چهارم واقع باشد.

حل: می‌دانیم در دستگاه مختصات دو بعدی، نقاطی در ناحیهٔ چهارم واقع هستند که طول آنها مثبت و عرضشان منفی باشد ؛ بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} m^2 - 2 > 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

و از حلّ این دو نامعادله، به‌ترتیب زیر، به‌دست می‌آید :

$m^2 > 2 \Rightarrow m > \sqrt{2}$ یا $m < -\sqrt{2}$

$m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$

و از اشتراک این دو مجموعه، جواب به‌دست می‌آید :

$-2 < m < -\sqrt{2}$ یا $\sqrt{2} < m < 2$

مثال: حدود m را طوری به‌دست آورید که به‌ازای جمیع مقادیر x، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $(m - 3)x^2 + 2mx + m$ همواره منفی باشد.

حل: می‌دانیم سه‌جمله‌ای درجهٔ دومی که دلتای آن منفی باشد، همواره علامتی موافق علامت ضریب x^2 دارد. پس برای آن‌که سه‌جمله‌ای فوق همواره منفی باشد، لازم و کافی است که $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد و بنابراین باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ را به‌صورت زیر حل کنیم :

$$\begin{cases} \Delta = (2m)^2 - 4m(m - 3) < 0 \\ a = (m - 3) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m^2 + 12m < 0 \\ m - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12m < 0 \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < 3 \end{cases}$$

و اشتراک دو جواب $m<0$ می‌باشد ؛ یعنی به‌ازای هر $m<0$، سه‌جمله‌ای فوق به‌ازای همهٔ مقادیر x منفی خواهد بود.

مثال: به‌ازای کدام مقادیر m خط $y=mx$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+1}{1-x}$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$

۲) $3-\sqrt{2}<m<3+\sqrt{2}$

۳) $2-3\sqrt{2}<m<2+3\sqrt{2}$

۴) $2-\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}$

(کنکور تجربی ۷۵)

حل: می‌دانیم برای یافتن طولهای نقاط برخورد دو منحنی به معادله‌های y_1 و y_2 در دستگاه مختصات دکارتی، $y_1=y_2$ قرار داده و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. پس برای یافتن نقاط برخورد خط $y=mx$ و منحنی $y=\frac{x+1}{1-x}$ باید معادلهٔ $mx=\frac{x+1}{1-x}$ را حل کنیم و پاسخ سؤال این است که باید معادلهٔ فوق جواب نداشته باشد. بنابراین، پس از ساده و مرتّب کردن معادلهٔ فوق، دلتای آن را منفی قرار می‌دهیم :

$$mx=\frac{x+1}{1-x}\Rightarrow mx-mx^2=x+1$$

$$\Rightarrow mx^2+(1-m)x+1=0$$

$$\Delta=(1-m)^2-4m<0\Rightarrow m^2+1-2m-4m<0$$

$$\Rightarrow m^2-6m+1<0$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $m^2-6m+1=0$ را به‌دست می‌آوریم :

$$m^2-6m+1=0\Rightarrow\Delta=36-4=32$$

$$\Rightarrow m=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow m_1=3+2\sqrt{2}\ ,\ \ m_2=3-2\sqrt{2}$$

حال بین m_1 و m_2 علامت m^2-6m+1 منفی و خارج از فاصلهٔ آنها مثبت است و ما می‌خواهیم این سه‌جمله‌ای منفی باشد، پس باید $m_2<m<m_1$ و لذا $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$ و پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ است.



اگر اکتشافهای گاوس در موقع خود، به اطلاع مردم رسیده بود، مانع می گردید که **کوشی، آبل، ژاکوبی** و بسیاری ریاضیدانان دیگر، وقت خود را در مسائلی تلف کنند که وی قبلاً آنها را حل کرده بود و نیز موجب پیشرفت عظیمی در علوم ریاضی می‌شد.

متأسفانه گاوس که شخصی تندخو و ترشرو بود و لجاجتی بی‌مانند داشت، فقط وقتی اکتشافهای خود را انتشار می‌داد که کاملاً تمام و از قید طرح و چوب بستی که برای ساختن آن ایجاد گردیده بود، فارغ شده باشد.

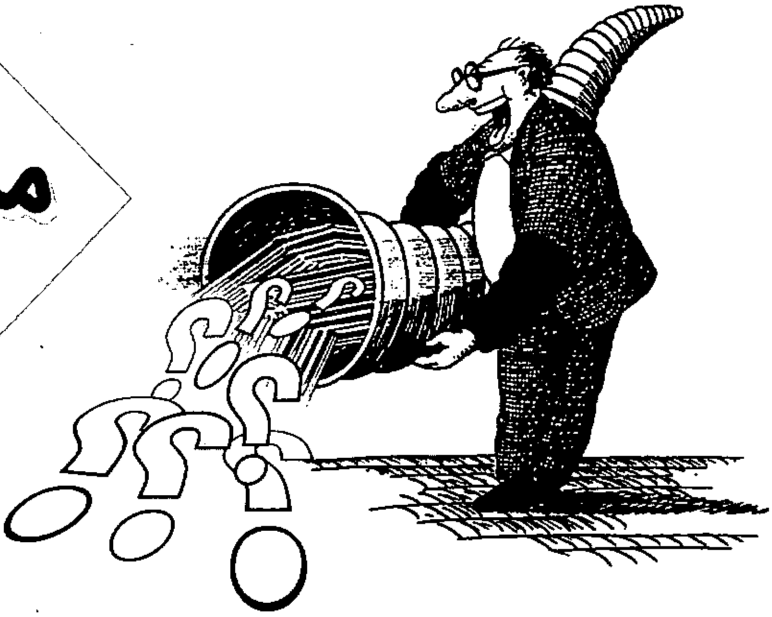
دوستانش میل داشتند که وی متون واضحتری برای ایشان بنویسد یا روش خود را در حصول نتیجه به آنان بگوید ؛ اما گاوس جواب داد که فقط برای تبعیت از طبع خود کار می‌کند، نه برای آموختن به دیگران. بنابراین، همواره اکتشافهای خود را به‌صورت معمّاهایی از این قبیل یادداشت می‌کرد : «یافتم : عدد = $\Delta+\Delta+\Delta$» (یعنی هر عدد صحیح مثبت، مساوی با مجموع سه عدد مثلث شکل است، از قبیل اعداد ۱، ۳، ۶ و غیره. (این اعداد را از آن جهت مثلث شکل می‌گویند که عبارت‌اند از مجموع اعداد متوالی ابتدا از واحد که می‌توانند به‌صورت مثلثی نوشته شوند.)

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو ـ حسن صفّاری

حل مسائل را در همین شماره ببینید!

مسائل برای حل

- احمد قندهاری
- محمد هاشم رستمی
- حمید رضا امیری
- میرشهرام صدر
- سید محمد رضا هاشمی موسوی



ریاضی ۲

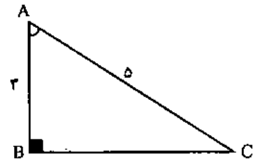
۱ـ نقاط $A(۱,-۲)$ ، $B(-۳,۲)$ و $C(۳,۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. فاصلهٔ نقطهٔ M، وسط پاره‌خط BC، از رأس A را بیابید.

۲ـ حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}$$

۳ـ مخرج کسر $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x}+\sqrt{۲}}$ را با فرض $x>۰$، گویا کنید.

۴ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ A را محاسبه کنید.



۵ـ درستی برابری زیر را تحقیق کنید $(\theta \neq k\pi+\frac{\pi}{۲})$.

$$۲\cos\theta-\cos\theta\sin^۲\theta=\cos^۳\theta(۲+\tan^۲\theta)$$

۶ـ مختصات رأس و محور تقارن نمودار سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+۴x+۵$ را بیابید.

۷ـ معادلهٔ $\frac{x+۵}{۶}=\frac{x+۲}{۳}+\frac{x-۱}{۲}$ را حل کنید.

۸ـ در معادلهٔ $۲x^۲-mx+۲=۰$، مقدار m را چنان بیابید که معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد. سپس تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۹ـ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-۲,۱)$ بگذرد و بر خط $x-۲y=۱$ عمود باشد.

۱۰ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۳,۲)$ را از خط $۲x+۳y=۱۳$ حساب کنید.

۱۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $\hat{C}=۹۰°$، اگر $b=۲$ و $\hat{A}=۶۰°$ ؛ مقدار a (ضلع روبرو به زاویهٔ A) را حساب کنید.

۱۲ـ نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(۲x+۳)^۲-x\geq ۴x^۲-۳x+۲۰$$

ریاضی ۴

۱ـ انحراف معیار داده‌های زیر را به دست آورید:

۲،۴،۵،۶،۷ ،۱۱

۲ـ حاصل عبارتهای زیر را بیابید:

$$p=(\tan ۱°)(\tan ۲°)...(\tan ۸۹°)$$

$$q=\log(\tan ۱°)+\log(\tan ۲°)+...+\log(\tan ۸۹°)$$

۳ـ اگر $\cot\beta=۳$ و $\tan(\alpha+\beta)=۲$ ، مقدار α را محاسبه کنید.

۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\sin^۴ x-\cos^۴ x=\sin x$$

۵ـ دستگاه زیر را به روش کرامر یا ماتریس، معکوس حل کنید:

$$\begin{cases}۲x-y=۱\\ ۳x-۴y=-۱\end{cases}$$

۶. اگر $\vec{u}=\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}$ و $\vec{v}=\begin{bmatrix}۲\\ -۳\end{bmatrix}$ ، تعیین کنید:

الف. مختصات $\vec{u}+\vec{v}$

ب. اندازهٔ بردار $(\vec{u}+\vec{v})$

ج. حاصلضرب درونی $\vec{u}.\vec{v}$ را محاسبه کنید و تعیین کنید که زاویهٔ بین دو بردار، حاده است یا منفرجه؟

۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $f(x)=x^۲-۳x$ ، حاصل $f(A)$ و A^n را بیابید.

۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید:

$$(A.B)^{-۱}=B^{-۱}.A^{-۱}$$

۹ـ عبارت $p(x)=\sqrt{x^۲-۳x+۲}$ به ازای چه مقادیری از x در $\mathbb{R}$ بی‌معناست؟

۱۰ـ تعیین کنید:

الف. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد؟

ب. چند عدد چهاررقمی طبیعی با رقمهای مختلف وجود دارد؟

ج. چند عدد پنج رقمی که همهٔ رقمهای آن فرد باشد، وجود دارد؟

۱۱ـ مجموع n جملهٔ یک تصاعد، عددی برابر $S_n=۴n^۲+۴n$ است؛ قدر نسبت و جملهٔ دهم این تصاعد را بیابید.

۱۲ـ جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $a_n=\frac{۱}{۲^{n+۱}}$ است؛ حدّ مجموع این تصاعد را بیابید.

۱۳ـ در یک کیسه، ۴ مهرهٔ سفید و ۷ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم؛ تعیین کنید احتمال این که:

الف. هر دو مهره سیاه باشند.

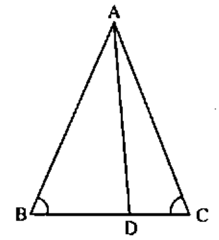
ب. یک مهره سیاه و یک مهره سفید باشد.

۱۴ـ تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب را از طریق ترکیب r شیء از n شیء بیابید.

هندسهٔ ۲

۱ـ حدود m را چنان تعیین کنید که $m+1$، $2m+3$ و $m-2$ اندازه‌های سه ضلع مثلث ABC باشند.

۲ـ نقطهٔ D را روی مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ را اختیار می‌کنیم. ثابت کنید، اگر $DB > DC$ باشد، $D\hat{A}B > D\hat{A}C$ است.

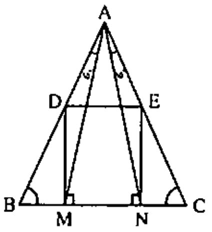


۳ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $B\hat{A}M = C\hat{A}N = 15^{\circ}$ و MD و NE عمود بر BC می‌باشند، ثابت کنید:

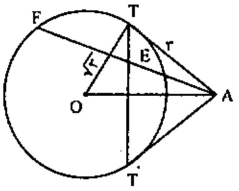
الف. خط DE با ضلع BC موازی است.

ب. چهارضلعی MDEN مربع است.

پ. با استفاده از مسألهٔ بالا، روشی برای رسم مربع محاط در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بیان کنید.



۴ـ طول پاره‌خط AT، مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,\sqrt{3})$ برابر ۳ است.



الف. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره را تعیین کنید.

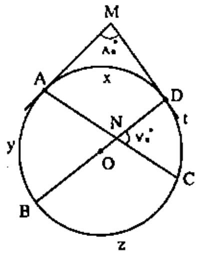
ب. زاویهٔ بین دو مماسی را که از نقطهٔ A بر دایره رسم می‌شوند، به دست آورید.

پ. طول پاره‌خط وصل شده بین دو نقطهٔ تماس مماسهای رسم شده از A بر دایره را تعیین کنید (طول پاره خط TT′).

ت. از نقطهٔ A قاطع AEF را نسبت به دایره رسم می‌کنیم؛ به قسمی که $EF = 3$ باشد. طول پاره‌خط AE را بیابید.

۵ـ مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع $BC = a$، زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و مجموع دو ضلع دیگر $b+c = l$ رسم کنید.

۶ـ با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل، مقدار x، y، z و t را بیابید. نقطهٔ O مرکز دایره است.



۷ـ معادلهٔ تبدیل‌یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-3)$ به دست آورید.

۸ـ چهار نقطهٔ $A=(2,-3)$، $B=(3,2)$، $C=(0,4)$ و $D=(-5,-2)$ داده شده‌اند:

الف. تبدیل‌یافتهٔ نقطه‌های A و B را تحت دوران $R(x,y)=(y,-x)$ به‌دست آورید و A′ و B′ بنامید.

ب. تبدیل یافته‌های نقطه‌های C و D را تحت $H(x,y)=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$ تعیین کنید و C′ و D′ بنامید.

پ. طول پاره‌خطهای AB، A′B′، CD و C′D′ را بیابید. در مورد اندازهٔ پاره‌خطهای AB و A′B′ چه می‌توانید بگویید؟ از مقایسهٔ اندازه‌های در پاره‌خط CD و C′D′ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جبر و احتمال

(نیمسال دوم سال تحصیلی ۷۸ـ۷۷ ـ سراسری)

۱ـ با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید. $(n \in \mathbb{N})$

$$4+9+14+...+(5n-1)=\frac{n(5n+3)}{2}$$

۲ـ کدام یک از احکام زیر درست است؛ احکام درست را اثبات کنید و برای ردّ احکام نادرست، مثال نقض بیاورید:

الف. اگر x گنگ و y گنگ باشد، آن‌گاه xy گنگ است.

ب. اگر x گویا و y گویا باشد، آن‌گاه $x+y$ گویاست.

۳ـ با استفاده از برهان خُلف، ثابت کنید:

اگر $n \in Z$ و n^2 فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.

۴ـ پنج نقطهٔ داخل مربعی به ضلع ۴ سانتیمتر مفروضند. ثابت کنید حداقل فاصلهٔ دو نقطه از این پنج نقطه، کمتر از $2\sqrt{2}$ است.

۵ـ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) اگر $B \subset A$ آن‌گاه $A' \subset B'$

ب) $(A\cap B\cap C)\cup(C-A)\cup(C-B)=C$

۶ـ اگر $A=\{x|x\in Z, |x|<2\}$ و

$B=\{2k+1|k\in Z, -2\le k<0\}$

$A\times B$ را با اعضا مشخص کرده و نمودار آن را روی صفحهٔ مختصات رسم کنید.

۷ـ رابطهٔ R در Z به‌صورت $mRn \Leftrightarrow m^2+n=n^2+m$ تعریف شده است.

اولاً ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است، ثانیاً اعضای کلاس هم‌ارزی [2] را مشخص کنید.

۸ـ به کمک هم‌نهشتی باقیماندهٔ تقسیم $7+4^{2n+1}$ را بر ۵ تعیین کنید. $(n\in N)$

۹ـ یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم، مطلوب است:

الف. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی.

ب. پیشامد A که سکّه رو یا تاس ۳ باشد.

ج. پیشامد B آن که سکّه پشت و تاس ۳ باشد.

د. پیشامد $A' \cup B'$.

۱۰ـ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه موجود است، سه مهره را به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن که دو مهره، قرمز و یک مهره، سفید باشد، چه‌قدر است؟

۱۱ـ سه تیرانداز a، b و c در یک مسابقهٔ تیراندازی شرکت می‌کنند و فرض کنیم که احتمال برد a نصف احتمال برد b و احتمال برد b یک سوّم احتمال برد c باشد، مطلوب است:

الف. احتمال آن که تیرانداز a برنده نشود.

ب. تیرانداز b یا تیرانداز c برنده شود.

۱۲ـ دو عدد حقیقی در فاصلهٔ $[0,2]$ به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که مجموع دو عدد، کوچکتر یا مساوی $\frac{5}{2}$ و بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، چه‌قدر است؟

۱۳ـ به فرض آن که A′ و B دو پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید: $1-p(A\cup B')=p(A').p(B)$

حسابان ۲

۱ـ تابع به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ مفروض است:

الف. a، b و c را چنان بیابید تا منحنی تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض 1− قطع کند و نقطهٔ $M(1,-3)$ می‌نیمم نسبی تابع باشد.

ب. از نقطهٔ $P(0,-3)$ دو مماس بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=2x^2-4x-1$ رسم می‌کنیم، معادله‌های مماسها را بیابید.

۲ـ a و b را چنان بیابید تا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x>1\\ 3\sqrt[3]{x^2} & x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد.

۳ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\text{Arc}\cos 4x$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{8}$ بیابید.

۴ـ مطلوب است رسم جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطهٔ: $f(x)=Ln\frac{2-x}{2+x}$

۵ـ معادلهٔ مثلثاتی $4\cos^2x-2(\sqrt{2}+1)\cos x+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جوابهای کلی آنها را بنویسید.

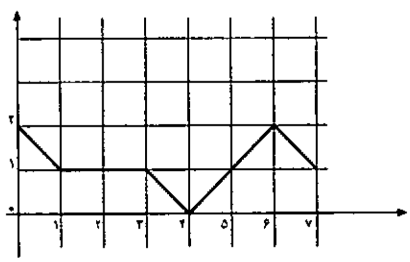
۶ـ در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای به حجم ماکزیمم محاط شده است، اگر شعاع کره ($R=2\sqrt{6}$) باشد، ماکزیمم حجم استوانه را بیابید.

۷ـ اگر $\log 2=0/301$ و $\log 3=0/471$، مطلوب است محاسبهٔ $\log(\sqrt{2}.\sqrt[3]{3})$.

۸ـ مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$I_1=\int_{-2}^{1}([x]+|3x-1|)dx \qquad I_2=\int_0^3\frac{dx}{9+x^2}$

۹ـ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $A'=f$ و $A(x)=\int_0^x f(t)dt$ و $A(0)=0$، مطلوب است رسم نمودار تابع A در بازهٔ $[0,7]$.



ریاضیات گسستهٔ پیش دانشگاهی

۱ـ گراف G از مرتبهٔ ۸ مفروض است، اگر درجهٔ هر رأس این گراف، ۴ یا ۵ باشد و مرتبهٔ آن ۱۸، در این صورت گراف G چند رأس از درجهٔ ۴ و چند رأس از درجهٔ ۵ دارد؟

۲ـ اگر درجهٔ رأسهای گراف سادهٔ G، تصاعد عددی با قدر نسبت d تشکیل دهد، در این صورت، d را بیابید.

۳ـ اگر در یک تقسیم، باقیمانده ۱۵ و خارج قسمت ۴ باشند، حداکثر چند واحد می‌توانیم به مقسوم علیه اضافه کنیم تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند؟

۴ـ اگر a و b دو عدد صحیح و ناصفر باشند، ثابت کنید:

$[a,b]=c\Leftrightarrow[na,nb]=nc$

(راهنمایی: از رابطهٔ مشابه رابطهٔ فوق، برای ب م م استفاده کنید.)

۵ـ اگر $(10!,6^9)=3^b\times 2^a$ باشد، در این صورت، معادلهٔ $ax+by=5c-11$ به‌ازای چه مقادیری از c دارای جواب است؟

۶ـ باقیماندهٔ تقسیم 21^{1378} را بر ۱۷ و ۸ بیابید.

۷ـ به چند طریق می‌توان ۶ مهره را در ۴ جعبهٔ خالی، به‌دلخواه قرار داد؟

(توزیع دلخواه ۶ شیئی در ۴ جای خالی)

۸ـ به چند طریق می‌توانیم از بین ۴ نوع گل که از هر نوع به تعداد کافی موجود است، دسته‌گلی شامل ۶ شاخهٔ گل انتخاب کرد؟

۹ـ در جعبهٔ A، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه، در جعبهٔ B، ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ C، ۴ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. از جعبه‌های A، B و C بترتیب، ۳، ۵ و ۴ مهره به تصادف برداشته و در جعبهٔ D قرار می‌دهیم و از جعبهٔ D به تصادف، مهره‌ای بیرون می‌کشیم. مطلوب است احتمال آن که مهرهٔ انتخابی از جعبهٔ D، قرمز باشد.

۱۰ـ دو تاس را با هم می‌اندازیم و این کار را به دفعات دلخواه تکرار می‌کنیم، و متغیر تصادفی X را روی فضای نمونه‌ای حاصل، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$X(a,b)=a+b$

جدول توزیع احتمال را برای این تابع متغیر تصادفی، بنویسید.

دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش دانشگاهی

۱ـ ثابت کنید معادلهٔ $x^3-3x^2+10x-5=0$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۲ـ Cهای قضیهٔ مقدار میانگین تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^2x+\frac{x}{2}$ را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ بیابید.

۳ـ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$ مفروض است. جدول رفتار و نمودار تابع را رسم کنید.

۴ـ ثابت کنید، اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند و مقدار ثابت $x+y=S$، آن‌گاه، ماکزیمم x.y برابر $\frac{S^2}{4}$ است.

۵ـ حدهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2\sin x}$

۲) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(x.\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x)$

۶ـ مقدار تقریبی $(0/9)^3+\sqrt[3]{0/9}$ را بیابید.

۷ـ با دوبار به‌کارگیری فرمول نیوتن، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2-6=0$ را بیابید.

۸ـ به کمک مجموع ریمان $\int_0^1(1-x^2)dx$ را محاسبه کنید.

۹ـ بازه‌ای را بیابید که $\int_1^3\frac{dx}{3+x^2}$ در آن قرار داشته باشد.

۱۰ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\,dx}{2-\sin^2 2x}$

$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}$

۱۱ـ ثابت کنید:

$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

ریاضی عمومی ۲ پیش دانشگاهی

۱ـ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|[x]|$ را در فاصلهٔ $[-1,2]$ مشخص کنید.

۲ـ مقادیر اکسترمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+2)^{\frac{2}{3}}$ را بر بازهٔ $[-3,1]$ به دست آورید.

۳ـ ثابت کنید محل برخورد مجانبهای تابع باضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$، مرکز تقارن این تابع است.

۴ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{16x}{(x^2+1)^2}$ را رسم کنید.

۵ـ مطلوب است، مساحت بزرگترین مثلث متساوی‌الساقین که محیط آن ۱۸ متر است.

۶ـ وضعیت دو دایره به معادله‌های $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ و $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ را مشخص کنید.

۷ـ مطلوب است، تعیین معادلهٔ یک سهمی که نقطهٔ $F(2,-\frac{1}{2})$ کانون و خط به معادلهٔ $y=\frac{5}{2}$ خط هادی باشد.

۸ـ نشان دهید که وقتی یک نردبان از روی دیواری سُر می‌خورد، هر نقطهٔ ثابت P از آن، غیر از نقاط انتهایش، $\frac{1}{4}$ یک بیضی را می‌پیماید.

۹ـ مقادیر انتگرالهای معین زیر را به دست آورید:

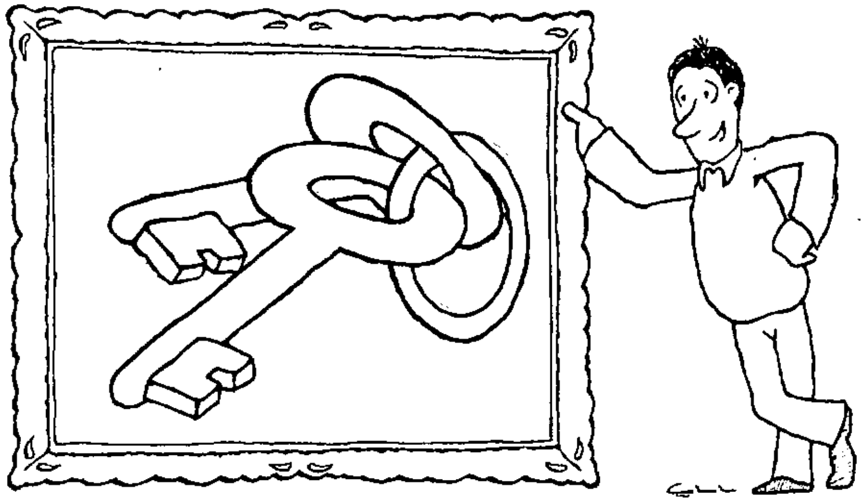
الف) $\int_{-2}^{1}[x]|x|dx$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3x}{1+\cos x}dx$

۱۰ـ مطلوب است، محاسبهٔ سطح محصور بین نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^3+2$ و $g(x)=2x^2-x+2$.



حلّ تشریحی مسائل برهان ۳۰



○ **ریاضی ۲**

۱ـ $A(۱,-۲)$، $B(-۳,۲)$ و $C(۳,۲)$:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{-۳+۳}{۲} = ۰ \;;$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۲+۲}{۲} = ۲ \;;\quad M(۰,۲)$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲}$$
$$= \sqrt{(۰-۱)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

۲ـ

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}} + \frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}} = \frac{(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})^۲ + (\sqrt{۳}-\sqrt{۵})^۲}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})}$$

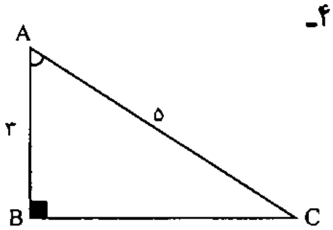
$$= \frac{۳+۵+۲\sqrt{۱۵}+۳+۵-۲\sqrt{۱۵}}{۳-۵} = \frac{۱۶}{-۲} = -۸$$

۳ـ صورت و مخرج کسر را در عبارت $(\sqrt{x} - \sqrt{۲})$ ضرب می‌کنیم:

$$x > ۰ : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x}+\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})^۲}{\sqrt{x^۲}-\sqrt{۴}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})^۲}{x-۲}$$

۴ـ



$$\cos A = \frac{۳}{۵} \;,$$

$$\sin^۲ A = ۱ - \cos^۲ A = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۲۵-۹}{۲۵} \;;$$

$$\sin^۲ A = \frac{۱۶}{۲۵} \;;\; \sin A = \frac{۴}{۵}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳} \;,$$

$$\cot A = \frac{۱}{\tan A} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

۵ـ

$$۲\cos\theta - \cos\theta\sin^۲\theta = \cos^۳\theta(۲+\tan^۲\theta) \quad (۱)$$

$$\cos\theta(۲-\sin^۲\theta) = \cos^۳\theta(۱+۱+\tan^۲\theta)$$

با توجه به فرض $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$، می‌توان نوشت:

$$۱+۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta\left(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta}\right)$$

و با استفاده از اتحاد $۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta$ و اختصار لازم، خواهیم داشت:

$$۱+\cos^۲\theta = \cos^۲\theta + ۱ \quad (۲)$$

برابری (۱) و (۲) با شرط $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$، همیشه برقرارند؛ بنابراین، درستی رابطهٔ (۱) محقّق است.

۶ـ رأس و محور تقارن سهمی به معادلهٔ استاندارد $y-\beta = k(x-\alpha)^۲$ بترتیب $S(\alpha,\beta)$ و $x=\alpha$ است. بنابراین، ابتدا معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$y = x^۲+۴x+۵ = (x^۲+۴x+۴)+۱ = (x+۲)^۲+۱ \;;$$

$$y-۱ = (x+۲)^۲ \quad \text{و} \quad S(-۲,۱)$$

(مختصات رأس سهمی)

$x=-۲$ (معادلهٔ محور تقارن سهمی)

۷ـ $\frac{x-۱}{۲}+\frac{x-۲}{۳}=\frac{x+۵}{۶}$

دوطرف معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم:

$۶(\frac{x-۱}{۲}+\frac{x-۲}{۳})=۶(\frac{x+۵}{۶})$;

$۳(x-۱)+۲(x-۲)=x+۵$;

$۳x-۳+۲x-۴=x+۵$;

$۴x=۱۲$; $x=\frac{۱۲}{۴}$; $\boxed{x=۳}$

۸ـ شرط این که معادلهٔ عمومی $ax^۲+bx+c=۰$ ، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این است که مبین آن یعنی $\Delta=b^۲-۴ac$ برابر صفر باشد: $\Delta=b^۲-۴ac=۰$

بنابراین، برای معادلهٔ $۲x^۲-mx+۲=۰$:

$a=۲$, $b=-m$, $c=۲$

$\Delta=b^۲-۴ac=(-m)^۲-۴(۲)(۲)=m^۲-۱۶=۰$,

$m^۲=۱۶$; $\boxed{m=\pm۴}$

(شرط این معادله، ریشهٔ مضاعف داشته باشد.)

می‌دانیم اگر $\Delta\geq۰$ ، در این صورت، معادله ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta<۰$ ، معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد:

$\Delta=m^۲-۱۶<۰$; $m^۲<۱۶$; $\boxed{-۴<m<۴}$

۹ـ

$A(-۲,۱)$, $x-۲y=۱$, $m=\frac{۱}{۲}$, $m'=-۲$

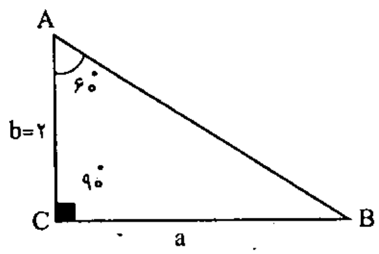
$y-y_A=m'(x-x_A)$: $y-۱=-۲(x+۲)$

$y=-۲x-۴+۱$; $\boxed{y=-۲x-۳}$

۱۰ـ $A(-۳,۲)$, $D: ۲x+۳y-۱۳=۰$

$d=\frac{|۲(-۳)+۳(۲)-۱۳|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$

۱۱ـ



$\tan\hat{A}=\frac{a}{b}$; $a=۲\tan۶۰^\circ=۲\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$

۱۲ـ $(۲x+۳)^۲-x\geq۴x^۲-۳x+۲۰$

$۴x^۲+۱۲x+۹-x\geq۴x^۲-۳x+۲۰$

$۱۲x-x+۳x\geq۲۰-۹$

$۱۴x\geq۱۱$; $\boxed{x\geq\frac{۱۱}{۱۴}}$

○ ریاضی ۴

۱ـ $\bar{x}=\frac{۳+۴+۵+۶+۷+۱۱}{۶}=\frac{۳۶}{۶}=۶$

$S^۲=\frac{۱}{۶}[(۳-۶)^۲+(۴-۶)^۲+(۵-۶)^۲+(۶-۶)^۲+(۷-۶)^۲+(۱۱-۶)^۲]$

$S^۲=\frac{۱}{۶}(۹+۴+۱+۰+۱+۲۵)=\frac{۴۰}{۶}=\frac{۲۰}{۳}$

$S=\sqrt{\frac{۲۰}{۳}}$ (انحراف معیار)

۲ـ $p=(\tan۱^\circ)(\tan۲^\circ)...(\tan۸۹^\circ)$

با توجه به برابری‌های $\tan۸۹^\circ=\cot۱^\circ$ ، $\tan۸۸^\circ=\cot۲^\circ$ ، ... و $\tan۴۶^\circ=\cot۴۴^\circ$ ، می‌توان نوشت:

$p=(\tan۱^\circ\cot۱^\circ)(\tan۲^\circ\cot۲^\circ)...(\tan۴۴^\circ\cot۴۴^\circ).\tan۴۵^\circ$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan x\cot x=۱$ و برابری $\tan۴۵^\circ=۱$:

$p=۱\times۱\times...\times۱\times۱=۱$; $\boxed{p=۱}$

$q=\log(\tan۱^\circ)+...+\log(\tan۸۹^\circ)$

$=\log(\underbrace{\tan۱^\circ\tan۲^\circ...\tan۸۹^\circ}_{۱})$

$q=\log(۱)=۰$; $\boxed{q=۰}$

۳ـ با استفاده از اتحاد:

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$ و با توجه به رابطهٔ $\tan\beta=\frac{۱}{\cot\beta}$:

$۲=\frac{\tan\alpha+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}\tan\alpha}$; $۲-\frac{۲}{۳}\tan\alpha=\tan\alpha+\frac{۱}{۳}$;

$\tan\alpha=۱$; $\boxed{\alpha=k\pi+\frac{\pi}{۴}}$

۴ـ $\sin^۴x-\cos^۴x=(\sin^۲x+\cos^۲x)(\sin^۲x-\cos^۲x)=\sin x$

با استفاده از اتحادهای $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$ و $\cos۲x=\cos^۲x-\sin^۲x$:

$-\cos۲x=\sin x$; $\cos۲x=-\sin x=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$;

$۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}+x)$: $x=k\pi\pm(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲})$;

$x_۱=k\pi+\frac{\pi}{۴}+\frac{x_۱}{۲}$; $\frac{x_۱}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}$;

$\boxed{x_۱=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}$

$x_۲=k\pi-\frac{\pi}{۴}-\frac{x_۲}{۲}$; $\frac{۳x_۲}{۲}=k\pi-\frac{\pi}{۴}$;

$\boxed{x_۲=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}}$

۵ـ روش کرامر:

$\begin{cases}۲x-y=۱\\۳x-۴y=-۱\end{cases}$ $x=\frac{\begin{vmatrix}۱&-۱\\-۱&-۴\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{vmatrix}}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}۲&۱\\۳&-۱\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{vmatrix}}$

$x=\frac{-۴-۱}{-۸+۳}=\frac{-۵}{-۵}=۱$

$y=\frac{-۲-۳}{-۸+۳}=\frac{-۵}{-۵}=۱$; $\boxed{x=y=۱}$

۶ـ

$\vec{u}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$;

$\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱+۲\\۲-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$

$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲}$ (طول بردار)

$\vec{u}.\vec{v}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}=[-۱۲]\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$

$=(-۱)(۲)=(۲)(-۳)=-۸$

چون حاصلضرب درونی دو بردار، عددی منفی است، نتیجه می‌شود که زاویهٔ بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$، منفرجه است.

۷ـ $A=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ ، $f(x)=x^2-3x$

$$f(A)=\left(\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}\right)^2-3\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\6&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3&0\\6&1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\6&-2\end{bmatrix}$$

در این‌جا، با استفاده از $A^2=I$ و با درنظر گرفتن زوج یا فرد بودن n، حاصل A^n را به دست می‌آوریم:

(زوج) $n=2k:\ A^{2k}=I^k=I$

(فرد) $n=2k+1:\ A^{2k+1}=A^{2k}.A=I.A=A$

۸ـ $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&3\end{bmatrix}$:

$$A.B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$(A.B)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13\\\frac13&\frac23\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac13\\0&\frac13\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac13\\0&\frac13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13\\\frac13&\frac23\end{bmatrix}$$

بنابراین، ثابت شد:

$$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac13&-\frac13\\\frac13&\frac23\end{bmatrix}$$

۹ـ $p(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

عبارت $p(x)$، وقتی بی‌معناست که داشته باشیم:

$x^2-3x+2<0$; $(x-1)(x-2)<0$; $\boxed{1<x<2}$

۱۰ـ الف. تعداد عددهای طبیعی سه رقمی:

$\{0,1,2,3,\ldots,9\}$

□ □ □

$9\times10\times10=900$

ب. تعداد عددهای چهاررقمی طبیعی با رقمهای مختلف:

□ □ □ □

$9\times9\times8\times7=4536$

ج. تعداد عددهای پنج رقمی که همهٔ رقمهای آن فرد باشد:

□ □ □ □ □

$5\times5\times5\times5\times5=5^5=3125$

۱۱ـ روش اول:

$S_n=4n^2+4n$ ، $a_{10}=S_{10}-S_9$

$S_{10}=4(10)^2+4(10)=440$ ، $S_9=4(9)^2+4(9)=360$

و (جملهٔ دهم) $a_{10}=440-360=80$

$a_1=4(1)^2+4(1)=8$

$a_2=S_2-S_1=24-8=16$

(قدر نسبت) $d=a_2-a_1=16-8=8$

روش دوم:

$a_1=8$ ، $d=8$: $a_{10}=8+9(8)=8+72=80$

(جملهٔ دهم)

۱۲ـ با استفاده از جملهٔ عمومی تصاعد $(a_n=\frac{1}{2^{n+1}})$، جملهٔ اوّل و قدر نسبت تصاعد را به‌دست می‌آوریم:

$a_1=\frac{1}{2^{1+1}}=\frac{1}{2^2}=\frac14$ ، $a_2=\frac{1}{2^{2+1}}=\frac{1}{2^3}=\frac18$

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac18}{\frac14}=\frac12$$

(حدّ مجموع تصاعد) $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac14}{1-\frac12}=\frac{\frac14}{\frac12}=\frac12$

۱۳ـ الف.

$$C(11,2)=\frac{11!}{(11-2)!2!}=\frac{11!}{9!2!}=\frac{10\times11}{2}=55$$

(کل طریقه‌ها)

$$C(7,2)=\frac{7!}{(7-2)!2!}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{6\times7}{2}=21$$

P (هردو سیاه) $=\frac{21}{55}$

ب. $C(7,1)=7$ ، $C(4,1)=4$ ، $C(11,2)=55$

P (یکی سیاه و یکی سفید) $=\frac{7\times4}{55}=\frac{28}{55}$

۱۴ـ یک n ضلعی دارای n رأس می‌باشد و قطر n ضلعی از وصل هردو رأس غیرمجاور n ضلعی به‌دست می‌آید. بنابراین، مسأله در واقع یک ترکیب ۲ از n است؛ ولی رابطهٔ $C(n,2)$ رأسهای مجاور را هم که برابر n است نیز شامل می‌شود، بنابراین:

$$C(n,2)-n=\frac{n!}{(n-2)!2!}-n$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}$$

$$=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

○ هندسهٔ ۲

۱ـ با فرض $a=2m-3$ ، $b=m+1$ و

$c = m - ۲$ نخست باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} ۲m - ۳ > ۰ \\ m + ۱ > ۰ \\ m - ۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{۳}{۲} \\ m > -۱ \\ m > ۲ \end{cases} \Rightarrow m > ۲ \quad (۱)$$

آن‌گاه با توجه به رابطهٔ (۱) باید داشته باشیم :

$$|b - c| < a < b + c$$

یا $|(m+۱) - (m-۲)| < ۲m - ۳ < (m+۱) + (m-۲)$

یا $|۳| < ۲m - ۳ < ۲m - ۱$

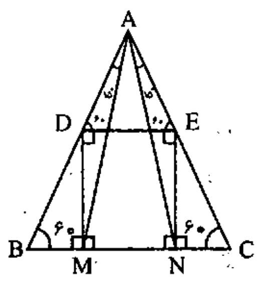
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲m - ۳ < ۲m - ۱ \\ ۲m - ۳ > |۳| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳ < -۱ \\ ۲m - ۳ > |۳| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} ۲m - ۳ > ۳ \Rightarrow m > ۳ \quad (۲) \\ ۲m - ۳ < -۳ \Rightarrow m < ۰ \quad (۳) \end{matrix}$$

(۳) با (۲) ناسازگار است ؛ بنابراین جواب مسأله $m > ۳$ است.

۲ـ دو مثلث DAB و DAC را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم $AB = AC$ ، AD مشترک و $DB > DC$. پس بنا به عکس قضیهٔ لولا $D\hat{A}B > D\hat{A}C$ است.

۳ـ الف. از همنهشتی دو مثلث ABM و ANC نتیجه می‌شود که $MB = NC$ است. درنتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMD و CNE همنهشتند. از آن‌جا $MD = NE$ ؛ یعنی دو نقطهٔ D و E از ضلع BC به یک فاصله‌اند. پس این دو نقطه، روی خطی موازی ضلع BC واقعند ؛ یعنی $DE \parallel BC$ است.



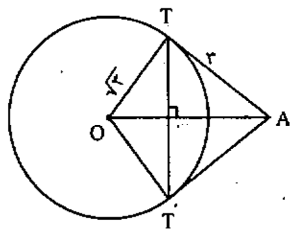
ب. چون $DE \parallel BC$ است، پس $A\hat{D}E = A\hat{E}D = ۶۰°$ ، لذا مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است ؛ یعنی (۱) $AD = DE$.

از طرفی $A\hat{D}M = ۹۰° + ۶۰° = ۱۵۰°$. پس $A\hat{M}D = ۱۵°$ ؛ یعنی مثلث AMD و به روش مشابه مثلث ANE متساوی‌الساقین می‌باشد. درنتیجه (۲) $AD = DM$ است. از آن‌جا نتیجه می‌شود که $EN = DE = MD = MN$ است ؛ یعنی چهارضلعی MDEN که ۴ زاویهٔ قائمه نیز دارد، مربع است.

پ. برای رسم مربع محاط در یک مثلث متساوی الاضلاع، از یک رأس آن و در درون مثلث، دو خط چنان رسم می‌کنیم که با دو ضلع مجاور به آن رأس، زاویهٔ $۱۵°$ بسازند. نقطه‌های برخورد این دو خط با ضلع روبه‌روی آن رأس، دو رأس از مربع مورد نظر است. از این دو نقطه، دو خط عمود بر این ضلع اخراج می‌کنیم تا دو ضلع دیگر را در دو نقطه که دو رأس دیگر مربع می‌باشند، قطع می‌کنند.

۴ـ الف. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT داریم :

$$OA = \sqrt{OT^۲ + AT^۲}$$
$$= \sqrt{۳ + ۹} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$



ب. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT داریم :

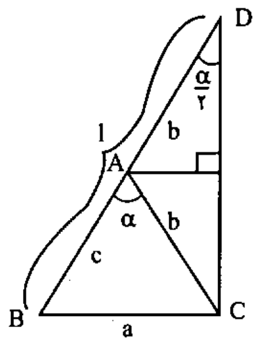
$$tg\,O\hat{A}T = \frac{OT}{AT} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = tg\,۳۰°$$
$$\Rightarrow O\hat{A}T = ۳۰° \Rightarrow T\hat{A}T' = ۶۰°$$

پ. مثلث TAT' متساوی‌الاضلاع است ؛ پس $TT' = AT = ۳$

ت. بنا به رابطهٔ طولی در دایره داریم :

$$AT'^۲ = AE.AF \Rightarrow (۳)^۲ = AE(AE + ۳) \Rightarrow$$
$$AE^۲ + ۳AE - ۹ = ۰ \Rightarrow AE$$
$$= \frac{-۳ \pm ۳\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow AE = \frac{-۳ + ۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۵ـ فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم. مثلث ADC

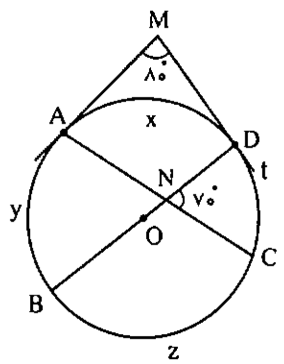


متساوی‌الساقین و $B\hat{D}C = \frac{\alpha}{۲}$ است. از طرفی $BD = BA + AD = AB + AC = b + c = l$ است. درنتیجه، مثلث BDC با معلوم بودن ضلع $BC = a$ ، ضلع $BD = b + c = l$ و $B\hat{D}C = \frac{\alpha}{۲}$ قابل رسم است. بنابراین، برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :

پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B و به شعاع $b + c = l$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ را در نقطهٔ D قطع کند. از D به B و C وصل و عمود منصّف پاره‌خط DC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این عمود منصّف با ضلع

DB رأس A از مثلث ABC است. از A به C وصل می‌کنیم، مثلث ABC رسم می‌شود. شرط امکان رسم مثلث ABC آن است که مثلث DBC قابل رسم باشد و این مثلث را وقتی می‌توان رسم نمود که کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ دایرهٔ به مرکز B و به شعاع $b+c=l$ را قطع کند. شرط تقاطع این دو را نیز با مقایسهٔ خط‌المرکزین و شعاعهای دو دایره می‌توان مشخص کرد.

۶ـ داریم :



$$\hat{M}=\frac{y+z+t-x}{2}\Rightarrow 80^\circ=\frac{y+z+t-x}{2}$$

$$\Rightarrow y+z+t-x=160^\circ \quad (1)$$

از طرفی $x+y+z+t=360^\circ \quad (2)$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $y+z+t=260^\circ$ درنتیجه، $x=100^\circ$ است. از طرفی $x+y=180^\circ$ می‌باشد، بنابراین $y=80^\circ$ است. برای محاسبهٔ z و t، داریم :

$$D\hat{N}C=\frac{y+t}{2}\Rightarrow 70^\circ=\frac{80^\circ+t}{2}\Rightarrow t=60^\circ$$

و از آن‌جا $z=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

۷ـ با توجه به تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-3)$ داریم :

$$x^2+y^2-2x+6y+1=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2-2(x+1)+6(y-3)+1=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-9=0$$

معادلهٔ تبدیل‌یافتهٔ منحنی داده شده

۸ـ با توجه به $A=(2,-3)$ ، $B=(3,2)$ ، $C=(0,4)$ و $D=(-5,-2)$ داریم :

الف. $R(x,y)=(y,-x)$ ، $A=(2,-3)$ ، $B=(3,2)\Rightarrow A'=(-3,-2),\ B'=(2,-3)$

ب. $H(x,y)=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$ ،

$C=(0,4)$ ، $D=(-5,-2)$

$\Rightarrow C'=(0,2)$ ، $D'=(-\frac{5}{2},-1)$

پ. $AB=\sqrt{(3-2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{26}$

$A'B'=\sqrt{(2+3)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{26}$

$CD=\sqrt{(-5-0)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{61}$

$C'D'=\sqrt{(-\frac{5}{2}-0)^2+(-1-2)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{4}+9}=\frac{1}{2}\sqrt{61}$

اندازهٔ پاره‌خط $A'B'$ برابر طول پاره‌خط AB است ؛ بنابراین دوران، طول پاره‌خطها را ثابت نگه می‌دارد. از طرفی $C'D'=\frac{1}{2}CD$ است ؛ بنابراین تجانس، طول پاره‌خطها را به نسبت تجانس، کوچک یا بزرگ می‌کند. در این مسأله $K=\frac{1}{2}$ است. بنابراین، $C'D'=\frac{1}{2}CD$ است.

جبر و احتمال

۱ـ

$n=1:\ 4=\frac{1(5\times1+3)}{2}\Rightarrow 4=4$ درست است

$n=k:\ 4+9+14+\ldots+(5k-1)$

$=\frac{k(5k+3)}{2}$

$n=k+1:\ 4+9+14+\ldots+(5k-1)+(5k+4)=\frac{(k+1)(5k+8)}{2}$

به دو طرف فرض استقرا عبارت $(5k+4)$ را می‌افزاییم :

$4+9+14+\ldots+(5k-1)+(5k+4)$

$=\frac{k(5k+3)}{2}+5k+4$

$=\frac{5k^2+3k+10k+8}{2}$

$=\frac{5k^2+13k+8}{2}=\frac{(k+1)(5k+8)}{2}$

بنابراین حکم استقرا برای هر $n\in N$ برقرار است.

۲ـ الف. نادرست است. اگر $x=\sqrt{2}$ و $y=3\sqrt{2}$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت :

$xy=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6\notin Q'$

ب. درست است. فرض کنیم $x=\frac{p_1}{q_1}$ و $y=\frac{p_2}{q_2}$ کــه $p_1,p_2,q_1,q_2\in Z$ و $q_1\neq0$ و $q_2\neq0$ بنابراین داریم :

$x+y=\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}$

$=\frac{\overbrace{p_1q_2+q_1p_2}^{\in Z}}{\underbrace{q_1q_2}_{\in Z-\{0\}}}=\frac{p}{q}\in Q$

۳ـ (فرض خلف) $n\in N$ و n عدد فرد نباشد، پس n عدد زوج است و داریم :

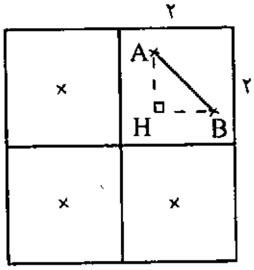
$n=2k\ (k\in Z)\Rightarrow n^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{\in Z}=2k'$

یعنی n^2 عددی زوج است و این متناقض با



فرض مسأله است، در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴ـ مربع به ضلع ۴ سانتیمتر را مانند شکل زیر به چهار قسمت، تقسیم می‌کنیم. اکنون اگر این پنج نقطه بخواهند چهارخانه را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک خانه موجود است که در آن بیش از یک نقطه قرار



دارد. بنابراین داریم:

$$\Delta AHB:\begin{cases} AH<2 \Rightarrow AH^2<4 \\ BH<2 \Rightarrow BH^2<4 \end{cases}$$

$$AH^2+BH^2<8 \Rightarrow AB^2<8$$

$$\Rightarrow AB<2\sqrt{2}$$

۵ـ الف.

$$B\subset A \Rightarrow A\cup B=A \Rightarrow (A\cup B)'=A'$$

$$\Rightarrow A'\cap B'=A' \Rightarrow A'\subset B'$$

ب.

$$(A\cap B\cap C)\cup(C-A)\cup(C-B)$$

$$=(A\cap B\cap C)\cup(C\cap A')\cup(C\cap B')$$

$$=(A\cap B\cap C)\cup[(A'\cup B')\cap C]$$

$$=[(A\cap B)\cup(A'\cup B')]\cap C$$

$$=[(A\cap B)\cup(A\cup B)']\cap C$$

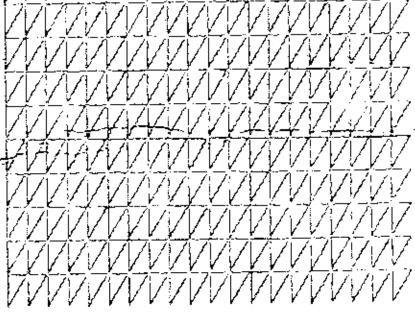
$$=U\cap C=C$$

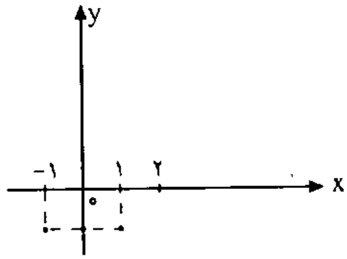
۶ـ

$$A=\{x|x\in \mathbb{Z},|x|<2\}=\{-1,0,1\}$$

$$B=\{2k+1|k\in \mathbb{Z},-2\le k<0\}=\{-1\}$$

$$A\times B=\{-1,0,1\}\times\{-1\}$$





$$=\{(-1,-1),(0,-1),(1,-1)\}$$

۷ـ $mRn \Leftrightarrow m^2+n=n^2+m$

۱ـ خاصیت بازتابی دارد ؛ زیرا :

$$mRm \Leftrightarrow m^2+m=m^2+m$$

۲ـ خاصیت تقارنی دارد ؛ زیرا :

$$mRn \Rightarrow m^2+n=n^2+m$$

$$\Rightarrow n^2+m=m^2+n \Rightarrow nRm$$

۳ـ خاصیت تعدی دارد ؛ زیرا :

$$\begin{cases} mRn \Rightarrow m^2+n=n^2+m \\ nRp \Rightarrow n^2+p=p^2+n \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2+n+n^2+p=n^2+m+p^2+n$$

$$\Rightarrow m^2+p=p^2+m \Rightarrow mRp$$

پس R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

$$[3]=\{x|xR3\} \;;xR3 \Rightarrow x^2+3$$

$$=3^2+x \Rightarrow x^2-x-6=0$$

$$\Rightarrow x=3 \;,\; x=-2$$

$$[3]=\{-2,3\}$$

۸ـ $4^{2n+1}+7 \overset{5}{\equiv} ?$

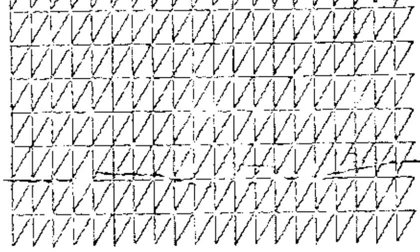
$$4^2 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow (4^2)^n \overset{5}{\equiv} (1)^n \Rightarrow 4^{2n} \overset{5}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 4\times 4^{2n} \overset{5}{\equiv} 4\times 1 \Rightarrow 4^{2n+1} \overset{5}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow 4^{2n+1}+7 \overset{5}{\equiv} 4+7=11 \Rightarrow 4^{2n+1}+7 \overset{5}{\equiv} 1$$

۹ـ الف.

S = { (ر , ۱) , (ر , ۲) , ... , (ر , ۶) , (پ , ۱)



, ... , (پ , ۶) } :

$n(S)=12$

ب.
(سکه رو باشد)

C = { (ر , ۱) , (ر , ۲) , ... , (ر , ۶) }

(تاس عدد ۳ باشد)

D = { (ر , ۳) , (پ , ۳) }

(سکه رو یا تاس ۳ باشد)

A = C∪D = { (ر , ۱) , (ر , ۲) , ... , (ر , ۶), (پ , ۳) }

ج.
(سکه پشت باشد)

E = { (پ , ۱) , ... , (پ , ۶) }

(سکه پشت و تاس ۳ باشد)

B = E∩D = { (پ , ۳) }

د. $A'\cup B'=(A\cap B)'$

A ∩ B = { (پ , ۳) }

(A ∩ B)′ = { (ر , ۱) , ... , (ر , ۶) , (پ , ۱), (پ , ۲) , (پ , ۴) , (پ , ۵) , (پ , ۶) }

۱۰ـ

$$n(S)=\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\times 7!}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$$

سیاه سفید قرمز

$$n(A)=\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{0}=10\times 3\times 1=30$$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

۱۱ـ

$$p(a)=\frac{1}{2}p(b)$$

$$p(b)=\frac{1}{3}p(c)$$

با فرض این که $p(c)=x$ ؛ خواهیم داشت :

$$p(b)=\frac{1}{3}x \;;\; p(a)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}x$$

$$p(a)+p(b)+p(c)=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x+x=1 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$p(c)=\frac{2}{3}\ ;\ p(b)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\ ;$$

$$p(a)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

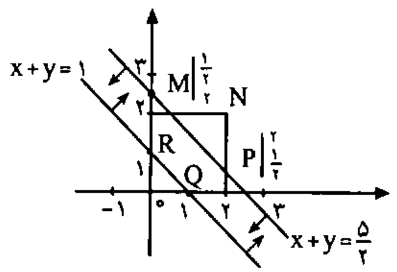
الف. $p(a')=1-p(a)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

ب. $p(b)+p(c)=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

۱۲ـ $a(S)=2^2=4$

$x,y\in[0,2]$

$1\le x+y\le\frac{5}{2}$



$$\Rightarrow\begin{cases} x+y\le\frac{5}{2}\ ;\ x+y=\frac{5}{2}\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline y & \frac{5}{2} & 0 \end{array} \\ x+y\ge 1\ ;\ x+y=1\ ;\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$$

$$a(A)=a(s)-S_{\overset{\triangle}{ORQ}}-S_{\overset{\triangle}{MNP}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ORQ}}=\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$$

برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ M باید دو خط MP و MN را با یکدیگر قطع دهیم:

$$\begin{cases} y=2 \\ x+y=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \Rightarrow MN=\frac{3}{2}$$

برای محاسبهٔ مختصات نقطه P باید دو خط NP و MP را با یکدیگر قطع دهیم:

$$\begin{cases} x=2 \\ x+y=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left|\begin{matrix}2\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right. \Rightarrow NP=\frac{3}{2}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{8}$$

$$a(A)=4-\frac{1}{2}-\frac{9}{8}=\frac{19}{8};\ \ p(a)=\frac{\frac{19}{8}}{4}=\frac{19}{32}$$

۱۳ـ چون $A\cup B'=(A'\cap B)'$ بنابراین داریم:

$$1-P(A\cup B')=1-P(A'\cap B)'=P(A'\cap B)$$

$$=P(A').P(B)$$

(چون A' و B' دو پیشامد مستقل هستند.)

حسابان ۲

۱ـ الف.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.\quad M\left|\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right.$ می‌نیمم نسبی

$$A\in f\Rightarrow -1=0+0+c\Rightarrow c=-1$$

$$M\in f\Rightarrow -3=a+b+c\Rightarrow -3=a+b-1$$

$$\Rightarrow a+b=-2$$

$$f'(x)=2ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 2a+b=0$$

$$-1\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=0 \end{cases}\Rightarrow a=2\ ,\ b=-4$$

ب. فرض می‌کنیم نقطهٔ A به طول x_0 نقطهٔ تماس باشد. معادلهٔ مماس بر منحنی را در نقطهٔ A واقع بر منحنی می‌نویسیم:

$$f(x)=2x^2-4x-1\Rightarrow f'(x)=4x-4$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-2x_0^2+4x_0+1=(4x_0-4)(x-x_0)$$

معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ A

حال مختصات نقطهٔ $P(0,-3)$ را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$-3-2x_0^2+4x_0+1=(4x_0-4)(0-x_0)$$

$$-2-2x_0^2+4x_0=-4x_0^2+4x_0$$

$$2x_0^2=2\Rightarrow x_0^2=1\Rightarrow x_0=\pm1$$

طولهای نقاط تماس

این طولها را در معادلهٔ مماس نقطهٔ A قرار می‌دهیم:

$$x_0=1\Rightarrow y-2+4+1=0(x-1)\Rightarrow y=-3$$

معادلهٔ یک مماس

$$x_0=-1\Rightarrow y-2-4+1=-8(x+1)$$

$\Rightarrow y=-8x-3$ معادلهٔ مماس دیگر

۲ـ اولاً: تابع f باید در $x=1$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1^+}(ax^2+bx)=\lim_{x\to1^-}3\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow a+b=3$$

ثانیاً: باید مشتق راست در نقطهٔ ۱ مساوی مشتق چپ در نقطهٔ ۱ باشد.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax^2+bx-a-b}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(ax+a+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}(ax+a+b)=2a+b=f'_+(1)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{3\sqrt[3]{x^2}-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{3(\sqrt[3]{x^2}-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{3(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{3(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{3(2)}{1+1+1} = 2$$

$= f'_-(1)$

$$-1\begin{cases} 2a+b=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=-1\ ,\ b=4$$

۳ـ

$f(x) = \mathrm{Arccos}\,4x$

$$f'(x) = \frac{-4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

$$x=\frac{1}{8} \Rightarrow y = \mathrm{Arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}\frac{1}{8}\\ \frac{\pi}{3}\end{matrix}\right.$$

$$x=\frac{1}{8} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{16}{64}}} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-4}{\sqrt{3}} = m_{\text{مماس}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{8}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{3}$$

معادلهٔ خط قائم بر منحنی f در نقطهٔ A

۴ـ

$$f(x) = \mathrm{Ln}\frac{2-x}{2+x}$$

دامنهٔ تابع: $\frac{2-x}{2+x} > 0 \Rightarrow x = 2, -2$

$\Rightarrow D_f = (-2, 2)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'}{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{\frac{-4}{(2+x)^2}}{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{4}{4-x^2} < 0$$

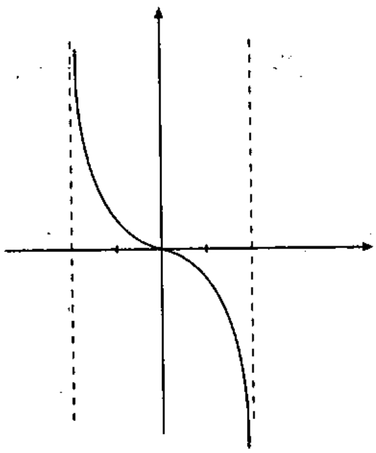
تابع نزولی اکید است.

$x \to -2^+ \Rightarrow y \to +\infty$

$x \to 2^- \Rightarrow y \to -\infty$

x	-2^+		0		2^-
f'(x)		−	‖	−	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

a



۵ـ

$$4\cos^2 x - 2(\sqrt{2}+1)\cos x + \sqrt{2} = 0$$

$\cos x = y$

$$4y^2 - 2(\sqrt{2}+1)y + \sqrt{2} = 0$$

$a = 4,\ b' = -(\sqrt{2}+1)\ ,\ c = \sqrt{2}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1 \pm (\sqrt{2}-1)}{4} \begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

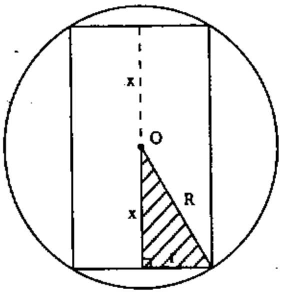
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in Z$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in Z$$

۶ـ نقطهٔ O مرکز کره است و ارتفاع استوانه $h = 2x$ ، در مثلث قائم‌الزاویه شکل داریم :



$x^2 + r^2 = R^2$

$x^2 + r^2 = 24 \Rightarrow r^2 = 24 - x^2$

حجم استوانه $= \pi r^2.h = \pi(24 - x^2)(2x)$

$V = 2\pi(24x - x^3)$

$V'_x = 2\pi(24 - 3x^2) = 0$

$24 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ جواب قابل قبول

$V_{Max} = 2\pi(48\sqrt{2} - 16\sqrt{2})$

$= 2\pi(32\sqrt{2}) = 64\pi\sqrt{2}$

۷ـ

$\log 2 = 0/301$

$\log 3 = 0/471$

$$\log\sqrt{2}.\sqrt[3]{3} = \log 2^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 3^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 = \frac{0/301}{2} + \frac{0/471}{3}$$

$=۰/۱۵۰۵+۰/۱۵۷=۰/۳۰۷۵$

۸ـ قسمت اول :

$I=\int_{-۲}^{۱}(\lfloor x\rfloor+|۳x-۱|)dx$

$=\int_{-۲}^{۱}\lfloor x\rfloor dx+\int_{-۲}^{۱}|۳x-۱|dx$

$=\int_{-۲}^{-۱}-۲dx+\int_{-۱}^{۰}-۱dx+\int_{۰}^{۱}۰dx+$

$\int_{-۲}^{\frac{۱}{۳}}(۱-۳x)dx+\int_{\frac{۱}{۳}}^{۱}(۳x-۱)dx=$

$(-۲x)_{-۲}^{-۱}+(-x)_{-۱}^{۰}+۰+(x-\frac{۳x^۲}{۲})_{-۲}^{\frac{۱}{۳}}+$

$(\frac{۳x^۲}{۲}-x)_{\frac{۱}{۳}}^{۱}=۲-۴+(۰)-(۱)+(\frac{۱}{۳}-\frac{\frac{۱}{۳}}{۲})-$

$(-۲-\frac{۱۲}{۲})+(\frac{۳}{۲}-۱)-(\frac{\frac{۱}{۳}}{۲}-\frac{۱}{۳})$

$=-۳+(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶})+۸+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}$

$=۵+\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=۵+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳۵}{۶}$

قسمت دوم :

$I_۲=\int_۰^۳\frac{dx}{۹+x^۲}=\int_۰^۳\frac{dx}{۳^۲+x^۲}$

$=(\frac{۱}{۳}\text{Arctan}\frac{x}{۳})_۰^۳$

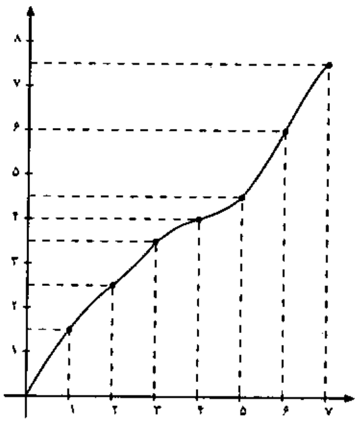
توجه: داریم :

$\int\frac{dx}{a^۲+x^۲}=\frac{۱}{a}\text{Arctan}\frac{x}{a}+c$

$-I=\frac{۱}{۳}(\text{Arctan}۱-\text{Arctan}۰)=\frac{۱}{۳}(\frac{\pi}{۴}-۰)=\frac{\pi}{۱۲}$

۹ـ با توجه به نمودار مساحت زیر، منحنی تابع f محدود به محور xها را از ۰ تا x به ازای xهای مختلف محاسبه کرده، در جدول زیر می‌نویسیم :

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
A(x)	۰	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴	۴/۵	۶	۷/۵



○ ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی

۱ـ اگر فرض کنیم G دارای x رأس از درجهٔ ۴ و y رأس ازدرجهٔ ۵ باشد، در این صورت طبق فرض داریم :

I) $۴x+۵y=$ مجموع درجه‌های رأسها (

$=۲q=۲\times۱۸=۳۶$

II) $x+y=$ مرتبهٔ G $=p=۸$

$\Rightarrow\begin{cases}۴x+۵y=۳۶\\ x+y=۸\end{cases}\Rightarrow y=۴\ ,\ x=۴$ (-۴)

۲ـ فرض کنیم، $a_۱$ ، $a_۱+d$ ، $a_۱+۲d$ ، ... و $a_۱+nd$ دنبالهٔ درجهٔ رأسهای گراف G باشند. می‌دانیم ماکزیمم درجهٔ رأسهای هرگراف، حداکثر می‌تواند از تعداد رأسها یکی کمتر باشد ؛ یعنی :

$a_۱+nd\le\underbrace{(n+۱)}_{\text{تعداد رأسها}}-۱\Rightarrow n(۱-d)\ge a_۱$

$\Rightarrow ۰\le\frac{a_۱}{n}\le ۱-d$

$\Rightarrow ۱-d\ge۰\Rightarrow d\le۱\Rightarrow d=۰$ یا $d=۱$

که اگر $d=۱$ دنبالهٔ درجهٔ رأسها از $(n+۱)$ عدد صحیح متوالی تشکیل می‌شود و چون باید در یک گراف حداقل دو رأس همدرجه وجود داشته باشد (چرا؟)، ممکن نیست ؛ پس باید $d=۰$.

۳ـ اگر فرض کنیم در حالت کلی، $a=bq+r$ با توجه به فرض مسأله داریم :

$a=۴b+۱۵$ ①

فرض کنیم x واحد به مقسوم علیه اضافه شده $\Rightarrow a=۴(b+x)+r_۱$

$\Rightarrow a=۴b+۴x+r_۱$ ②

$\overset{①②}{\Rightarrow} ۴b+۱۵=۴b+۴x+r_۱$

$\Rightarrow r_۱=۱۵-۴x\ ,\ r_۱\ge۰$

$\Rightarrow ۱۵-۴x\ge۰\Rightarrow ۴x\le۱۵\Rightarrow \frac{۱۵}{۴}$

$\Rightarrow x=۳$

(در حالت کلی، اگر در یک تقسیم، خارج قسمت q وباقیمانده r باشد، حداکثر $\left[\frac{r}{q}\right]$ واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.)

۴ـ فرض کنیم $d=(a,b)$ که با توجه به قضیهٔ نرو و نتایج حاصل از آن، ثابت می‌شود :

$(a,b)=d\Leftrightarrow(na,nb)=nd=n(a,b)$

حال فرض کنیم $c=[a,b]$. ثابت می‌کنیم $[na,nb]=nc$ ،

طبق قضیه داریم :

$\frac{ab}{(a,b)}=[a,b]=c\Rightarrow\frac{na.nb}{n(a,b)}=nc$

$\Rightarrow\frac{na.nb}{(na,nb)}=nc$ ①

و می‌دانیم طبق قضیه : $\frac{na.nb}{(na,nb)}=[na,nb]$ ②

①,② $\Rightarrow[na,nb]=nc$

برای اثبات عکس مسأله، به طریق مشابه عمل کنید.

۵ـ $(۱۰!,۶^۹)=(۱۰!,۲^۹\times۳^۹)\Rightarrow$

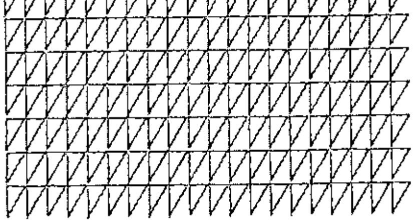
تعداد عاملهای ۲ و ۳ را در !۱۰ بیابیم

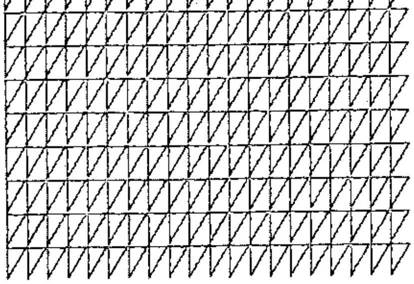
تعدادعاملهای عدد۲در!۱۰

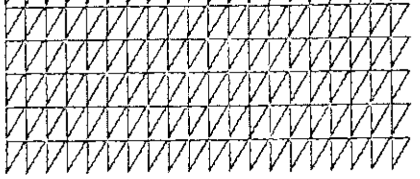
$=[\frac{۱۰}{۲}]+[\frac{۱۰}{۴}]+[\frac{۱۰}{۸}]=۵+۲+۱=۸$

تعدادعاملهای عدد۳در!۱۰

$=[\frac{۱۰}{۳}]+[\frac{۱۰}{۹}]=۳+۱=۴$







$\Rightarrow (10!, 2^9 \times 3^9) = (2^8 \times 3^4, 2^9 \times 3^9)$

$= 2^8 \times 3^4 = 2^a \times 3^b$

$\Rightarrow a = 8\ ,\ b = 4 \Rightarrow 8x + 4y = 5c - 11$

شرط وجودجواب :

$(8,4) | 5c - 11 \Rightarrow 4 | 5c - 11$

$\Rightarrow 5c - 11 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 5c \overset{4}{\equiv} 11 \Rightarrow 5c \overset{4}{\equiv} 11 + 4$

$\Rightarrow 5c \overset{4}{\equiv} 15 = 5 \times 3 \Rightarrow c \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow \boxed{c = 4k + 3}$

(**تذکر**: درحالت کلّی، تعداد عاملهای عدد اولِ p در !n از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :)

$[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \dots + 0 + 0 + \dots$

۶ـ برای باقیماندهٔ تقسیم عدد 21^{1378} بر ۱۷، از قضیهٔ فرما استفاده می کنیم.

$(17,21) = 1 \Rightarrow 21^{16} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow (21^{16})^{86} \times 21^2$

$\overset{17}{\equiv} 1^{86} \times 21^2 \Rightarrow 21^{1378} \overset{17}{\equiv} 21^2$

$21 \overset{17}{\equiv} 4 \Rightarrow 21^2 \overset{17}{\equiv} 4^2 = 16 \Rightarrow r = 16$ و

برای نمایش باقیماندهٔ تقسیم بر ۸ داریم :

$21 \overset{8}{\equiv} (-3)$ و $(-3)^2 \overset{8}{\equiv} 1 \Rightarrow 21^2 \overset{8}{\equiv} 1$

$\Rightarrow (21^2)^{689} \overset{8}{\equiv} 1 \Rightarrow 21^{1378} \overset{8}{\equiv} 1$

۷ـ برای قرار دادنِ مهرهٔ اول، ۴ راه انتخاب داریم و برای مهرهٔ دوم نیز ۴ راه انتخاب و ... و برای مهرهٔ ششم نیز ۴ راه انتخاب داریم (می توانیم همهٔ مهره‌ها را در یک جعبه قرار دهیم)، پس طبق اصل شمارش (اصل ضرب) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$ راه انتخاب داریم.

۸ـ در این مسأله، بر خلاف مسألهٔ قبل که بحث توزیع n شیئی در k جای خالی است، می‌خواهیم n گل را از بین k نوع گل انتخاب کنیم، که طبق قضیهٔ کتاب، برابر است با :

جواب مسأله $\binom{n + (k-1)}{k-1} \Rightarrow \binom{6+3}{3} = \binom{9}{3}$

۹ـ پیشامد قرمز بودنِ مهره از جعبهٔ D را A_1 می نامیم و فرض کنیم :

پیشامد این که مهرهٔ انتخابی از D، از جعبهٔ A آمده باشد $= B_1$

پیشامد این که مهرهٔ انتخابی از D، از جعبهٔ B آمده باشد $= B_2$

پیشامد این که مهرهٔ انتخابی از D، از جعبهٔ C آمده باشد $= B_3$

طبق فرمول احتمال کل، داریم :

$p(A_1) = p(A_1/B_1) \times p(B_1) + p(A_1/B_2) \times p(B_2)$

$= p(A_1/B_3) \times p(B_3)$

(احتمال این که قرمز باشد، به شرط این که بدانیم از جعبهٔ A بوده)

$p(A_1/B_1) = \frac{4}{7}$

$p(A_1/B_2) = \frac{3}{8}$ و $p(A_1/B_3) = \frac{4}{8}$

(احتمال این که مهرهٔ برداشته شده از A آمده باشد)

$p(B_1) = \frac{3}{12}$

$p(B_2) = \frac{5}{12}$ و $p(B_3) = \frac{4}{12}$

$\Rightarrow p(A_1) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{12} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{12} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{12}$

۱۰ـ در پرتاب دو تاس، فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو (زوج مرتب) است و مقادیر بُرد تابع x از ۲ تا ۱۲ تغییر می‌کند ؛ زیرا، $x(1,1) = 1 + 1 = 2$ و $x(6,6) = 6 + 6 = 12$. پس خواهیم داشت :

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در پرتاب دو تاس، احتمال این که مجموع دو تاس ۷ باشد، از هر عدد دیگری بیشتر است.

○ دیفرانسیل و انتگرال ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ـ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 5$

روش اول: اگر $x \to -\infty$ ، آن‌گاه $y \to -\infty$ ، پس نمودار این تابع از ربع سوم محورها شروع می‌شود. چنانچه $x \to +\infty$ ، آن‌گاه $y \to +\infty$ ، پس نمودار تابع به ربع اول ختم می‌شود. چون $f'(x) = 3x^2 - 6x + 10 > 0$ ؛ زیرا $\Delta < 0$ و $a > 0$ پس تابع اکیداً صعودی است (اکسترمم ندارد). پس نمودار تابع از ربع سوم شروع می‌شود و به ربع اول ختم می‌شود و تابع صعودی اکید هم هست ؛ پس نمودار آن، محور xها را دقیقاً در یک نقطه، قطع می کند.

روش دوم: $f(0) = -5$ و $f(1) = 3$ پس معادله یک ریشه بین (۰،۱) دارد ؛ یعنی $0 < x < 1$.

از طرفی :

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 10 = 3[x^2 - 2x] + 10$

$f'(x) = 3[(x-1)^2 - 1] + 10$

$= 3(x-1)^2 + 7 > 0$

فرض می‌کنیم معادلهٔ $f(x) = 0$ در بازهٔ (۰،۱) دو ریشهٔ حقیقی متمایز x_1 و x_2 داشته باشد ؛ پس $f(x_1) = f(x_2) = 0$. بنا به قضیهٔ رُل، برای حداقل یک c بین x_1 و x_2 ، باید داشته باشیم $f'(c) = 0$ ؛ درحالی‌که $f'(x) > 0$ است و این غیرممکن است. پس معادلهٔ $f(x) = 0$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۲ـ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos^2 x + \frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ پیوسته و در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ مشتق‌پذیر است، پس : c‌ای که $-\pi < c < \pi$ وجود دارد که :

$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi + \pi}$

$f'(x) = -2\sin x \cos x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin 2x$

$\Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2} - \sin 2c$

$\frac{1}{2} - \sin 2c = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi + \pi} = \frac{1 + \frac{\pi}{2} - (1 - \frac{\pi}{2})}{2\pi}$

$= \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - \sin 2c = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2c = 0 \Rightarrow 2c = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$c = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow c = -\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}$

۳ـ $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$

$x^2-2x=0\Rightarrow x=0,2$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

$x\to-\infty\Rightarrow \lim f(x)=\lim(x+(x-1))$

$=\lim(2x-1)=-\infty$

معادلهٔ مجانب مایل $\Rightarrow y=2x-1$

توجه: هم‌ارزی رادیکالها:

$$\sqrt[p]{ax^p+bx^{p-1}+...}\sim\pm\sqrt[p]{a}\,(x+\frac{b}{ap}) \quad \text{زوج } p,\ x\to\pm\infty$$

اگر p فرد باشد، سمت راست (±) لازم نیست.

$x\to+\infty\Rightarrow \lim f(x)=\lim(x-(x-1))=1$

مجانب افقی $\Rightarrow y=1$

$$y'=1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

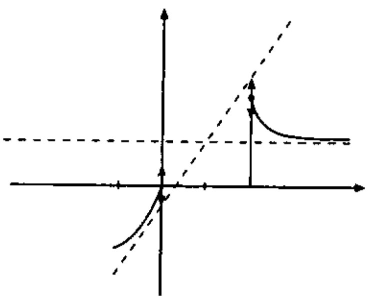
$$=\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}=0$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x}=x-1$

$\Rightarrow x^2-2x=x^2-2x+1\Rightarrow 0\neq 1$

یعنی $f'(x)=0$ ریشه ندارد.

x	$-\infty$		0	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	∞	∞	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	2	↘	1



۴ـ بنا به فرض داریم:

$x+y=S$ ، پس $y=S-x$

$P=x.y\Rightarrow P=x(S-x)\Rightarrow P=-x^2+Sx$

در تابع P قرار می‌دهیم.

$P'_x=-2x+S=0\Rightarrow x=\frac{S}{2}$

$\text{Max } P=-\frac{S^2}{4}+\frac{S^2}{2}=\frac{S^2}{4}$

۵ـ می‌دانیم:

$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ یا $\sin ax\sim ax \ (x\to0)$

الف.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2.\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\frac{0}{0}$$

دستور هوپیتال:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-(1+\tan^2x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan^2x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{3x^2\cos^2x}\sim\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{3x^2\cos^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{3\cos^2x}=-\frac{1}{3}$$

ب.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(x.\tan x-\frac{\pi}{2}.\sec x)=\infty-\infty$$

وقتی $x\to a$ و ابهام مسأله به‌صورت $+\infty-\infty$ باشد، با مخرج مشترک‌گیری، ابهام مسأله به $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شود.

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\frac{x\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x})$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\frac{0}{0}$$

دستور هوپیتال:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(\sin x+x\cos x)}{-2\sin x}=\frac{2(1+0)}{-2(1)}=-1$$

۶ـ محاسبهٔ مقدار تقریبی $(0/9)^3+\sqrt[3]{0/9}$

$f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}\Rightarrow$

$$f'(x)=3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad \begin{cases}x=1\\ \Delta x=-\frac{1}{10}\end{cases}$$

$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).\Delta x$

$(x+\Delta x)^3-\sqrt[3]{(x+\Delta x)}=x^3+\sqrt[3]{x}$

$+(3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}).\Delta x$

$$(1-\frac{1}{10})^3-\sqrt[3]{(1-\frac{1}{10})}=1+1+(3+\frac{1}{3})(-\frac{1}{10})$$

$0/9^3-\sqrt[3]{0/9}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

۷ـ $f(x)=x^2-6\Rightarrow f'(x)=2x$

فرض می‌شود $x_1=2$

در فرمول نیوتن داریم:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad x_1=2$$

$$x_2=2-\frac{-2}{4}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow x_2=\frac{5}{2}$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad x_2=\frac{5}{2}$$

$$x_3=\frac{5}{2}-\frac{0/25}{5}=2/5-0/05=2/45$$

پس ریشهٔ تقریبی مثبت معادلهٔ $x^2-6=0$ ، ۲/۴۵ است.

۸ـ $\Delta x=\frac{1}{n}$

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{i^2}{n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}1-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+2}{6n^2} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

۹ـ اگر m مینیمم مطلق تابع f و M ماکزیمم مطلق تابع f در بازهٔ [a,b] باشد، داریم:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$f(x) = \frac{1}{3+x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2}{(3+x^3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \notin (1,3)$$

$$f(1) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} = M$$

$$f(3) = \frac{1}{3+27} = \frac{1}{30} = m$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\frac{1}{30}(3-1) \le \int_1^3 \frac{dx}{3+x^3} \le \frac{1}{4}(3-1)$$

$$\frac{1}{15} \le \int_1^3 \frac{dx}{3+x^3} \le \frac{1}{2}$$

بازهٔ مورد نظر $[\frac{1}{15}, \frac{1}{2}]$ است.

۱۰ـ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{2-\sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{2-(1-\cos^2 2x)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2 2x}$$

$$\begin{cases} u = \cos 2x \Rightarrow du = -2\sin 2x dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 ,\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{2}du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}(\text{Arctan}\, u)_1^0$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{Arctan}\, 0 - \text{Arctan}\, 1)$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \sin^2 2x = 4\sin^2 x.\cos^2 x \end{cases}$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 2x} dx = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cot^2 2x)dx$$

$$= 4(-\frac{1}{2}\cot 2x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2(\cot 2x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -2(\cot\frac{2\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{2})$$

$$= -2(-\cot\frac{\pi}{3} - 0)$$

$$= -2(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۱ـ

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx ,$$

$$x = \pi - u \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = \pi \\ x = \pi \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{\pi}^0 (\pi-u).f(\sin(\pi-u))(-du)$$

$$= -\int_{\pi}^0 (\pi-u).f(\sin u)du$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi-u)f(\sin u)du$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \pi f(\sin u)du - \int_0^{\pi} u f(\sin u)du$$

u را به x تبدیل می‌کنیم:

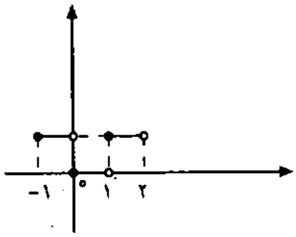
$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

○ ریاضی عمومی ۲ پیش‌دانشگاهی

۱ـ ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[|x|]$ را در فاصلهٔ $[-1,2]$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع، ملاحظه می‌کنیم که این تابع در نقطهٔ $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۲ـ چون اکسترممهای مطلق این تابع، می‌تواند در نقاط بحرانی یا نقاط به طولهای ۳- و ۱ باشد، بنابراین، ابتدا مقادیر تابع را به ازای عددهای بحرانی f روی $[-3,1]$ به‌دست می‌آوریم و سپس مقادیر عددی $f(-3)$ و $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x+2)^2} \ ;$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$$

نقطهٔ بحرانی $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \in [-3,1]$

$$x=-2 \Rightarrow f(-2)=0$$

$$x=-3 \Rightarrow f(-3) = \sqrt[3]{(-3+2)^2} = 1$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = \sqrt[3]{(1+2)^2} = \sqrt[3]{9}$$

ماکزیمم مطلق $\text{Max}\{0,1,\sqrt[3]{9}\} = \sqrt[3]{9}$

مینیمم مطلق $\text{Min}\{0,1,\sqrt[3]{9}\} = 0$

۳ـ ابتدا محل برخورد مجانبهای f را تعیین می‌کنیم:

مجانب افقی $\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to 2 \end{cases} \Rightarrow y=2$

مجانب قائم $\begin{cases} y \to \pm\infty \\ x \to 1 \end{cases} \Rightarrow x=1$

بنابراین، محلّ برخورد مجانبها نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ است.

اکنون برای این که ثابت کنیم نقطهٔ A مرکز تقارن منحنی است، مبدأ مختصات را به نقطهٔ A منتقل می‌کنیم:

$$\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases};\ \begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases};\ \begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}$$

$$Y+2=\frac{2(X+1)+1}{(X+1)-1}\Rightarrow Y=\frac{3}{X}$$

با تبدیل $X\to -X$ و $Y\to -Y$، ملاحظه می‌کنیم که ضابطهٔ تابع f تغییر نمی‌کند؛ بنابراین مبدأ مختصات جدید یا همان نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ مرکز تقارن تابع f است.

۴ـ $f(x)=\frac{16}{(x^2+1)^2}\ ;\ D_f=\mathbb{R}$

مجانب افقی $\begin{cases}x\to\pm\infty\\y\to 0\end{cases}\Rightarrow y=0$

چون $x^2+1\neq 0$، بنابراین منحنی نمایش تابع f مجانب قائم ندارد.

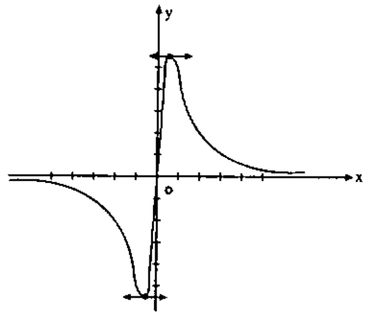
$$y'=\frac{16(x^2+1)^2-4x(x^2+1)\times 16x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{16(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	y
$-\infty$	0
$+\infty$	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-3\sqrt{3}$
0	0

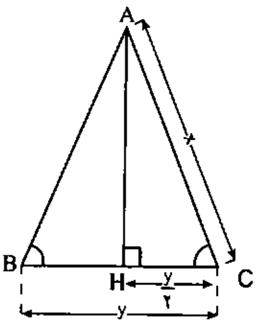
x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'		−	0	+		+	0	−	
f	0	↘	$-3\sqrt{3}$ Min	↗	0	↗	$3\sqrt{3}$ Max	↘	0



۵ـ اگر طول ساقهای مثلث متساوی‌الساقین را x متر و قاعدهٔ آن را y متر درنظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$A\overset{\Delta}{H}C: AH^2=AC^2-HC^2\Rightarrow AH^2=x^2-\frac{y^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$$



معادلهٔ اوّلیه: $S=\frac{1}{2}(AH\times BC)=\frac{y}{4}\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$

معادلهٔ ثانویه: $x+x+y=18\Rightarrow x=\frac{18-y}{2}$

اکنون اگر در معادلهٔ اوّلیه قرار دهیم: $x=\frac{18-y}{2}$، دراین صورت، معادلهٔ اوّلیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$S=\frac{y}{2}\sqrt{(\frac{18-y}{2})^2-\frac{y^2}{4}}\Rightarrow S^2=f(y)$$

$$=\frac{y^2}{4}\left[(\frac{18-y}{2})^2-\frac{y^2}{4}\right]$$

$$f(y)=\frac{81}{4}y^2-\frac{9}{4}y^3$$

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{27}{4}y(6-y)=0$$

$$\Rightarrow y=0\ ,\ y=6$$

y	$-\infty$		0		6		$+\infty$
f'		−		+		−	
f		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $y=6$ دارای ماکزیمم نسبی است، بنابراین داریم:

$$y=6\ ,\ x=\frac{18-y}{2}\Rightarrow x=6$$

بنابراین، بزرگترین مساحت مثلث، برابر است با:

$$S=\frac{y}{4}\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}=\frac{6}{4}\sqrt{36-\frac{36}{4}}=\frac{18\sqrt{3}}{4}$$

۶ـ

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0$$

$$\Rightarrow C_1(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})=(3,2)$$

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{36+16-36}=2$$

$$x^2+y^2-2x-2y-7=0$$

$$\Rightarrow C_2(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})=(1,1)$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+28}=3$$

$$C_1C_2=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

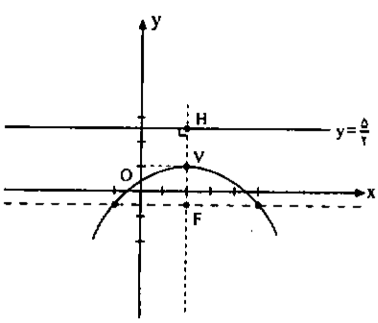
با مقایسهٔ r_1، r_2 و C_1C_2 داریم:

$$|3-2|<\sqrt{5}<3+2\Rightarrow|r_2-r_1|<C_1C_2<r_2+r_1$$

پس دو دایره، یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۷ـ با مشخص کردن کانون در صفحهٔ مختصات و رسم خطّ هادی، ملاحظه می‌کنیم که سهمی رو به پایین باز است:

$$FH=2P=3\Rightarrow P=\frac{3}{2}$$

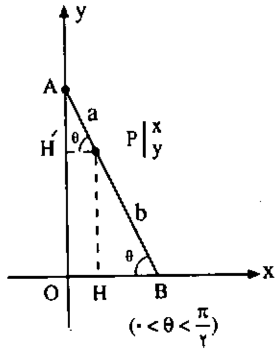


$F\begin{cases}\alpha=۲\\ \beta-P=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\beta-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\beta=۱\end{cases}$;

$V\begin{cases}\alpha=۲\\ \beta=۱\end{cases}$ (مختصات رأس سهمی)

$(x-\alpha)^۲=-۴P(y-\beta)\Rightarrow(x-۲)^۲=۶(y-۱)$

۸ـ



$P\begin{cases}x=OH=OB-HB=(a+b)\cos\theta-b\cos\theta=a\cos\theta\\ y=OA-H'A=(a+b)\sin\theta-a\sin\theta=b\sin\theta\end{cases}$

$P\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{a}=\cos\theta\\ \frac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}\;;\;۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$

$\Rightarrow\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$

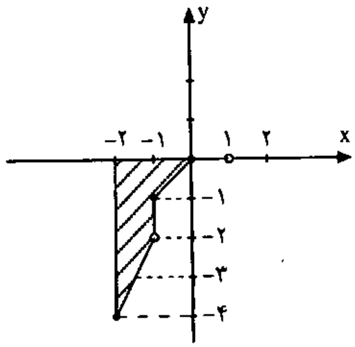
$\Rightarrow\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$

چون $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$، پس مکان هندسی نقطهٔ P، $\frac{۱}{۴}$ بیضی است.

۹ـ الف. ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=[x]|x|$ را در فاصلهٔ $[-۲,۱)$ رسم می‌کنیم :

$-۲\le x<-۱\Rightarrow[x]=-۲\Rightarrow y=-۲(-x)$

$=۲x\;;\;\begin{array}{c|cc}x&-۲&-۱\\ \hline y&-۴&-۲\end{array}$



$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow y=-۱(-x)$

$=x\;;\;\begin{array}{c|cc}x&-۱&۰\\ \hline y&-۱&۰\end{array}$

$۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow y=۰$

چون این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ ناپیوسته است، بنابراین داریم :

$\int_{-۲}^{۱}[x]|x|dx=\int_{-۲}^{-۱}[x]|x|dx+\int_{-۱}^{۱}[x]|x|dx$

$=-(\frac{۴+۲}{۲}\times۱)+\left[-(\frac{۱\times۱}{۲})\right]=-\frac{۷}{۲}$

ب. $F(x)=\int\frac{۴\sin^۲x}{۱+\cos x}dx$

$=\int\frac{۴\sin^۲x}{۱+\cos x}\times\frac{۱-\cos x}{۱-\cos x}dx$

$F(x)=۴\int\sin x\,dx-۴\int\sin x\cos x\,dx$

$=۴\int\sin x\,dx-۲\int\sin۲x\,dx$

$=-۴\cos x+\cos۲x+c$

$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۴\sin^۳x}{۱+\cos x}dx=-۴\cos x+\cos۲x+c\Big]_۰^{\frac{\pi}{۴}}$

$=-۲\sqrt{۲}+۳$

۱۰ـ ابتدا طول محلّ برخورد دو منحنی را به‌دست می‌آوریم :

$\begin{cases}y=x^۳+۲\\ y=۲x^۲-x+۲\end{cases}\Rightarrow x^۳+۲=۲x^۲-x+۲$

$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\ b=۱\end{cases}$

$S=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$

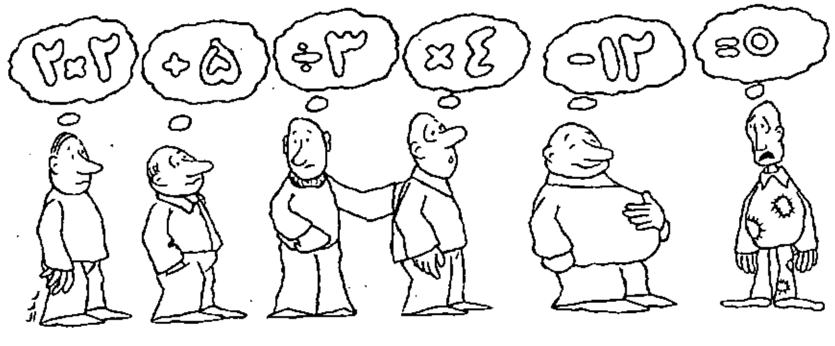
$=\left|\int_۰^۱(x^۳+۲-۲x^۲+x-۲)dx\right|$

$=\left|\int_۰^۱(x^۳-۲x^۲+x)dx\right|$

$\int(x^۳-۲x^۲+x)dx=\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۲}{۳}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+c$

$S=\left|\int_۰^۱(x^۳-۲x^۲+x)dx\right|$

$=\left|\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۲}{۳}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+c\Big]_۰^۱\right|=\frac{۱}{۱۲}$





جوابهای تفریح اندیشه

○ پاسخ ۱ :

در مورد حل این مسأله با توجه به عددهای داده شده (۰/۵ لیتر، $\frac{۱}{۴}$ لیتر، ۰/۵ لیتر) نیازی به محاسبه نیست. در واقع پس از انجام عملیات جابه‌جایی، در ظرف A همان مقدار مایع وجود دارد که قبل از عملیات جابه‌جایی وجود داشت، و این مطلب در مورد ظرف B نیز صدق می‌کند و حجم آب و شیر جابه‌جا شده یکسان است.

بنابراین پس از انجام عملیات جابه‌جایی مقدار شیری که در ظرف A موجود است با مقدار آبی که در ظرف B وجود دارد با هم برابرند.

نکته ـ به وسیلهٔ محاسبه نیز ثابت می‌شود که پس از انجام اعمال جابه‌جایی با شرطهای داده شده، مقدار شیر موجود در ظرف A مساوی $\frac{۱۱}{۲۷}$ لیتر و مقدار آب موجود در ظرف B نیز برابر $\frac{۱۱}{۲۷}$ لیتر است.

○ پاسخ ۲ :

فروشنده برای به دست آوردن مخلوطهای دلخواه، ۶ مرحله طی کرده، و از بشکهٔ ۲۵ لیتری هم استفاده نکرده است. سه ظرف ۱۰۰ لیتری را A و B و C و ظرف ۵۰ لیتری را X می‌نامیم.

این شش عمل به شرح زیر است :

۱ـ از ظرف A داخل ظرف X می‌ریزیم تا پر شود.

۲ـ از ظرف B داخل ظرف A می‌ریزیم تا پر شود پس، $A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}$

۳ـ از ظرف C داخل ظرف B می‌ریزیم تا پر شود پس، $B=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}$

۴ـ از ظرف A داخل ظرف C می‌ریزیم تا پر شود پس، $C=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}$

۵ـ از ظرف B داخل ظرف A می‌ریزیم تا پر شود پس، $A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}$

۶ـ از ظرف X داخل ظرف B می‌ریزیم تا پر شود پس، $B=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}$

○ پاسخ ۳ :

ساختن مربع جادویی با این ۹ عدد غیرممکن است.

در واقع مجموع این ۹ عدد برابر ۷۸ است و چون مجموع عددهای نوشته شده در هر سطر و هر ستون باید برابر باشند، پس مجموع عددهای نوشته شده در هر سطر یا هر ستون باید ۲۶=۳ :۷۸ باشد. بنابراین در بعضی از سطرها و بعضی از ستونها باید سه عدد فرد نوشته شده باشد که مجموعشان ۲۶ باشد و این ممکن نیست (مجموع سه عدد فرد همیشه عددی فرد است نه زوج)

○ پاسخ ٤ :

جمعاً به ۱۸ بار پر کردن و جابه‌جایی ظرفها نیاز است. جدول زیر نحوهٔ عمل را نشان می‌دهد.

۱۹ لیتری	۱۳ لیتری	۷ لیتری
۰	۰	۷
۰	۱۳	۷
۷	۱۳	۰
۱۹	۱	۰
۱۲	۱	۷
۱۲	۸	۰
۵	۸	۷
۵	۱۳	۲
۱۸	۰	۲
۱۸	۲	۰
۱۱	۲	۷
۱۱	۹	۰
۴	۹	۷
۴	۱۳	۳
۱۷	۰	۳
۱۷	۳	۰
۱۰	۳	۷
۱۰	۱۰	۰

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

جدید

نابرابریها و نامعادله ها

مؤلف: میرشهرام صدر/ ناشر: انتشارات مدرسه

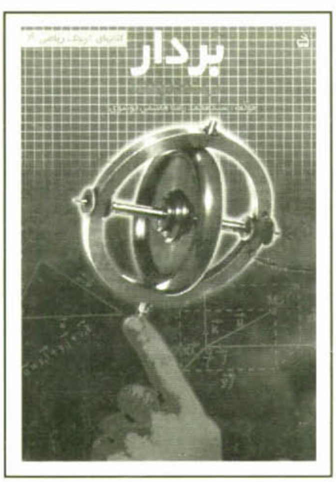


کتاب نابرابریها و نامعادله ها بیستمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. مباحثی که در این کتاب ملاحظه می کنید از اهمیت فراوانی در ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی برخوردار است. در فصل اوّل این کتاب به تعیین علامت انواع گوناگون عبارتهای جبری و در فصل دوم به مبحث نابرابریها پرداخته شده است. همچنین در این فصل مسائلی از المپیادهای ریاضی را درباره نابرابریها با تکنیکهایی چند اثبات کرده است، زیرا که تقریباً در همهٔ المپیادهای ریاضی مبحث نابرابریها مورد آزمون قرار می گیرد. در فصل سوم، انواع نامعادله ها را با مثالهایی چند تشریح و حل کرده است. همچنین در این فصل به مسائل کاربردی نامعادله ها در علوم و فنون مختلف پرداخته شده است. باید گفت که نامعادله ها در زمینهٔ اقتصاد، محاسبات فنی، روان شناسی، زمین شناسی، پزشکی، فیزیک، شیمی و غیره به کار می آید. در پایان کتاب مجموعه ای از پرسشهای چهارگزینه ای به همراه حل کلیدی آورده شده است. مطالعه این کتاب را به همهٔ دانش آموزان، دبیران و دانشجویان مراکز تربیت معلم و علاقه مندان به ریاضی توصیه می کنیم.

جدید

بردار در صفحه و فضا

مؤلف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی / ناشر: انتشارات مدرسه



این کتاب حاوی مطالبی از مفاهیم و تعریفهای مربوط به دستگاه مختصات در قالب یادآوری و شامل شرح و بسط مفاهیم هندسی، تحلیلی، ماتریسی و مختصاتی «بردار» در صفحه و فضا می باشد که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس، مسائل و تمرینهای دوره ای برای احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده، طرح شده است. در آخر تستهای کنکورهای سراسری مربوط به «بردار» رشته های علوم ریاضی و فنی و علوم تجربی و تستهایی برای پوشش دادن به مطالب، همراه با پاسخ تحلیلی و تشریحی آنها، آورده شده است تا آگاهیهای کافی و مهارت لازم را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم کند. در ضمن، قسمت عمده ای از مسائل که در این کتاب آمده، می تواند مورد استفادهٔ عموم دانش پژوهان قرار گیرد. در کتاب، به مسائل مشکلی هم برخورد خواهیم کرد که حل آن، تفکر و ابتکار بیشتری را طلب می کند.

توجه: از سری کتابهای کوچک ریاضی، کتابهای زیر در دست چاپ است:

۱ـ ورودی به نظریهٔ اعداد / حمیدرضا امیری ۲ـ تقارن در جبر و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری
۳ـ استقرای ریاضی / پرویز شهریاری ۴ـ آمار / دکتر عین‌ا... پاشا

سجزی

ابوسعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل سجزی

ریاضیدان و منجم مسلمان ایرانی (حدود ۴۱۵ - ۳۳۰ ه.ق)

از مردم سیستان و از مشاهیر ریاضیدانان و معاریف منجمان سدهٔ چهارم هجری و معاصر با ابوریحان بیرونی و عضدالدولهٔ دیلمی بوده و بسیاری از تألیفات خود را به نام عضدالدوله نوشته است. ظاهراً سجزی غالب اوقات عمر خود را در شیراز به سر برده و گاهی نیز در خراسان می زیسته است.

از آثار ریاضی سجزی پیداست که وی بخصوص در هندسه، بسیار زبردست بوده و تحقیقاتی دربارهٔ تقاطع قطوع مخروطی و مسائل دیگر ریاضی کرده است. بیرونی در کتاب *آثارالباقیة* او را «مهندس» نامیده است. سوتر نوشته است که وی یکی از مبرزترین هندسه دانان دورهٔ اسلامی است. تا زمان سجزی، ریاضیدانان مسألهٔ تثلیث زاویه را با روش هندسهٔ متحرک به وجهی تقریبی حل می کردند. سجزی به جای این روش، مسألهٔ مذکور را به وسیلهٔ تقاطع یک دایره و یک هذلولی متساوی القطرین حل کرد و آن را روش هندسهٔ ثابت نامید و این روش کاملاً هندسی است و بعداً مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفت. علاوه بر این سجزی چند رسالهٔ بدیع دیگر دربارهٔ *مخروطات* و *پرگار تام* نوشته است.

از سجزی در حدود ۴۵ کتاب و رساله می شناسیم که در حدود ۳۴ فقره از آنها مربوط به مطالب ریاضی و بقیه دربارهٔ نجوم و احکام نجوم و ابزار نجومی است و آثار نجومی وی بسیار مفصلتر از آثار ریاضی خالص اوست.

بیرونی در چند موضع، از آثار خود از سجزی نام برده و راه حلهایی از مسائل مختلف هندسی از او نقل کرده است. سجزی، بنا به نوشتهٔ بیرونی، در رصدی که توسط «عبدالرحمان صوفی» در شیراز صورت گرفت، حضور داشته است.

نظر سجزی دربارهٔ حرکت وضعی زمین: در بین ریاضیدانان و منجمان دورهٔ اسلامی نخستین کسی که عملاً عقیده به *حرکت وضعی کرهٔ زمین* را به کار بست، *ابوسعید سجزی بود.*

چند مسألهٔ معروف از سجزی را که در یکی از رساله های وی طرح و حل شده است، یادآور می شویم:

۱. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری رسم کنید که در نقطهٔ مذکور به نسبت معلوم تقسیم شود.

۲. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری رسم کنید که مجموع مربعات دو قطعهٔ آن مساوی با سطح معینی شود.

۳. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری به طول معین رسم کنید.

۴. از نقطه ای مفروض در داخل دایره ای معلوم، وتری رسم کنید که نسبت مربعات دو قطعهٔ آن مساوی با نسبت معینی شود.

۵. از نقطه ای مفروض در خارج دایره ای معلوم، قاطعی رسم کنید که نسبت قطعهٔ خارجی آن به قطعهٔ داخلی مساوی با نسبت معینی شود.

۶. از نقطه ای مفروض در خارج دایره ای معلوم، قاطعی رسم کنید که مجموع مربعات آن قاطع و قسمت خارجی آن مساوی با سطح معینی شود.

سال ۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات

کد ۷۸۸/۱